附錄 D　等效節點外力推導

令u_{IJ}為元素在均佈載重作用面的位移，因在I,J=1，2 及 3，4 的斷面上元素的無因次座標ξ分別為-1和 1，故由(2.20)式及(B.3)式可知當$\xi=\pm1$時，元素的位移場可表示成

$$u_{IJ}(y,z)=u_A(y)+zu_B(y) \tag{D.1)(2.18}$$

因本文中除集中載重與位移負載外，僅考慮均佈載重，且y軸為元素斷面之對稱軸，所以對應於位移$zu_B(y)$的虛功為 0，可以不考慮，故將其從(D.1)式去掉，利用(B.4)式可將斷面的位移改寫成

$$u_{IJ}(y)=\mathbf{N}_{IJ}^t\mathbf{q}_{IJ} \tag{D.2}$$

$$\mathbf{N}_{IJ}=\{N_1,N_2,N_3,N_4\} \tag{D.3}$$

$$\mathbf{q}_{IJ}=\{u_I,u_{,yI},u_J,u_{,yJ}\} \tag{D.4)(2.68}$$

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\eta)^2(2+\eta) \quad , \quad N_2=\frac{L_{IJ}}{8}(1-\eta^2)(1-\eta)$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\eta)^2(2-\eta) \quad , \quad N_4=\frac{L_{IJ}}{8}(-1+\eta^2)(1+\eta) \tag{D.5}$$

其中$\eta=-1+\dfrac{2y}{L_{IJ}},(-1\le\eta\le1)$，$L_{IJ}$為節點$I$ J間的距離，$\mathbf{N}_{IJ}$為形狀函數向量，$\mathbf{q}_{IJ}$為節點位移向量。

由虛功原理可得：

$$\int_A p\delta u_{IJ}\,dA = \delta\mathbf{q}_{IJ}^t\mathbf{F}_{IJ} \tag{D.6)(2.67}$$

$$\mathbf{F}_{IJ} = \{F_I\,,M_I\,,F_J\,,M_J\} \tag{D.7)(2.69}$$

其中 p 為均佈載重，A 為載重作用面的面積，δu_{IJ} 為(D.2)式中 u_{IJ} 的變分，$\delta\mathbf{q}_{IJ}$ 為(D.4)的變分，$\mathbf{F}_{IJ}$ 為對應於 $\delta\mathbf{q}_{IJ}$ 的等效節點外力向量，將 $dA = tdy$ (D.2)、(D.4)帶入(D.6)式可得

$$\mathbf{F}_{IJ} = pt\int_0^{L_{IJ}}\mathbf{N}_{IJ}\,dy \tag{D.8}$$

其中 t 為薄壁梁的厚度。

將(D.5)式帶入(D.8)式對 y 積分可得

$$\mathbf{F}_{IJ} = \{F_I \quad M_I \quad F_J \quad M_J\} = pt\left\{\frac{L_{IJ}}{2} \quad \frac{L_{IJ}^2}{12} \quad \frac{L_{IJ}}{2} \quad -\frac{L_{IJ}^2}{12}\right\} \tag{D.9)(2.70}$$

若將變斷面梁的一層離散成 6 個元素，則在均佈載重作用的斷面上有如圖 D-1 所示的 7 個節點，將(D.9)式中每個元素的節點力轉換到總體座標 X_i^G 後疊加可求得斷面在均佈載重下之等效節點力 $\mathbf{F}_S^6$ 如下：

$$\mathbf{F}_S^6=\begin{Bmatrix}\mathbf{F}_1^t\\ \mathbf{F}_2^t\\ \mathbf{F}_3^t\\ \mathbf{F}_4^t\\ \mathbf{F}_5^t\\ \mathbf{F}_6^t\\ \mathbf{F}_7^t\end{Bmatrix}=pt\begin{Bmatrix}\frac{w}{4} & \frac{w^2}{48} & 0\\ \frac{w}{2}+\frac{d}{4} & 0 & -\frac{d^2}{48}\\ \frac{w}{4} & -\frac{w^2}{48} & 0\\ \frac{w}{4} & \frac{w^2}{48} & 0\\ \frac{w}{2}+\frac{d}{4} & 0 & -\frac{d^2}{48}\\ \frac{w}{4} & -\frac{w^2}{48} & 0\\ \frac{d}{2} & 0 & 0\end{Bmatrix} \tag{D.10}$$

$$\mathbf{F}_i=\{F^i \quad M_3^i \quad M_2^i\} \tag{D.11}$$

其中 $i(i=1\sim 7)$ 為斷面節點編號，節點 7 位於梁腹的中點；w 為兩側翼板寬度，d 為梁腹板寬度，t 為板厚。F^i 為節點 i 上 X_1^G 方向的力，M_2^i、M_3^i 為 X_2^G 與 X_3^G 方向的彎矩。

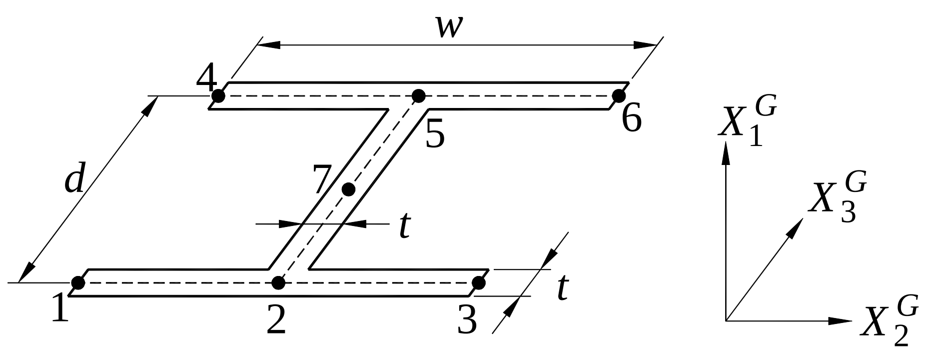

圖 D-1

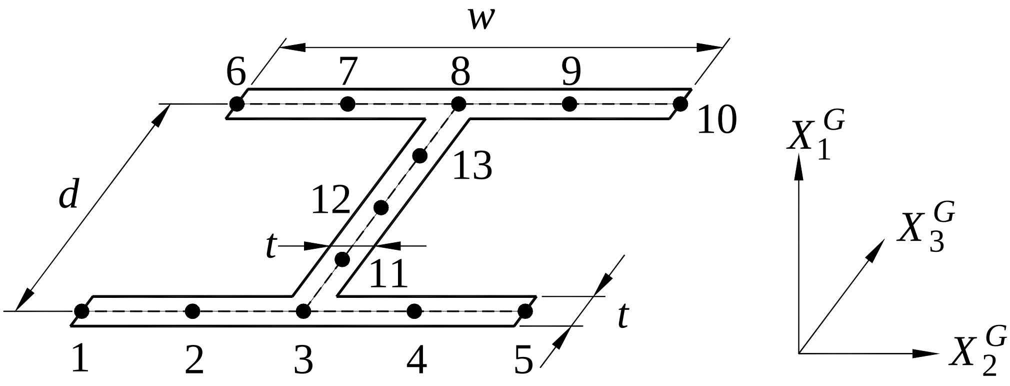

圖 D-2

若將變斷面梁的一層離散成 12 個元素，則在均佈載重作用的斷面上有如圖 D-2 所示的 13 個節點，其中節點 1~5 與 6~10 等分兩側翼板寬度 w；節點 3,11,12,13,8 等分梁腹板寬度 d，則斷面在均佈載重下之等效節點力 $\mathbf{F}_S^{12}$ 可表示如下：

$$\mathbf{F}_S^{12} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^t \\ \mathbf{F}_2^t \\ \mathbf{F}_3^t \\ \mathbf{F}_4^t \\ \mathbf{F}_5^t \\ \mathbf{F}_6^t \\ \mathbf{F}_7^t \\ \mathbf{F}_8^t \\ \mathbf{F}_9^t \\ \mathbf{F}_{10}^t \\ \mathbf{F}_{11}^t \\ \mathbf{F}_{12}^t \\ \mathbf{F}_{13}^t \end{Bmatrix} = pt \begin{Bmatrix} \frac{w}{8} & \frac{w^2}{192} & 0 \\ \frac{w}{4} & 0 & 0 \\ \frac{w}{4} + \frac{d}{8} & 0 & -\frac{d^2}{192} \\ \frac{w}{4} & 0 & 0 \\ \frac{w}{8} & -\frac{w^2}{192} & 0 \\ \frac{w}{8} & \frac{w^2}{192} & 0 \\ \frac{w}{4} & 0 & 0 \\ \frac{w}{4} + \frac{d}{8} & 0 & \frac{d^2}{192} \\ \frac{w}{4} & 0 & 0 \\ \frac{w}{8} & -\frac{w^2}{192} & 0 \\ \frac{d}{4} & 0 & 0 \\ \frac{d}{4} & 0 & 0 \\ \frac{d}{4} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{D.12}$$