第二章 理論推導

2.1 問題的描述

考慮如圖二所示之變斷面雙軸對稱 I 型薄壁梁，其斷面沿著軸向緩慢變化，梁的軸向與 X_1^G 方向平行且橫斷面在 $X_2^G - X_3^G$ 平面上。本文中僅考慮均勻厚度的 I 型薄壁梁，文中稱梁斷面在梁壁厚度方向之中點的連線為輪廓線(Contour)。本文中僅考慮梁的軸向位移及扭轉造成的側向位移。本文中將探討各種邊界條件的變斷面梁受軸向集中力、均佈載重的扭轉挫屈負荷及挫屈後的行為，以及在軸力及扭矩同時作用下的扭轉變形。

2.2 基本假設

本文中對於變斷面 I 型梁之有限元素的推導，作如下之假設

(1) 梁的形心軸變形後仍為直線。

(2) 梁斷面為漸變(slow varying)雙對稱 I 型斷面。

(3) 梁變形後，其斷面形狀不變，且斷面平面內的應變可以忽略。

(4) 元素的變形為小變形。

由假設(1)及(3)可知梁斷面的側向位移可由該斷面繞形心軸的轉角來決定。

2.3 座標系統

本研究使用共旋轉有限元素法，如圖三中先將梁沿其軸方向水平分割成若干層(Layer)，圖三中斜線部份即代表一個層，再將每一層元素分割成若干元素，本文中提出的元素有 6 個節點與 20 個自由度(圖四)且所有的節點均取在輪廓線上，其中節點 1 到節點 4 稱為元素節

點，每個元素節點有 4 個自由度，即軸向位移及其在軸向、輪廓線之切線方向及法線方向的變化率；節點 5、6 稱為斷面節點，斷面節點位於該斷面的形心上，是用來描述斷面繞形心軸的旋轉，每個斷面節點有兩個自由度，即斷面繞形心軸的扭轉角及扭轉率。為了描述梁元素及整個系統的變形，本文中定義了以下兩個座標系統：

(1)固定總體座標系統(Global coordinate system)：X_1^G, X_2^G, X_3^G(圖二)

結構所有節點的座標、位移、其他座標系統之基底及系統的平衡方程式，均在此座標系統上定義；其中 X_1^G 軸與梁的形心軸平行。

(2)元素座標系統(element coordinate system)：x_1, x_2, x_3(圖四)

此座標系統是建立在每一元素當前的變形位置上，其決定方式將在本節中說明，圖四所示的元素座標為元素變形前之元素座標，其原點與元素節點 1 重合，且 x_1 軸與 X_1^G 平行；x_2 軸為通過元素 1 及節點 2 的方向，元素的變形、節點內力及剛度矩陣都在此座標中定義及推導。

令 ϕ_5、ϕ_6 為節點 5、6 當前的扭轉角，則元素的剛體轉角可定義為

$$\phi_R = \frac{\phi_5 + \phi_6}{2} \tag{2.1}$$

將變形前之元素座標(見圖五)繞斷面形心軸旋轉一角度 ϕ_R，則其新位置為當前的元素座標，元素斷面節點 $j (j = 5,6)$ 的變形轉角可以定義為

$$\theta_j = \phi_j - \phi_R \tag{2.2}$$

2.4 元素之變形描述

本文是在當前的元素座標上描述元素的變形，元素的變形可由其沿軸方向的位移及繞梁之形心軸的旋轉來決定。元素斷面(即與 x_1 軸

垂直的平面)當前的變形位置可視為由以下兩個旋轉達成：

1. 元素在變形前的位置繞形心軸轉一個角度ϕ_R((2.1)式)。
2. 斷面$j(j=5,6)$(對應於斷面節點 j 的斷面)繞形心軸分別旋轉一個角度θ_j(2.2 式)。

上述第一個旋轉為一剛體旋轉，元素將到達一個新的參考位置(reference configuration)(見圖五)，元素在此位置沒有變形，當前的元素座標即再此位置上建立；第二個旋轉為變形旋轉，其大小遠小於 1。

圖四及圖四中Q點為元素內的任一點，則在參考位置時(即變形前)Q點在元素座標上的位置向量可表示如下

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \tag{2.3}$$

其中x,y,z為Q點在座標x_1,x_2,x_3之座標值(圖四)，$\mathbf{e}_i (i=1,2,3)$為在x_i軸方向的單位向量。

Q點之當前位置(current configuration) 即圖五的位置向量可表示如下

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{CO}) - \mathbf{r}_{CO} + u\mathbf{e}_1 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{r}_{CO} = -x\mathbf{e}_1 - y_C\mathbf{e}_2 - z_C\mathbf{e}_3 \tag{2.6}$$

其中u為Q點在x_1方向的位移，$\mathbf{R}$為旋轉矩陣，θ為對應於Q點之斷

面的變形轉角，y_C、z_C為在圖四及圖五中C點在x_2及x_3軸上之座標值。

將(2.5)及(2.6)式代入(2.4)式可得

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = (x+u)\mathbf{e}_1 &+ \left[(y-y_C)\cos\theta - (z-z_C)\sin\theta + y_C\right]\mathbf{e}_2 \\ &+ \left[(y-y_C)\sin\theta + (z-z_C)\cos\theta + z_C\right]\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.5 元素之應變

本文中對於應變的度量是採用 Green strain，並且以$\varepsilon_{ij}\,(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$來表示 Green strain。由基本假設(3)，本文只考慮ε_{11}、ε_{12}與ε_{13}，並表示如下[32]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^{\mathrm{t}}\mathbf{g}_1 - 1) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\mathbf{g}_1^{\mathrm{t}}\mathbf{g}_2 \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}\mathbf{g}_1^{\mathrm{t}}\mathbf{g}_3\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\end{aligned} \tag{2.9}$$

將(2.7)式代入(2.8)、(2.9)式，則可得應變為

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}(\bar{y}^2+\bar{z}^2)\theta_{,x}^2+u_{,x}(1+\frac{1}{2}u_{,x}) \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_{12}=-\frac{1}{2}\bar{z}\theta_{,x}+\frac{1}{2}u_{,y}(1+u_{,x}) \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\bar{y}\theta_{,x}+\frac{1}{2}u_{,z}(1+u_{,x}) \tag{2.12}$$

其中

$$\bar{y}=y-y_C \tag{2.13}$$

$$\bar{z}=z-z_C \tag{2.14}$$

(2.10)-(2.12)式以矩陣形式可表示如下

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^0+\boldsymbol{\varepsilon}^L=\mathbf{Hd}+\frac{1}{2}\mathbf{Ad} \tag{2.15}$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_{11}\quad 2\varepsilon_{12}\quad 2\varepsilon_{13}\} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{d}=\{u_{,x}\quad u_{,y}\quad u_{,z}\quad \theta_{,x}\} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\bar{z} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{y} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & 0 & (\bar{y}^2+\bar{z}^2)\theta_{,x} \\ u_{,y} & u_{,x} & 0 & 0 \\ u_{,z} & 0 & u_{,x} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

本文中{ }代表行矩陣。

本文中假設元素的軸向位移在梁壁的厚度方向(x_3軸方向)為線性變化，所以元素的軸向位移可表示如下：

$$u(x,y,z)=u_A(x,y)+zu_B(x,y) \tag{2.20}$$

其中$u_B = \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$為$u$在厚度方向的變化率。

本文中假設$u_A(x,y)$是由元素節點$j(j=1,2,3,4)$的軸向位移u_j及軸向位移在x_1及x_2方向的一次微分$u,_{xj} = (\dfrac{\partial u}{\partial x})_j$及$u,_{yj} = (\dfrac{\partial u}{\partial y})_j$決定，$u_B(x,y)$是由元素節點$j(j=1,2,3,4)$的軸向位移在$x_3$軸方向的一次微分$u,_{zj} = (\dfrac{\partial u}{\partial z})_j$所決定。所以$u_A(x,y)$及$u_B(x,y)$可以表示成

$$u_A(x,y) = \mathbf{N}_A^t \mathbf{q}_A \tag{2.21}$$

$$u_B(x,y) = \mathbf{N}_B^t \mathbf{q}_B \tag{2.22}$$

$$\mathbf{N}_A = \{\mathbf{N}_1^A, \mathbf{N}_2^A, \mathbf{N}_3^A, \mathbf{N}_4^A\} \tag{2.23}$$

$$\mathbf{N}_j^A = \{N_{1j}^A, N_{2j}^A, N_{3j}^A\} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{q}_A = \{\mathbf{u}_1^A, \mathbf{u}_2^A, \mathbf{u}_3^A, \mathbf{u}_4^A\} \tag{2.25}$$

$$\mathbf{u}_j^A = \{u_j, u_{,xj}, u_{,yj}\} \tag{2.26}$$

$$\mathbf{N}_B = \{N_1^B, N_2^B, N_3^B, N_4^B\} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{q}_B = \{u_{,z1}, u_{,z2}, u_{,z3}, u_{,z4}\} \tag{2.28}$$

其中$j=1,2,3,4$，$\mathbf{N}_A$、$\mathbf{N}_B$為形狀函數，N_{ij}^A、N_j^B $(i=1,2,3$，$j=1,2,3,4)$在附錄B有說明，本文中假設元素的斷面旋轉角θ_x是由斷面節點$j(j=5,6)$的扭轉角θ_j及扭轉率$\theta,_{xj} = (\dfrac{\partial \theta}{\partial x})_j$決定，所以$\theta(x)$可以表示成

$$\theta(x) = \mathbf{N}_\theta^t \mathbf{q}_\theta \tag{2.29}$$

$$\mathbf{N}_\theta = \{N_1^\theta, N_2^\theta, N_3^\theta, N_4^\theta\} \tag{2.30}$$

$$\mathbf{q}_\theta = \{\theta_5, \theta,_{x5}, \theta_6, \theta,_{x6}\} \tag{2.31}$$

其中$\mathbf{N}_\theta$代表形狀函數N_j^θ (j=1, 2, 3, 4)，N_j^θ在附錄 B 中有詳細說明。

將(2.20)、(2.21) 、(2.22) 、(2.29)式代入(2.15)式可將應變表示成

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{HGq} + \frac{1}{2}\mathbf{AGq} \tag{2.32}$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{A,x}^t & z\mathbf{N}_{B,x}^t & 0 \\ \mathbf{N}_{A,y}^t & z\mathbf{N}_{B,y}^t & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_B^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_{\theta,x}^t \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_A \quad \mathbf{q}_B \quad \mathbf{q}_\theta\} \tag{2.34}$$

其中$\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B, \mathbf{q}_\theta$在(2.25),(2.28)及(2.31)式中已有定義。

本研究採用虛功原理推導元素節點內力，所以需要應變的變分，將(2.32)式變分可得

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{HG}\delta\mathbf{q} + \mathbf{AG}\delta\mathbf{q} = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)\delta\mathbf{q} = \mathbf{B}\delta\mathbf{q} \tag{2.35}$$

其中

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)，\quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{HG}\quad ，\quad \mathbf{B}_L = \mathbf{AG} \tag{2.36}$$

2.6 元素節點內力之推導

本文中利用虛功原理在座標上求對應於元素節點參數的元素節

點內力。令對應於節點虛位移$\delta\mathbf{q}$的元素節點力為

$$\mathbf{f} = \left\{ \mathbf{f}_A \quad \mathbf{f}_B \quad \mathbf{f}_\theta \right\} \tag{2.37}$$

$$\mathbf{f}_A = \{\mathbf{f}_1^A, \mathbf{f}_2^A, \mathbf{f}_3^A, \mathbf{f}_4^A\} \quad , \quad \mathbf{f}_j^A = \{f_j, m_{xj}, m_{yj}\} \quad , \quad j = 1,2,3,4$$

$$\mathbf{f}_B = \{m_{z1}, m_{z2}, m_{z3}, m_{z4}\} \quad , \quad \mathbf{f}_\theta = \{T_5, B_5, T_6, B_6\}$$

(2.38)

其中$f_j (j = 1,2,3,4)$為節點j在x方向的力，m_{xj}, m_{yj}及m_{zj}為在節點j對應於$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$的廣義力矩，$T_j (j = 5,6)$為節點$j$在$x$方向的扭轉力矩，$B_j (j = 5,6)$為節點$j$的雙力矩(Bimoment)。

由虛功原理可得

$$\delta\mathbf{q}^T \mathbf{f} = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \tag{2.39}$$

本文中假設材料為線彈性材料，其應力－應變關係為

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}\} \tag{2.41}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}$已在(2.16)式定義，E是楊氏係數(Young's modulus)，G是剪力係數(shear modulus)。

將(2.35)式代入(2.39)式可得元素節點內力向量如下

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \tag{2.43}$$

將(2.36)、(2.40)式代入(2.43)式可得元素節點內力為(附錄 C 有詳細之

推導)

$$\mathbf{f}_A^1 = Et\int_A \mathbf{N}_{A,x} u_{A,x} dA + Gt\int_A \mathbf{N}_{A,y} u_{A,y} dA + Gtz_C \int_A \mathbf{N}_{A,y} \theta_{,x} dA \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_B^1 = {} & \frac{Et^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x} u_{B,x} dA + Gt\int_A \mathbf{N}_B u_B dA + Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_B \theta_{,x} dA \\ & - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y} \theta_{,x} dA + \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y} u_{B,y} dA\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_\theta^1 = {} & Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_{\theta,x} u_B dA + \left(\frac{Gt^3}{12} + Gtz_C^2\right)\int_A \mathbf{N}_{\theta,x} \theta_{,x} dA \\ & + Gt\int_A \bar{y}^2 \mathbf{N}_{\theta,x} \theta_{,x} dA + Gtz_C \int_A \mathbf{N}_{\theta,x} u_{A,y} dA \\ & - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{\theta,x} u_{B,y} dA\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_A^2 = {} & Gt\int_A \mathbf{N}_{A,x} u_B^2 dA + Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_{A,x} u_B \theta_{,x} dA \\ & + \left(\frac{Et^3}{24} + \frac{Etz_C^2}{2}\right)\int_A \mathbf{N}_{A,x} \theta_{,x}^2 dA + \frac{Et}{2}\int_A \bar{y}^2 \mathbf{N}_{A,x} \theta_{,x}^2 dA \\ & + Gtz_C \int_A \mathbf{N}_{A,x} \theta_{,x} u_{A,y} dA + Gt\int_A \mathbf{N}_{A,x} u_{A,y}^2 dA + Gtz_C \int_A \mathbf{N}_{A,y} \theta_{,x} u_{A,x} dA \\ & + 2Gt\int_A \mathbf{N}_{A,y} u_{A,y} u_{A,x} dA + \frac{3Et}{2}\int_A \mathbf{N}_{A,x} u_{A,x}^2 dA - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{A,x} \theta_{,x} u_{B,y} dA \\ & + \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{A,x} u_{B,y}^2 dA - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{A,y} \theta_{,x} u_{B,x} dA + \frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{A,y} u_{B,x} u_{B,y} dA \\ & + \frac{Et^3}{8}\int_A \mathbf{N}_{A,x} u_{B,x}^2 dA\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_B^2 = & -\frac{Et^3 z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\theta_{,x}^2 dA - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\theta_{,x}u_{A,y}dA + 2Gt\int_A \mathbf{N}_B\theta_z u_{A,x}dA \\
& + Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_B\theta_{,x}u_{A,x}dA - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\theta_{,x}u_{A,x}dA \\
& + \frac{Gt^3 z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\theta_{,x}u_{B,y}dA + Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_B\theta_{,x}u_{A,x}dA \\
& - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\theta_{,x}u_{A,x}dA + \frac{Gt^3 z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\theta_{,x}u_{B,y}dA \\
& + \frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{B,x}u_{A,y}u_{B,y}dA + \frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{B,y}u_{A,x}u_{B,y}dA \\
& + \frac{Gt^3 z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\theta_{,x}u_{B,x}dA + \frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{B,y}u_{A,y}u_{B,x}dA \\
& + \frac{Et^3}{4}\int_A \mathbf{N}_{B,x}u_{A,x}u_{B,x}dA
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_\theta^2 = & \, Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_{\theta,x}u_{A,x}u_B dA + (\frac{Et^3}{12} + Etz_C^2)\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}u_{A,x}\theta_{,x}dA \\
& + Et\int_A \bar{y}\mathbf{N}_{\theta,x}u_{A,x}\theta_{,x}dA + Gtz_C\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}u_{A,y}u_{A,x}dA \\
& - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}u_{A,x}u_{B,y}dA - \frac{Et^3 z_C}{6}\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}u_{B,x}\theta_{,x}dA \\
& - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}u_{A,y}u_{B,x}dA + \frac{Gt^3 z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}u_{B,x}u_{B,y}dA
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_\theta^3 = & \, (\frac{Et^5}{160} + \frac{Et^3 z_C^2}{4} + \frac{Etz_C^4}{2})\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}\theta_{,x}^3 dA \\
& + (\frac{Et^3}{12} + Etz_C^2)\int_A \bar{y}^2\mathbf{N}_{\theta,x}\theta_{,x}^3 dA + \frac{Et}{2}\int_A \bar{y}^4\mathbf{N}_{\theta,x}\theta_{,x}^3 dA
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

(2.44)-(2.50)中$\mathbf{f}_A^k$、$\mathbf{f}_B^k$及$\mathbf{f}_\theta^k$代表元素內力的 k 次項。本文中元素節點內力保留至節點參數二次項及$\theta_{,x}$的三次項，t 為元素厚度。本文中元素的節點內力((2.44)-(2.50)式)都是用5×5的高斯積分來計算。

2.7 元素剛度矩陣

元素的剛度矩陣可由元素節點內力向量$\mathbf{f}$對節點參數$\mathbf{q}$ 微分求得並可表示成

$$\mathbf{k}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \tag{2.51}$$

將(2.43)式代入(2.51)式可將元素的剛度矩陣表示成(詳見附錄 C)

$$\mathbf{k}=\int_V \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{q}}\boldsymbol{\sigma} dV+\int_V \mathbf{B}^T\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{q}}dV=\int_V \mathbf{G}^T\mathbf{S}\mathbf{G}dV+\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV \tag{2.52}$$

其中

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{y}^2+\bar{z}^2)\sigma_{11} \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

將 (2.33)、(2.34)、(2.36)、(2.42)及(2.43)代入(2.52)式可求得元素剛度矩陣，元素剛度矩陣可由下列次矩陣$\mathbf{k}_{aa},\mathbf{k}_{ab},\mathbf{k}_{a\theta},\mathbf{k}_{bb},\mathbf{k}_{b\theta},\mathbf{k}_{\theta\theta}$,組合而成，亦即

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} & \mathbf{k}_{a\theta} \\ & \mathbf{k}_{bb} & \mathbf{k}_{b\theta} \\ sym. & & \mathbf{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

其中

$$\mathbf{k}_{aa}=Gt\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{A,y}dA+Et\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{A,x}dA$$

$$
\begin{aligned}
&+Gtz_C\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{A,y}\theta_{,x}dA+Gtz_C\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{A,x}\theta_{,x}dA\\
&+2Gt\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{A,y}u_{A,y}dA+2Gt\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{A,x}u_{A,y}dA\\
&+2Gt\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{A,y}u_{A,x}dA+3Et\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{A,x}u_{A,x}dA
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_{ab}=&\,2Gt\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{B}u_{B}dA+Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{B}\theta_{,x}dA\\
&-\frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{B,y}\theta_{,x}dA-\frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{B,x}\theta_{,x}dA\\
&+\frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{B,y}u_{B,y}dA+\frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{B,x}u_{B,y}dA\\
&+\frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{B,y}u_{B,x}dA+\frac{Et^3}{4}\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{B,x}u_{B,x}dA
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_{a\theta}=&\,Gtz_C\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{\theta,x}dA+Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{B}dA\\
&+\left(\frac{Et^3}{12}+Etz_C^2\right)\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}\theta_{,x}dA+Et\int_A \bar{y}^2\mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}\theta_{,x}dA\\
&+Gtz_C\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{A,y}dA+Gtz_C\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{A,x}dA\\
&-\frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{A,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{B,y}dA-\frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{A,y}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{B,x}dA
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_{bb}=&\,Gt\int_A \mathbf{N}_{B}\mathbf{N}^t_{B}dA+\frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\mathbf{N}^t_{B,y}dA+\frac{Et^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\mathbf{N}^t_{B,x}dA\\
&+\frac{Gt^3z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\mathbf{N}^t_{B,y}\theta_{,x}dA+\frac{Gt^3z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\mathbf{N}^t_{B,x}\theta_{,x}dA\\
&+\frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\mathbf{N}^t_{B,y}u_{A,y}dA+\frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\mathbf{N}^t_{B,x}u_{A,y}dA\\
&+2Gt\int_A \mathbf{N}_{B}\mathbf{N}^t_{B}u_{A,x}dA+\frac{Gt^3}{6}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\mathbf{N}^t_{B,y}u_{A,x}dA\\
&+\frac{Et^3}{4}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\mathbf{N}^t_{B,x}u_{A,x}dA
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

$$
\mathbf{k}_{b\theta} = Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_B\mathbf{N}^t_{\theta,x}dA - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\mathbf{N}^t_{\theta,x}dA
$$

$$
-\frac{Et^3 z_C}{6}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}\theta_{,x}dA - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{A,y}dA
$$

$$
Gt\int_A \bar{y}\mathbf{N}_B\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{A,x}dA - \frac{Gt^3}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{A,x}dA
$$

$$
+\frac{Gt^3 z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{B,y}dA + \frac{Gt^3 z_C}{12}\int_A \mathbf{N}_{B,y}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{B,x}dA
$$

(2.59)

$$
\mathbf{k}_{\theta\theta} = \left(\frac{Gt^3}{12} + Gtz_C^2\right)\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}dA + Gt\int_A \bar{y}^2\mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}dA
$$

$$
+\left(\frac{Et^3}{12} + Etz_C^2\right)\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{A,x}dA
$$

$$
+Et\int_A \bar{y}^2\mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{A,x}dA - \frac{Et^3 z_C}{6}\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}u_{B,x}dA
$$

$$
+\left(\frac{3Et^5}{160} + \frac{3Et^3 z_C^2}{4} + \frac{3Etz_C^4}{2}\right)\int_A \mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}\theta_{,x}^2 dA
$$

$$
+\left(\frac{Et^3}{4} + 3Etz_C^2\right)\int_A \bar{y}^2\mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}\theta_{,x}^2 dA
$$

$$
+\frac{3Et}{2}\int_A \bar{y}^4\mathbf{N}_{\theta,x}\mathbf{N}^t_{\theta,x}\theta_{,x}^2 dA
$$

(2.60)

本文中元素剛度矩陣((2.55)-(2.60)式)都是用5×5的高斯積分來計算。

為了方便，本文中將節點位移及內力重新排成

$$
\mathbf{q}_E = \left\{\mathbf{u}_1^E, \mathbf{u}_2^E, \mathbf{u}_3^E, \mathbf{u}_4^E, \mathbf{q}_\theta\right\} \tag{2.61}
$$

$$
\mathbf{u}_j^E = \left\{\mathbf{u}_j^A, u,_{zj}\right\} \tag{2.62}
$$

$$
\mathbf{f}_E = \left\{\mathbf{f}_1^E, \mathbf{f}_2^E, \mathbf{f}_3^E, \mathbf{f}_4^E, \mathbf{f}_\theta\right\} \tag{2.63}
$$

$$
\mathbf{f}_j^E = \left\{\mathbf{f}_j^A, m_{zj}\right\} \tag{2.64}
$$

其中 $\mathbf{u}_j^A(j=1,2,3,4)$, $\mathbf{q}_\theta$ 分別在(2.26),(2.31)式中已有定義，$\mathbf{f}_j^A(j=1,2,3,4)$, $\mathbf{f}_\theta$ 在(2.38)式中已有定義，$\mathbf{f}_E$ 為對應於需位移 $\delta\mathbf{q}_E$ 的節點內力，令 $\mathbf{k}_E$ 為對應於 $\mathbf{q}_E$ 的切線剛度矩陣，$\mathbf{k}_E$ 可以由(2.54)式之次矩陣用直接剛度法重新組合而成。

因為系統平衡方程式是定義於總體座標系統中，所以元素切線剛度矩陣 $\mathbf{k}_E$ 需經下列的座標轉換，方可組合成系統矩陣。

$$\mathbf{k}_E^G = \mathbf{T}_{GE}\mathbf{k}_E\mathbf{T}_{GE}^t \tag{2.65}$$

其中

$$\mathbf{T}_{GE} = \begin{bmatrix}
1 & \mathbf{0}_{1\times3} & 0 & \mathbf{0}_{1\times3} & 0 & \mathbf{0}_{1\times3} & 0 & \mathbf{0}_{1\times3} & \mathbf{0}_{1\times4} \\
 & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times4} \\
 & & 1 & \mathbf{0}_{1\times3} & 0 & \mathbf{0}_{1\times3} & 0 & \mathbf{0}_{1\times3} & \mathbf{0}_{1\times4} \\
 & & & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times4} \\
 & & & & 1 & \mathbf{0}_{1\times3} & 0 & \mathbf{0}_{1\times3} & \mathbf{0}_{1\times4} \\
 & & & & & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times4} \\
 & & & & & & 1 & \mathbf{0}_{1\times3} & \mathbf{0}_{1\times4} \\
 & sym. & & & & & & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0}_{3\times4} \\
 & & & & & & & & \mathbf{I}_4
\end{bmatrix} \tag{2.66}$$

其中 $\mathbf{0}_{m\times n}$ 是一 $m\times n$ 階的零矩陣、$\mathbf{A}_{GE}$ 為總體座標與元素座標間之轉換矩陣，$\mathbf{I}_4$ 為 4×4 單位矩陣。

2.8 元素等效節點外力

當梁的兩端受軸向均佈載重 p 時，其等效節點力可由對應元素

之等效節點力疊加而成。如圖六(a)所示為一元素在其I,J(I,J=1，2或3，4)節點的斷面上所受均怖載重p作用， 圖六(b)表示該分佈載重在節點I、J之等效節點力F_I、F_J與彎矩M_I、M_J，由虛功原理可得：

$$\int_A p\delta u_{IJ} dA = \delta \mathbf{q}_{IJ}^t \mathbf{F}_{IJ} \tag{2.67}$$

$$\mathbf{q}_{IJ} = \{u_I, u_{,yI}, u_J, u_{,yJ}\} \tag{2.68}$$

$$\mathbf{F}_{IJ} = \{F_I \quad M_I \quad F_J \quad M_J\} \tag{2.69}$$

其中δu_{IJ}為斷面上的軸向虛位移，$\delta\mathbf{q}_{IJ}$為節點的虛位移，$\mathbf{F}_{IJ}$為對應於$\delta\mathbf{q}_{IJ}$的等效節點力。$\mathbf{F}_{IJ}$在附錄D中有詳盡的推導，並可表示成

$$\mathbf{F}_{IJ} = \{F_I \quad M_I \quad F_J \quad M_J\} = pt\left\{\frac{L_{IJ}}{2} \quad \frac{L_{IJ}^2}{12} \quad \frac{L_{IJ}}{2} \quad -\frac{L_{IJ}^2}{12}\right\} \tag{2.70}$$

其中t為斷面厚度，L_{IJ}為節點IJ距離。將I型梁斷面離散成6個與12個元素時，斷面之等效節點力在附錄D中有完整的表示。

2.9 系統平衡方程式與收斂準則

在固定總體座標系統中定義的非線性平衡方程式，可表示為

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{F} - \mathbf{P} = 0 \tag{2.71}$$

其中$\mathbf{\Psi}$為不平衡力向量，$\mathbf{F}$為系統節點內力向量，$\mathbf{P}$表示系統節點外力向量。若僅考慮單一負荷參數的外力，$\mathbf{P}$可以表示成$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_{ref}$，其中$\lambda$為負荷參數，$\mathbf{P}_{ref}$是一參考負荷向量。$\mathbf{F}$可由(2.67)式之元素節點內力

向量，由元素座標轉換到固定總體座標上組合而成，**P**可由與元素節點作用力組合而成。

本文以不平衡力向量$\boldsymbol{\Psi}$的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\boldsymbol{\Psi}\|}{\sqrt{N}\|\mathbf{P}\|} \le e_{tol} \tag{2.72}$$

其中N表離散系統的自由度數，e_{tol}是一給定的容許誤差值，本文例題中使用$e_{tol} = 10^{-6}$來做計算。

2.10 挫屈準則

本文中以系統切線剛度的行列式值為零當做挫屈的準則，為了求得挫屈負荷，令$\mathbf{K}_T(\lambda)$為表示關於負荷參數λ的切線剛度矩陣，則挫屈狀態可表示為

$$\mathbf{D}(\lambda) = \det\left|\mathbf{K}_T(\lambda)\right| = 0 \tag{2.73}$$

假設λ_{NB}為(2.73)式之最小根，則λ_{NB}即為挫屈狀態下之負荷參數。