第 三 章　　數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式(2.71)式的數值計算方法是基於牛頓－拉福森(Newton-Raphson)法配合弧長控制(arc length control)法的增量迭代法[36]。本文中以系統切線剛度的行列式值為零當做挫屈的準則，為了求得挫屈負荷，本文採用文獻[37]中所提出的二分法，決定增量位移向量的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了求得次要平衡路徑，本文中在平衡路徑的第一個扭轉挫屈負荷分岐點加入一與第一挫屈模態向量方向一致的擾動位移 [38]。

3.1 增量迭代法

若第I個增量的平衡位置為已知，則在此位置的系統切線剛度矩陣 $\mathbf{K}_T$ 可以求得，且第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$，可利用尤拉預測值(Euler predictor)求得

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{Q}_T \tag{3.1}$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數，$\mathbf{Q}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}_{ref}$ 為參考負荷向量 $\mathbf{P}_{ref}$ 的切線解。$\Delta\lambda$ 可利用下式求出[36]

$$\Delta\lambda = \pm\,\Delta\ell \big/ (\mathbf{Q}_T^t\mathbf{Q}_T)^{1/2} \tag{3.2}$$

其中正負符號之決定方法如下：若第 I 與 I-1個增量收斂時，系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。$\Delta\ell$ 表第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定

$$\Delta\ell = (J_D / J_I)^{1/2}\Delta\ell_I \tag{3.3}$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數，J_I 為第 I 個增量，迭代至平衡所使用的迭代次數，$\Delta\ell_I$ 為第 I 個增量的增量弧長。

本文中第一個增量的增量弧長$\Delta\ell_1$是由下式決定

$$\Delta\ell_1 = \frac{R_{\max}\|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max}|r_c|} \tag{3.4}$$

上式中$R_{\max}$為給定的參考自由度之最大位移量，$\|\mathbf{R}_0\|$為參考負荷向量$\mathbf{P}_{ref}$作用下的系統線性解$\mathbf{R}_0$的 Euclidean norm，$I_{\max}$為給定之最大增量次數，$|r_c|$為$\mathbf{R}_0$在參考自由度的分量的絕對值。

在平衡迭代時增量位移向量$\Delta\mathbf{Q}$及增量負荷$\Delta\lambda$已知，由$\Delta\mathbf{Q}$及2.3節中的方法可以求得當前的元素座標及元素斷面節點的變形轉角。再利用2.5與2.6節的方法，求得元素座標上的節點內力及剛度矩陣。而對應此位置的負荷參數為$\lambda = \lambda_I + \Delta\lambda$，其中$\lambda_I$為第$I$個增量達平衡時的負荷參數，$\Delta\lambda$即增量負荷參數。當系統內力及外力求得後，不平衡力量$\mathbf{\Psi}$向量可由(2.71)式求得。若(2.72)式的收斂準則不能滿足，則利用定弧長控制法[36]，求得一位移修正量$\delta\mathbf{Q}$與負荷參數修正量$\delta\lambda$，並加入前一次迭代的$\Delta\mathbf{Q}$與$\Delta\lambda$中，而得一新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次的迭代。$\delta\mathbf{Q}$與$\delta\lambda$可由下列二式決定

$$\delta\mathbf{Q} = \mathbf{K}_T^{-1}(-\psi + \delta\lambda\mathbf{P}) \tag{3.5}$$

$$\Delta\ell^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q})^t(\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}) \tag{3.6}$$

以上之迭代計算過程一直重覆至滿足(2.72)式的收斂準則為止。

3.2 二分法

利用3.1節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數λ及結構切線剛度矩陣的行列式值$D(\lambda)$。令λ_I及$D(\lambda_I)$分別表示第I個增量在其平衡位置的λ及$D(\lambda)$之值。λ_{I+1}及$D(\lambda_{I+1})$分別表示第$I+1$的增量在其平衡位置的λ

及 $D(\lambda)$ 之值。$\Delta\ell_{I+1}$ 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{NB}：

(1)令 $\Delta\ell_L = 0,\ \Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1},\ \lambda_L = \lambda_I, \lambda_R = \lambda_{I+1}$，其中下標 L 及 R 表示左界及右界。

(2)取 $\Delta\ell_{I+1} = \dfrac{\Delta\ell_L + \Delta\ell_R}{2}$，重作第 $I+1$ 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$。

(3)若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}, \Delta\ell_L = \Delta\ell_{I+1}$

若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}, \Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}$

(4)若下列二式挫屈誤差準則同時滿足

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D \tag{3.7}$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda \tag{3.8}$$

其中 e_D 及 e_λ 為給定的容許誤差值，本文例題之計算給定 $e_D = 10^{-6}$ 及 $e_\lambda 10^{-5}$

則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。