

第四章 數值例題

本文中將探討不同變斷面梁在軸向負荷下的扭轉挫屈負荷及挫屈後的行為，還有變斷面梁在軸力及扭矩同時作用下的非線性行為。

本文例題中僅考慮如圖一及圖七中所示之變斷面梁，依梁翼寬度在軸向的變化，本章中將變斷面梁分成A、B、C、D、E、F六種類型，其中A及F為等斷面梁、B及E為線性變化之變斷面梁、C及D為拋物線變化之變斷面梁，圖一及圖七中 W_{\max} 、 W_{\min} 為梁翼板之最大、最小寬度， d 為兩翼板之距離， t 為各板之厚度， L 為梁的長度。

本章中的例題考慮了如圖八所示之簡支梁、固端梁以及懸臂梁。簡支梁的位移邊界條件為鉸接端的斷面形心無軸向位移且滾子端允許軸向位移，兩端的扭轉角 $\phi=0$ ；固端梁的位移邊界條件為一端斷面無軸向位移，另一端整個斷面受均勻之軸向位移負載且兩端扭轉角 ϕ 及扭轉率 $\phi_{,x}$ 皆為0；懸臂梁之固定端的邊界條件與固端梁之固定端相同且另一端為自由端。

圖九為本章例題中梁的負載種類，其中(a)表示固端梁一端承受均勻軸向位移負載，本章的表中將以DU表示此種負載(D代表位移、U代表均勻分佈)，本章中將梁端所受之反作用力的總和視為位移負載的等效力負載；(b)為懸臂梁的自由端與簡支梁兩端的力負載，其中PU表示均佈力負載，PI(I=1-4)及P4A表示將外力分成I個相等的集中載重，並作用在圖示的位置，P4A是將4個相等的集中載重分別作用在該斷面上距梁翼端1/4梁翼寬之處。本章中所有例題之楊氏模數 $E=21000.0\text{kN/cm}^2$ 、剪力模數 $G=8076.92\text{kN/cm}^2$ ，簡支梁與固端梁的長

度為400cm，懸臂梁的長度為200cm， $d = 20\text{cm}$ ， $t = 1\text{cm}$ ，除了另有聲明外，本章中取 $W_{\max} = 40\text{cm}$ ， $W_{\min} = 20\text{cm}$ ，並稱其為標準尺寸。

4.1 收斂性及準確性分析

為了解本文中提出之元素的收斂性及準確性，本節中用不同的元素網格分析了圖一、圖七中的變斷面梁在不同邊界條件及負載下的扭轉挫屈負載，並將結果與文獻上的結果比較。本節中考慮了固端梁受均勻軸向位移負載及簡支梁兩端受軸力負載，表一為不同變斷面梁使用不同網格時之扭轉挫屈負荷 P_{cr} ，表中 n 代表變斷面梁沿軸向均勻分割的層數(圖三中斜線部份即為一層)， m 代表每層的元數個數，圖三中“·”為 $m = 6$ 及 $m = 12$ 時，任一分割斷面上元素的節點位置。由表一中可以發現 $m/n = 6/40$ 的結果和 $m/n = 12/40$ 的結果之相對誤差的最大值為0.7566%，平均的相對誤差值為0.4323%，皆在可接受的範圍，為了節省運算量，故本文中以後的例題除另有聲明外將一律使用 $m/n = 6/40$ 的網格來分析。

表二至表三為本論文的結果與文獻上變斷面簡支梁之扭轉挫屈負荷的比較，表二中 $W_{\max} = 40\text{cm}$ ， $W_{\min} = 20\text{cm}$ 即本文所稱標準尺寸之變斷面梁，表三中所有梁之 $W_{\max} = 20\text{cm}$ ， $W_{\min} = 10\text{cm}$ 。文獻[15,20]中的變斷面梁皆假設梁的斷面不會變形且梁斷面上的軸向應力為均佈應力，故其P1力負載與本文及文獻[30,35]中的PU負載是等效的。還有表二中文獻[25]及[39]的結果似乎應為負載PU的結果。由表二中可以發現本文中PU的結果與文獻[15,20]中的結果相當接近。由表二及表三可以發現除了標準尺寸之變斷面梁C與F外，本文的結果與文獻[30,35]用殼元素分析的結果非常接近。為了方便以後的說明，本文中令 P_{cr}^i ($i = A - F$)代表變斷面梁 i 的挫屈負荷。文獻[30]中提到表二中

對應於其 P_{cr}^C 及 P_{cr}^F 的挫屈模態為梁的整體挫屈及梁翼的局部挫屈造成的複合挫屈，而對應於其 P_{cr}^A 及 P_{cr}^D 的挫屈模態為梁的整體挫屈造成的。因本文中假設梁的斷面不會變形，所以對應於本文的 P_{cr}^i 的挫屈模態皆為梁的整體挫屈；本文中斷面上各節點的軸向位移與文獻[30]一樣，都是獨立變數，但文獻[15,20]中斷面的軸向位移為均勻軸向位移加上扭轉率造成的翹曲位移，這應可說明為何表二中本文之 P_{cr}^A 及 P_{cr}^D 與文獻[30]的結果相當吻合，且 P_{cr}^C 及 P_{cr}^F 與文獻[30]的結果有很大的差異而與文獻[15]、[20]及[25]的結果較為接近。文獻[15]及[20]都是將等斷面薄壁梁的變形假設用在變斷面梁上，故其 P_{cr}^C 及 P_{cr}^D 與本文的結果相當接近但仍有些差異。文獻[25]與本文都是採用文獻[1]之退化元素的概念，但文獻[25]中之元素的幾何剛度並非由非線性理論之一致線性化求得，故其 P_{cr}^C 及 P_{cr}^D 與本文的結果還是有相當的差異。表二中本文的結果與文獻[15,20,30,39]的結果都顯示變斷面梁之扭轉挫屈負荷的Cywinski詭論應該是存在的，本文中曾將元素切線剛度((2.25)-(2.60)式)中與剪應力有關的幾何剛度去掉，發現其對變斷面梁的扭轉挫屈負荷幾乎沒有影響，故文獻[25]中稱忽略面內剪應力是造成扭轉挫屈負荷之詭論現象的原因，應是不正確的，本文在4.3節將對變斷面梁的詭論現象做更進一步的探討。

4.2 應力分析

文獻[15,20,21,29]中在分析變斷面梁受軸力作用時，都假設其斷面上的應力為均佈軸向應力，且沒有剪應力，但這種假設不能滿足梁側面為自由表面的邊界條件，本節中擬探討不同變斷面梁在不同斷面上的應力分佈。由於對稱的關係，本文中僅考慮圖十中AB及BC部

份的應力。圖十中 τ_{xs}^{AB} 及 τ_{xs}^{BC} 為AB及BC部份沿梁壁切線方向的剪應力，箭頭方向為正剪應力的方向，1-5(圖中"x"之位置)為高斯積分點。

表四至表九為各種斷面簡支梁受均佈力負載下不同斷面上高斯積分點之正應力與剪應力，表十至表十五為各種斷面固端梁受位移負載(P為梁端所受之反作用力的總和)下不同斷面上高斯積分點之正應力與剪應力。表四至表九中X為各個斷面與外力作用斷面之距離，

$$\sigma_{avg} = \frac{P}{A(1 + \varepsilon_0)}, \varepsilon_0 = \frac{-P}{AE}$$

十及十五可以發現在X較大處 σ_{xx}^{AB} , σ_{xx}^{BC} 都有相同的值且與 σ_{avg} 幾乎相同，且 τ_{xs}^{AB} , τ_{xs}^{BC} 都非常的小，表四,九,十及十五之梁為等斷面梁，等斷面梁受均佈力時，其正應力是均勻的且剪應力為零，因有限元素法分析無法模擬真正的分佈力，故在X較小處正應力並非均勻分佈且剪應力不為零，由聖唯南原理(Saint Venant Principle)知本文的結果應是合理的。由表五至八與表十一至十四可發現變斷面梁斷面上的正應力雖然不是均勻分佈，但很接近均勻分佈，而斷面上之剪應力在X較大時亦不會趨近於零，這與預期的結果一致。

4.3 詭論的探討

本中所稱的詭論為當I型梁之兩翼板材料減少時，其扭轉挫屈負荷卻變大或當梁之兩翼板材料增加時，其扭轉挫屈負荷卻變小。由表一及表二可發現標準尺寸之變斷面梁受均佈外力PU及集中力P1時，變斷面梁D比A的扭轉挫屈負荷小，變斷面梁C比F的扭轉挫屈負荷大，即有詭論現象，但由表三可發現，對 $W_{max} = 20cm$, $W_{min} = 10cm$ 的變斷面梁不論外力為均佈力PU或是集中力P1、P2，上述的詭論現

象卻沒有發生，由此可見詭論現象的發生與否跟變斷面的尺寸、變斷面的型態及負載的種類都有關，故本章中將分析具不同 W_{\max} 及 W_{\min} 的變斷面梁受PU、P1、P4、P4A及DU負載的扭轉挫屈負荷，並分析不同變斷面梁在不同負荷下的扭轉挫屈負荷，以探討變斷面梁的詭論現象。表十六至表十九為不同變斷面梁的挫屈負荷，表十六中分析的懸臂梁與表十七分析之簡支梁等效，故其對應之扭轉挫屈負荷應相同，表十六與表十七中微小的誤差應是數值計算造成的。

本節挫屈負荷的比較可分為兩類，第一類為比較具有相同 W_{\max} 與 W_{\min} 的變斷面梁之 P_{cr} ，即表十六至表十九中同一列之 P_{cr} 相比，若變斷面梁B或C的 P_{cr} 大於F的 P_{cr} ，或變斷面梁D或E的 P_{cr} 小於A的 P_{cr} 則稱為有詭論現象，並以**粗體字**表示；第二類為具相同變斷面類型且有相同 W_{\min} (變斷面類型D、E) 或者有相同 W_{\max} (變斷面類型B、C) 的比較，即表十六至表十八中之同一行相比，若D(E)行中 W_{\min} 相同者中， W_{\max} 較大之 P_{cr} 比 W_{\max} 較小之 P_{cr} 小，或B(C)行中 W_{\max} 相同者中 W_{\min} 較小之 P_{cr} 比 W_{\min} 較大之 P_{cr} 大，則稱為有詭論現象，並以底線表示。

由表十六及表十七的結果中可以觀查到
在第一類的比較，即 W_{\min} 及 W_{\max} 固定時：

1. 當 W_{\min} 越大時越容易出現詭論現象
2. 當 W_{\max} 與 W_{\min} 相差越大時越容易出現詭論現象

在第二類比較時：

1. 當C型變斷面的 W_{\max} 固定時， W_{\min} 和 W_{\max} 相差越小越容易出現詭論現象。
2. 當D或E型變斷面的 W_{\min} 固定時， W_{\max} 和 W_{\min} 相差越大越容易出現詭論現象。

表十八為固端梁受均勻軸向位移負載的挫屈負荷，表中之 P_{cr} 為固定端反力的總合。由於本文例題中所用的變斷面梁對梁中點在軸向上為對稱且兩端邊界條件皆為固定，因此在梁中點斷面之軸向位移為均勻位移，且扭轉角與扭轉率都為零，所以與固定端等效，故B與E兩種有相同的挫屈負荷。比較表十六及表十八的結果可以發現固端梁較簡支梁有較大的扭轉挫屈負荷。由表十八中可見 $W_{max} = 50cm, W_{min} = 55cm$ 時， $P_{cr}^C < P_{cr}^B < P_{cr}^D$ 即有詭論現象，但差異不大，除了這一系列外皆無詭論現象，由此可見固定端除了可以增加扭轉挫屈負荷外，還可阻止詭論現象的發生。

為了說明上的方便，令 P_{cr}^{PX} ($X = U, 1, 2, 3, 4, 4A$)表示在PX負荷下的扭轉挫屈負荷。由表一可以發現對同一變斷面梁 $P_{cr}^{P1} > P_{cr}^{P3} > P_{cr}^{P2} > P_{cr}^{PU} > P_{cr}^{P4}$ ，可見負載的種類對變斷面梁或等斷面梁的扭轉挫屈負荷有相當的影響，由表一亦可以發現在P4作用下 $P_{cr}^C > P_{cr}^F, P_{cr}^A > P_{cr}^D$ ，但這種比較並非公平的比較，因負載的位置不一樣，如前所述負載的位置會影響梁的扭轉挫屈負荷，所以在P4作用下的 P_{cr}^A, P_{cr}^B 及 P_{cr}^C 應與P4A作用下之 P_{cr}^D, P_{cr}^E 及 P_{cr}^F 比較。因表一中僅有標準尺寸之變斷面梁的挫屈負荷，且沒有負載P4A的結果，故本節中分析了不同尺寸之變斷面梁在不同負載下的扭轉挫屈負荷。

在表十九中列出了5組不同 W_{min} 與 W_{max} 之變斷面簡支梁在P1、PU、P4及P4A等4種不同之外力負載下的扭轉挫屈負荷，並如同本節前段所述將出現第一類之詭論現象者以**粗體字**表示。表十九中所有變斷梁面的元素分割為使用 $m/n = 12/40$ (圖三)，由表十九中可以發現，對同一變斷面梁 $P_{cr}^{P4} < P_{cr}^{PU} < P_{cr}^{P1}$ ；對變斷面梁D、E及F， $P_{cr}^{P4} < P_{cr}^{P4A} < P_{cr}^{PU}$ 。如前所述，比較 $W_{max} = 30cm, W_{min} = 15cm$ 、

$W_{\max} = 40\text{cm}$, $W_{\min} = 20\text{cm}$ 之變斷面梁A與D的扭轉挫屈負荷及C與F的扭轉挫屈負荷時，應比較變斷面梁A(C)之 P_{cr}^{P4} 與變斷面梁D(F)之 P_{cr}^{P4A} 。在此種比較下可以發現 $W_{\max} = 30\text{cm}$, $W_{\min} = 15\text{cm}$ 之變斷面梁的詭論現象不存在，但對 $W_{\max} = 40\text{cm}$, $W_{\min} = 20\text{cm}$ 之變斷面梁的詭論現象依然存在。

由表十九的結果似乎可以歸納出以下結論：當外力負載越向斷面形心集中，則梁有較大之扭轉挫屈負荷，且較不易有詭論的現象發生；反之，當外力負載越向四周分散，則梁有較小之扭轉挫屈負荷，且較容易有詭論的現象發生。

4.4 幾何非線性分析

本節中擬探討變斷面梁在軸力作用下，扭轉挫屈後的行為及變斷面梁同時受軸力及扭矩的幾何非線性行為，本節中分析的梁皆為標準尺寸。如圖十一(a)所示之簡支變斷面梁受均佈軸力P作用，圖中C為梁的中點，圖十二至十七為各種變斷面梁之載重P—扭轉角 ϕ_C 的曲線圖，由圖中可以發現各種變斷梁挫屈後的次要平衡路徑都是穩定的。如圖十一(b)所示為一懸臂變斷面梁自由端B受一均佈軸力P及扭矩T作用，圖十八至二十三為各種變斷面懸臂梁在固定軸力下之扭矩T—扭轉角 ϕ_B 的曲線圖。圖十一(c)所示為一簡支變斷面梁兩端受一均佈軸力P，中點C受一扭矩T作用，圖二十四至二十九為各種變斷面簡支梁在固定軸力下之扭矩T—扭轉角 ϕ_C 的曲線圖。由圖十八至圖二十九中可以發現隨著 P/P_{cr} 的增加，梁的扭轉剛度逐漸減小，還有T和 ϕ_B (ϕ_C)並非直線關係，但當 P/P_{cr} 較小且扭轉角不是很大時，T— ϕ_B (ϕ_C) 曲線接近一直線。