第三章 數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式的數值計算方法是基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法配合 Newmark 直接積分法[23]的增量迭代法 。

本文中將系統的運動方程式建立在當前的導槽座標上，故在每一時間增量開始時，須先將上一時間增量之節點速度、加速度，斷面座標的收斂值，轉換到當前的導槽座標上。本文由 Newmark 直接積分法求得之導槽內節點的軸向加速度為相對加速度，故需用(2.4.64)式計算其絕對加速度。

3.1 Newmark 直接積分法

Newmark 直接積分法乃假設在時間t_n時，滿足動平衡方程式(2.9.1)的平衡位置、速度$\dot{\mathbf{U}}_n$和加速度$\ddot{\mathbf{U}}_n$(為在$t_{n+1}=t_n+\Delta t$時刻之導槽座標上的分量)為已知，則在$t_{n+1}=t_n+\Delta t$時刻之平衡位置、速度$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$和加速度$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$可由下述迭代過程得到。

1. 令在t_{n+1}時刻的初始增量位移猜測值$\Delta\mathbf{U}=\mathbf{0}$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0=\frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{U}-\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_n-(\frac{1}{2\beta}-1)\ddot{\mathbf{U}}_n \tag{3.1}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0=\dot{\mathbf{U}}_n+\Delta t[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n+\gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}] \tag{3.2}$$

其中$\beta=\frac{1}{4}$、$\gamma=\frac{1}{2}$

2. 令$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}=\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$，$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}=\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$
3. 由$\Delta\mathbf{U}$(或$\delta\mathbf{U}$)及上次迭代後的變形位置得到此迭代的變形位置，再算出系統的節點變形力$\mathbf{F}_{n+1}^D$。由$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$、$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$及最近的變形位置算出系統的節點慣性力$\mathbf{F}_{n+1}^I$及阻尼力$\mathbf{F}_{n+1}^V$。由在t_{n+1}時刻的外力$\mathbf{P}_{n+1}$、$\mathbf{F}_{n+1}^D$、$\mathbf{F}_{n+1}^I$、$\mathbf{F}_{n+1}^V$及系統平衡方程式(2.9.1)算出系統不平衡力

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{I} + \mathbf{F}_{n+1}^{D} + \mathbf{F}_{n+1}^{V} - \mathbf{P}_{n+1} \tag{3.3}$$

4. 檢查$\|\boldsymbol{\Psi}_{n+1}\|$是否滿足收斂準則，若滿足則迭代停止。

5. 若不滿足，則由

$$\delta\mathbf{U} = -[\hat{\mathbf{K}}]^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{n+1} \tag{3.4}$$

得一增量位移修正量$\delta\mathbf{U}$，其中

$$[\hat{\mathbf{K}}] = \frac{1}{\beta\Delta t^2}[\mathbf{M}] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}] \tag{3.5}$$

為系統有效剛度矩陣(effective stiffness matrix)，$[\mathbf{M}]$、$[\mathbf{K}]$表系統之質量與剛度矩陣。$[\mathbf{C}]$為阻尼矩陣，本文中採用

$$[\mathbf{C}] = a_1[\mathbf{M}] + a_2[\mathbf{K}] \tag{3.6}$$

其中a_1、a_2為常數，其值由附錄 A 決定。

6. 令

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{0} = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\delta\mathbf{U} \tag{3.7}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{0} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\delta\mathbf{U} \tag{3.8}$$

7. 回到 2.

若上述迭代程序經過一預先設定的迭代次數還不收斂時，則將時間增量Δt減半，令$t_{n+1} = t_n + \dfrac{\Delta t}{2}$，然後再重複上述迭代程序。但在下一時刻，則將時間增量改為$\Delta t + \dfrac{\Delta t}{2}$。

3.2 普通梁元素及轉接梁元素之判別

本文中在分析滑動梁時採用兩種梁元素，分別定義為普通梁元素及轉接梁元素。因為導槽外的滑動梁會隨時間的改變而伸長或縮短，故元素也會隨著梁的滑動而改變其定義。以下為在數值分析時所判別的方法：

令導槽端點 C(圖一)在導槽座標系統的原點，$X_{ij}^B (i = 1, 2\ ,\ j = 1, 2\ )$為元素之節點$j$在導槽座標系統之$X_i^B$軸當前的座標值，$L$為元素的長度，取一$\varepsilon_{TR} < 10^{-4}$

令

$$W_1 = X_{11}^B + L\varepsilon_{TR}$$

$$W_1 = X_{12}^B + L\varepsilon_{TR}$$

若(1) $W_1 > 0$且$W_2 > 0$，則該元素為在導槽外的普通梁元素。

(2) $W_1 < 0$且$W_2 > 0$，則該元素為轉接梁元素，令$X_{12}^B = 0$。

(3) $W_1 < 0$ 且 $W_2 < 0$，則該元素為在導槽內的普通梁元素，令$X_{21}^B = X_{22}^B = 0$。