附錄 C　旋轉懸臂梁之等效系統

如圖九十所示為一無阻尼之旋轉懸臂梁，其固定端受如下(即(4.2)式)之等角加速度作用：

$$\phi_o(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}a_1t^2 & t\le t_1\\ \phi_1+\omega_1 t & t>t_1\end{cases} \tag{C.1}$$

其中$a_1=\dfrac{\omega_1}{t_1}$，$\phi_1=\dfrac{1}{2}a_1t_1^2$，當$t_1=0$時，(C.1)式退化成$\phi_0=\omega_1 t$。$\phi_o$以逆時鐘為正。

若假設其側向變形$v(x,t)$可表示成：

$$v(x,t)=z(t)N(x)\quad，\quad N(x)=\frac{-x^3+3Lx^2}{2L^3} \tag{C.2}$$

其中$z(t)$為懸臂梁自由端的側向變形，$N(x)$為懸臂梁受端點側向負荷，端點側向位移為 1 時的變形曲線，則此旋轉懸臂梁可以用圖九十一之單一自由度的等效彈簧-質量系統來取代。旋轉懸臂梁之端點驅動位移(C.1)式的等效位移可由如圖九十一所示之已知的基礎運動$y(t)$表示：

$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}a_0t^2 & t\le t_1\\ y_1+v_1 t & t>t_1\end{cases} \tag{C.3}$$

其中基礎加速度a_0為一常數，$y_1=\dfrac{1}{2}a_0t^2$，$v_1=a_0t_1$，當$t_1=0$時，(C.3)式退化成$y(t)=v_1t$，$z(t)=x(t)-y(t)$為彈簧的變形，亦即(C.2)式中之$z(t)$。該等效系統的彈簧常數 k、質量 m 及基礎加速度a_0皆可由虛功原理決定，並可表示如下：

$$k=EI\int_0^L N''dx=\frac{3EI}{L^3} \tag{C.4}$$

其中 EI 為懸臂梁的撓屈剛度，L 為其長度，$N'' = d^2N/dx^2$ 。

$$m = \rho A\int_0^L N^2 dx = \frac{33}{140}\rho AL \tag{C.5}$$

其中 ρ、A 分別為懸臂梁的密度及斷面積。

$$a_0 = \frac{\rho A a_1 \int_0^L xN dx}{m} = \frac{11L^2 \rho A a_1}{40m} = \frac{7}{6}a_1 L \tag{C.6}$$

將(C.6)式及 $a_1 = \dfrac{\omega_1}{t_1}$ 代入 $v_1 = a_0 t_1$ 中可得 $v_1 = \dfrac{7}{6}\omega_1 L$ 。

圖九十一之等效系統的運動方程式及初始條件可表示成：

$$\ddot{z} + \omega_f^2 = \text{-}a_0 \tag{C.7}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_f} \tag{C.8}$$

$$z(0) = x(0) - y(0) = x_0 \tag{C.9}$$

$$\dot{z}(0) = \dot{x}(0) - \dot{y}(0) = 0 \tag{C.10}$$

其中 ω_f 為自然振動頻率，T 為週期。

(C.7)式之運動方程式的解析解可表示成：

$$\begin{aligned} z_1(t) &= (x_0 + \frac{a_0}{\omega_f^2})\cos(\omega_f t) - \frac{a_0}{\omega_f^2} \\ &= (x_0 + \frac{v_1}{t_1\omega_f^2})\cos(\omega_f t) - \frac{v_1}{t_1\omega_f^2} \quad , \quad 0 \le t \le t_1 \end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \text{-}(x_0\omega_f + \frac{a_0}{\omega_f})\sin(\omega_f t) \\ &= \text{-}(x_0\omega_f + \frac{v_1}{t_1\omega_f})\sin(\omega_f t) \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned} z_2(\bar{t}) &= c_1\cos(\omega_f \bar{t}) + c_2\sin(\omega_f \bar{t}) \\ &= c\sin(\omega_f \bar{t} + \varphi_1) \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{t} = t - t_1 &&, \quad t > t_1 \\
&c_1 = z_1(t_1) &&, \quad c_2 = \dot{z}_1(t_1)/\omega_f \\
&c = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} &&, \quad \tan(\varphi_1) = \frac{c_1}{c_2}
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

當$t_1 \geq T$時，由(C.11)式可知$z_1(t)$的第一個振幅δ_{amp}可表示成：

$$
\delta_{amp} = \left| z_1(\frac{T}{2}) - z_1(0) \right| = 2\left| x_0 + \frac{v_1}{t_1\omega_f^2} \right| \tag{C.15}
$$

當$t > t_1$時，等效系統之動態反應$z_2(\bar{t})$取決於(C.14)中的振幅c，且振幅由在t_1時的位移$z_1(t_1)$及速度$\dot{z}_1(t_1)$決定。當加速時間為週期的整數倍時($t_1 = nT$)，由(C.12)知其速度$\dot{z}_1(t_1) = 0$，位移$z_1(t_1)$及振幅c分別為：

$$
\begin{aligned}
&z_1(t_1) = (x_0 + \frac{a_0}{\omega_f^2}) - \frac{a_0}{\omega_f^2} = x_0 \\
&c = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} = |x_0|
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

當加速時間為半週期的奇數倍時($t_1 = (2n-1)T/2$)，由(C.12)式知其速度$\dot{z}_1(t_1) = 0$，位移$z_1(t_1)$及振幅c分別為：

$$
\begin{aligned}
&z_1(t_1) = (x_0 + \frac{a_0}{\omega_f^2})(-1) - \frac{a_0}{\omega_f^2} = -x_0 - 2\frac{v_1}{t_1\omega_f^2} \\
&c = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} = \left| -x_0 - 2\frac{v_1}{t_1\omega_f^2} \right|
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

由等效系統之解析解可知加速時間t_1對振動有很大的影響，其系統的振型多取決於振幅的大小。當加速時間小於半週期時，其振幅的大小則取決於第二段之位移函數$z_2(\bar{t})$且不同加速時間之位移最大值出現於不同的時間，當加速時間大於半週期時，其振幅的大小則取決於第一段位移函數$z_1(t)$且不同加速時間之位移最大值皆發生在半週期。