

國立交通大學

機械工程研究所

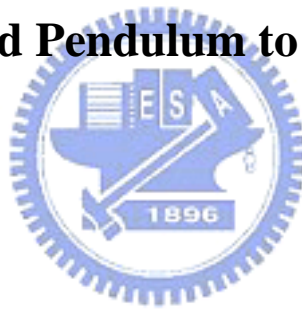
碩士論文

題目

倒單擺定位系統之多自由度 H_∞ 控制器設計

Multi-Degrees of Freedom H_∞ Controller Design for the

Inverted Pendulum to Fix Position



指導教授 李安謙 教授

研究生 童一峰

中華民國九十三年十月

倒單擺定位系統之多自由度 H_∞ 控制器設計

學生：童一峰

指導教授：李安謙 教授

國立交通大學機械工程研究所 碩士班

摘要

在建立受控系統數學模型，再怎麼精確的鑑別一個系統，我們所得到的也僅是一個“近似”於實際系統的數學模型。因此我們希望利用一種控制器設計，能夠接受系統數學模型建立時所產生的不確定性，在一個可容許的誤差範圍內，設計控制器來達到良好的控制效果。藉由這個觀念，本篇論文採用“normalized left coprime factorization”的方式來考慮系統數學模型建立時產生的不確定性，目的就是為了要利用 H_∞ 設計出來的控制器容許在我們數學系統建立時所造成的誤差，而依然能提供穩定的控制效果。在控制器的設計上，我們採用“Loop Shaping Design Procedure”的方式來設計控制器；接著以倒單擺的系統，用以作為設計控制器的觀察對象，觀察在 H_∞ 控制器下，倒單擺穩定以及效能的情況，用以探討此種控制理論的可行性以及優缺點。並且考慮到一般的實際受控系統都為多自由度的系統，所以我們在此篇論文中也將會對多自由度系統的控制器作一設計(雙自由度的設計)，希望能達到預期的效果。

Multi-Degrees of Freedom H_∞ Controller Design for the Inverted Pendulum to Fix Position

Student : Yi-Feng Tung

Advisor : Dr. An-Chen Lee

Institute of Mechanical Engineering
Natural Chiao Tung University

Abstract

In modeling the controlled plant, the mathematical model is at best the approximation to the actual system. This motivates the authors to design a controller which is able to accept the uncertainty produced by the mathematical model to enhance the performance of the controller in acceptable tolerance range. In this monograph, the concept of the “normalized left coprime factorization” to design a H_∞ controller is therefore adopted for considering problem of uncertainty of the model system. The purpose for applying the H_∞ controller in this paper is to tolerate the modeling error and further maintain a stable control performance. After that, the “Loop shaping design procedure” method is in use to design the controller. In this work, the experimental objective of the H_∞ design will be the inverted pendulum system. By looking into the performance of the inverted pendulum system, the authors will discuss feasibility, advantages and disadvantages of the control theory.

誌謝

首先要感謝老師 李安謙教授這兩年來的教導，讓學生在這兩年來學到了許多待人接物以及求學問的方式，使學生收穫匪淺。

接著要感謝潘怡仁學長，在我論文遇到困難以及對生活感到迷惘時，能夠給我適時的建議以及鼓勵，也才能夠完成我論文的研究。

感謝黃淵勇學長、施禕迪博士、洪榮煌學長以及張榮鴻學長，在我研究遇到困難時，都給我良好的指導。

感謝實驗室的同學孟璋、月汶、亨龍還有學弟建鈞、敬堯、宏榮、昆樺以及柏壽，對我生活上的照顧，以及學業上的提攜。

最後感謝父母親在生活以及物質上的不虞匱乏，讓我能夠完成這兩年的研究生活；還有一路上替我鼓勵，給我建議的好朋友以及貴人，在此也感謝你們為我所做的一切。

謝謝大家!

目 錄

摘 要	ii
Abstract.....	iii
誌謝	iv
目 錄	v
圖目錄	vii
表目錄	x
第 1 章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究方法	2
1.4 研究目的	3
1.5 內容大綱	3
第 2 章 倒單擺物理系統及線性模式推導	4
2.1 倒單擺物理系統的推導	4
2.2 馬達物理系統之數學模式	7
第 3 章 coprime factorization 理論介紹	11
3.1 coprime factorization 以及 Linear Fractional Transformations	12
3.1.1 normalized left coprime factorization 與其拆解方式	17
3.2 控制器設計	18
3.2.1 穩健穩定(robust stability)控制器設計	18
3.2.2 以 normalized LCF 拆解系統時控制器的解	20
3.2.2.1 Nehari extension 方法介紹	20
3.2.2.2 利用 γ 疊代的方式來求解 γ 值	21
3.2.3 拆解為 normalized LCF 系統其控制器的解	21
3.3 Loop Shaping Design Procedure 介紹	23
3.3.1 Loop Shaping 方法介紹	23
3.3.2 Loop shaping design procedure(LSPD)設計程序	28
第 4 章 倒單擺系統鑑別以及控制器設計步驟	34
4.1 設備介紹	35
4.2 實際實驗系統的數學模式鑑別	38
4.2.1 鑑別之系統	38
4.2.1.1 PRBS (pseudo random binary sequence)	39
4.2.1.2 電壓對速度鑑別之結果	40
4.2.2 Force command 對加速度的轉移函數	43
4.2.3 Force command 到位置以及角度的轉移函數	48

4.3	2-DOF 控制器設計之流程以及步驟.....	50
4.3.1	Observer 控制器	57
4.4	改變 observer 控制器極點位置	59
第 5 章	模擬結果以及討論	61
5.1	常數 weighting 設計	62
5.2	一階 weighting 設計	63
5.3	二階 weighting 設計	66
5.4	模擬的結果	71
5.4.1	加入改變 observer 控制器極點的 H 轉移函數模擬	74
5.5	控制器比較	78
第 6 章	實驗與討論	93
6.1	程式的撰寫流程以及工具介面	94
6.1.1	DSP 控制卡 C 語言撰寫格式	94
6.1.2	DSP 控制卡程式編譯介面發展環境.....	96
6.2	PC 端介面與 DSP 連結	97
6.2.1	S-function 的設定	97
6.2.2	PC 端控制介面	99
6.2.3	程式架構以及注意事項	100
6.3	實驗遭遇之問題	103
第 7 章	總結與未來發展	106
附錄 A	利用 flow chart 得到轉移函數	107
附錄 B	reference model 中 ω_n 與最大速度的相關性.....	109
附錄 C	模擬時控制器的實際值	111
參考文獻	113

圖目錄

圖 2-1 倒單擺方程式推導架構圖	4
圖 2-2 電樞控制直流馬達等效電路圖	7
圖 2-3 電樞控制直流馬達方塊圖	9
圖 2-4 系統開迴路方塊圖	10
圖 3-1 相加型不確定性(additive uncertainty)系統	13
圖 3-2 相乘型不確定性(multiplicative uncertainty)系統	13
圖 3-3 coprime factorization 型不確定性系統	14
圖 3-4 加入不確定性後的模型以 normalized LCF 拆解架構圖	14
圖 3-5 Lower Linear Fractional Transformation 架構圖	15
圖 3-6 Upper Linear Fractional Transformational 架構圖	16
圖 3-7 控制器設計的架構圖	18
圖 3-8 閉迴路系統	23
圖 3-9 開迴路系統	24
圖 3-10 系統輸入、輸出，以及輸入干擾和輸出干擾的相對位置圖	24
圖 3-11 開迴路的特徵值(singular value)限制情形	27
圖 3-12 shaped plant	28
圖 3-13 Loop shaped design procedure 加入控制器的架構圖	29
圖 3-14 最終控制器(final controller)的表示形式	30
圖 3-15 shaped 與加入控制器後系統的最大特徵值限制	31
圖 4-1 倒單擺機台硬體圖	35
圖 4-2 台車、連接單擺處和位置編碼器	36
圖 4-3 AC 伺服馬達以及傳動機構	36
圖 4-4 馬達驅動器	37
圖 4-5 DSP 控制卡以及 DA 卡	37
圖 4-6 系統鑑別訊號流程	38
圖 4-7 系統鑑別訊號流程 II	39
圖 4-8 PRBS 訊號圖	40
圖 4-9 修改過後之 PRBS 訊號圖	40
圖 4-10 PRBS 鑑別輸入以及位置輸出圖	41
圖 4-11 經過 α - β filter 估測速度值	41
圖 4-12 matlab 系統鑑別使用者介面	42
圖 4-13 PRBS ± 2000 訊號輸入以及速度輸出響應圖	42
圖 4-14 方波電壓訊號輸入以及對速度的響應圖	43
圖 4-15 Force command 對加速度的鑑別架構圖	44
圖 4-16 Force command 對加速度轉移函數之極零點位置	45

圖 4-17	Force command 輸入以及經過積分後的電壓命令	46
圖 4-18	加速度比較	46
圖 4-19	降階後的轉移函數極零點位置	47
圖 4-20	降階後的加速度響應比較圖	48
圖 4-21	控制器求解之流程圖	51
圖 4-22	原來系統以及加入 weighting 系統的特徵值圖形	52
圖 4-23	利用加入 weighting 系統的特徵值圖形找出頻寬	53
圖 4-24	兩自由度的 H_{∞} 控制器架構圖	55
圖 4-25	H_{∞} output feedback controller	57
圖 4-26	加入 weighting 的 output feedback controller	57
圖 4-27	H-infinite output feedback controller	58
圖 4-28	observer 控制器架構圖	58
圖 4-29	observer 控制器等效圖	59
圖 4-30	加入 H 轉移函數後的 observer 控制器等效架構圖	60
圖 5-1	加入各種常數 weighting 的特徵值改變情況	63
圖 5-2	$\gamma=10.2575$ 之特徵值圖形	64
圖 5-3	$\gamma=9.0385$ 之特徵值圖形	65
圖 5-4	$\gamma=11.6165$ 之特徵值圖形	65
圖 5-5	$\gamma=12.6688$ 之特徵值圖形	66
圖 5-6	$\gamma=7.4710$ 之特徵值圖形	67
圖 5-7	$\gamma=5.6321$ 以及 $\gamma=5.6625$ 之特徵值圖形	68
圖 5-8	$\gamma=4.5340$ 以及 $\gamma=5.1635$ 之特徵值圖形	68
圖 5-9	$\gamma=4.8664$ 以及 $\gamma=5.4473$ 之特徵值圖形	69
圖 5-10	$\gamma=4.4188$ 以及 $\gamma=4.4854$ 之特徵值圖形	70
圖 5-11	matlab simulink 模擬架構圖	71
圖 5-12	最佳 γ 值時的模擬響應圖 I	72
圖 5-13	最佳 γ 值時的模擬響應圖 II	73
圖 5-14	最佳 γ 值時的模擬響應圖 III	73
圖 5-15	最佳 γ 值改變 observer 控制器極點時的模擬響應圖 I	74
圖 5-16	加入 H 轉移函數與未加入 H 轉移函數的響應比較圖 I	75
圖 5-17	最佳 γ 值改變 observer 控制器極點時的模擬響應圖 II	75
圖 5-18	加入 H 轉移函數與未加入 H 轉移函數的響應比較圖 II	76
圖 5-19	最佳 γ 值改變 observer 控制器極點時的模擬響應圖 III	76
圖 5-20	加入 H 轉移函數與未加入 H 轉移函數的響應比較圖 III	77
圖 5-21	Walker 控制器架構圖	79
圖 5-22	拆解為 Observer 控制器的架構圖	80
圖 5-23	Walker 模擬-台車定位至 0.05m 的響應	81
圖 5-24	Walker 模擬-台車定位至 0.05m 時單擺角度的響應	81

圖 5-25	Walker 模擬-台車定位至 0.6m 的響應	82
圖 5-26	Walker 模擬-台車定位至 0.6m 時單擺角度的響應	82
圖 5-27	Observer 控制器-定位至 0.05m 的台車位置模擬圖	83
圖 5-28	Observer 控制器-定位至 0.05m 的單擺角度模擬圖	83
圖 5-29	Observer 控制器-定位至 0.6m 的台車位置模擬圖	84
圖 5-30	Observer 控制器-定位至 0.6m 的單擺角度模擬圖	84
圖 5-31	Observer 控制器-定位至 0.05m 的響應比較圖	85
圖 5-32	Observer 控制器-定位至 0.6m 的響應比較圖	85
圖 5-33	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0.6m , 未加 H 之響應圖	86
圖 5-34	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0.6m , 加入 H 之響應圖	87
圖 5-35	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0.6m 之響應比較圖	87
圖 5-36	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 0^\circ$, 定位至 0.6m , 未加 H 之響應圖	88
圖 5-37	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 0^\circ$, 定位至 0.6m , 加入 H 之響應圖	88
圖 5-38	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 0^\circ$, 定位至 0.6m 之響應比較圖	89
圖 5-39	初始值 $x = 0\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0.6m , 未加 H 之響應圖	89
圖 5-40	初始值 $x = 0\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0.6m , 加入 H 之響應圖	90
圖 5-41	初始值 $x = 0\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0.6m 之響應比較圖	90
圖 5-42	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0m , 未加 H 之響應圖	91
圖 5-43	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0m , 加入 H 之響應圖	91
圖 5-44	初始值 $x = 0.1\text{m}$, $\theta = 5^\circ$, 定位至 0m 之響應比較圖	92
圖 6-1	控制程式模組化關係圖	95
圖 6-2	在 DOS 模式下的編譯介面	96
圖 6-3	編譯完成時的訊息	97
圖 6-4	S-function 函數以及傳輸參數設定	98
圖 6-5	設定 s-function 圖示、參數以及註解	99
圖 6-6	PC 端訊號接收介面	100
圖 6-7	控制器程式架構	101
圖 6-8	推導時的方向定義	102
圖 6-9	實驗時的方向定義	102
圖 6-10	控制器高階實現時的並聯方式	103
圖 6-11	單擺轉軸圖	104
圖 6-12	Force command 和實際電壓速度命令的訊號圖	105

表目錄

表 2-1 參數值.....	10
表 3-1 系統輸入、輸出，以及輸入干擾和輸出干擾所形成的轉移函數最大特徵值	24
表 5-1 常數 weighting 下的 γ 值情況	62



第1章 緒論

1.1 前言

在控制理論設計之前，我們都必須先給定受控系統的模型(plant model)。然而，當我們要得到一個實際物理系統的模型時，我們所計算出的線性數學模型和實際的物理系統之間一定會有誤差的問題存在。通常造成誤差的原因有兩種：

- 利用線性化模型模擬非線性化的實際物理系統；
- 決定參數時，參數的選擇亦會影響誤差。

為了減少這些誤差，有很多方式可以採用；在這篇論文中我們將採用的方法是由 Duncan McFarlane 和 Keith Glover 在 1990 年[1]所提出的 ”Robust Control with Normalized Coprime Factorization” 以及”Loop shaping design procedure” 方式設計控制器，並且採用雙自由度(2-degree-of-freedom)作為討論。

在系統方面我們採用了倒單擺 (Inverted Pendulum) 系統，因為倒單擺本身有著不穩定性 (unstability) 和非線性 (nonlinearity) 的特性，因此常被用來驗證控制法則；而倒單擺通常可應用在火箭發射以及天車的定位系統，使火箭或天車能準確的定位在垂直的位置上。

1.2 文獻回顧

Vidyasagar 在 1985 年提出了 “coprime factorization” 的控制架構，考慮控制器 robust stabilization 的問題；而用 “normalized coprime factorization” 方式來拆解的控制架構可以利用 Zames 在 1981 年提出的利用 H_∞ optimization 方式來找到一個控制器滿足所需要達到的 robust stability 要求。

而在解 H_∞ optimization 問題會採用到 Nehari extension 的方式，或是使用 γ 疊代 (γ -iteration)；由 Nehari extension 的方式或是 γ 疊代可以由求解 H_∞ norm 的最佳解 (optimal solution) 或是次佳解 (sub-optimal solution) 來求出合適 γ 值，進而設計出控制器。

本篇論文控制器設計程序採用 McFarlane 和 Glover 提出的設計程序的方式[1]，稱為 Loop Shaping Design Procedure (簡稱為 LSDP)，其細節將在第三章部分討論，並且在第四章討論我們控制器設計的步驟。

在倒單擺控制文獻方面，我們參考了利用 Fuzzy 設計控制器控制倒單擺[11]以及利用 PID 設計控制器來控制倒單擺，也有利用混合方式設計控制器[12]；在前人的文獻中我們發現，倒單擺的實驗，若要使單擺能直立以及定位成功，一般而言，必須先考慮單擺角度直立問題，接著才考慮台車位置的定位效果；依照此方式，我們在第五章模擬以及第六章實驗時，也會依照這個方式，先考慮單擺直立的效果，接著再設計台車定位的效果。

1.3 研究方法

本篇論文的研究方式是先得到倒單擺的線性模型架構，利用 Vidyasagar 所提出的方式，拆解使其成為 “normalized coprime factor” 的形式，目的是為了考慮以線性方式得到的系統所造成的不確定性 (uncertainty)；經由解 riccati equation 以及 γ 疊代 (γ -iteration) 方式來得到合適的 γ 值，再利用 Loop Shaping Design Procedure 設計出控制

器；最後將控制器拆解為 observer 控制器。之後再探討此方法所得到控制器對控制倒單擺的穩健穩定性 (robust stability)、性能 (performance) 以及定位效果。

1.4 研究目的

本篇論文的研究目的在利用兩個自由度(2-degree-of-freedom) H_{∞} 方式設計控制器，並且加以改良設計；接著利用 matlab 的 simulink 模擬，觀察控制器之效能並且參考前人所設計的控制器作為比較，進而討論其效能；之後，進行實際的實驗，將設計出的控制器套用在倒單擺系統，觀察應用在實際系統上面的成效。

1.5 內容大綱

本文共分為七章；

- 第二章中推導出直立一維倒單擺以及直流馬達之動態模型，作為受控之參考模型。
- 第三章中將會對 coprime factor 拆解、normalized coprime factor 理論、設計出控制器以及 Loop shaped design procedure(LSDP)做一介紹。
- 第四章是針對實際倒單擺系統，採取 H_{∞} 方式設計控制器的步驟設計出控制器。
- 第五章是模擬與分析，利用 matlab 軟體中的 simulink 工具來模擬雙自由度的情況，並討論此理論應用於倒單擺模型上所得到的穩健穩定(robust stability) 以及效能(performance)，討論其效果。
- 第六章為實驗方式以及問題討論。
- 第七章的部分為結論，將對此方法，以及結果做一總結以及探討。

第2章 倒單擺物理系統及線性模式推導

第二章中，我們先介紹基本的倒單擺以及馬達的物理方程式推導。2.1 節我們首先介紹倒單擺方程式的推導；2.2 節中我們推導出電流驅動馬達的轉移函數，以作為模擬時的參考。

2.1 倒單擺物理系統的推導

我們採用之倒單擺其架構圖以及方向定義如下：

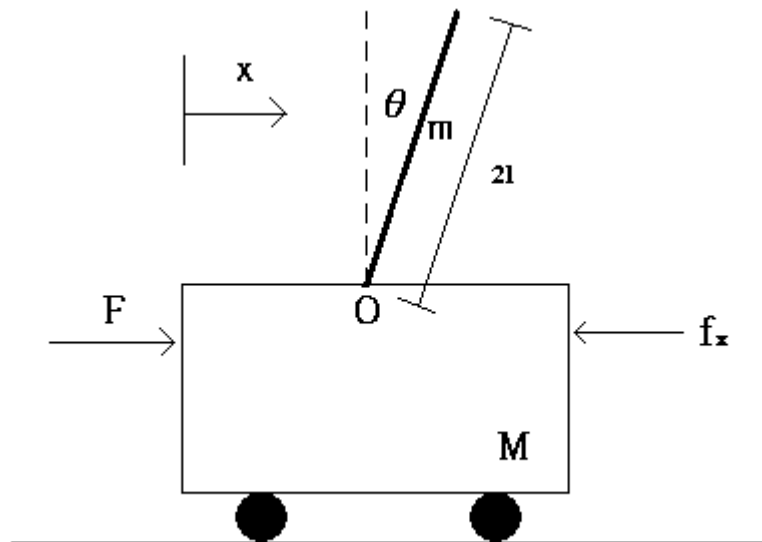


圖 2-1 倒單擺方程式推導架構圖

其中我們定義的參數如下：

- M 為台車質量；
- m 為單擺質量；
- F 為外力；
- l 為桿長的一半；

- θ 為單擺相對直立點的角度；
- f_x 為摩擦力；
- b 為摩擦係數；
- I 為轉動慣量(單擺上 O 點)；

利用 x 方向力平衡，可得方程式

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta = F - f_x \quad (2-1)$$

利用 O 點轉矩平衡，可得方程式

$$I\ddot{\theta} + m\ddot{x}l \cos\theta - mgl \sin\theta = 0 \quad (2-2)$$

其中的轉動慣量為

$$I = \frac{1}{12}m(2l)^2 + ml(l) = \frac{4}{3}ml^2 \quad (2-3)$$



將(2-3)式代入(2-2)式可得

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}l \cos\theta - mgl \sin\theta = 0 \quad (2-4)$$

(2-4)式經過化簡可得

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos\theta - g \sin\theta = 0 \quad (2-5)$$

接著我們考慮小角度範圍， θ 的角度約為 5° 之內的角度，目的是為了將我們所求得的方程式線性化；在這角度範圍下會有以下特性：

$$\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1, \dot{\theta} \approx 0$$

因此將上述線性特性代入方程式(2-1)和(2-5)式可得

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = F - f_x \quad (2-6)$$

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta} + \ddot{x} - g\theta = 0 \quad (2-7)$$

利用(2-6)式以及(2-7)式我們可以得 $\ddot{\theta}$ 與 \ddot{x} 的表示式


$$\ddot{\theta} = \frac{(F - f_x) - (M + m)g\theta}{ml - \frac{4}{3}l(M + m)} \quad (2-8)$$

$$\ddot{x} = \frac{mg\theta}{m - \frac{4}{3}(M + m)} - \frac{\frac{4}{3}(F - f_x)}{m - \frac{4}{3}(M + m)} \quad (2-9)$$

假設摩擦係數是與速度線性關係，則摩擦力可表示為

$$f_x = b\dot{x} \quad (2-10)$$

利用(2-8)、(2-9)、(2-10)式，我們可以得到系統的 state-space 表示式



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{4}{3}b}{m - \frac{4}{3}(M + m)} & \frac{mg}{m - \frac{4}{3}(M + m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-b}{ml - \frac{4}{3}l(M + m)} & \frac{-(M + m)g}{ml - \frac{4}{3}l(M + m)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\frac{4}{3}}{m - \frac{4}{3}(M + m)} \\ 0 \\ \frac{1}{ml - \frac{4}{3}l(M + m)} \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

其中的四個狀態分別為：

- x ：台車位置
- \dot{x} ：台車速度

- θ : 單擺相對直立點的角度
- $\dot{\theta}$: 單擺的角速度

註¹

2.2 馬達物理系統之數學模式

在第 2.1 節中，我們所推導的是傳統的倒單擺物理系統數學模式，在模擬時，我們為了使我們系統數學模式逼近真實系統的數學模式，因此我們針對馬達系統作一分析；再此我們選用直流馬達作為模擬使用。參考文獻[9]，直流馬達等效電路圖如下：

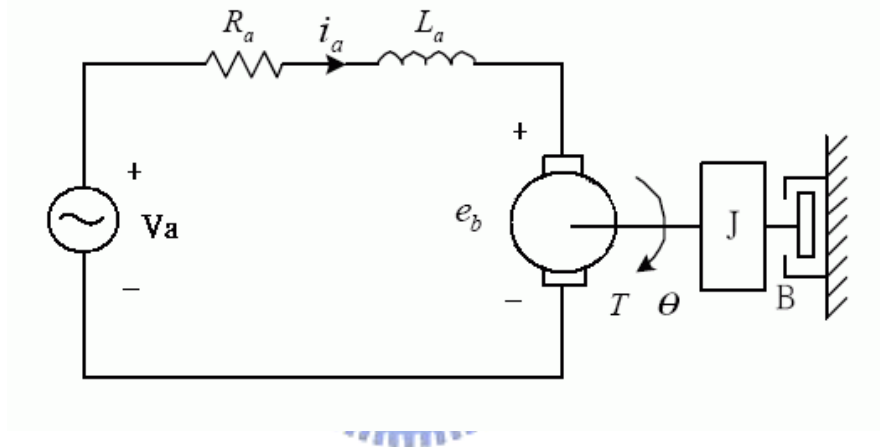


圖 2-2 電樞控制直流馬達等效電路圖

其中

R_a : 電樞電阻(Ω)

L_a : 電樞電感(H)

i_a : 電樞電流(A)

i_f : 場電流(A)

e : 電樞電壓(V)

¹參考文獻[9]中 Gene F.Franklin & J. David Powell 的 Feedback Control of Dynamic Systems 所推導的倒單擺方程式，對照比較，我們所推導的方程式由於角度正負號的定義不同，推導出來會有些不同；參考文獻[2]中 D.J.Walker 的系統，其方程式推導定義相同，所得到的方程式也相同，可用來證明我們推導的正確性。

e_b : 反電動勢(back emf) (V)

T : 馬達力矩 ($m \cdot N$)

θ : 馬達承軸(motor shaft)的角位移(rad)

J : 在馬達承軸端的等效慣量(包括馬達與負載)($m^2 \cdot kg$)

B : 在馬達承軸端的等效黏滯摩擦係數或阻尼係數(包括馬達與負載)(Nm/rad/sec)

利用

1、空氣間隙磁通量正比於場電流：

$$\phi = k_f \cdot i_f \quad (2-12)$$

其中 k_f 為比例常數

2、馬達力矩正比於電樞電流與間隙磁通量的乘積：

$$T = k_1 \cdot \phi \cdot i_a = k_1 \cdot k_f \cdot i_f \cdot i_a = k_T \cdot i_a \quad (2-13)$$

其中 k_1 為比例常數、 k_T 為馬達力矩常數

3、馬達反電動勢

$$e_b = k_b \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (2-14)$$

可得到電樞電路的電樞方程式

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e \quad (2-15)$$

以及負載力矩方程式

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} = T = k_f \cdot i_a \quad (2-16)$$

對馬達反電動勢(2-14)取拉式轉換，令其初始值為零

$$E_b(s) = k_b \cdot s \cdot \theta(s) \quad (2-17)$$

對電樞電路方程式(2-15)取拉式轉換，令其初始值為零

$$(L_a s + R_a)I_a(s) = E(s) - E_b(s) \quad (2-18)$$

對負載力矩方程式(2-16)取拉式轉換，令其初始值為零

$$(J s^2 + B s)\theta(s) = T(s) = k_T I_a(s) \quad (2-19)$$

利用式(2-17)、式(2-18)、式(2-19)，我們可得到直流伺服馬達的方程式，完整的方塊圖如下：

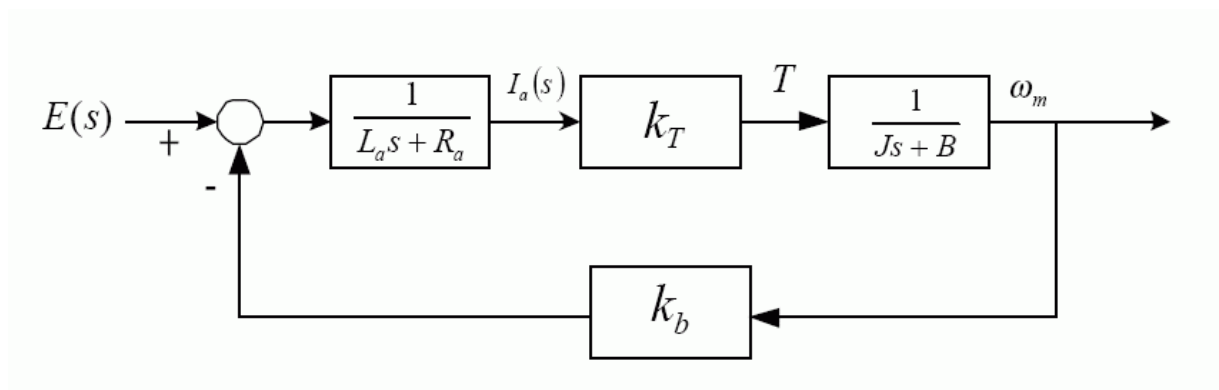


圖 2-3 電樞控制直流馬達方塊圖

下表為各參數的參考值：

表 2-1 參數值

Parameters	Descriptions
M	台車之重量(Mass of cart) : 0.8 Kg
m	單擺擺桿之重量(Mass of pendulum) : 0.21 Kg
l	單擺擺桿之一半長度(Distance to pendulum center of mass) : 0.9/2 m
g	重力加速度(Acceleration of gravity) : 9.8 $\frac{m}{s^2}$
R_a	馬達電樞電阻(Armature resistance) : 4.2 Ω
L_a	馬達電樞電感(Armature inductance) : 2.64mH
K_t	馬達力矩常數(Torque constant) : 0.18 $\frac{N \cdot m}{A}$
K_b	反電動勢電常數(Back emf voltage constant) : 0.18 $\frac{v \cdot sec}{rad}$
J	馬達承軸端等效慣量(Inertia) : 0.007 $Ng \cdot m^2$
B	馬達承軸端等效黏滯係數(Viscous damping) : 0.05 $\frac{N \cdot m \cdot sec}{rad}$

馬達系統以及倒單擺系統的開迴路架構可由下圖表示：

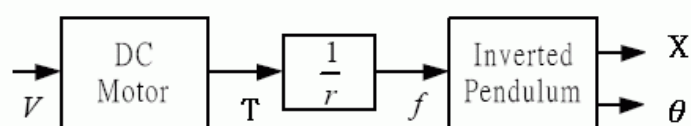


圖 2-4 系統開迴路方塊圖

其中 r 為馬達驅動輪半徑、 V 為輸入電壓、 T 為力矩、 f 為力； X 以及 θ 為單擺輸出值。

第3章 coprime factorization 理論介紹

在第三章中我們會依序介紹本篇論文使用到的理論，內容主要可以分為一下幾個部分：

3.1 節介紹 ‘coprime factor’ 的拆解方式以及介紹 ”Linear Fractional Transformations” 中的 “Lower Linear Fractional Transform” 和 “Upper Linear Fraction Transform” 的形式；3.1.1 將介紹 normalized LCF 的表示方式以及拆解方式；

3.2 節介紹 normalized LCF 系統控制器的設計；3.2.1 我們會以穩健穩定(robust stability)的角度去考慮控制器的設計；3.2.2 我們會介紹我們解 normalized LCF 系統控制器的方法以及結果；3.2.2.1 介紹所謂的 Nehari extension 方法；3.2.2.2 介紹 γ 疊代的方法；3.2.3 藉由求出的 γ 值，可代入 Glover 與 Mustafa 所推導出 normalized LCF 系統控制器方程式，求得控制器的解。

3.3 節對本論文使用的 Loop Shaping Design Process(簡稱 LSPD)作一介紹，以及此時加入補償的 weightings 後，對考慮效能(performance)的控制器作一說明。而拆解為 observer 控制器的方式我們在第四章第四節做一討論。



3.1 coprime factorization 以及 Linear Fractional Transformations

Vidyasagar 在 1985 年時提出了 “coprime factorization” 的基本架構(參考文獻[3])，可用下面的式子來表示：

$$G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (3-1)$$

其中 G 稱為 “nominal plant”，在本篇論文裡也就是我們推導出來的直流馬達以及倒單擺線性方程式，而 \tilde{M}, \tilde{N} 稱為 G 的 “left coprime factorization”(LCF)。同樣地，也可以拆解成相似的式子如下：

$$G = \tilde{M}\tilde{N}^{-1} \quad (3-2)$$

此時 \tilde{M}, \tilde{N} 稱為 G 的 “right coprime factorization”(RCF)。由於兩者的方式相似，本篇論文內容均以 left coprime factorization 為拆解方式；但拆解為 “right coprime factorization” 的結果和拆解為 left coprime factorization 是相同的。

接著我們考慮不確定性(uncertainty)以 left coprime factorization 表示的方式。我們可以把考慮不確定性(uncertainty)的系統 G_{Δ} 表示為下面的式子：

$$G_{\Delta} = (\tilde{M} + \Delta M)^{-1}(\tilde{N} + \Delta N) \quad (3-3)$$

其中 $\Delta M, \Delta N$ 分別是穩定的轉移函數，表示系統的不確定性(uncertainty)；其限制為 $\|[\Delta N, \Delta M]\|_{\infty} < \varepsilon$ 。其中 ε 稱為穩定限度(stability margin)，反應出系統可接受干擾的範圍。

接著考慮加入不確定性系統時通常會有幾種選擇的方式，分別為相加型不確定性(additive uncertainty)系統、相乘型不確定性(multiplicative uncertainty)系統以及 coprime factorization 型不確定性系統，其架構圖分別如下：

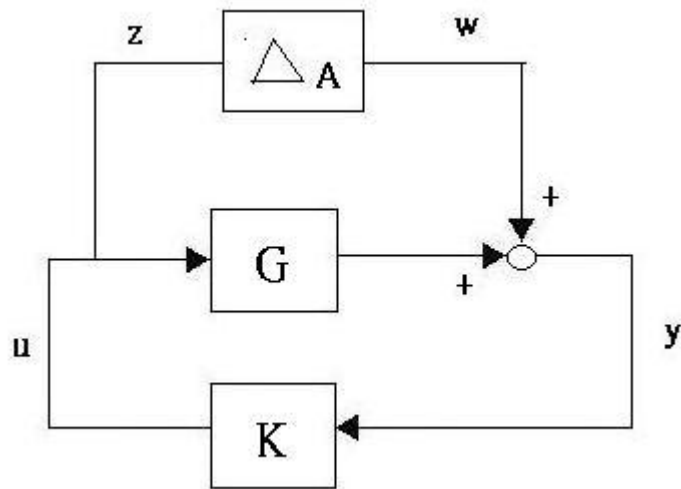


圖 3-1 相加型不確定性(additive uncertainty)系統

其中 ΔA 為相加型的不確定性； G 為系統模型； K 為控制器。

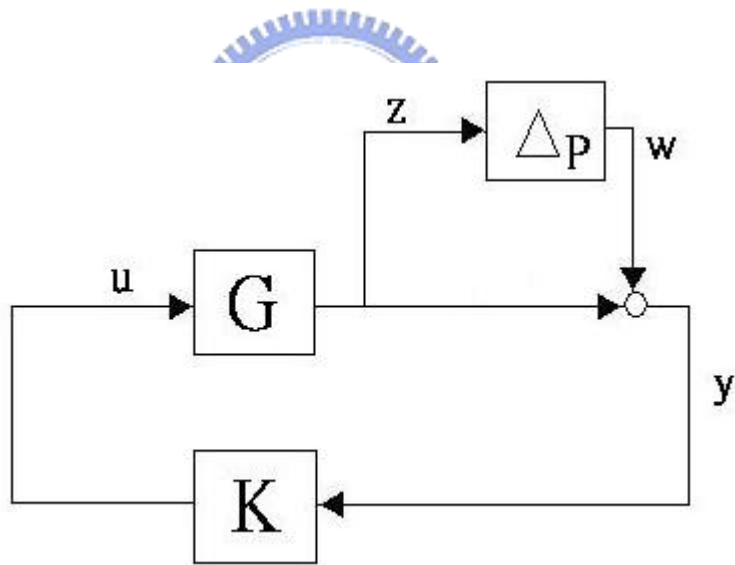


圖 3-2 相乘型不確定性(multiplicative uncertainty)系統

其中 Δp 為相乘型不確定性； G 為系統模型； K 為控制器。

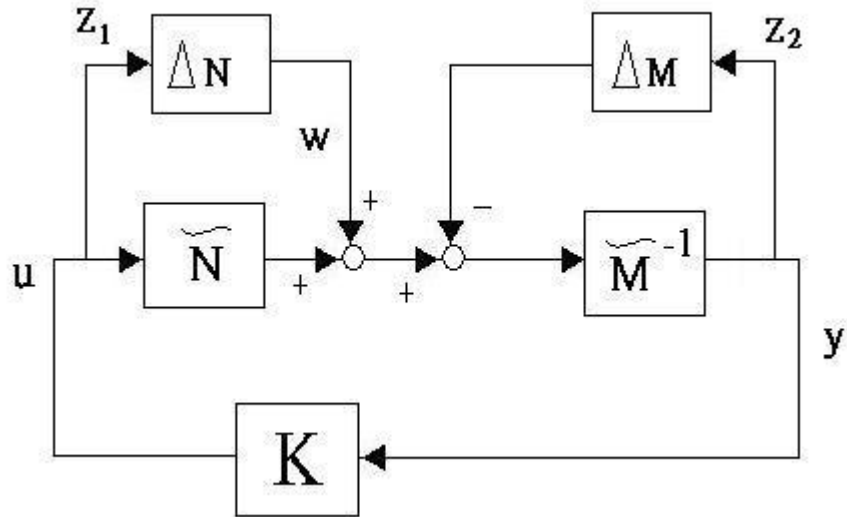


圖 3-3 coprime factorization 型不確定性系統

我們在本篇論文中所使用的均為 coprime factorization 型不確定性系統的架構圖，這種方式比起前二者的好處在於：利用 normalized left coprime factorizations 不確定性方式拆解之後， G 與 G_{Δ} 右半平面的極點位置和個數可以不同。其中不確定性(uncertainty)表示為 $\Delta = [\Delta M, \Delta N]$ 。

討論完三種加入不確定性的方式後，我們現在針對第三種方式，也就是討論加入 normalized left coprime factorizations 不確定性之後的系統 G_{Δ} ，其架構圖可表示為：

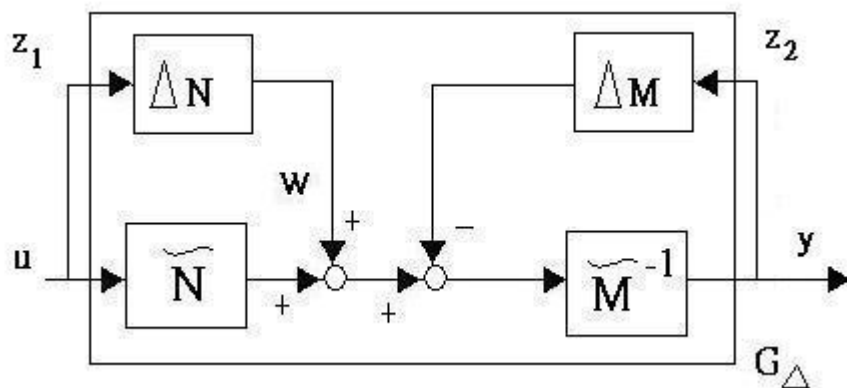


圖 3-4 加入不確定性後的模型以 normalized LCF 拆解架構圖

而加入了不確定性(uncertainty)的模型可利用輸入(w, u)對輸出(z_1, z_2, y)依照圖 3-4 推導出轉移函數：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

其中的 P 稱為標準模型(standard plant)，可表示為：

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{M}^{-1} & G \\ \tilde{M}^{-1} & G \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

接下來我們介紹 Linear Fractional Transformations (簡稱 LFT)，LFT 在控制理論中常被用在 H_∞ 最佳解的問題上，而其架構是可以呈現各種的回授設計；本篇論文主要使用到的定義有下面兩種：

- Lower Linear Fractional Transformation (簡稱 LLFT)，其架構圖為：

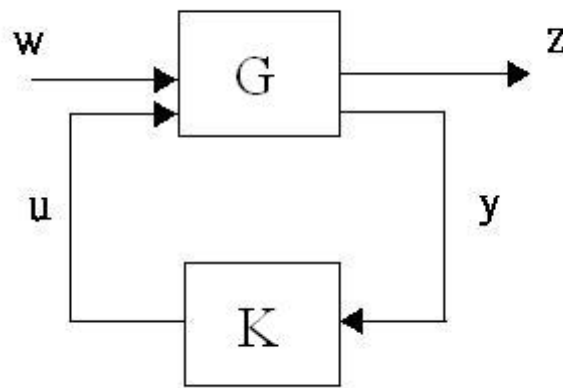


圖 3-5 Lower Linear Fractional Transformation 架構圖

圖中的 G 為系統轉移函數； K 為控制器； w 為干擾輸入(input disturbance)； z 為干擾輸出(output disturbance)； u 為系統輸入(plant input)； y 為系統輸出(plant output)。

在這種架構下的轉移函數被定義為：

$$F_L\left(\left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right], K\right) \equiv G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (3-6)$$

其中的限制是整個 LLFT 系統沒有右半面的極點，也就是符合 $\det(I - G_{22}K) \neq 0$ 、 $F_L(G, K)$ 是穩定的。

■ Upper Linear Fractional Transformation (簡稱 ULFT)，其架構圖為：

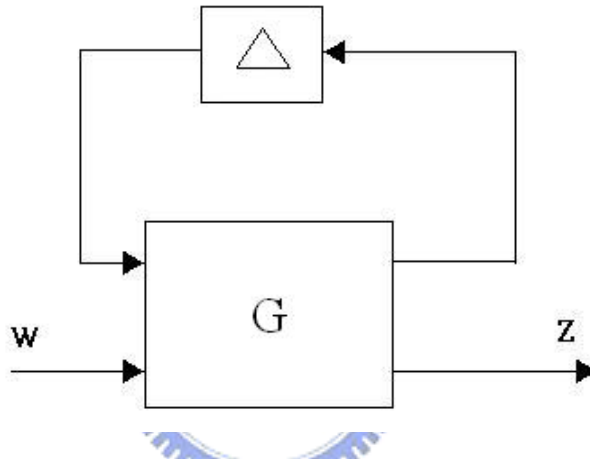


圖 3-6 Upper Linear Fractional Transformation 架構圖

其中 Δ 表示系統的不確定性。

在這種架構下的轉移函數被定義為：

$$F_U\left(\left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right], \Delta\right) \equiv G_{22} + G_{21}\Delta(I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12} \quad (3-7)$$

其中的限制為整個 ULFT 系統沒有右半面的極點，也就是符合 $\det(I - G_{11}\Delta) \neq 0$ 、 $F_U(G, \Delta)$ 是穩定的。

3.1.1 normalized left coprime factorization 與其拆解方式

由式(3-1)知，我們拆解 nominal plant 成 left coprime factorization 的方式可能不只一種，為了使拆解的方式固定，在這裡我們使用了唯一性的拆解，由 Vidyasagar 在 1988 年所提出(參考文獻[4])，稱為“normalized left coprime factorization”，其特性如下：

■ $\tilde{M}, \tilde{N} \in RH_{\infty}$ ， (\tilde{M}, \tilde{N}) 為 G 之 normalized left coprime factorization 若且唯一的條件為：

1) \tilde{M}, \tilde{N} 為 G 的 left coprime factorization ；

2) (\tilde{M}, \tilde{N}) 符合下式

$$\tilde{N}\tilde{N}^* + \tilde{M}\tilde{M}^* = I \quad (3-8)$$

為了統一我們的拆解方式、以及在之後方便利用前人研究所推導出的方程式，因此採用這種 normalized 方式來拆解。

Normalized left coprime factorization 的拆解方式由 Vidyasagar 在 1988 年提出(參考文獻[4])，其解法如下所述：

假設 (A,B,C,D) 是系統 G 的狀態方程式，則有以下的關係式：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3-9)$$

Vidyasagar 提出 normalized coprime factorization 可依照以下的式子拆解得到：

$$[\tilde{N}, \tilde{M}] = \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & B + HD & H \\ \hline R^{-1/2}C & R^{-1/2}D & R^{-1/2} \end{array} \right] \quad (3-10)$$

其中的 H 定義為

$$H \equiv -(ZC^* + BD^*)R^{-1} \quad (3-11)$$

Z 是 Generalized Filtering Algebraic Riccati Equation (GFARE) 的解²，而 $R = I + DD^*$ 。

3.2 控制器設計

3.2.1 穩健穩定(robust stability)控制器設計

控制器設計的基本架構圖可用下圖表現出：

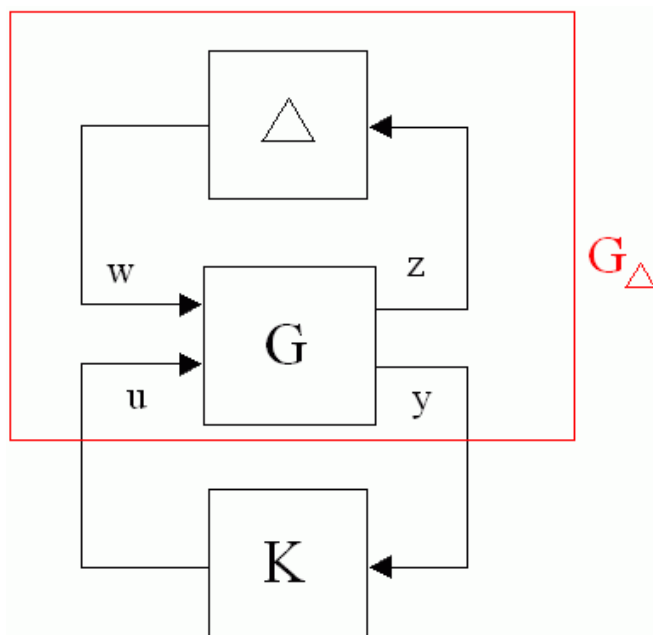


圖 3-7 控制器設計的架構圖

利用 3.1 節我們推導出了 left coprime factorization 標準模型 P (standard plant) 的表示方式(在此即為加入不確定性的系統 G_Δ)，再利用 LLFT，依照圖 3-7 我們可以根據式(3-5) 以及式(3-7)得到下面的轉移函數關係式：

² Generalized Control Algebraic Riccati Equation (簡稱 GCARE) 方程式如下：
 $(A - BS^{-1}D^*C)^* X + X(A - BS^{-1}D^*C) - XBS^{-1}B^*X + C^*R^{-1}C = 0$

Generalized Filtering Algebraic Riccati Equation (簡稱 GFARE) 方程式如下：
 $(A - BS^{-1}D^*C)Z + Z(A - BS^{-1}D^*C)^* - ZC^*R^{-1}CZ + BS^{-1}B^* = 0$
 其中 $R = I + DD^*$ ， $Z = I + D^*D$ 。

$$\begin{aligned}
F_L \left(\left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array} \right], K \right) &= P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21} \\
&= \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \\ (I + GK(I - GK)^{-1}) \tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \\ (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \tag{3-12}
\end{aligned}$$

■ 考慮其穩健穩定性(robust stability)：

在式(3-12)中，控制器 K 能夠穩定加入不確定性的系統 $G_\Delta = (\tilde{M} + \Delta M)^{-1}(\tilde{N} + \Delta N)$ 成立的條件為：

- (a) 控制器要能穩定未加入不確定性的系統 G (nominal plant) ；
- (b) 我們所得到的 LLFT 要小於一個限制的 ε (stability margin) 的倒數，可表示如下：³

$$\left\| \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \\ (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} \tag{3-13}$$

在式(3-13)我們可以發現，在考慮穩健穩定(robust stability)時，利用這種拆解成 left coprime factorization 的系統，可將問題變成解 H_∞ 範數(H_∞ norm)的問題；也就是解轉移函數的最大特徵值(maximum singular value)。

如果我們未將系統 G 拆解為 normalized LCF 的形式，則接下來解控制器就沒辦法代入標準的型式；在本篇論文中我們則分別利用 riccati equation 的解以及疊代方式來求 γ ，下兩小節中我們將介紹 γ 疊代(γ -iteration)的方法以及 Nehari extension 的方式來解 γ

³ 參考文獻[1]中，pp. 37~38 之推導。

值。

3.2.2 以 normalized LCF 拆解系統時控制器的解

當我們把系統拆解為 normalized LCF 時，其最大的好處是控制器有一標準解 (3-21)。其中 γ 值可以用 γ 疊代(γ -iteration)的方式或是利用 Nehari extension 的方式來求解 γ 。以下我們對 Nehari extension 以及 γ 疊代(γ -iteration)方法作一介紹。

3.2.2.1 Nehari extension 方法介紹

概略的說，Nehari extension 的方式會包含兩個轉移函數， R 、 Q ； R 是一個不穩定的轉移函數(unstable transfer function)， Q 是一個穩定的轉移函數(stable transfer function)，而我們根據選擇 Q ，使得 $(R+Q)$ 的 H_∞ 範數(H_∞ norm)越小越好；可用下式來表示：

$$\|R+Q\|_\infty \leq \alpha \quad (3-14)$$

其中 α 值 $> \|R^*\|_H$ ⁴。



Glover 在 1984 年提出，當等號成立時，Nehari extension 可表示為如下：

$$\inf_{Q \in RH_\infty} \|R+Q\|_\infty = \|R^*\|_H \quad (3-15)$$

其中 RH_∞ 是指轉移函數的極點均不在右半平面⁵。

在式(3-15)中當等號不成立時，我們稱其為次佳(sub-optimal) Nehari extension，而當等號成立時稱為最佳(optimal) Nehari extension。

⁴ $\|R^*\|_H$ 其中 R^* 表示 complex conjugate transpose， $\|\bullet\|_H$ 表示 Hankel norm，參考文獻[1]。

⁵ RH_∞ 是指轉移函數的極點不在右半平面(RHP)；
 RL_∞ 是指轉移函數的極點不在虛軸(imaginary axis)上。

3.2.2.2 利用 γ 疊代的方式來求解 γ 值

參考文獻[1]第三章所提到的方式來疊代，在此作一簡單介紹。首先我們先選定一最大 γ 值(γ_{\max})與最小 γ 值(γ_{\min})作為參考，步驟如下：

step1：令 $\gamma = \frac{\gamma_{\max} + \gamma_{\min}}{2}$ ，檢查 $\gamma^2 > \rho(X \cdot Z)$ 是否成立；($X \cdot Z$ 為 riccati equation 的解，

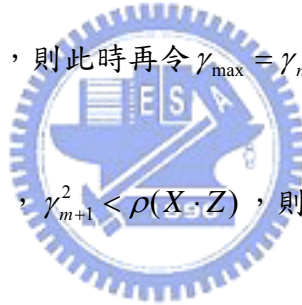
$\rho(X \cdot Z)$ 表示 $X \cdot Z$ 的最大特徵值(eigenvalue)加 1)⁶

step2：若成立，則此時 $\gamma_{\max} = \gamma$ ， $\gamma_{\text{new}} = \frac{\gamma_{\max} + \gamma_{\min}}{2}$ ，再檢查 $\gamma_{\text{new}}^2 > \rho(X \cdot Z)$ 是否成立；

若不成立，則表示 γ 值已經無法滿足 $\gamma^2 > \rho(X \cdot Z)$ 。

Step3：若 $\gamma_{\text{new}}^2 > \rho(X \cdot Z)$ 成立，則此時再令 $\gamma_{\max} = \gamma_{\text{new}}$ ，回到 step2，繼續檢查；

最後，可以得到 $\gamma_m^2 > \rho(X \cdot Z)$ ， $\gamma_{m+1}^2 < \rho(X \cdot Z)$ ，則 γ_m 即為最小的 γ 值。



3.2.3 拆解為 normalized LCF 系統其控制器的解

利用 Nehari extension 方式解 normalized coprime factorization 系統的控制時，我們的方式是找到轉移函數為以下形式作為 R 轉移函數，其形式如下：

$$R = \begin{bmatrix} -\tilde{N}^* \\ \tilde{M}^* \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

接著我們把 K 拆解為 $K = UV^{-1}$ (right coprime factorization) 的形式，利用 Nehari extension 我們可得到如下的式子：

⁶ 當 γ 為最小值時，滿足 $\gamma^2 = 1 + \lambda(X \cdot Z)$ ，參考文獻[1]第 4.3.2 小節。

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{N}^* \\ \tilde{M}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq (1 - \gamma^{-2})^{1/2} \quad (3-17)$$

和式(3-14)比較，此時 $\alpha = (1 - \gamma^{-2})^{1/2}$ 。

此時控制器 K 亦會滿足(3-13)式的情況：

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (3-18)$$

利用 Doyle 在 1988 年(參考文獻[1])所推導出的結果，我們可以得到一個確切的 γ 解：

$$\gamma_{\min}^2 = \varepsilon_{\max}^{-2} = 1 + \lambda \max(ZX) \quad (3-19)$$

其中的 X 、 Z 分別為 GCARE 與 GFARE 的解。

■ 利用 γ 求控制器解的方式



經由上面兩小節的其中一種方式求得的 γ 值，利用 Glover 和 Mustafa 在 1989 年(參考文獻[5])提出了控制器的解法，其控制器可表示為：

$$K = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A + BF + \gamma^2 W_1^{*-1} ZC^*(C + DF)}{B^* X} & \frac{\gamma^2 W_1^{*-1} ZC^*}{-D^*} \end{array} \right] \quad (3-20)$$

其中的 X 、 Z 分別為 GCARE 與 GFARE 的解； F 與 W_1 分別為：

$$F = -S^{-1}(D^* C + B^* X) \quad (3-21)$$

$$W_1 = I + (XZ - \gamma^2 I) \quad (3-22)$$

其中 $S = I + D^* D$ 。

將 γ 值以及已知的 F 、 W_1 、 X 、 Z 代入，即可得到控制器。在這節提到解 normalized

LCF 系統控制器的方式，是利用解兩個 Algebraic Riccati Equations 的解來求得 γ 值，再帶入式(3-20)標準的控制器解設計出控制器 K 。所以我們所採用的方式是先將系統拆解為 normalized LCF，接著解兩個 riccati equation 之後，再使用疊代的方式來求 γ 值，帶入式(3-20)得到控制器。

3.3 Loop Shaping Design Procedure 介紹

Loop shaping design procedure 是本篇論文所採用的主要方法，利用這個方式的好處在於，對 normalized LCF 的架構而言，我們可以同時考慮穩健穩定(robust stability)和效能(performance)的問題，確保閉迴路系統的穩定，並且得到確切的 ε_{\max} 解。

3.3.1 Loop Shaping 方法介紹

Loop shaping 的最大好處是，我們可以利用開迴路(open-loop)轉移函數的最大特徵值來得知閉迴路(closed-loop)轉移函數的最大特徵值；換句話說，我們可以在開迴路設計一控制器來使閉迴路達到穩健穩定(robust stability)或是效能(performance)上的需求。可用以下圖示表示之：

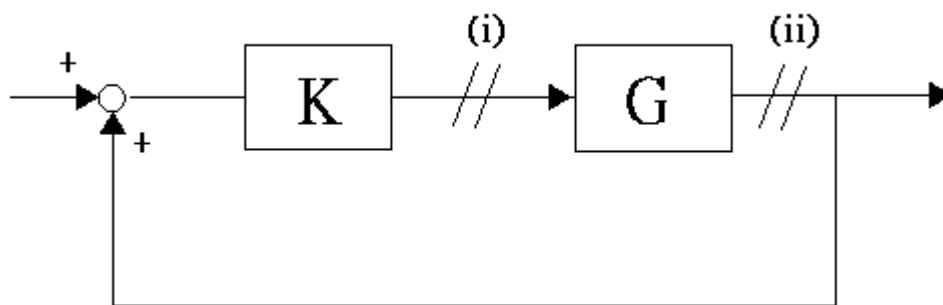


圖 3-8 閉迴路系統

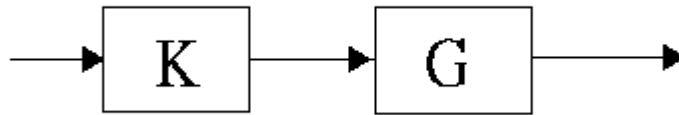


圖 3-9 開迴路系統

在圖 3-8 中，(i)、(ii) 分別代表一個分裂點 (break point)，由 (i) 到 (ii) 可看為由系統的輸入干擾 (input disturbance) 到系統輸出 (plant output)，其轉移函數可寫為 $((I - GK)^{-1}G)$ ，而最大特徵值可表示為 $\bar{\sigma}((I - GK)^{-1}G)$ ⁷。以下為一些有會用到的輸入輸出其最大特徵值的表示法：

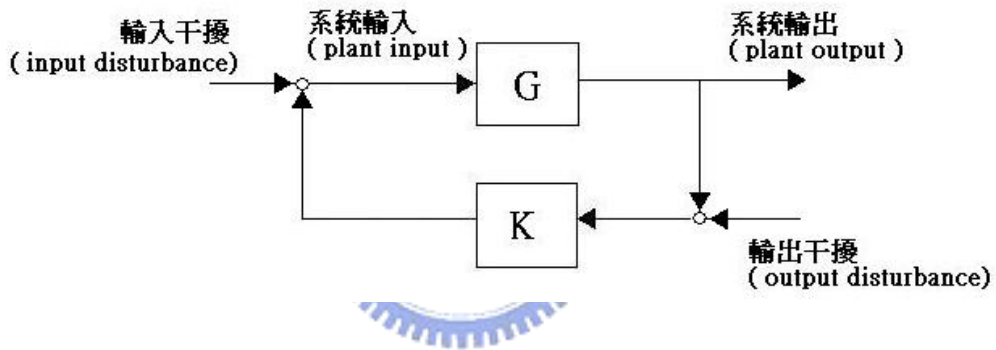


圖 3-10 系統輸入、輸出，以及輸入干擾和輸出干擾的相對位置圖

利用此圖我們可以求的一些輸入輸出轉移函數，將其整理如下：

表 3-1 系統輸入、輸出，以及輸入干擾和輸出干擾所形成的轉移函數最大特徵值

轉移函數最大特徵值	輸入與輸出的相關位置
$\bar{\sigma}((I - GK)^{-1})$	由輸出干擾 (output disturbance) 到系統輸出 (plant output)
$\bar{\sigma}((I - KG)^{-1})$	由輸入干擾 (input disturbance) 到系統輸入 (plant input)

⁷ $\bar{\sigma}(\bullet)$ 表示最大特徵值， $\underline{\sigma}(\bullet)$ 表最小特徵值。

$\bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1})$	由輸出干擾(output disturbance)到系統輸入(plant input)
$1/\bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1})$	設計閉迴路穩定時，不確定性相加(additive)型系統最大可接受的干擾程度
$\bar{\sigma}((I - GK)^{-1}G)$	由輸入干擾(controller input disturbance)到系統輸出(plant output)
$1/\bar{\sigma}((I - GK)^{-1}G)$	設計閉迴路穩定時，不確定性相加型系統(additive plant)控制器最大可接受的干擾程度
$\bar{\sigma}(GK(I - GK)^{-1})$	由控制器輸入干擾(controller input disturbance)到系統輸出(plant output)
$1/\bar{\sigma}(GK(I - GK)^{-1})$	設計閉迴路穩定時，不確定性相乘型系統(multiplicative plant)最大可接受的輸出干擾程度
$\bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1}G)$	由輸入干擾(input disturbance)到控制器輸出(controller output)
$1/\bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1}G)$	設計閉迴路穩定時，不確定性相乘型系統(multiplicative plant)最大可接受的輸入干擾程度

接著我們針對靈敏性(sensitivity)、相加型不確定性的穩健度(robustness in the face of additive uncertainty)、補充靈敏度(complementary sensitivity)、減低輸入干擾對輸出干擾的影響(rejection of plant input disturbances at the plant output)所得到的轉移函數的特徵值作一討論：

(a) 靈敏性(sensitivity)：使干擾輸出(output disturbance)到系統輸出(plant output)的轉移函數之最大特徵值降到最低得到；也就是表 3.1 中的 $\bar{\sigma}((I - GK)^{-1})$ 項，其推導如下：

$$\bar{\sigma}((I - GK)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I - GK)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK) - 1} \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)} \quad (3-23)$$

近似時的條件為開迴路的最小特徵值要遠大於 1，也就是 $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$ ；

(b) 相加型不確定性的穩健度(robustness in the face of additive uncertainty)：藉由降低表 3.1 中的 $\bar{\sigma}(K(I-GK)^{-1})$ 最大特徵值得到，可表示如下：

$$\bar{\sigma}(K(I-GK)^{-1}) \leq \frac{\bar{\sigma}(K)}{\underline{\sigma}(GK)-1} \approx \frac{1}{\bar{\sigma}(K)} \quad (3-24)$$

近似時的條件為開迴路的最大特徵值要遠小於 1，也就是 $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ ；

(c) 補充靈敏度(complementary sensitivity)：使感應器靈敏度(sensor noise)到系統輸出(plant output)的轉移函數之最大特徵值降到最低得到；也就是表 3.1 中的 $\bar{\sigma}(GK(I-GK)^{-1})$ 項，其表示如下：

$$\bar{\sigma}(GK(I-GK)^{-1}) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}((GK)^{-1})-1} \approx \bar{\sigma}(GK) \quad (3-25)$$

近似時的條件為開迴路的最大特徵值要遠小於 1，也就是 $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ ；

(d) 減低輸入干擾對輸出干擾的影響(rejection of plant input disturbances at the plant output)：可藉由降低表 3.1 中的 $\bar{\sigma}((I-GK)^{-1}G)$ 得到，可表示如下：

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}((I-GK)^{-1}G) &= \bar{\sigma}\{((GK)^{-1}-I)^{-1}(GK)^{-1}G\} \\ &\approx \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} \end{aligned} \quad (3-26)$$

近似時的條件為開迴路的最小特徵值要遠大於 1，也就是 $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$ ；

其中值得注意的是，其中(a)、(d)項是和效能(performance)相關，其條件均為 $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$ ；而(b)、(c)項是和穩健穩定(robust stability)相關，其條件均為 $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ 。

由這結果我們可以推斷出，要在所有的頻率下都達到最好的穩健穩定(robust stability)和效能(performance)是不可能的；要達到最好的穩健穩定(robust stability)就會造成效能(performance)降低，反之亦然。但是我們仍然可以達到設計上的需要；例如一般在低頻時($\omega \in (0, \omega_L)$)，效能(performance)是比較重視的部分，因此我們在此時可以選擇 $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$ ，使效能(performance)滿足需求；而在高頻時($\omega \in (\omega_U, \infty)$)，穩健穩定(robust stability)是比較重視的部分，因此我們在此時可以選擇 $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ ，使穩健穩定(robust stability)滿足需求。因此我們的開迴路設計的頻域範圍可用下面的圖形說明：

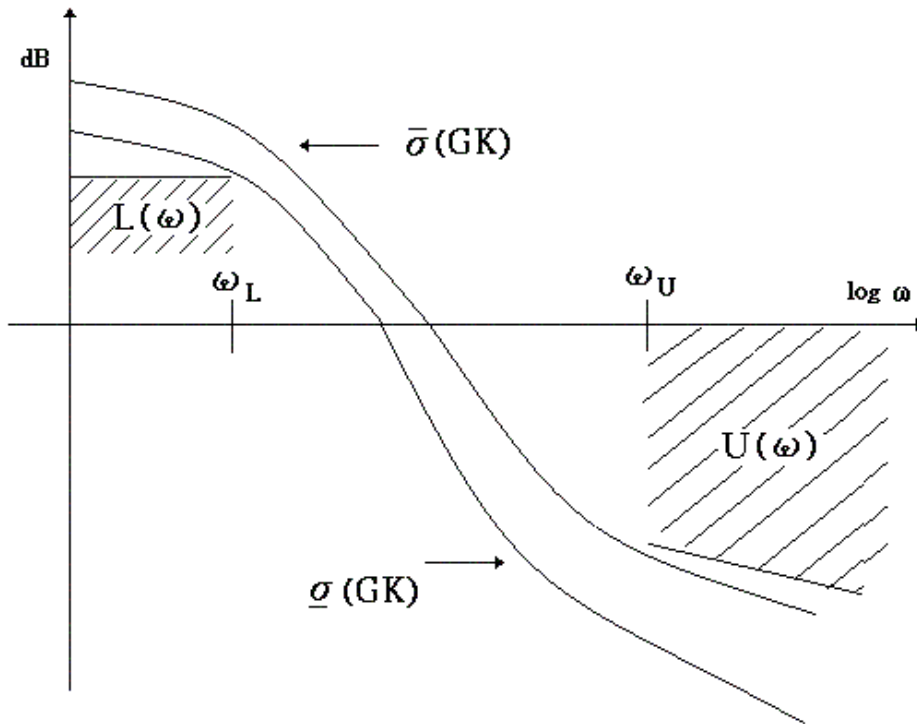


圖 3-11 開迴路的特徵值(singular value)限制情形⁸

我們控制器開迴路設計的特徵值(singular value)範圍必須在圖 3-11 $\underline{\sigma}(GK)$ 和 $\bar{\sigma}(GK)$ 之間。

⁸ 圖 3-11 中 $L(\omega)$ 和 $(0 \sim \omega_L)$ 的區域表低頻範圍； $U(\omega)$ 和 $(\omega_U \sim \infty)$ 的區域表高頻範圍。

3.3.2 Loop shaping design procedure(LSPD)設計程序

在這節中，我們介紹的 LSPD 方式設計迴路系統，其設計方式主要可以分為三個步驟：

(a) Loop shaping：首先在我們的系統模型 G 前(pre-)以及後(post-)加入補償的 weighting，可以由下圖表示出：

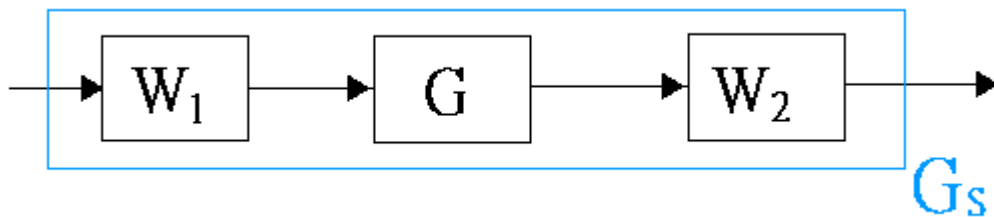


圖 3-12 shaped plant

加了補償 weightings 之後的系統 G_s 稱為 ”shaped plant”，可表示為 $G_s = W_2 G W_1$ ；而增加補償 weightings 之後的好處是控制器可以同時考慮到系統效能(performance)以及穩健穩定(robust stability)的問題。此處我們假設 W_1, W_2 的選擇不會使 G_s 產生隱藏的不穩定情況(unstable hidden modes)。

(b) 穩健穩定(robust stability)與效能(performance)：

■ 考慮其穩健穩定(robust stability)性：

- 計算 ε_{\max} ，如果 $\varepsilon_{\max} \ll 1$ ，則回到第一步驟重新調整 weightings；原因是如果 ε_{\max} 太小的話我們無法同時滿足穩健穩定(robust stability)、效能(performance)以及穩健的閉迴路穩定(robust closed-loop stability)。
- 選擇一個 ε ，使 $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ ，此時利用 3.2.3 節控制器設計的方法可得到一個控制器 K_{∞} ，可以滿足 G_s 穩健穩定(robust stability)。其表示法如下：

$$\left\| \begin{bmatrix} K_\infty (I - G_S K)^{-1} \tilde{M}_S^{-1} \\ (I - G_S K)^{-1} \tilde{M}_S^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} \quad (3-27)$$

控制器 K_∞ 以及系統 G_S 的架構如下：

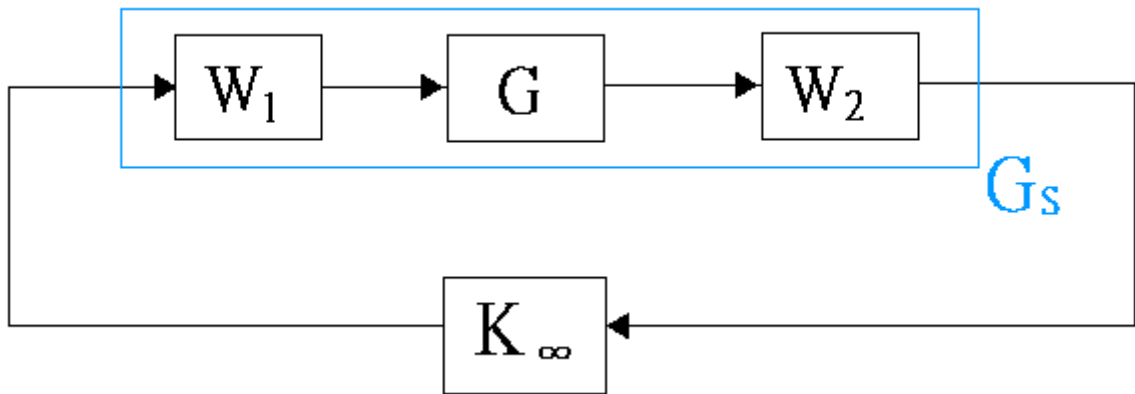


圖 3-13 Loop shaped design procedure 加入控制器的架構圖

■ 考慮其效能(performance)性：

由(3-28)式我們可以同樣設定一個效能(performance)參數 γ ，因為加入了 weightings 後，使我們控制器能滿足效能(performance)需求；其式子可表示為：

$$\left\| \begin{bmatrix} K_\infty (I - G_S K)^{-1} \tilde{M}_S^{-1} \\ (I - G_S K)^{-1} \tilde{M}_S^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (3-28)$$

其中的 γ 代表效能(performance)參數；值得注意的是 $\gamma \times \varepsilon \leq 1$ ，因此我們若為了增加效能(performance)，選擇 $\gamma \gg 1$ ，則此時 $\varepsilon \ll 1$ ，也就是說穩健穩定(robust stability)會變差；反之亦然。

在這附註提到，當控制器 K 會使 H_∞ 範數(H_∞ norm)產生最小值時，會有下式最佳解(optimal solution)的情況成立：

$$\inf_K \left\| \begin{bmatrix} K_\infty (I - G_S K)^{-1} \tilde{M}_S^{-1} \\ (I - G_S K)^{-1} \tilde{M}_S^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \varepsilon_{\max}^{-1} = \gamma_{\min} \quad (3-29)$$

此時 ε_{\max} 稱為最大穩定限度 (maximum stability margin)，而此時相對的 γ 會有最小值 ($=\gamma_{\min}$)，此時 γ_{\min} 與 ε_{\max} (maximum stability margin) 會有互為倒數的情形。

(c) 最終控制器 (final controller)：

接著將 weighting 項轉移到控制器 K_∞ ，我們可以得到最終的控制器 (final controller)，可表示為：

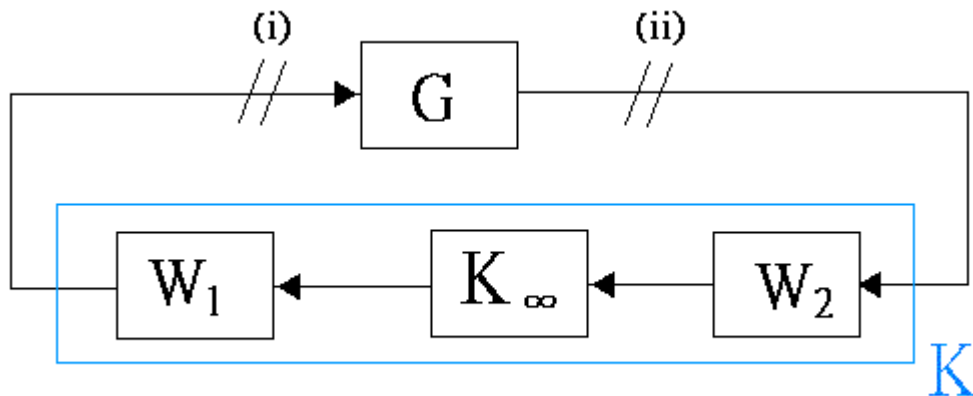


圖 3-14 最終控制器 (final controller) 的表示形式

在系統輸入 (plant input)，也就是圖中 (i) 的位置，可將轉移函數表示為 $W_1 K_\infty W_2 G$ ；而在系統輸出 (plant output)，也就是圖中 (ii) 的位置，其轉移函數可視為 $G W_1 K_\infty W_2$ 。由圖 3-11 我們可以得到一個相對的圖形，下圖中表示出 shaped 系統與加入控制器後系統的特徵值限制：

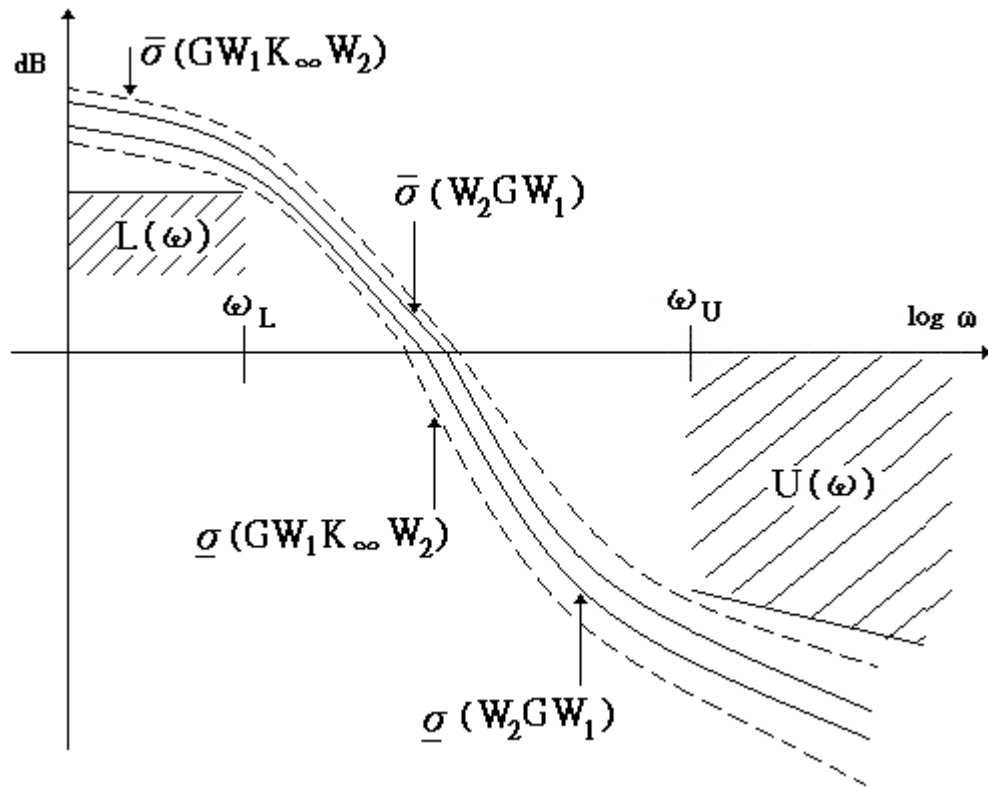


圖 3-15 shaped 與加入控制器後系統的最大特徵值限制

我們可以比較圖 3-11 與圖 3-15，在高、低頻時，根據 D.C. McFarlane 與 K. Glover 在參考文獻[1]所提到，會有下列特性：

- 在低頻時，當控制器 K_∞ 滿足(3-27)式：

$$\left\| \begin{bmatrix} K_\infty \\ I \end{bmatrix} (I - G_S K_\infty)^{-1} \tilde{M}_S^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (3-30)$$

其中 $(\tilde{N}_S, \tilde{M}_S)$ 是 G_S 的 normalized LCF，且 G_S 為方陣，則可訂出控制器在低頻時的特徵值範圍如下：

$$\underline{\sigma}(K_\infty(j\omega)) \geq \frac{\underline{\sigma}(G_S(j\omega)) - (\gamma^2 - 1)^{1/2}}{(\gamma^2 - 1)^{1/2} \underline{\sigma}(G_S(j\omega)) + 1} \quad (3-31)$$

其中限制為 $\underline{\sigma}(G_s(j\omega)) > (\gamma^2 - 1)^{1/2}$; 而當 $\underline{\sigma}(G_s(j\omega)) \gg (\gamma^2 - 1)^{1/2}$ 時, 可以得到

$$\underline{\sigma}(K_\infty(j\omega)) \geq (\gamma^2 - 1)^{-1/2} \quad (3-32)$$

■ 同樣地, 在高頻時, 當控制器 K_∞ 亦須滿足(3-27)式:

$$\left\| \begin{bmatrix} K_\infty \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_\infty)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (3-33)$$

我們可以得到相似的結果:

$$\overline{\sigma}(K_\infty(j\omega)) \leq \frac{(\gamma^2 - 1)^{1/2} + \overline{\sigma}(G_s(j\omega))}{1 - (\gamma^2 - 1)^{1/2} \overline{\sigma}(G_s(j\omega))} \quad (3-34)$$

其中限制為 $\overline{\sigma}(G_s(j\omega)) < (\gamma^2 - 1)^{-1/2}$; 而當 $\overline{\sigma}(G_s(j\omega)) \ll (\gamma^2 - 1)^{-1/2}$ 時, 可以得到

$$\overline{\sigma}(K_\infty(j\omega)) \leq (\gamma^2 - 1)^{1/2} \quad (3-35)$$



最後我們這裡引用一些 M.C. McFarlane 與 K. Glover[1] 推導出表 3-1 中所提到的輸入輸出的轉移函數, 它們的頻域範圍如以下所示:

$$\overline{\sigma}(K(I - GK)^{-1}) \leq \gamma \overline{\sigma}(\tilde{M}_s) \overline{\sigma}(W_1) \overline{\sigma}(W_2) \quad (3-36)$$

$$\overline{\sigma}((I - GK)^{-1}) \leq \gamma \overline{\sigma}(\tilde{M}_s) c(W_2) \quad (3-37)$$

$$\overline{\sigma}(K(I - GK)^{-1}G) \leq \gamma \overline{\sigma}(\tilde{N}_s) c(W_1) \quad (3-38)$$

$$\overline{\sigma}((I - GK)^{-1}G) \leq \frac{\gamma \overline{\sigma}(\tilde{N}_s)}{\underline{\sigma}(W_1) \underline{\sigma}(W_2)} \quad (3-39)$$

$$\overline{\sigma}((I - KG)^{-1}) \leq 1 + \gamma \overline{\sigma}(\tilde{N}_s) c(W_1) \quad (3-40)$$

$$\overline{\sigma}(G(I - KG)^{-1}K) \leq 1 + \gamma \overline{\sigma}(\tilde{M}_s) c(W_2) \quad (3-41)$$

其中 $(\tilde{N}_s, \tilde{M}_s)$ 是 G_s 的 normalized LCF，而 $c(\bullet)$ 定義為 $\bar{\sigma}(\bullet)/\underline{\sigma}(\bullet)$ ，也就是最大特徵值除以最小特徵值。

第三章中我們介紹了我們本篇會使用的基礎理論架構，第四章中我們將會討論 observer 控制器以及對倒單擺系統的設計方式。



第4章 倒單擺系統鑑別以及控制器設計步驟

在本章中，我們先利用系統鑑別方式將馬達、驅動器以及台車速度鑑別出，連結台車與單擺，導出倒單擺的系統；接著再針對控制器設計的步驟作一討論。最後一節我們介紹改變 observer 控制器極點位置，但是對 γ 不產生影響的方式。

4.1 節我們先介紹使用的設備，包括了馬達、驅動器以及倒單擺系統；

4.2 節中我們討論系統鑑別之方式以及結果；

4.3 節中我們介紹控制器設計步驟以及注意事項；

4.4 節對改變 observer 控制器極點位置作一介紹。



4.1 設備介紹

本論文所實驗之實驗硬體機構實體圖，如下圖所示：

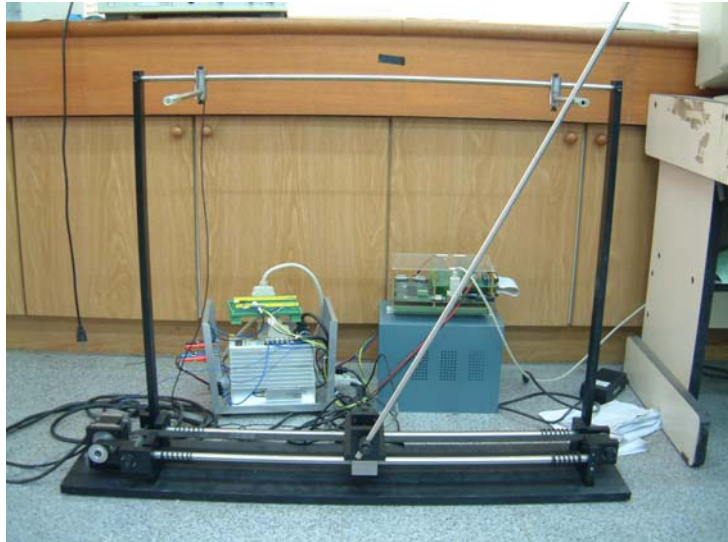


圖 4-1 倒單擺機台硬體圖

圖 4-1為倒單擺硬體平台全貌，馬達位於左側，利用皮帶及齒輪帶動台車移動，台車前端可更換長短單擺。台車及馬達上共有兩個編碼器，分別為位置以及角度的編碼器；編碼器將角度以及位置的訊號傳送到驅動器之後，再傳送至DSP卡上(本實驗所使用的DSP控制卡為加拿大syscor公司出產，內部採用德州儀器所生產的TMS320F243定點運算晶片)，接著經由RS-232傳送回電腦，可在電腦上讀取real-time的資料。

圖 4-2 為台車及裝載上面之單擺角度編碼器：

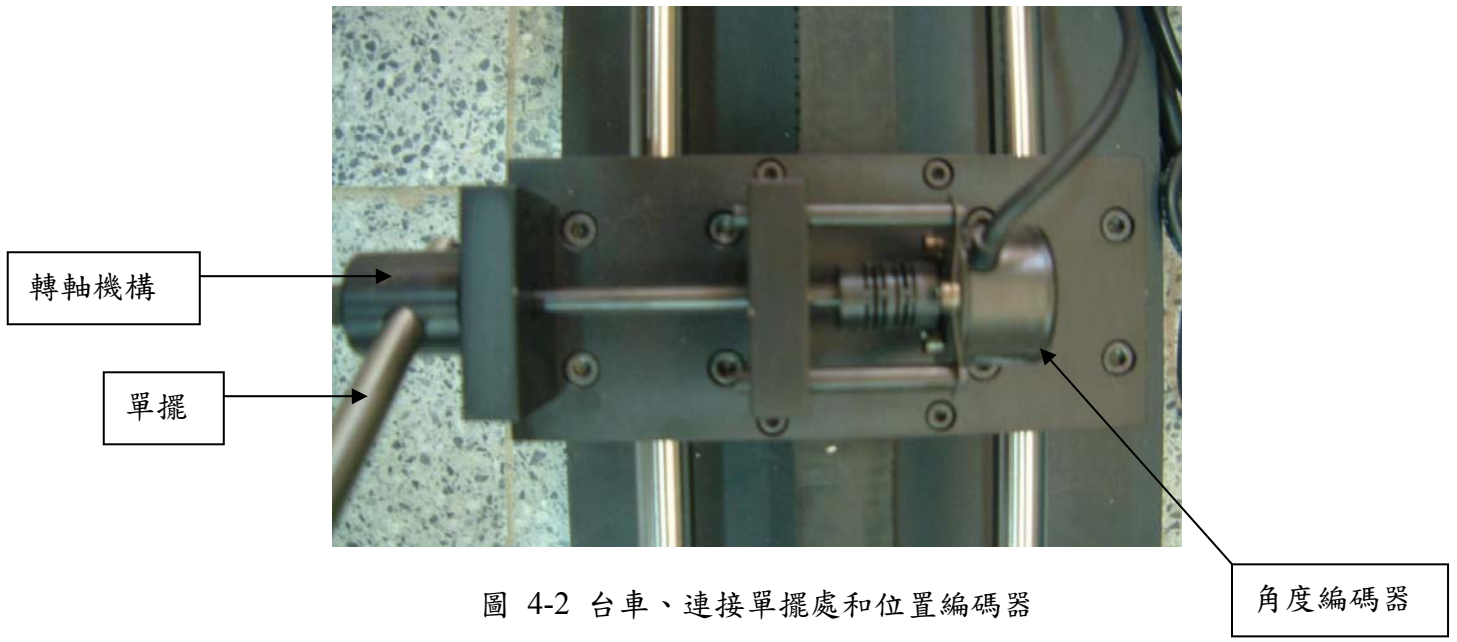


圖 4-2 台車、連接單擺處和位置編碼器

台車連接皮帶以及滑軌，台車上載有單擺、角度編碼器以及連接單擺的轉軸機構，角度編碼器解析度，經過量測，1m可分為4000個單位(counter)⁹。

圖 4-3 為倒單擺之伺服馬達及傳動機構：

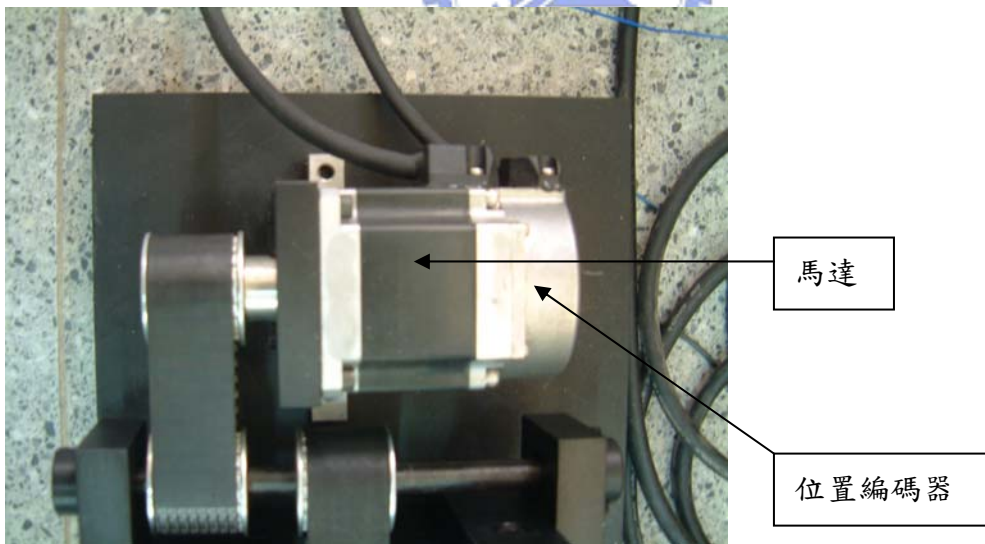


圖 4-3 AC 伺服馬達以及傳動機構

馬達型號為 TBL-iii series AC servo Motor，馬達定格轉速3000rpm，額定相電流 2.2A；馬達編碼器為光學增量型、主電源為三相AC 220V；馬達與台車以皮帶連接，經

⁹ 在此 counter 指的是編碼器的值，我們將其一單位令為一 counter。

由圖中的齒輪帶動台車。圖 4-3 中馬達連接的兩條線分別為馬達的電源以及台車位置的編碼器，其解析度大小與角度編碼器相同，經過量測，一圈為4000個單位(counter)。

圖 4-4 為控制系統連接模組，搭載伺服馬達驅動器：

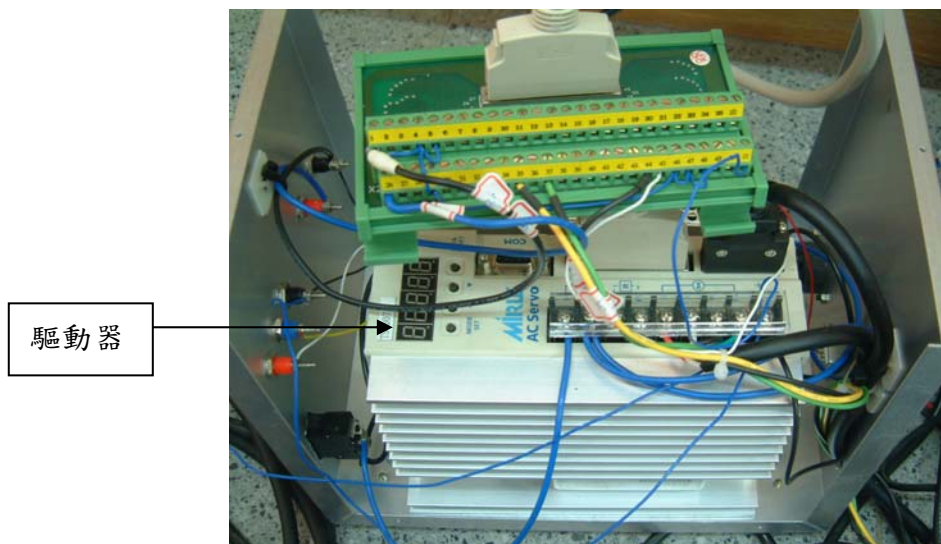


圖 4-4 馬達驅動器

驅動器型號為J15C，驅動器的規格設計可以選擇位置、速度、扭力模式三種，但經過我們測試結果，只有速度模式可以正常使用。

圖 4-5 為DSP運動控制卡及AD/DA卡：

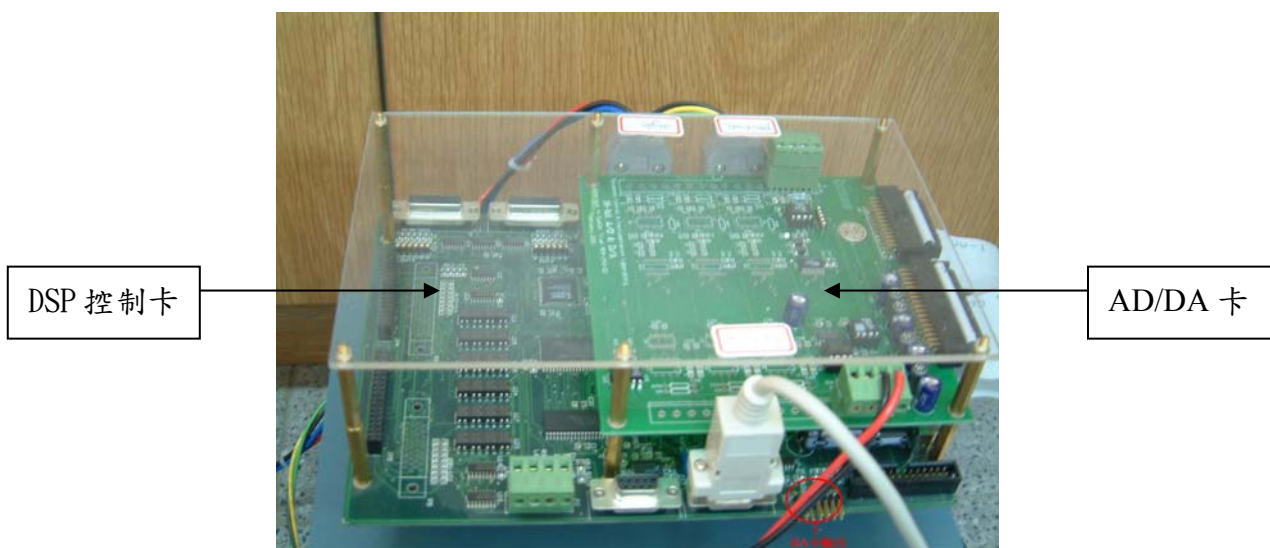


圖 4-5 DSP 控制卡以及 DA 卡

運動控制卡接收位置以及台車的編碼器值，經由內部 DSP 晶片的運算，將控制電壓由 DA 卡輸出(圖 4-5 右下框框所圈的兩條線)，而 DSP 內部的資訊，如角度、位置、控制輸出值...等，可經由 RS-232 傳至電腦，即時顯示出來。

4.2 實際實驗系統的數學模式鑑別

在第 2 章中，我們所推導的是理論的倒單擺物理系統數學模式，在實際實驗時，我們必須考量實際系統的數學模型，包含了驅動器、馬達、以及倒單擺機台本身的數學模型，因此我們採用系統鑑別來得到接近真實控制的數學模型；我們所採用的鑑別方法是：將控制輸入訊號給予一個 PRBS (pseudo random binary process) 的指令，再依照所得到的輸出，來鑑別出接近我們實驗的真實物理系統的數學轉移函數；之後，再給予各種訊號輸入來作為比對以及驗證；以下將對此鑑別方式以及鑑別的結果作一討論。

4.2.1 鑑別之系統

我們所鑑別的系统部分包含驅動器，馬達以及倒單擺台車系統，而其鑑別的圖形如下圖所示：

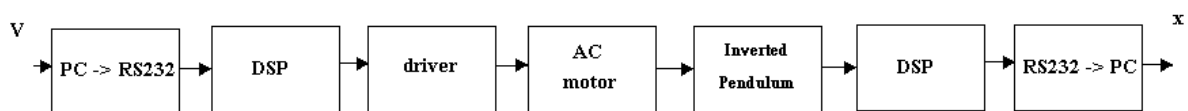


圖 4-6 系統鑑別訊號流程

其中

v：PC 端的命令輸入。

x：PC 端得到的位置。

圖 4-6 中，由 PC 端先給予驅動器一個電壓命令，此命令經由 RS232 傳至 DSP 控制卡上；接著經過馬達驅動器驅動馬達，控制倒單擺台車，然後由位置編碼器得到位置傳至

DSP 控制卡上，再經由 RS232 傳回 PC 端。

在鑑別時，輸入單位為相對應電壓的數值 $1=0.3052\text{mV}$ ，而輸出的單位為光學編碼器所讀到的累計數值，經由實驗我們測得角度編碼器的 1 值相對於實際角度 0.09° ，位置編碼器的 1 值則相對於實際位置為 0.00025m ；我們使用的馬達為 AC 伺服馬達，並採用速度模式(velocity mode)來進行實驗，因為我們鑑別的轉移函數為電壓命令到度的轉移函數，因此我們利用一個 α - β filter 將量測到的位置輸出經過計算，可估計出它的速度響應，架構圖如下：

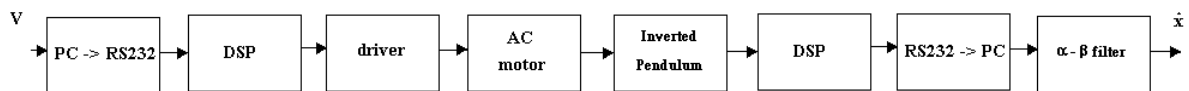


圖 4-7 系統鑑別訊號流程 II

其中：

v ：PC 端的命令輸出(為速度指令)。

\dot{x} ：位置訊號經由 α - β filter 所估測到的速度值。

圖 4-7 中的流程和圖 4-6 類似，唯一的差別就是將位置編碼器傳回 PC 端的位置值，再經過一個 α - β filter 處理；經由 α - β filter，可將我們量測的位置評估出速度，而採用 α - β filter 的目的主要在於作為微分器使用，可將訊號的高頻雜訊過濾掉；經由此步驟，我們可得到速度命令所得到的速度響應，作為我們系統鑑別的輸入與輸出。 α - β filter 的頻寬可藉由改變 α 、 β 的值而有所不同。

4.2.1.1 PRBS (pseudo random binary sequence)

我們鑑別系統所使用的命令，是給予一個 PRBS 作為輸入，PRBS 指的是一個由 0、1 指令組成的訊號，而 0 或 1 的長度為隨機出現，其訊號圖如圖所示：

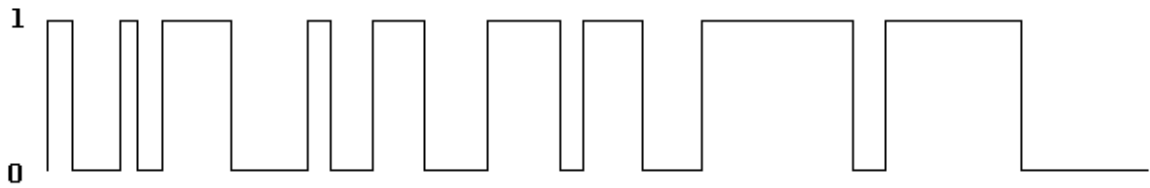


圖 4-8 PRBS 訊號圖

使用 PRBS 訊號的目的在於激發出系統高頻的響應，是一種隨機的數位序列，其序列的長度通常都是 $(2^N)-1$ ，而 N 為整數；由於 1、0 的命令對硬體而言，改變量太小，為了易於觀察輸出情況，以及得到輸出訊號，我們將訊號值加上一個常數放大以及位移來達到如下的訊號進行實驗：

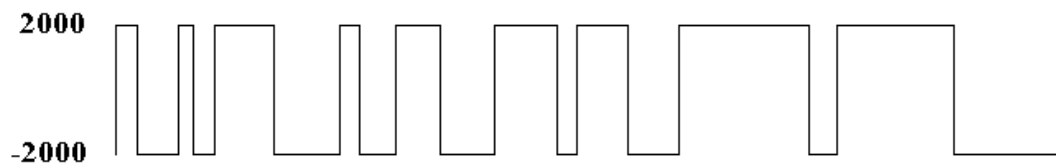


圖 4-9 修改過後之 PRBS 訊號圖

目的在於使台車盡量在軌道範圍內能以較大的速度震盪；而較快的速度對鑑別而言會比較容易鑑別轉移函數，而鑑別出的轉移函數相對的也會較為準確。

4.2.1.2 電壓對速度鑑別之結果

利用 PRBS 輸入訊號的圖形如下：

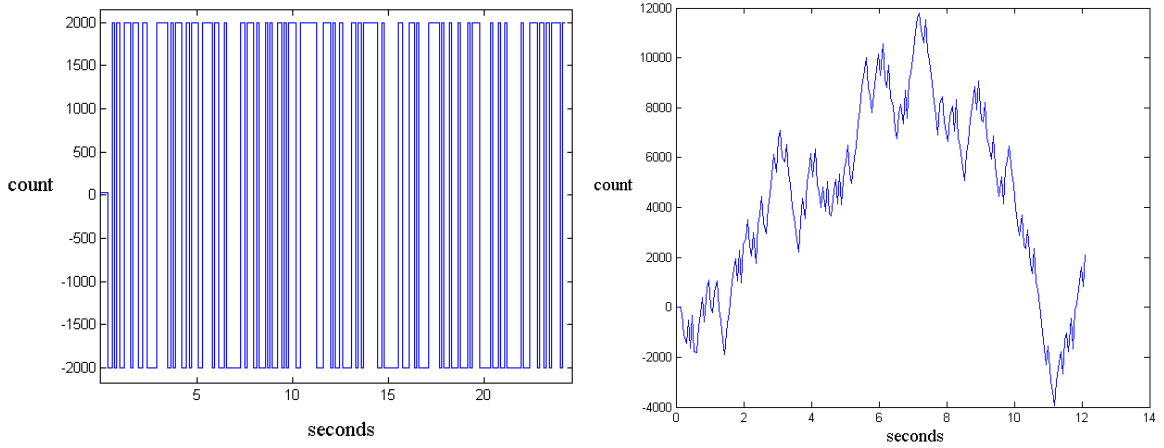


圖 4-10 PRBS 鑑別輸入以及位置輸出圖

經過 $\alpha - \beta$ filter 之後所估出的速度，其圖形如下：

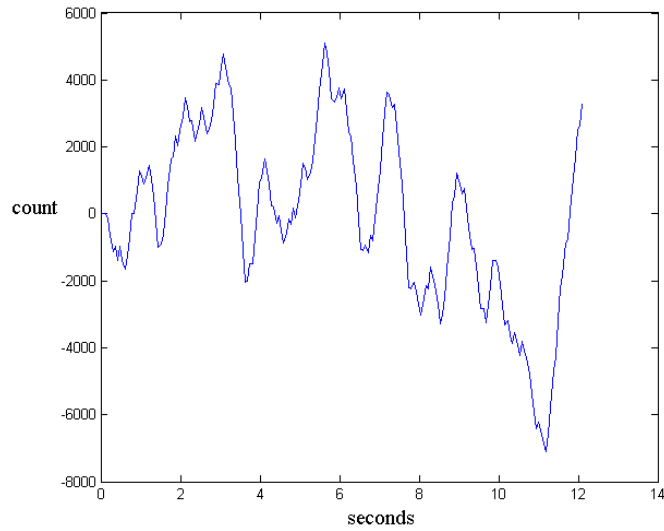


圖 4-11 經過 $\alpha - \beta$ filter 估測速度值

利用 matlab 的系統鑑別，給予上述的 PRBS 輸入訊號和量測編碼器位置再經過處理的速度輸出，我們可以求得一個適當的數學系統來作為實際機台的數學模型：

matlab 中的系統鑑別介面如下：

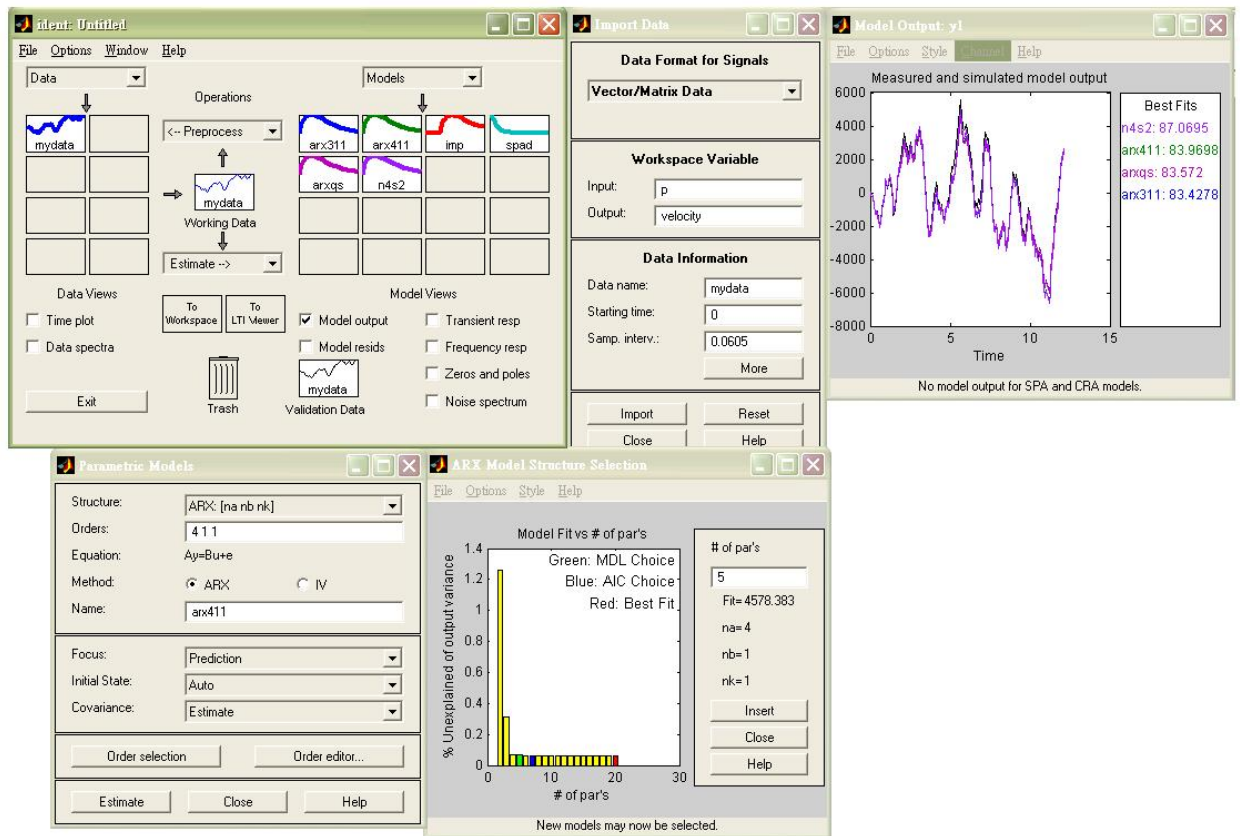


圖 4-12 matlab 系統鑑別使用者介面

給予相同的輸入電壓，比較實際機台量測得的速度以及鑑別出的模型，響應圖形如下：

■ PRBS ± 2000 輸入的速度比較圖

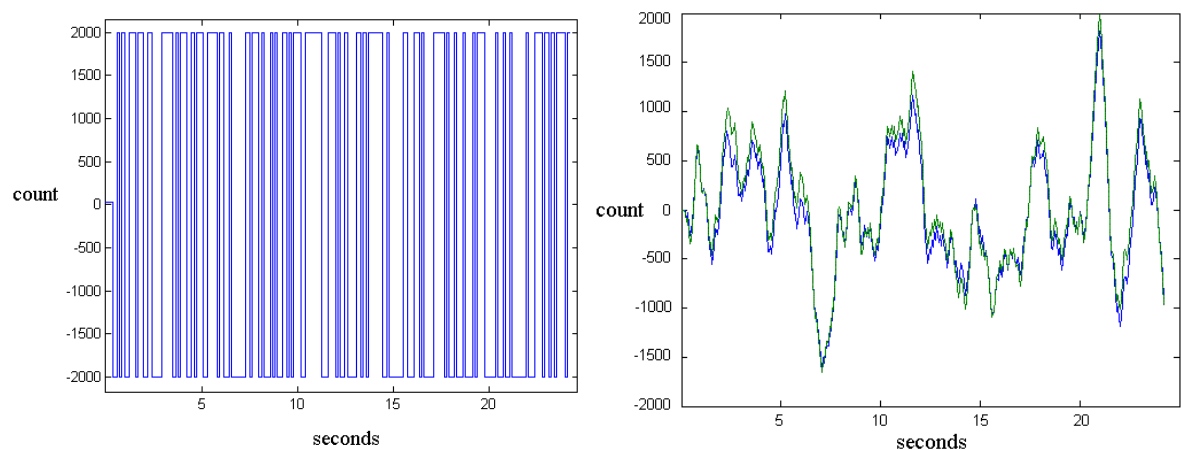


圖 4-13 PRBS ± 2000 訊號輸入以及速度輸出響應圖

由圖 4-13 速度輸出響應圖可以看出鑑別出的速度與實際的速度，兩者十分接近。

■ Square 方波±2000 輸入的速度比較圖

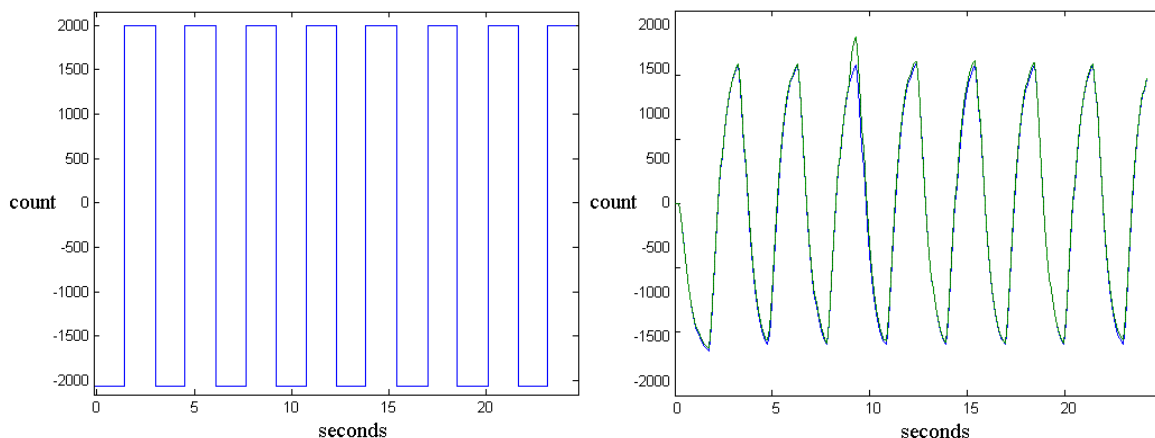


圖 4-14 方波電壓訊號輸入以及對速度的響應圖

同樣地，由圖 4-14 我們也可看出給予方波電壓輸入，鑑別的速度輸出和實際量測的速度響應非常接近。可以用來驗證我們鑑別出系統數學模式的正確性。

經過多組數據的實驗比較，我們鑑別出電壓到速度響應的轉移函數如下：

$$\frac{\dot{X}}{V} = \frac{2.143(s + 22.12)}{s^2 + 5.338s + 9.4477} \quad (4-1)$$

由於我們使用的馬達驅動器只能在速度模式下作用，而且馬達以及驅動器參數的值並不確定的情況下，為了能夠將角度的也利用鑑別出的轉移函數，推導出輸入與角度的關係式，我們採用一個將輸入假設為一個 Force command 的方式來推導輸入與角度的關係，接著在下一小節中介紹。

4.2.2 Force command 對加速度的轉移函數

為了使之前鑑別出的系統能與角度相結合，建立起完整的倒單擺模型，我們假設一個虛擬的力，也就是這裡所提到的 Force command，利用 Force command 對加速度的關係式，並且利用已知的方程式(2-7)，得到加速度和角度的關係。推導出 Force command 對

角度的關係式，可以得到 Force command 對位置以及角度的轉移函數，並且用此轉移函數作為我們的受控系統，作為模擬以及實驗的依據。Force command 對加速度鑑別的架構圖如下：

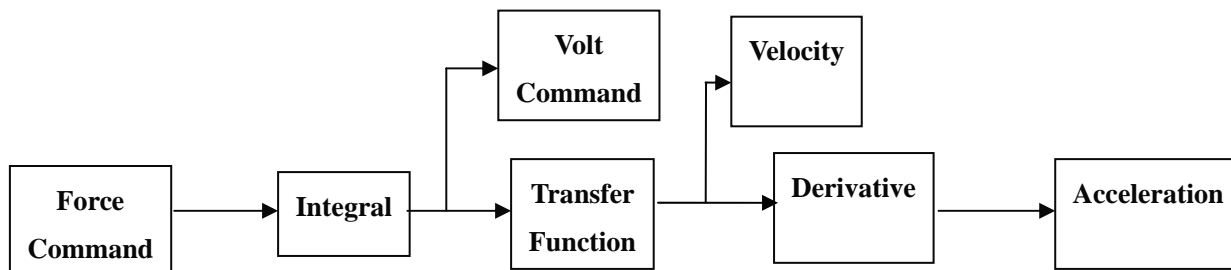


圖 4-15 Force command 對加速度的鑑別架構圖

上圖中，Transfer function 是利用 PRBS 鑑別出的電壓對速度的轉移函數；Derivative 為 α - β filter，在此作為微分器使用；由於馬達為速度模式，因此必須給予相對於某個速度的電壓命令，而我們使用的 Force Command 可視為一個變速度的命令，因此在力量輸入的命令之後，加入一個積分器，將我們的力量命令作一積分後，可視為一個變速度的命令，再輸入鑑別出的電壓對速度轉移函數，得到速度；最後再通過一個 α - β filter，作為微分用，也就是將速度輸出轉為加速度。經過此架構，可以將一 Force command 至加速度的轉移函數設計出來，得到我們所需要的力量對加速度的轉移函數；但 Force command 並非真實的推力，而是相對於真實推力的一個值，Force command 和真實的推力相差的一個常數的比值。鑑別出的轉移函數如下：

$$\frac{\ddot{X}}{F} = \frac{-0.021275(s - 40.24)(s^2 + 54.56s + 869.7)(s^2 + 39.9s + 2404)}{(s^2 + 6.287s + 9.883)(s^2 + 5.479s + 9.386)(s^2 + 28.16s + 2895)} \quad (4-2)$$

極零點位置如下圖：

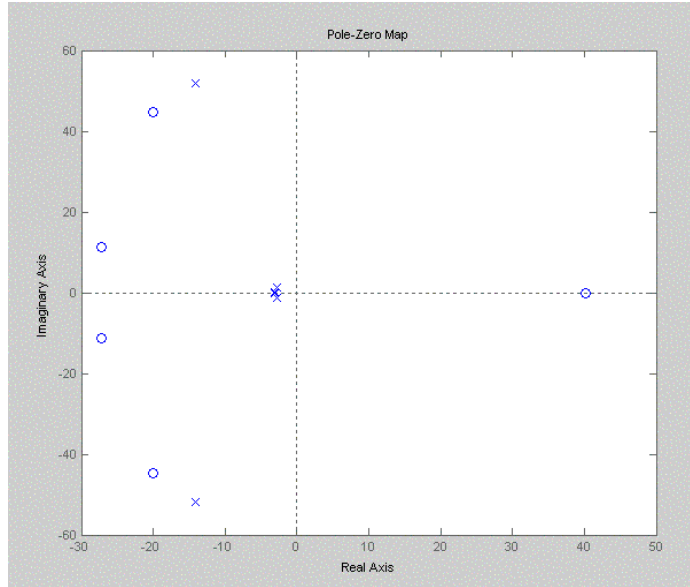


圖 4-16 Force command 對加速度轉移函數之極零點位置

轉移函數共有三對共軛極點以及兩對共軛零點和一個非極小相位的零點，位置如下：

極點位置(poles)：-14.0800 + 51.9303i、 -14.0800 - 51.9303i ；

-2.7395 + 1.3650i、 -2.7395 - 1.3650i ；

-3.1435 + 0.0375i、 -3.1435 - 0.0375i ；

零點位置(zeros)： 40.2400 (non-minimum phase zero)

-19.9500 + 44.7884i、 -19.9500 - 44.7884i ；

-27.2800 + 11.2027i、 -27.2800 - 11.2027i ；

為了比較非極小相位零點的影響，我們將轉移函數極小相位的零點消去，並且補償 DC gain 值，可得到不含極小相位的系統轉移函數，其轉移函數如下：

$$\frac{\ddot{X}}{F} = \frac{0.85611(s^2 + 54.56s + 869.7)(s^2 + 39.9s + 2404)}{(s^2 + 6.287s + 9.883)(s^2 + 5.479s + 9.386)(s^2 + 28.16s + 2895)} \quad (4-3)$$

比較給予鑑別系統相同輸入得到的加速度和實際系統量測的加速度，給予系統 ± 20000 的 Force command 輸入，如圖 4-17 所示；經過積分之後的電壓命令輸入如圖 4-17

所示；比較鑑別系統與實際量測的加速度響應，我們分別模擬出非極小相位轉移函數、極小相位轉移函數以及實際量測到的加速度值，其圖形如圖 4-18 所示；在此我們給予的輸入訊號起始處約有三秒鐘的零值，其原因是由於我們實驗時，一開始程式的啟動會造成台車振動的現象，可由圖 4-18 中實際量測到的加速度看出。

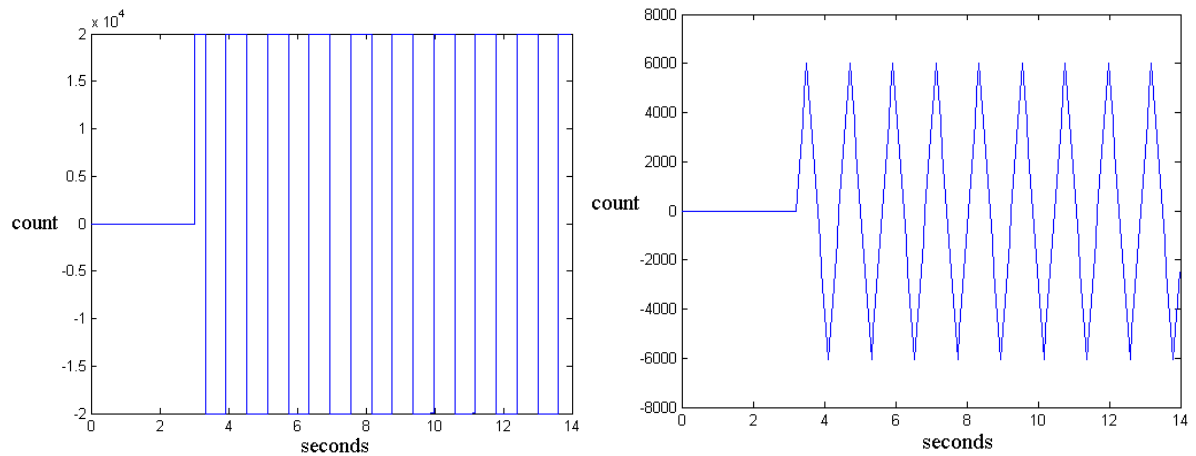


圖 4-17 Force command 輸入以及經過積分後的電壓命令

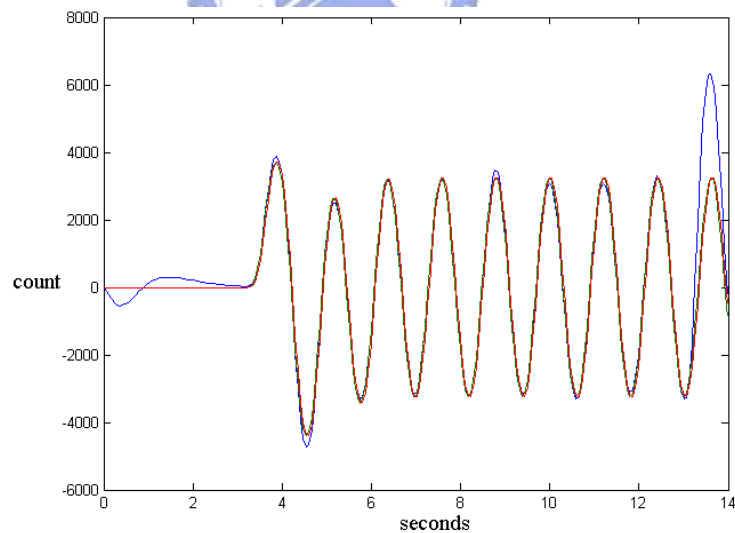


圖 4-18 加速度比較

圖 4-18 中，三條訊號線分別表示實際量測到的加速度、非極小相位轉移函數的加速度響應以及為極小相位轉移函數的響應。觀察加速度響應發現，除了一開始機台因為程式啟動而造成的震盪現象(一開始有震盪現象的訊號線為實際量測到的加速度，而另

外兩條訊號線，也就是極小相位以及非極小相位模型的加速度曲線幾乎是重合的情況)，以及最後結束時的跳動現象外，我們鑑別出的轉移函數，無論是極小相位亦或是非極小相位的轉移函數，其響應均相當，也和實際量測到的加速度吻合，驗證了我們鑑別所得轉移函數的正確性。

利用 H_∞ 方式求解之控制器，其階數與受控系統是相同的；為了降低受控系統的階數，我們將所得到的 Force command 對加速度的轉移函數降階，降階的方式是利用參考文獻[6](11.8 節)所提到的方式，降階後的轉移函數如下所示：

$$\frac{\ddot{x}}{F} = \frac{-0.0188s^3 - 0.0803s^2 + 27.7s + 618.5}{s^4 + 11.77s^3 + 53.72s^2 + 113.2s + 92.77} \quad (4-4)$$

其極零點圖形如下：

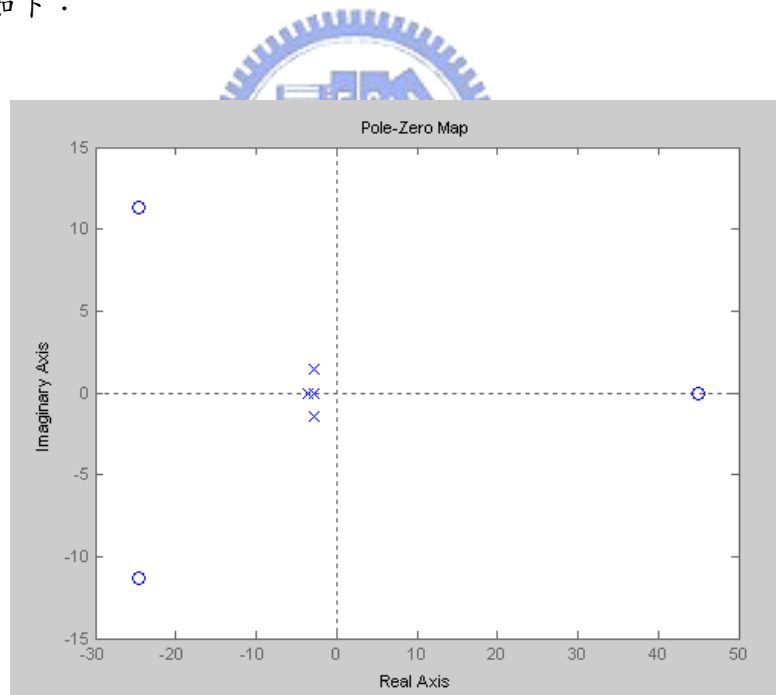


圖 4-19 降階後的轉移函數極零點位置

降階後的轉移函數共有一對共軛極點、兩個實數極點、一對共軛零點以及一個非極小相位的零點，位置如下：

極點位置(poles)： $-2.7290 + 1.3981i$ 、 $-2.7290 - 1.3981i$ 、 -3.4615 、 -2.8504 ；

零點位置(zeros)： 44.9919 、 $-24.6316 + 11.6759i$ 、 $-24.6316 - 11.6759i$ ；

同樣的，我們給予相同的輸入，比較降階後的轉移函數所得到的加速度和實際量測到的機台加速度作一比較，加速度響應圖形如下：

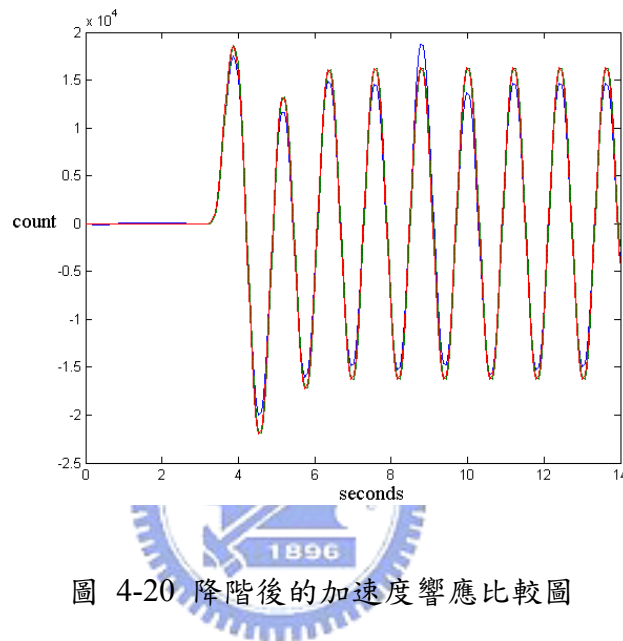


圖 4-20 降階後的加速度響應比較圖

同樣的，圖 4-19 中的三條訊號線為實際量測到的加速度、非極小相位轉移函數的加速度響應以及極小相位轉移函數的響應。我們發現降階後的轉移函數響應和實際加速度響應依然是相當吻合；但若是將系統再降為三階或是二階的話，響應就和實際系統相差甚遠，訊號圖形就有相當的差異；為了利用最少的接數能逼近我們鑑別的系統，我們選擇四階的轉移函數，作為我們 Force command 對加速度的轉移函數。

4.2.3 Force command 到位置以及角度的轉移函數

在 4.2.2 節中，我們鑑別出 Force command 至加速度的轉移函數模型，為了將角度與 Force command 的轉移函數結合在一起，將其轉移函數作以下的推導，目的在求出 Force command 到位置以及角度的轉移函數。

式(4-4)是我們所得到的 Force command 對加速度的轉移函數，式(2-7)為加速度對單擺角度以及角加速度的關係式，可將其轉換為：

$$\frac{\theta}{\ddot{x}} = \frac{-0.3375}{s^2 - 3.308} \quad (4-5)$$

加速度與位置的關係為兩次積分：

$$\frac{x}{\ddot{x}} = \frac{1}{s^2} \quad (4-6)$$

因此我們藉由 Force command 對加速度的轉移函數以及式(4-5)、式(4-6)，可以分別推導出 Force command 對位置以及對角度的轉移函數：

$$\frac{x}{F} = \frac{-0.0188(s-44.88)(s^2+49.16s+733)}{s^2(s+2.85)(s+3.461)(s^2+5.458s+9.402)} \quad (4-7)$$

$$\frac{\theta}{F} = \frac{0.006345(s-44.88)(s^2+49.16s+733)}{(s-1.1819)(s+1.1819)(s+2.85)(s+3.461)(s^2+5.458s+9.402)} \quad (4-8)$$

Force command 對位置以及角度的轉移函數分別有四個相同的極點以及三個相同的零點，因此我們可以利用 flow chart 將相同的狀態共用，得到簡化的 state space：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -92.77 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -113.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -53.72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11.77 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3375 & 0 & 0 & 0 & 3.308 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 618.5 \\ 27.7 \\ -0.0803 \\ -0.0188 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

其中 $x_4 = \ddot{x}$ 、 $x_5 = \dot{x}$ 、 $x_6 = x$ 、 $x_7 = \dot{\theta}$ 、 $x_8 = \theta$ ，利用此 state space 作為我們的受控系統來進行模擬。flow chart 流程以及詳細內容可參考附錄 A。

4.3 2-DOF 控制器設計之流程以及步驟

本小節中我們介紹整個控制器設計的流程，以及設計時需要注意的細節部分；控制器的設計流程圖如下：



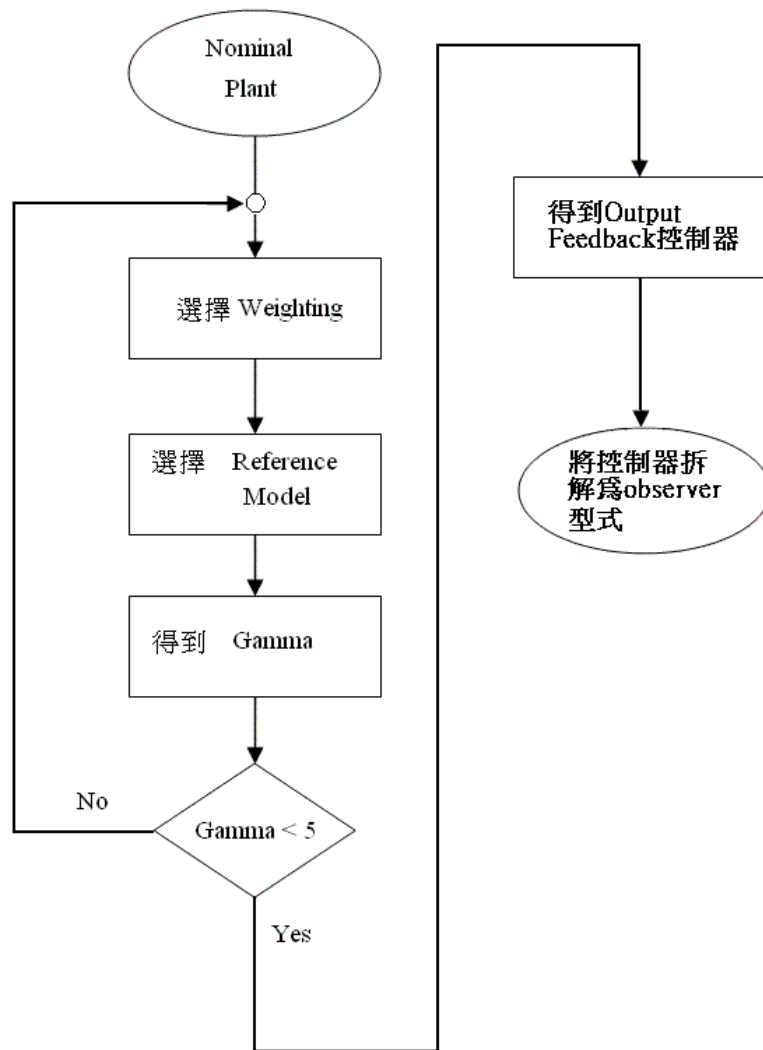


圖 4-21 控制器求解之流程圖

設計步驟如下：

- 步驟一：選擇 weighting，並且求出加入 weighting 後 shaped plant 的特徵值(singular value)

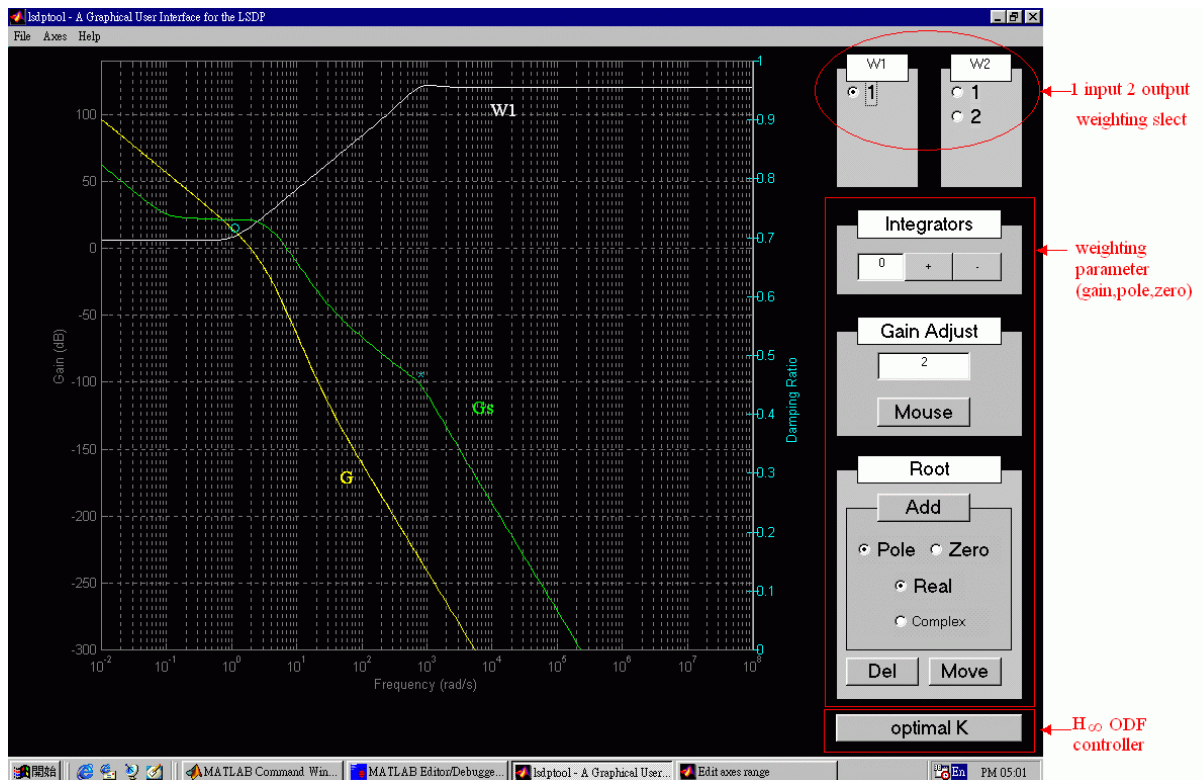


圖 4-22 原來系統以及加入 weighting 系統的特徵值圖形

在此利用 matlab 中的 loop shaping design procedure 的工具- lsdp toolbox，來得到 shaped plant；此 toolbox 並非 matlab 內建，而是參考文獻[8]所設計的 GUI 介面來使用。G 為原 nominal plant 的 singular value 值，Gs 為 shaped plant 的 singular value 值，W1 為 pre-weighting 的 bode plot。利用此 toolbox 可簡化得到 shaped plant 的方法。以倒單擺系統而言，系統本分為一個輸入(電壓命令)兩個輸出(台車位置、單擺角度)，因此 pre-weighting (W1)階數為 $[1 \times 1]$ 的轉移函數，post-weighting (W2)階數則為 $[2 \times 2]$ 的轉移函數；利用此介面的好處在於可以在選擇完 weighting 之後，立即得到 shaped plant 的 singular value 圖形，觀察圖形是否合乎要求，減少我們選擇 weighting 所需要的時間。

- 步驟二：找出加入 weighting 系統(shaped plant)的頻寬；

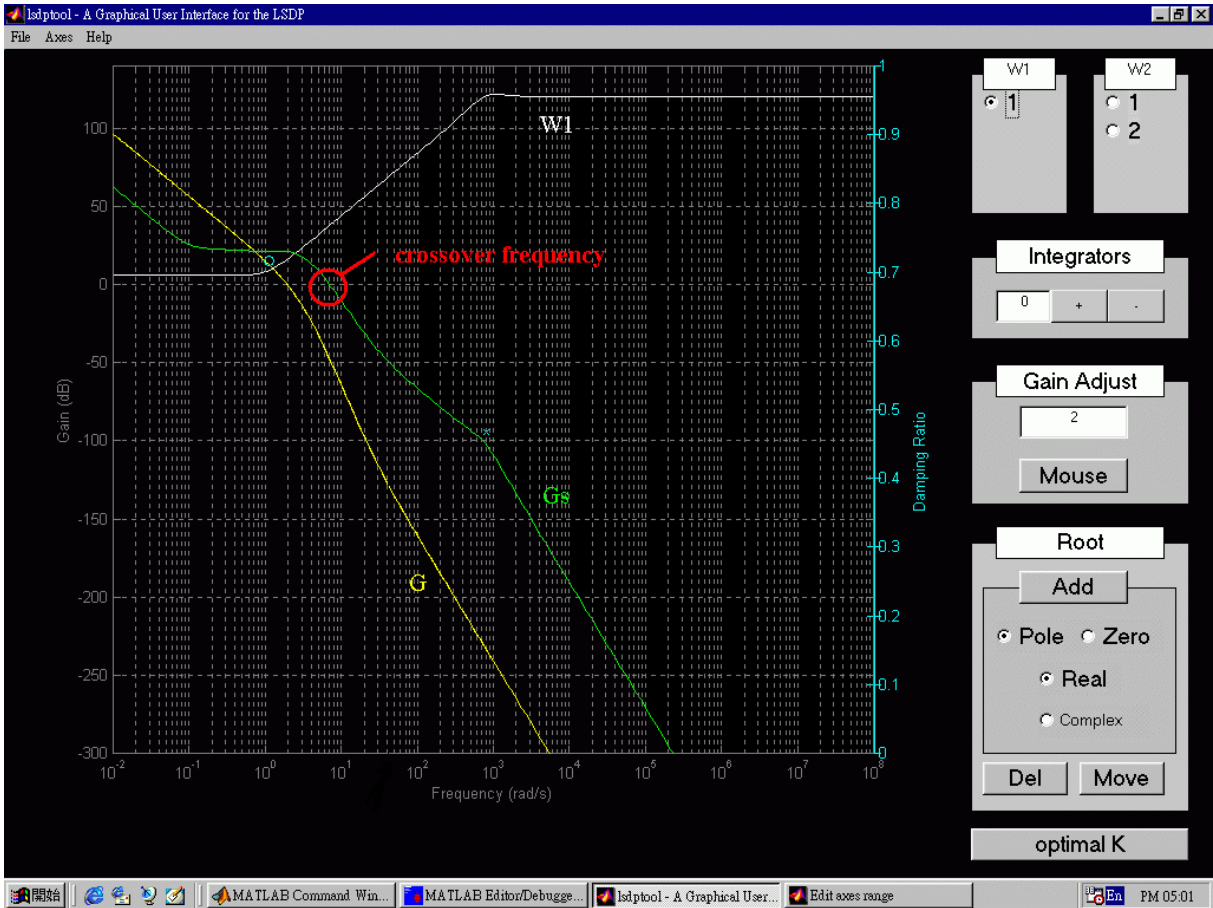


圖 4-23 利用加入 weighting 系統的特徵值圖形找出頻寬

利用特徵值的 cross-over frequency，我們可以評估出此時的頻寬(圖中約為 7rad/s = 1.11Hz)；利用此頻寬，作為設計參考模型(reference model)的頻寬值；此頻寬值的範圍對控制器也有影響，我們將在 4.2、4.3 以及 4.4 小節討論各階 weighting 時，對此頻寬作一討論、比較。

- 步驟三：給定一個二階系統作為參考模型(reference model)，可以使整個閉迴路響應逼近此 reference model，完整的架構圖可參考圖 4-24。參考模型形式如下：

$$M_r = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4-10)$$

其中有兩個參數值要決定，一個是 damping ratio ζ ，一個是 ω_n ；根據參考文獻[2]，damping ratio 取決於台車位置的最大位移量，可由下式表示；

$$X = e^{-\pi\zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}} \quad (4-11)$$

因此 ζ 可表示為

$$\zeta = \left(\frac{(\ln x)^2}{((\ln x)^2 + \pi^2)} \right)^{1/2} \quad (4-12)$$

其中的 x 為台車的最大位移量預設為 0.1(m)，由(4-13)可得到 ζ 約為 0.5912。

ω_n 則是要觀察加入 weighting 之後，根據 shaped plant 的頻寬來決定；以上例而言，shaped plant 的頻寬是 7 rad/s，所以我們也要將 reference model 頻寬取在該值附近，此時的 ω_n 值我們發現也大約為 7 rad/s。值得注意的是，我們利用 ω_n 值設計 reference model 的頻寬，但其本身值和台車的最大速度也有相關性(參考文獻[2])，完整的推導可參考附錄 B。

■ 步驟四：求出 normalized left coprime 系統(generalized plant P)；

利用加入 weighting 的 shaped plant 解兩個 riccati equation：

$$(A - BS^{-1}D^*C)^* X + X(A - BS^{-1}D^*C) - XBS^{-1}B^*X + C^*R^{-1}C = 0 \quad (4-13)$$

$$(A - BS^{-1}D^*C)Z + Z(A - BS^{-1}D^*C)^* - ZC^*R^{-1}CZ + BS^{-1}B^* = 0 \quad (4-14)$$

根據 riccati equation 的解 X 、 Z 、shaped plant 以及 reference model，我們可以依照下面的架構圖，先將系統拆解為 normalized left coprime 形式：

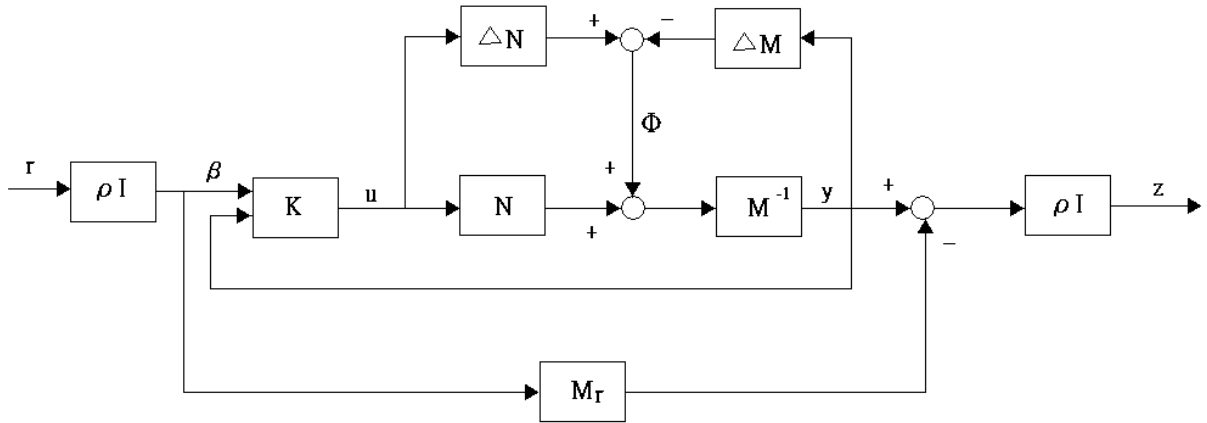


圖 4-24 兩自由度的 H_∞ 控制器架構圖

由 $[r, \Phi, u]$ 到 $[u, y, z, \beta, y]$ 的關係可以得到 normalized left coprime 的系統，此系統一般稱為 generalized plant P ，其形式如下：(G_s 為 shaped plant 的狀態矩陣， G_r 為 reference model 的狀態矩陣，並且 G_s 可拆解為 $M_s^{-1}N_s$)

$$\begin{bmatrix} u \\ y \\ z \\ \beta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & M_s^{-1} & G_s \\ -\rho^2 G_r & \rho M_s^{-1} & \rho G_s \\ \rho I & 0 & 0 \\ 0 & M_s^{-1} & G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ u \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

將 $G_s = \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ C_s & D_s \end{bmatrix}$ 、 $G_r = \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix}$ 代入上式，可將轉移矩陣改寫為：

$$\begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 & (B_s D_s^T + X C_s^T) R_s^{-1/2} & B_s \\ 0 & A_r & B_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ C_s & 0 & 0 & R_s^{1/2} & D_s \\ \rho C_s & -\rho^2 C_r & -\rho^2 D_r & \rho R_s^{1/2} & \rho D_s \\ 0 & 0 & \rho I & 0 & 0 \\ C_s & 0 & 0 & R_s^{1/2} & D_s \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

其中， $\rho=1$ 、 $R_S = I + D_S D_S^*$ ；

■ 步驟五：得到了 generalized plant P 之後，可依照式(3-12)我們可得到；

$$\begin{aligned} \|F_L(P, K)\|_{\infty} < \gamma &\rightarrow F_L\left(\left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right], K\right) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \\ &= \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1}\tilde{M}^{-1} \\ (I + GK(I - GK)^{-1})\tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1}\tilde{M}^{-1} \\ (I - GK)^{-1}\tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} < \gamma \end{aligned} \quad (4-17)$$

我們在此利用 γ 疊代求出 H_{∞} 的 output feedback 控制器，而疊代方式可以利用 matlab 中的 hinfsyn 指令來求得 γ 疊代的解；將 γ 解帶入式(3-20)：

$$K = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A + BF + \gamma^2 W_1^{*-1} Z C^* (C + DF)}{B^* X} & \gamma^2 W_1^{*-1} Z C^* \\ \hline & -D^* \end{array} \right] \quad (4-18)$$

可得到控制器 K ；利用此方式求出的控制器 K^{10} ，可表示為 $K = [K1 \quad K2]$ ，簡化的架構圖如下：

¹⁰ 為了統一我們的稱呼，以下都將式(4-18)求出之控制器統稱為 output feedback 控制器。

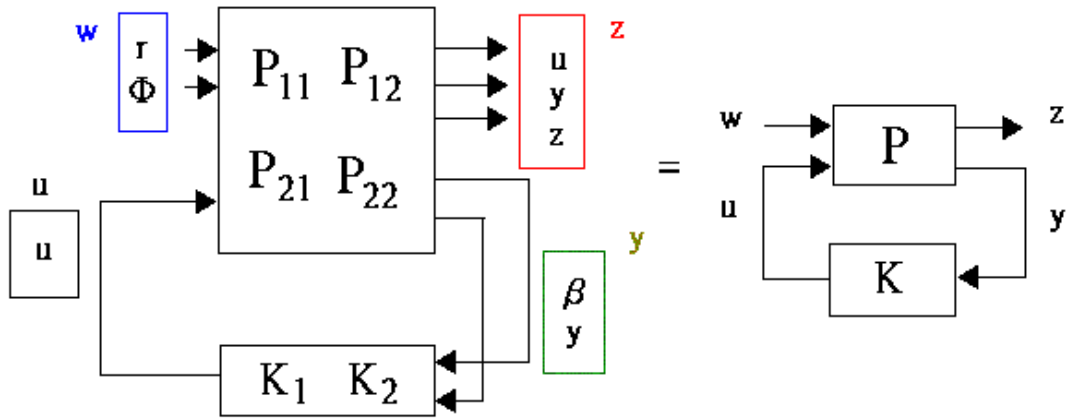


圖 4-25 H_∞ output feedback controller

之後將 weighting 和控制器結合才算完整的 output feedback 控制器的設計：

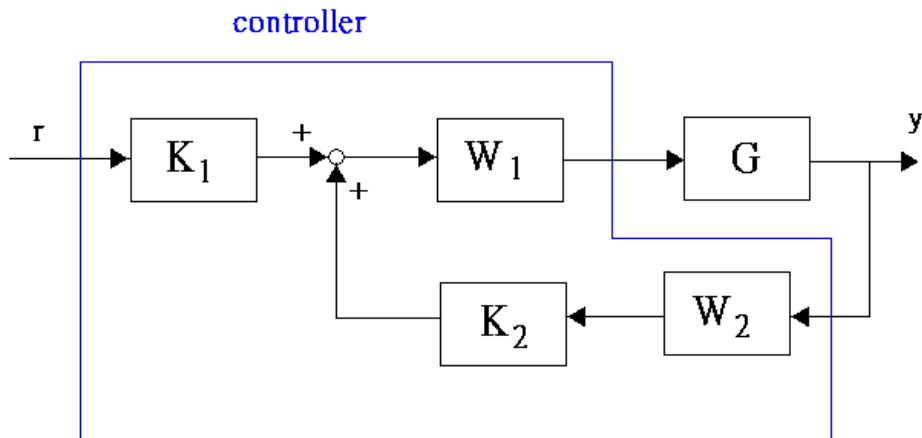


圖 4-26 加入 weighting 的 output feedback controller

至此，我們已經求出了 output feedback 控制器；我們參考文獻[2]、[6]將 output feedback 拆解為可觀測控制器 (observer controller)¹¹。

4.3.1 Observer 控制器

我們得到的 Output feedback 控制器，其架構圖可簡化如下：

¹¹ 為了統一我們的稱呼，以下都將可觀測控制器統稱為 observer 控制器。

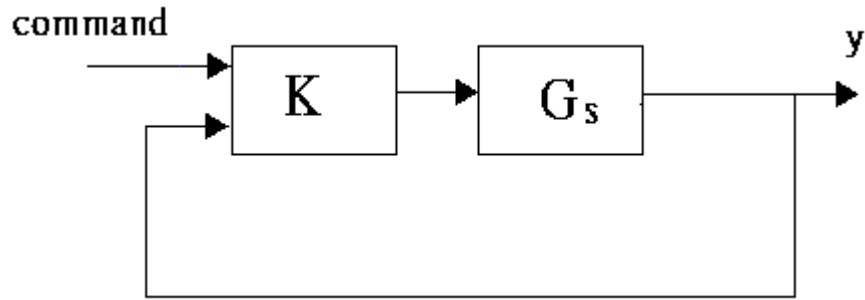


圖 4-27 H-infinite output feedback controller

參考文獻[2]、[6]，我們所採用的是 observer 控制器，因此要將求出的 output feedback 控制器轉換為 observer 控制器；observer 控制器架構如下圖所示：

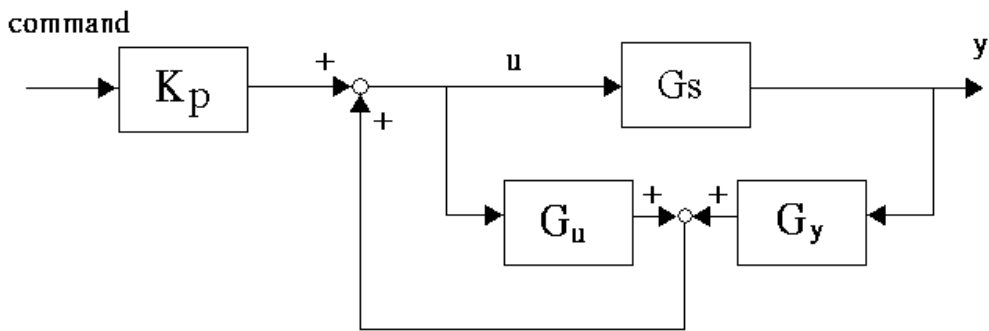


圖 4-28 observer 控制器架構圖

我們將 H_∞ 方式求出的 output feedback 控制器拆解為 observer 控制器， G_u 與 G_y 分別為拆解出的 observer 控制器，比較其轉移函數。原控制器為：

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A + BF + LC + LDF & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (4-19)$$

上式為將 $D=0$ 代入式(4-18)的結果，並且令 $F = B^* X$ 、 $L = -\gamma^2 W_1^{*-1} ZC$ 的結果。

將其拆解為 observer form 可得(參考文獻[10]第 3.3 節)：

$$Gu = \left[\begin{array}{c|c} A+LC & B \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (4-20)$$

$$Gy = \left[\begin{array}{c|c} A+LC & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (4-21)$$

拆解為 observer 後，圖 4-28 架構的控制器都可求出，即完成我們二階控制器的設計。

4.4 改變 observer 控制器極點位置

最後一小節我們討論改變 observer 控制器極點，且對 γ 不產生影響的方式作一介紹。

observer 控制器架構圖，可等效於下圖：

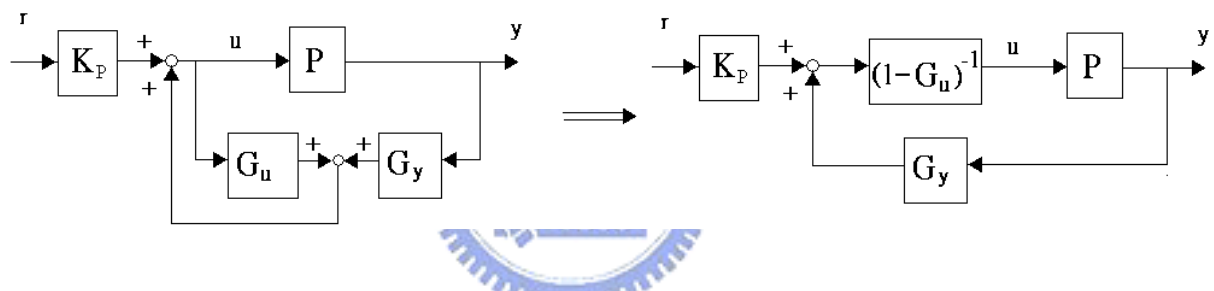


圖 4-29 observer 控制器等效圖

其等效之方程式推導為：

$$u = K_p \cdot r + G_u \cdot u + G_y \cdot y \quad (4-22)$$

$$(1 - G_u)u = K_p \cdot r + G_y \cdot y \quad (4-23)$$

$$u = (1 - G_u)^{-1} (K_p \cdot r + G_y \cdot y) \quad (4-24)$$

在上式中我們加入一 H 轉移函數(H 轉移函數必須為穩定)：

$$u = (1 - G_u)^{-1} H^{-1} H (K_p \cdot r + G_y \cdot y) \quad (4-25)$$

加入 H 不會改變整個系統的輸入輸出，經過整理：

$$u = (H(1 - G_u))^{-1} (H \cdot K_p \cdot r + H \cdot G_y \cdot y) \quad (4-26)$$

此時的架構圖可以表示為：

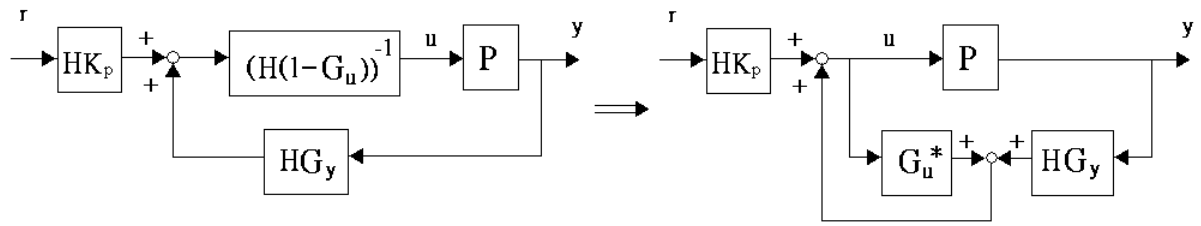


圖 4-30 加入 H 轉移函數後的 observer 控制器等效架構圖

由上圖以及式(4-23)、式(4-24)以及式(4-25)可知

$$(1 - G_u^*)^{-1} = (H(1 - G_u))^{-1} \quad (4-27)$$

$$G_u^* = 1 - H + H \cdot G_u \quad (4-28)$$

我們利用 H 轉移函數可以改變原來 observer 控制器(G_u 、 G_y)的極點位置，且在此情況下控制器仍然滿足式(3-18)：

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (4-29)$$



依照此方法設計 H 轉移函數，我們可以改變 observer 控制器的極點，而仍然滿足式(4-29)中的 H_{∞} norm 小於 γ 值的條件。整個控制器的設計介紹到此告一段落，接著在第五章我們介紹模擬結果，模擬中也採用第四章最後一小節的方法來比較加入 H 轉移函數對響應的影響。

第5章 模擬結果以及討論

在本章中，我們討論在各種的 weighting 設計下，利用倒單擺系統的特徵值變化情況、 γ 值以及模擬的響應效果，來比較各情況下的所求得之控制器，其效能之優劣。

5.1 節我們討論常數 weighting 的效能；

5.2 節我們討論一階 weighting 的效能；

5.3 節我們討論二階 weighting 的效能。

5.4 節我們利用 4.4 節中所提到加入 H 轉移函數對所求出的控制器進行模擬，將其作一比較，以及討論。

5.5 節中，我們將求出之控制器以及響應，與 walker 設計出的控制器以及其響應作一比較，討論優劣。



5.1 常數 weighting 設計

常數 weighting 在此指的是 pre-weighting 的形式，我們選擇一常數作為 weighting 來討論其效果。而 post-weighting 我們在本篇論文中僅用常數來做改變(目的在改變輸出比重)。在常數 weighting 中，改變 weighting 值，我們得到的 γ 值情況如下表所示：

表 5-1 常數 weighting 下的 γ 值情況¹²

	W2=(1 ; 1)	W2=(1 ; 2)	W2=(1 ; 10)	W2=(1 ; 100)	模擬出之最佳 γ 值
W1=10	$\gamma=81.1039$	$\gamma=50.4304$	$\gamma=30.1725$	$\gamma=29.0802$	$\gamma=27.9003$
W1=100	$\gamma=59.4289$	$\gamma=46.6878$	$\gamma=35.0723$	$\gamma=33.5971$	$\gamma=33.3257$
W1=1000	$\gamma=53.9483$	$\gamma=47.7668$	$\gamma=37.9321$	$\gamma=33.7923$	$\gamma=32.9122$
W1=500	$\gamma=50.0520$	$\gamma=47.5792$	$\gamma=37.4778$	$\gamma=34.2104$	$\gamma \gamma=31.3964$

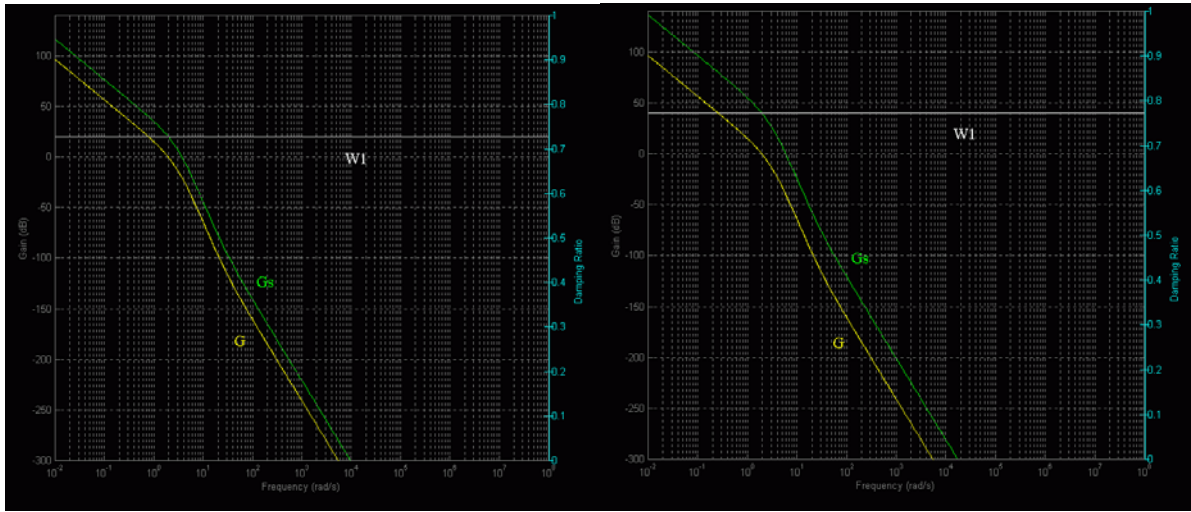
在常數 weighting 下所求出的 γ 值，可以由表 5-1 發現最小值約在 27.9003；距離可實現的理想值($\gamma < 5$)相差有一段距離。原因是當 weighting 為常數時，我們對系統改變僅在於開迴路的 dcgain 值，對系統特徵值的影響如下圖：



¹² W2=(1:10)表示 $W2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ ，也就是指台車位置輸出的比重為 1，單擺角度輸出的比重為 10。對倒單擺而言，單擺角度控制的比重，要高於台車位置的比重。

(W1=10)

(W1=100)



(W1=500)

(W1=1000)

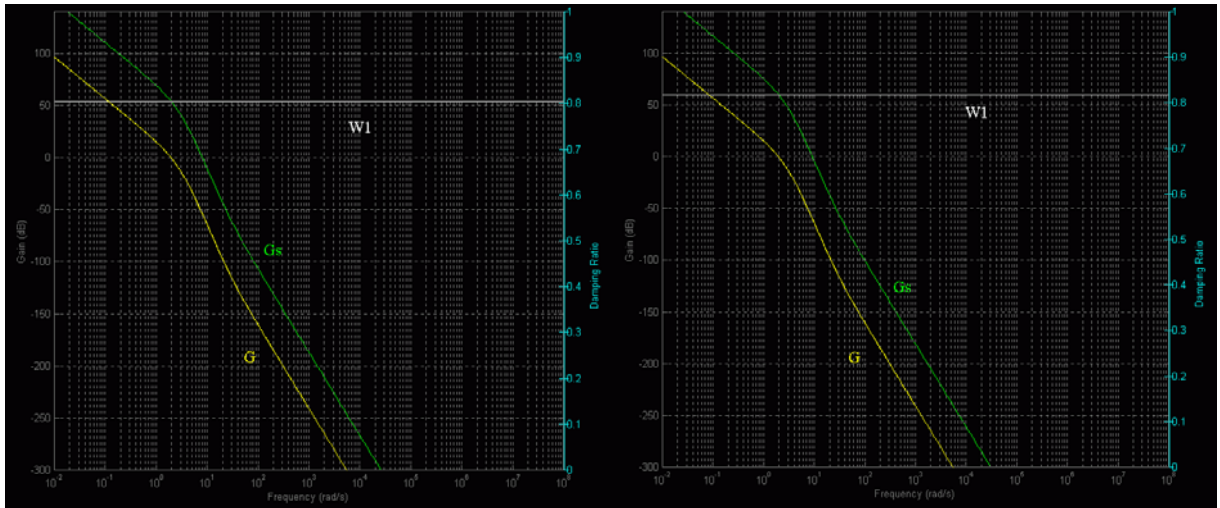


圖 5-1 加入各種常數 weighting 的特徵值改變情況

由上圖可知，常數 weighting 對系統的特徵值形狀改變不大，weighting 設計方式選擇不多，因此無法在常數 weighting 的範圍之中求得一個小於 5 的 γ 值。

5.2 一階 weighting 設計

一階 weighting 在此指的是 pre-weighting 的形式，我們選擇一階轉移函數作為 weighting 來討論其效果。在一階 weighting 中，改變 weighting 值，將其以各頻寬分類，可得到各頻寬之間的 γ 值：

將頻寬分為 3~4rad/s、4~5 rad/s、5~6 rad/s 以及 6~7 rad/s，各選出一組觀察：

■ 3~4 rad/s： $\gamma = 10.2575$ 、 $W1 = \frac{1310.9154(s + 0.06633)}{s + 1739}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

其特徵值圖形如下：

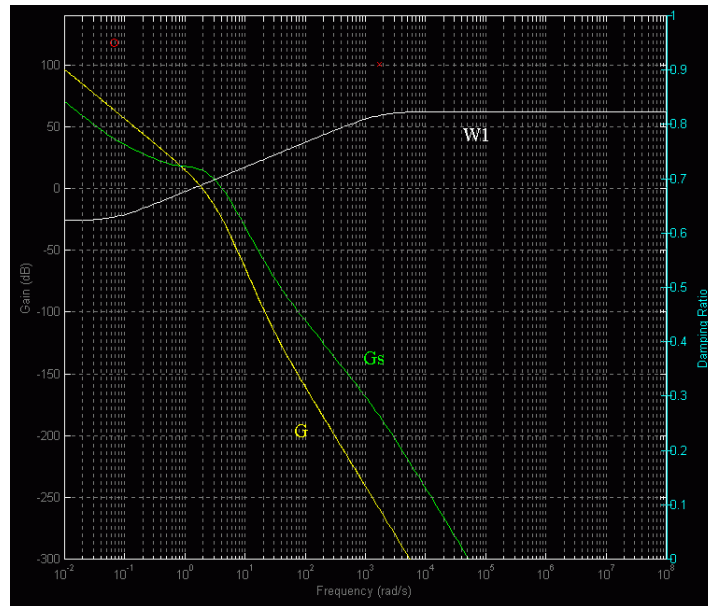


圖 5-2 $\gamma = 10.2575$ 之特徵值圖形

■ 4~5rad/s： $\gamma = 9.0385$ 、 $W1 = \frac{72.7379(s + 0.2154)}{s + 313.4}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$

其特徵值圖形如下：

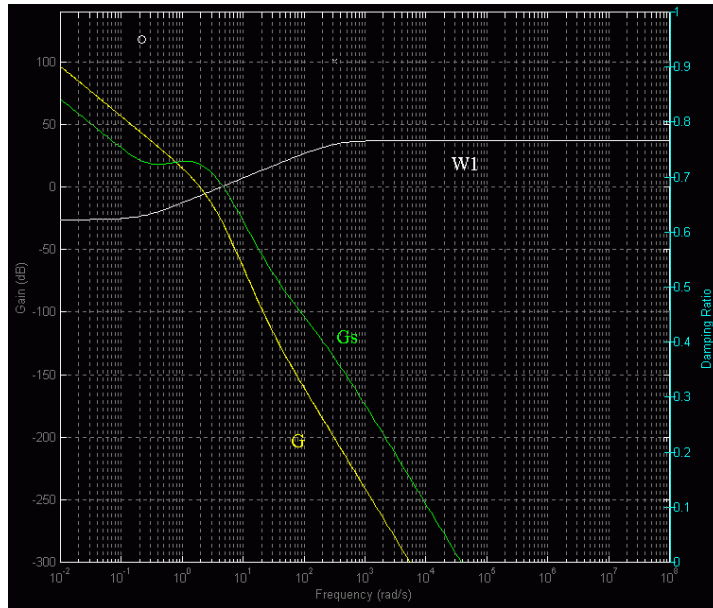


圖 5-3 $\gamma=9.0385$ 之特徵值圖形

■ 5~6rad/s : $\gamma = 11.6165$ 、 $W1 = \frac{738.2731(s+0.4725)}{s+348.8}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

其特徵值圖形如下：

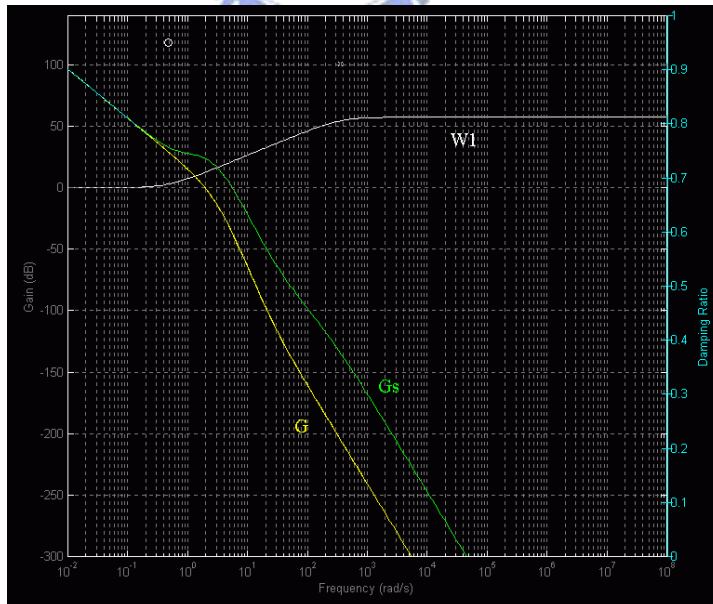


圖 5-4 $\gamma=11.6165$ 之特徵值圖形

$$\blacksquare \quad 6\sim 7\text{rad/s} : \gamma = 12.6688, W1 = \frac{2313.8813(s+0.2766)}{s+640}, W2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

其特徵值圖形如下：

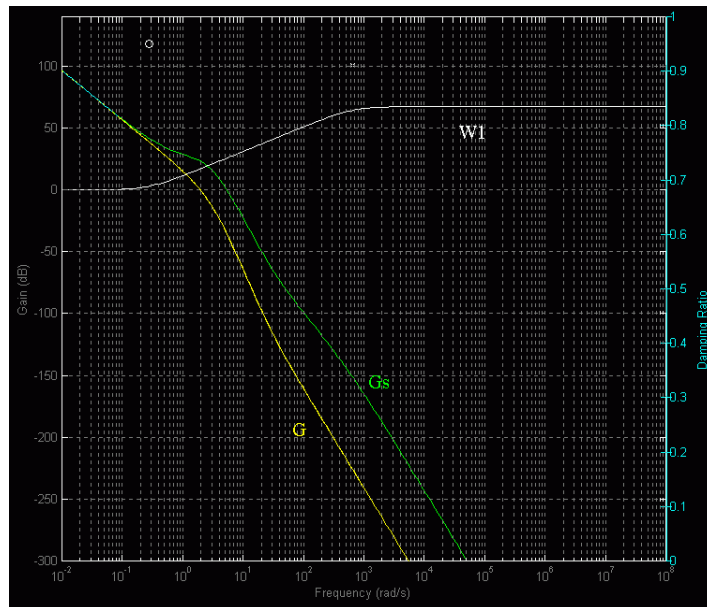


圖 5-5 $\gamma=12.6688$ 之特徵值圖形

利用一階 weighting 作設計我們可以選擇一個極點與零點作調整，再依據特徵值的圖形來調整我們所選擇的極點與零點，最後求出 γ 值判斷其是否可行 (γ 是否小於 5)。在此我們明顯發現，一階設計時 γ 值雖然未能找到小於 5，但比起在常數 weighting 設計的值小很多；而特徵值的圖形和常數 weighting 比較起來，也能夠依照我們選擇的極零點有所改變，weighting 設計的方式明顯的增加，因此我們再進一步的利用二階 weighting 來設計。

5.3 二階 weighting 設計

二階 weighting 在此指的是 pre-weighting 的形式，我們選擇二階轉移函數作為 weighting 來討論其效果。在二階 weighting 設計中，依照一階 weighting 設計的步驟，我們也把頻寬分區域來討論，得到各頻寬之間的 γ 值：

二階 weighting 中，將頻寬分為 1~2 rad/s、2~3 rad/s、3~4 rad/s、4~5 rad/s 以及 5~6 rad/s 做觀察：

■ 1~2rad/s : $\gamma = 7.4710$ 、 $W1 = \frac{2005.9753(s^2 + 0.2845s + 0.06633)}{(s^2 + 83.89s + 1.331e004)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

其特徵值圖形如下：

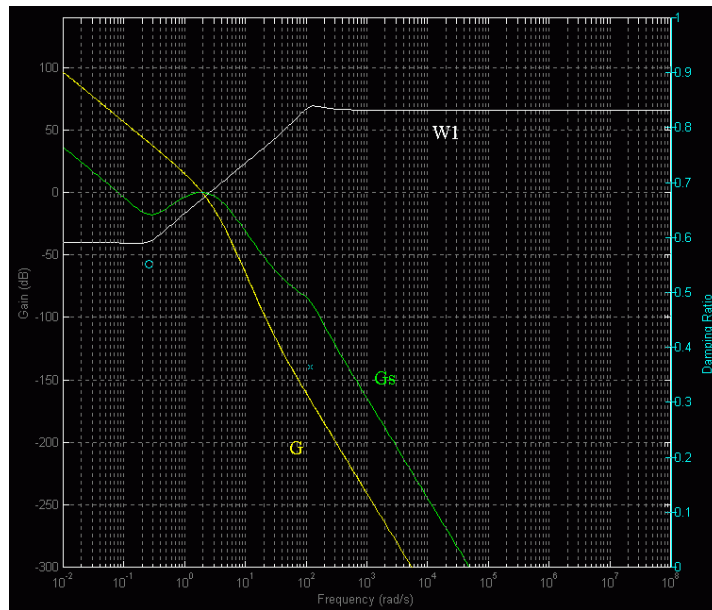


圖 5-6 $\gamma=7.4710$ 之特徵值圖形

■ 2~3 rad/s : $\gamma = 5.6321$ 、 $W1 = \frac{4256.6679(s^2 + 1.147s + 0.5259)}{(s^2 + 152.9s + 2.239e004)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

以及 $\gamma = 5.6625$ 、 $W1 = \frac{651.5586(s^2 + 1.027s + 0.4897)}{(s^2 + 55.23s + 3191)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

其特徵值圖形分別如下：

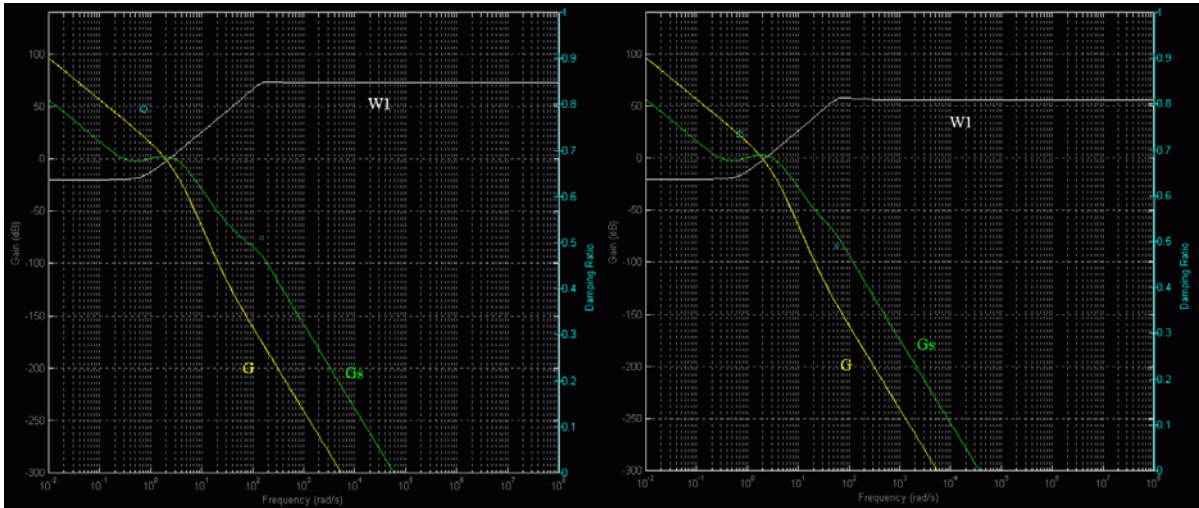
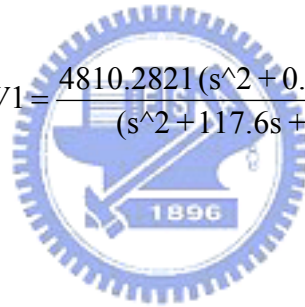


圖 5-7 $\gamma=5.6321$ 以及 $\gamma=5.6625$ 之特徵值圖形

■ 3~4 rad/s : $\gamma = 4.5340$ 、 $W1 = \frac{150762.9316(s^2 + 0.977s + 0.3953)}{(s^2 + 168.3s + 5.959e004)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

以及 $\gamma = 5.1635$ 、 $W1 = \frac{4810.2821(s^2 + 0.8876s + 0.3427)}{(s^2 + 117.6s + 1.648e004)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



其特徵值圖形分別如下：

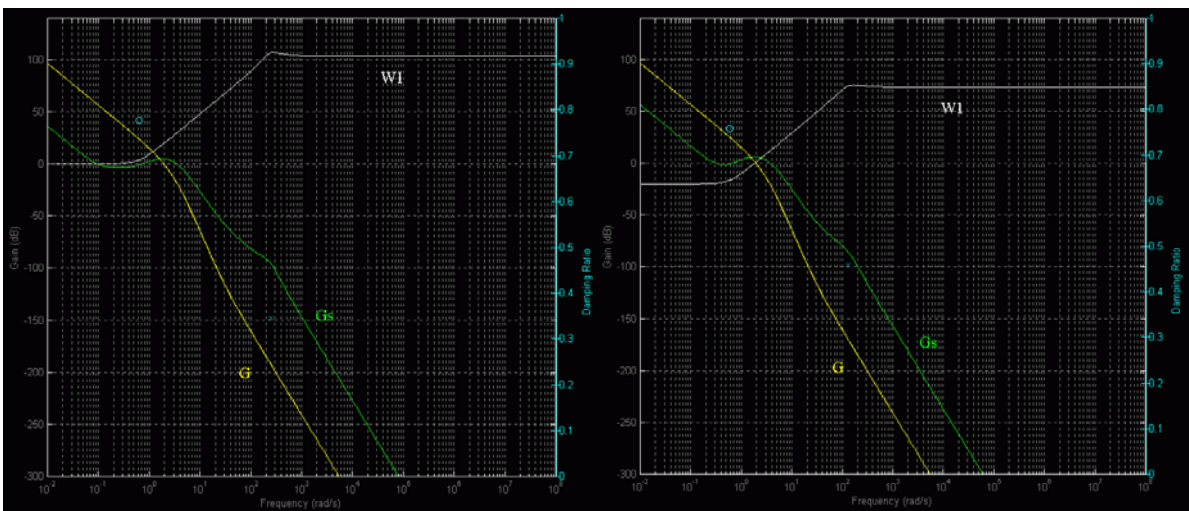


圖 5-8 $\gamma=4.5340$ 以及 $\gamma=5.1635$ 之特徵值圖形

■ 4~5 rad/s : $\gamma = 4.8664$ 、 $W1 = \frac{12589.2541(s^2 + 0.6547s + 0.1778)}{(s^2 + 152.9s + 2.239e004)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$
 以及 $\gamma = 5.4473$ 、 $W1 = \frac{71.2382(s^2 + 1.575s + 1.77)}{(s^2 + 37.65s + 1261)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$

其特徵值圖形分別如下：

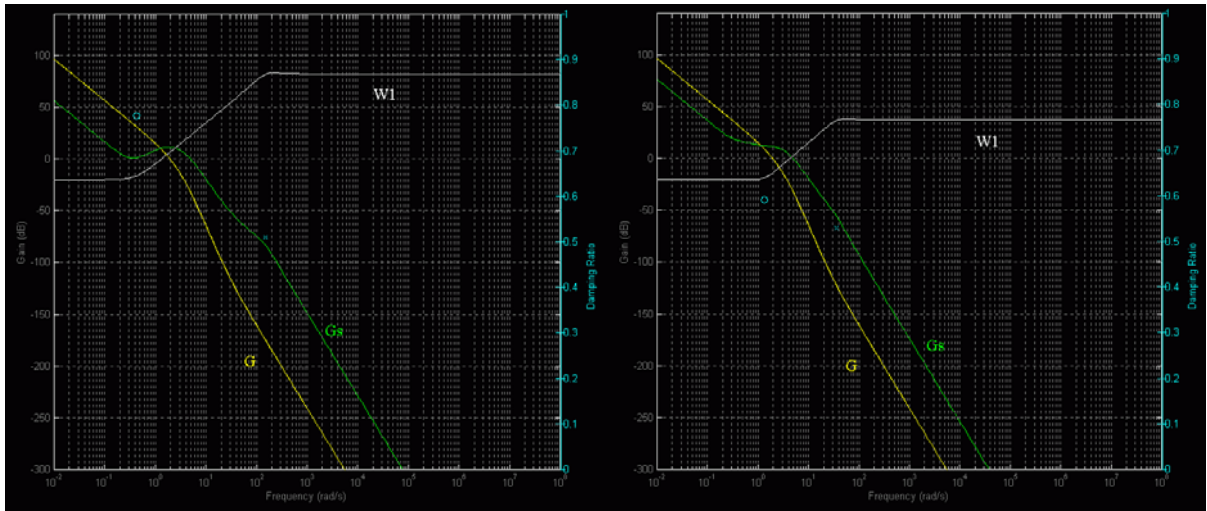


圖 5-9 $\gamma=4.8664$ 以及 $\gamma=5.4473$ 之特徵值圖形

■ 5~6 rad/s : $\gamma=4.4188$ 、 $W1 = \frac{72521.2225(s^2 + 0.4832s + 0.1174)}{(s^2 + 423.5s + 8.516e004)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

以及 $\gamma = 4.4854$ 、 $W1 = \frac{33065.8617(s^2 + 0.4832s + 0.1174)}{(s^2 + 280.5s + 3.883e004)}$ 、 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

其特徵值圖形分別如下：

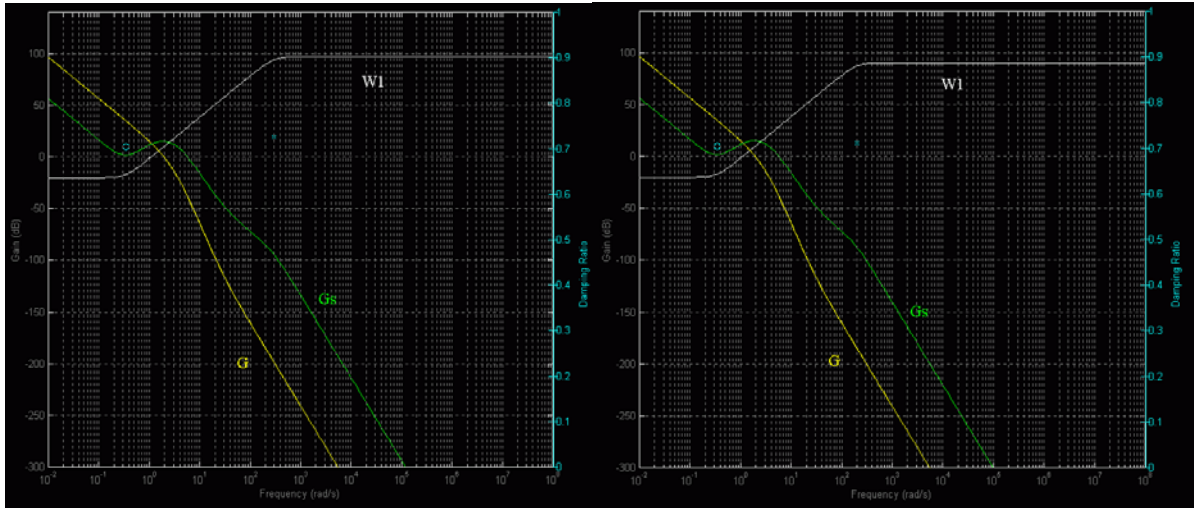


圖 5-10 $\gamma=4.4188$ 以及 $\gamma=4.4854$ 之特徵值圖形

在二階 weighting 的設計下，我們可以觀察出在 3~4 rad/s、4~5 rad/s 以及 5~6 rad/s 都有 γ 值小於 5 的情況出現，也就是滿足我們設計的條件；在這些滿足 γ 值情況下，我們將 γ 、reference model 以及 shaped plant 帶入式(4-13)以及式(4-14)：

$$(A - BS^{-1}D^*C)^* X + X(A - BS^{-1}D^*C) - XBS^{-1}B^*X + C^*R^{-1}C = 0 \quad (5-1)$$

$$(A - BS^{-1}D^*C)Z + Z(A - BS^{-1}D^*C)^* - ZC^*R^{-1}CZ + BS^{-1}B^* = 0 \quad (5-2)$$

可以得到解 X、Z，經由疊代求出 γ 再帶入式(3-20)

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A + BF + \gamma^2 W_1^{*-1} ZC^*(C + DF) & \gamma^2 W_1^{*-1} ZC^* \\ \hline B^*X & -D^* \end{array} \right] \quad (5-3)$$

可以得到 output feed back 控制器(其中 A,B,C,D 為 shaped plant 的 state-space)；之後將控制器拆解為 observer 控制器，如式(4-20)、式(4-21)：

$$Gu = \left[\begin{array}{c|c} A + LC & B \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (5-4)$$

$$Gy = \left[\begin{array}{c|c} A+LC & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (5-5)$$

可得到 2 degree of freedom 的控制器。接著我們利用 matlab simulink 來模擬，模擬架構圖如下所示：

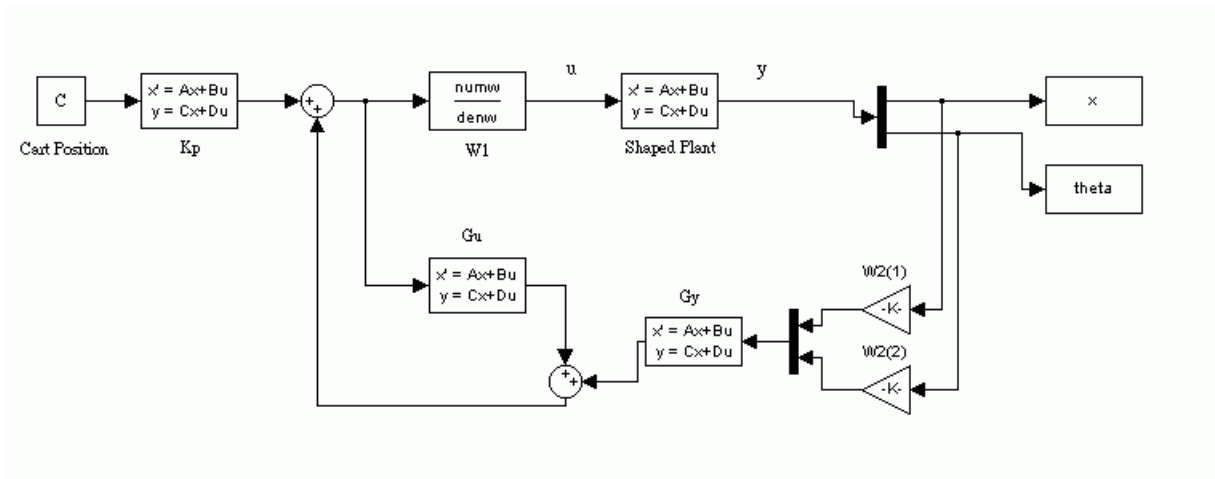


圖 5-11 matlab simulink 模擬架構圖

W1、W2 分別為 pre-weighting 和 post-weighting；kp 為 prefilter；Gu、Gy 分別為輸入和輸出的 observer 控制器；u 為輸入、y 為輸出(台車位置跟單擺角度)。Cart position 為台車位置定位，我們將其定位在 0 的位置上。

經由各階控制器的設計我們所設計出 γ 值小於 5 的控制器，均在二階 weighting 下所設計出，因此在模擬時，我們選擇 5.3 小節中，滿足 γ 值小於 5 所求出來的控制器進行模擬，共有 4 組滿足，利用其最佳值來做模擬；並且利用 4.4 節所提到之 H 轉移函數，改變 observer controller 的極點，討論加入 H 轉移函數與未加入的響應值比較。

5.4 模擬的結果

在 5.3 小節中，滿足 γ 值小於 5 的共有四組，分別為 3~4 rad/s 中的 $\gamma=4.5340$ ，4~5 rad/s

中的 $\gamma=4.8664$ 以及 5~6 rad/s 中的 $\gamma=4.4188$ 、 $\gamma=4.4854$ 。在本節中利用其中最佳值，也就是 5~6 rad/s 中的 $\gamma=4.4188$ ，求出的控制器來作為模擬依據。

- 頻寬 5~6 rad/s： $\gamma=4.4188$ ，利用不同初始值做討論，分為 I、初始值 $x=0$ 、 $\theta=50$ ；II、初始值 $x=100$ 、 $\theta=0$ 以及 III、 $x=100$ 、 $\theta=50$ 。(位置 100 的值相當於 2.5cm，角度 50 的值相當於 5 度)

台車位置、單擺角度以及電壓輸出響應模擬如下：

I、給予系統初始值 $x=0$ 、 $\theta=50$

響應(圖中 x 為台車位置， θ 為單擺角度) 電壓輸出¹³

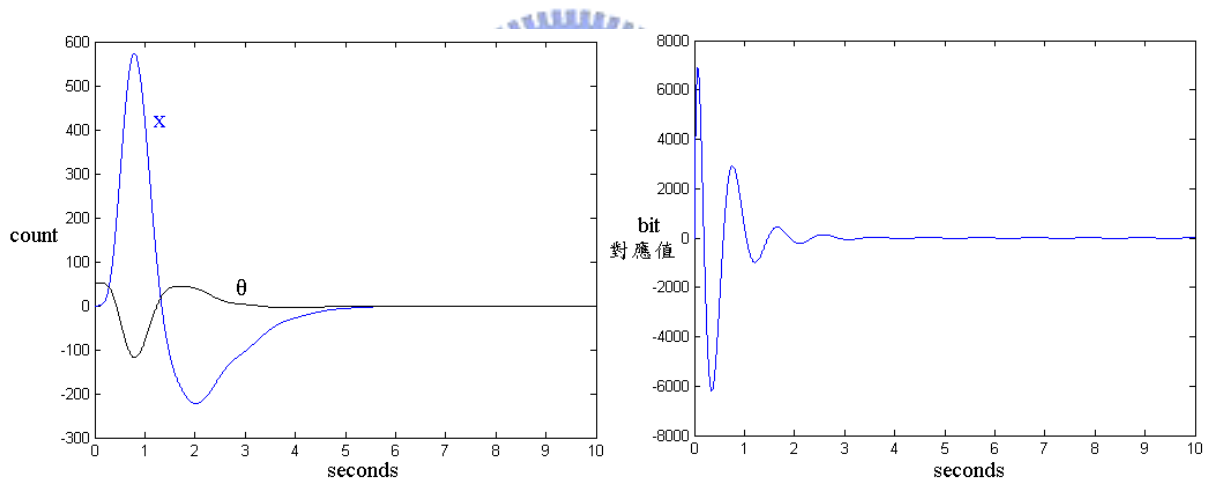


圖 5-12 最佳 γ 值時的模擬響應圖 I

註：以下的模擬圖形中，橫座標為時間，縱座標為 counter 的值。

II、給予系統初始值 $x=100$ 、 $\theta=0$

響應(圖中 x 為台車位置， θ 為單擺角度) 電壓輸出

¹³ 機台本身的輸入電壓訊號上限為 ± 32768 (相對於 $\pm 10V$)，其設定的安全上限為 ± 16500 。

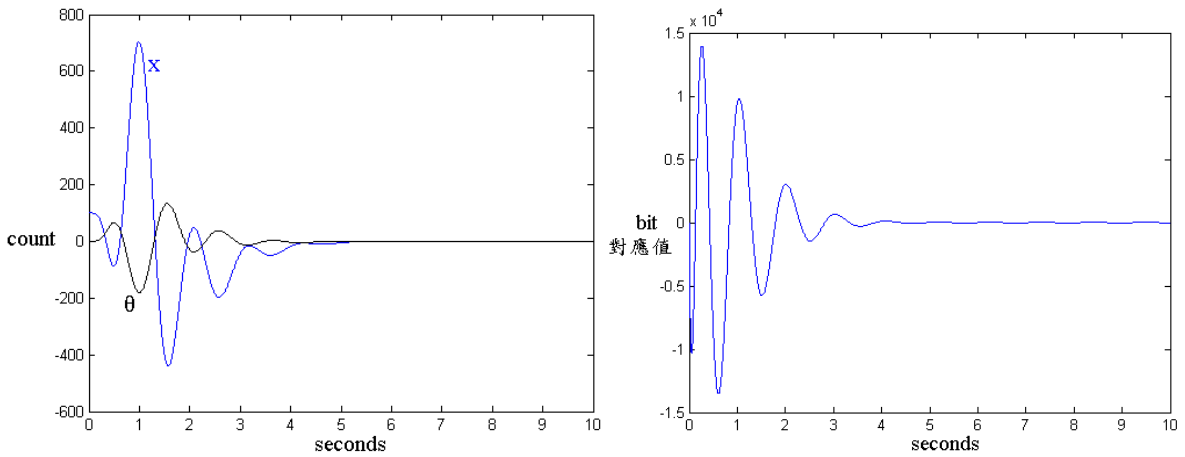


圖 5-13 最佳 γ 值時的模擬響應圖 II

III、給予系統初始值 $x=100$ 、 $\theta=50$

響應(圖中 x 為台車位置， θ 為單擺角度) 電壓輸出

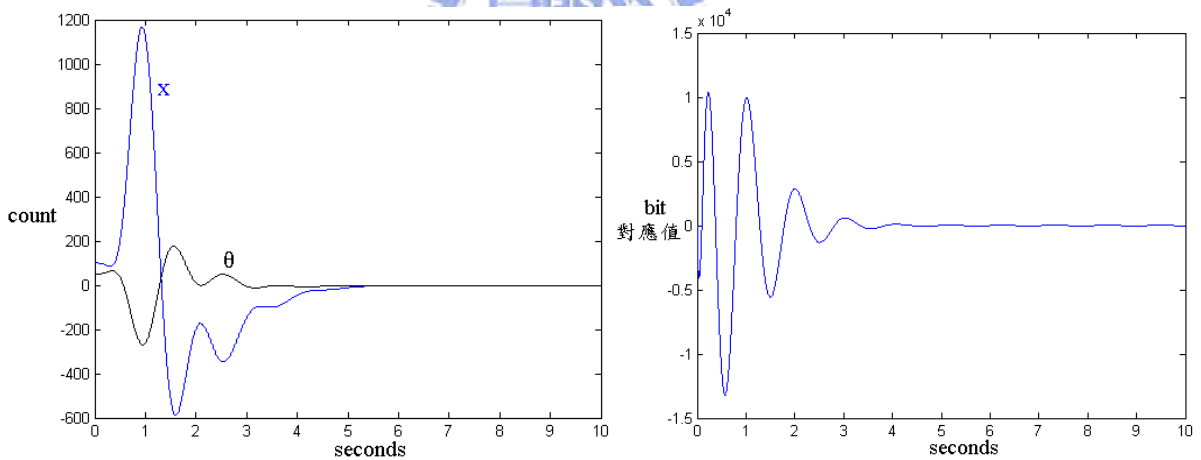


圖 5-14 最佳 γ 值時的模擬響應圖 III

觀察台車位置以及單擺角度的響應，比較各種初始值下模擬所產生的電壓值可以發現，當我們給予系統位置初始值的情況，震盪現象會比較大；而只有角度初始值時，電壓震盪的情況會比較小。而觀察模擬的情況，台車位置穩定約在 5 秒左右，角度值約在 3~4 秒左右；改變 post-weighting 的值目的在於改變輸出的比重，在這模擬的情況下我們

設計選用 $W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ ，也就是台車位置的比重為 0.1，單擺角度的比重為 10。電壓輸出值硬體極限在 +10V ~ -10V 之間，相對應的數值範圍為 +32768 ~ -32768；機台的保護電壓數值範圍為 +16500 ~ -16500 (約 +5V ~ -5V 之間)，因此模擬時也必須將電壓限制在 +16500 ~ -16500 之間。

5.4.1 加入改變 observer 控制器極點的 H 轉移函數模擬

參照 4.4 節的方式，我們加入一個 H 轉移函數，將原來控制器極點的位置轉移到指定的位置，選用的控制器為利用二階 weighting 設計，頻寬在 5~6 rad/s 之間， $\gamma=4.4188$ 之控制器；在此我們將極點位置轉為距離原來 5 倍遠的地方觀察(控制器的實際值收錄至附錄 C 中)。相對應的模擬結果如下：

I、給予系統初始值 $x=0$ 、 $\theta=50$

響應(圖中 x 為台車位置， θ 為單擺角度) 電壓輸出

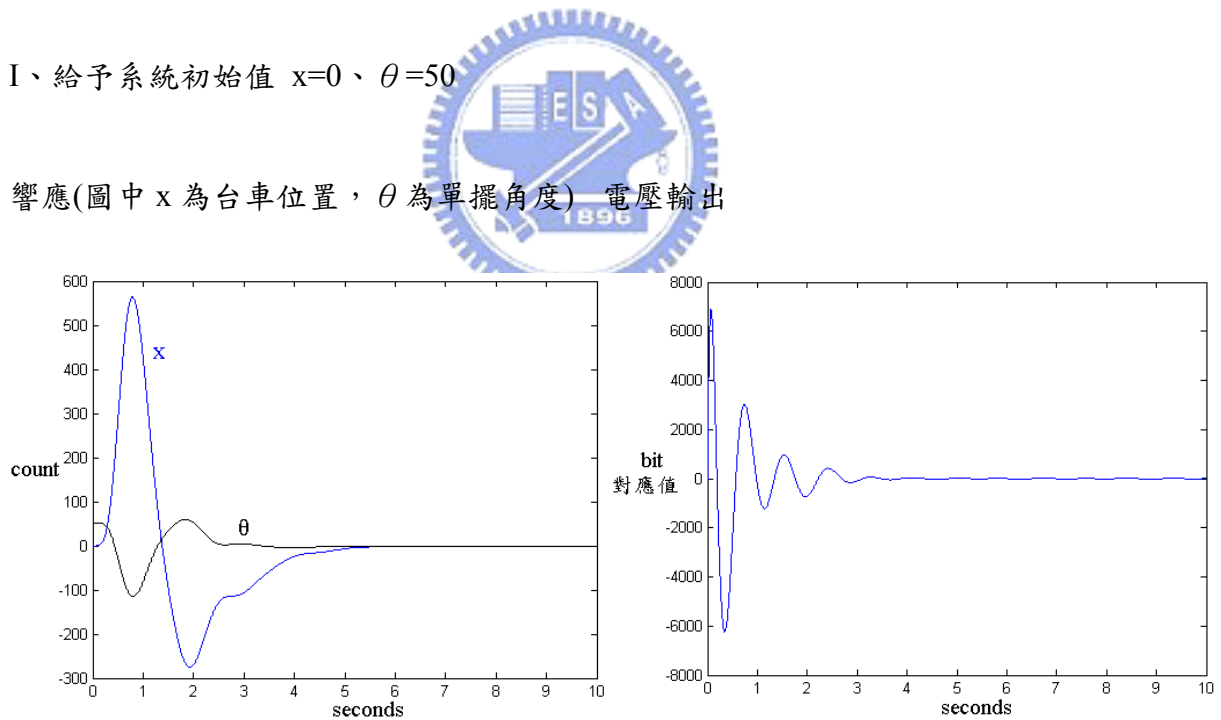


圖 5-15 最佳 γ 值改變 observer 控制器極點時的模擬響應圖 I

與未加入 H 轉移函數的響應比較圖：(其中虛線代表未加入 H 轉移函數改變極點的響應，而 x 、 θ 分別代表改變轉移函數極點之後的台車位置與單擺角度值)

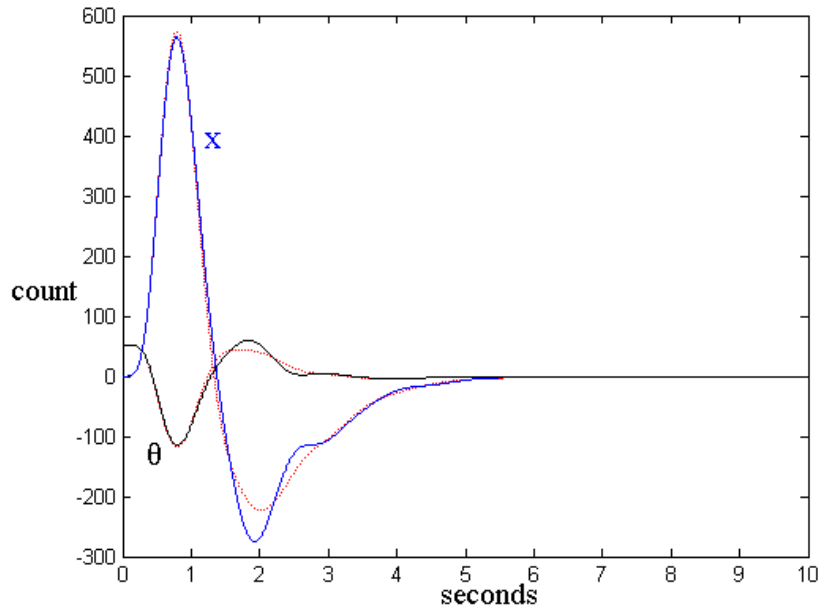


圖 5-16 加入 H 轉移函數與未加入 H 轉移函數的響應比較圖 I

II、給予系統初始值 $x=100$ 、 $\theta=0$

響應(圖中 x 為台車位置， θ 為單擺角度) 電壓輸出

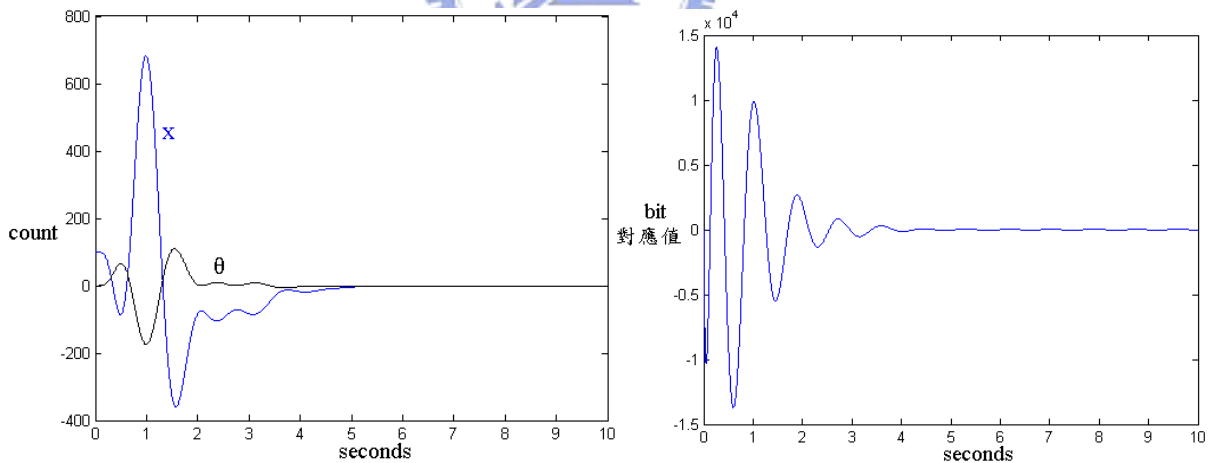


圖 5-17 最佳 γ 值改變 observer 控制器極點時的模擬響應圖 II

與未加入 H 轉移函數的響應比較圖：(其中虛線代表未加入 H 轉移函數改變極點的響應，而 x 、 θ 分別代表改變轉移函數極點之後的台車位置與單擺角度值)

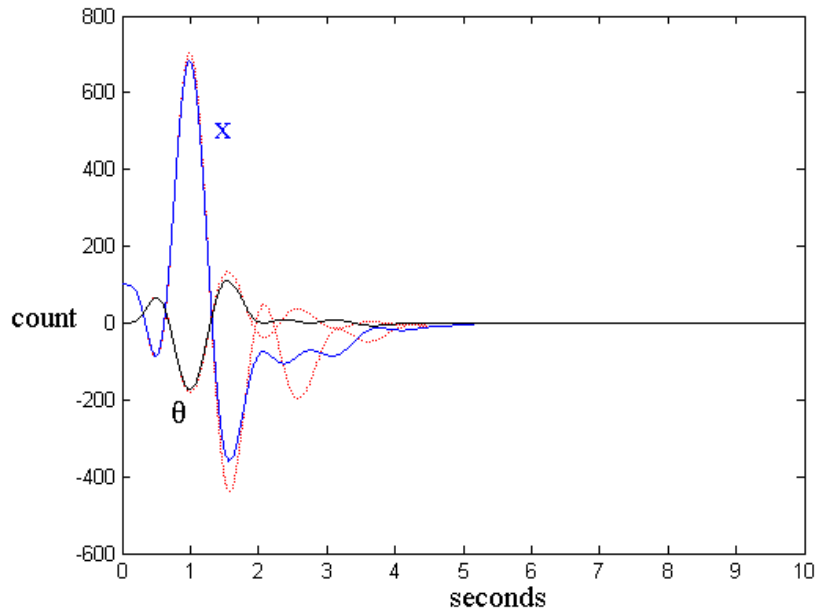


圖 5-18 加入 H 轉移函數與未加入 H 轉移函數的響應比較圖 II

III、給予系統初始值 $x=100$ 、 $\theta=50$

響應(圖中 x 為台車位置， θ 為單擺角度) 電壓輸出

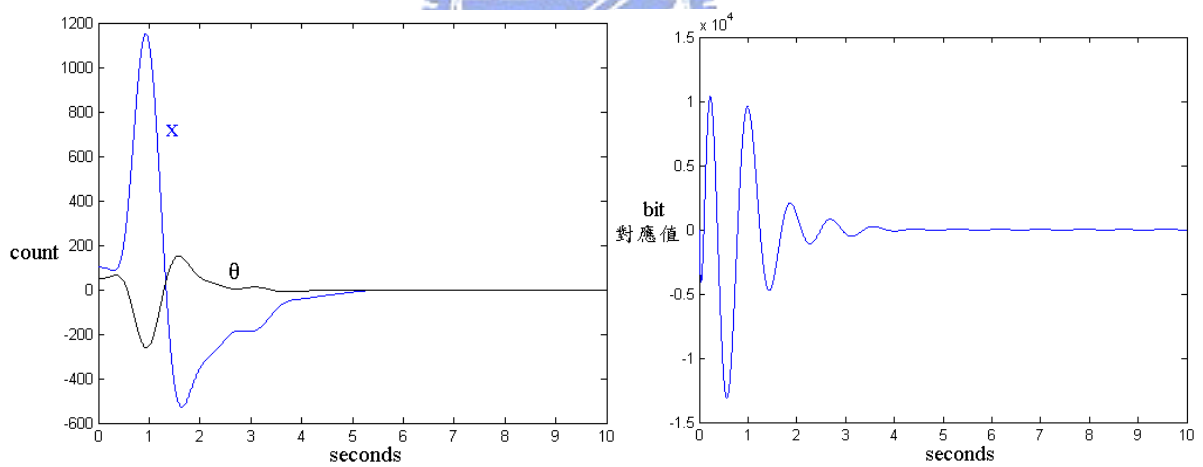


圖 5-19 最佳 γ 值改變 observer 控制器極點時的模擬響應圖 III

與未加入 H 轉移函數的響應比較圖：(其中虛線代表未加入 H 轉移函數改變極點的響應，而 x 、 θ 分別代表改變轉移函數極點之後的台車位置與單擺角度值)

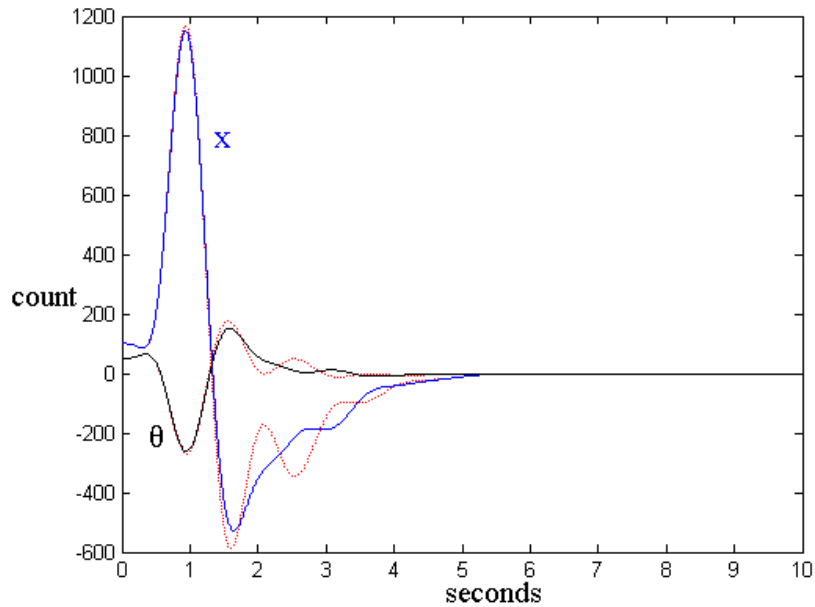


圖 5-20 加入 H 轉移函數與未加入 H 轉移函數的響應比較圖 III

觀察加入 H 轉移函數的模擬響應，將 observer 控制器極點改變到 5 倍遠的位置後，我們發現響應的震盪現象減少很多。

I、初始值 $x=0$ 、 $\theta=50$ 的情況下：將控制器的極點改到 5 倍遠處之後，感覺響應並沒有改善，因為原來響應震盪並不大，因此依照圖形比較，效果沒有很明顯。

II、初始值 $x=100$ 、 $\theta=0$ 的情況下：極點移到 5 倍遠處的控制器明顯的有改善響應的震盪現象，尤其是對台車位置的震盪現象改善，效果很好。

III、初始值 $x=100$ 、 $\theta=50$ 的情況下：極點移到 5 倍遠處的控制器也是很明顯的將台車位置以及單擺角度的震盪現象改善，由圖 5-20 明顯的可以看出，加入 H 轉移函數的響應明顯的要比未加入 H 轉移函數的響應平滑很多。

由響應比較圖中我們也可以觀察出，加入 H 轉移函數可以改善響應的震盪現象，但是響應的時間並不會改變，台車位置與單擺角度穩定的時間仍然和未加入 H 轉移函數時相同。之後我們試著改變 H 轉移函數，將 observer 控制器的極點改變到 10 倍遠的位置

觀察，響應和 5 倍遠的位置沒有太大的改變，響應時間也沒有改變；因此改變 observer 控制器極點位置有可以降低震盪的好處，但不能使響應收斂加快。

5.5 控制器比較

為了比較我們設計出控制器的效果，我們參考利用相同設計，但是未拆解成 Observer 控制器的 H_∞ 2-degree-of-freedom 設計，也就是參考文獻[2]中，D.J. walker 的設計來做一比較。針對文獻中的倒單擺系統，比較 Walker 設計方式與我們的設計方式，討論其響應以及控制器的效能。

首先，為了比較兩者效能，我們直接選用 Walker 的選擇 weighting 以及參考模型(reference model)來做為參考，其所選擇的 weighting 如下：

$$W1 = 16.0288, \quad W2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



在此，W2 的選擇表示單擺角度輸出的比重比台車位置輸出大一倍；在 1.2 節文獻回顧中有提到，一般倒單擺的設計，單擺角度的直立的比重會比較大；也就是說控制器的設計對於單擺角度的控制需比較靈敏。

而參考模型(reference model)如下：

$$M_r = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{5.29}{s^2 + 2.714s + 5.29} \quad (5-6)$$

其中 $\omega_n = 2.3 \text{ rad/s}$ ，而 ζ (damping ratio)=0.59；

由於 Walker 也是採用 2-degree-of-freedom 來設計，不同的差別在於我們將控制器拆解為 Observer 控制器，而 Walker 是用 Output feedback 控制器，但是在選擇 weighting 以及參考模型時，並不會有差別，因此我們即利用它所設計的 weighting 以及參考模型來設計；

這樣也比較可以看出將控制器拆解為 Observer 控制器之後的差別。接著，我們就針對二種方式設計來討論，作一比較。

我們先觀察 Walker 所設計的控制器架構：

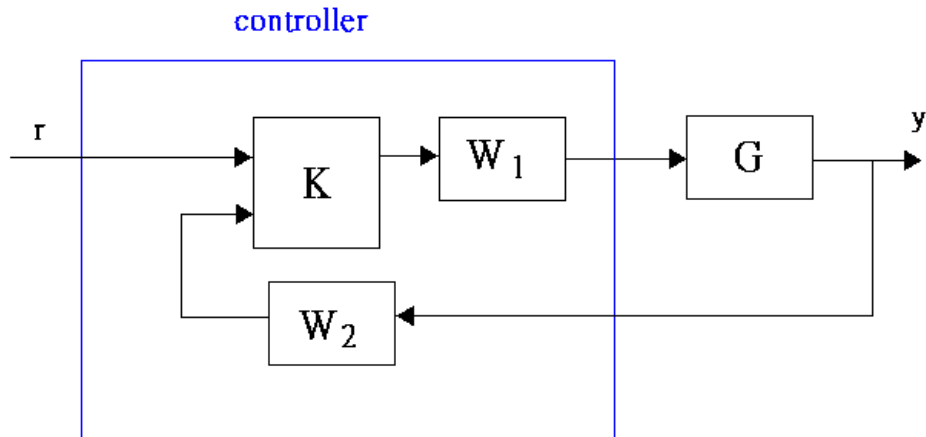


圖 5-21 Walker 控制器架構圖

Walker 所利用的系統為

$$G = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 26.420 & 0 & 0 & -120.55 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.75829 & 0 & 0 & 48.221 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14035 & 0 & -6000 & 1000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5-7)$$

系統本身的極點位置為：

0, -115, ±4.96, -5885

其中 -5885 的極點為電器特性所造成的，因此以系統開迴路而言，有一個不穩定的極點位置在 4.96。

其控制器轉移函數的特徵方程式為：

$$(s + 960.98)(s + 154.14)(s - 9.86)(s + 1.44)(s + 1.37 \pm 1.87j) \quad (5-8)$$

控制器本身有一個不穩定的極點， $s = 9.86$ ；

我們利用拆解為 Observer 控制器的方式設計：

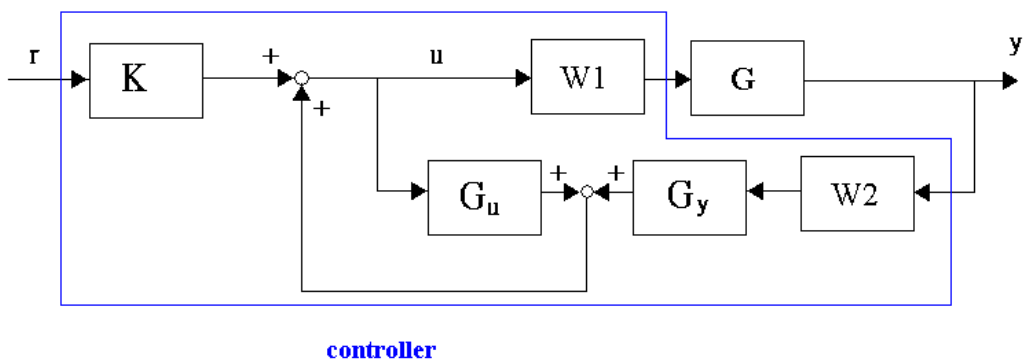


圖 5-22 拆解為 Observer 控制器的架構圖

Observer 控制器轉移函數的特徵方程式為：

$$(s + 885)(s + 115)(s + 6.608)(s + 3.674)(s + 1.152) \quad (5-9)$$

控制器本身並沒有不穩定的極點；因此，我們將控制器拆解為 observer 控制器的方式，可以避免控制器開迴路的極點位置在右半平面，可使控制器的開迴路極點的位置在左半平面，也就是可以使得控制器本身是穩定的。

接著以模擬的方式來比較，Walker 是採用利用台車定位來觀察角度以及台車的響應，其中台車位置以及單擺角度的初始值均在 0 的位置，響應圖如下所示：

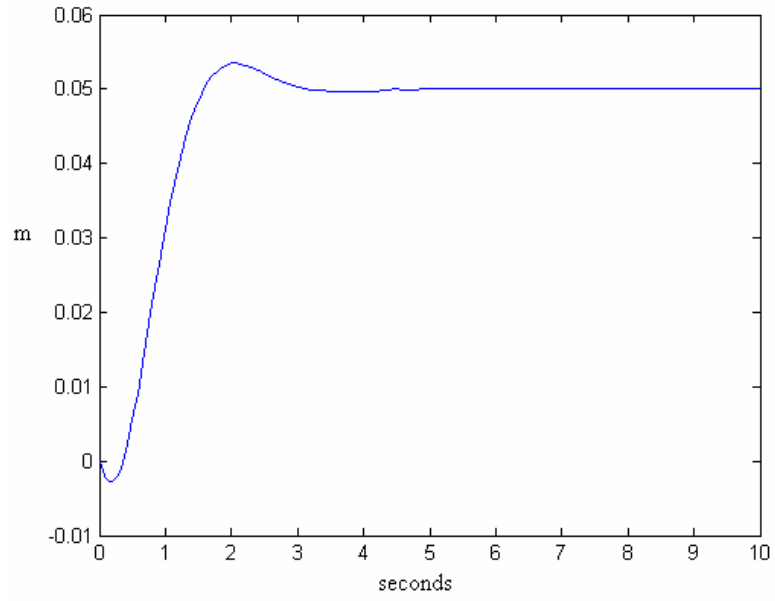


圖 5-23 Walker 模擬-台車定位至 0.05m 的響應

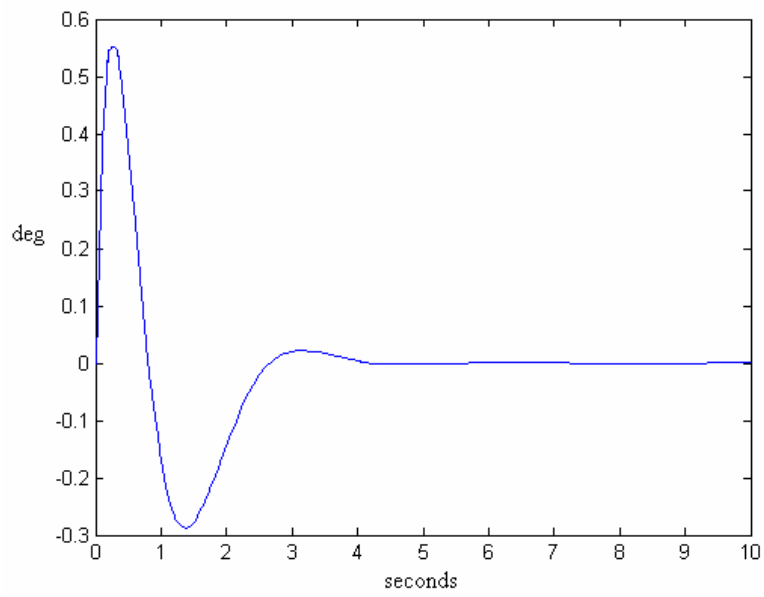


圖 5-24 Walker 模擬-台車定位至 0.05m 時單擺角度的響應

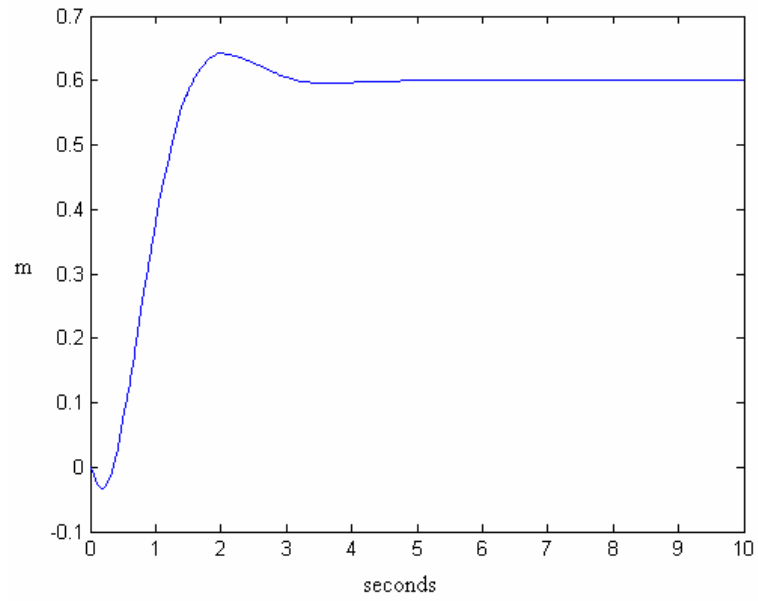


圖 5-25 Walker 模擬-台車定位至 0.6m 的響應

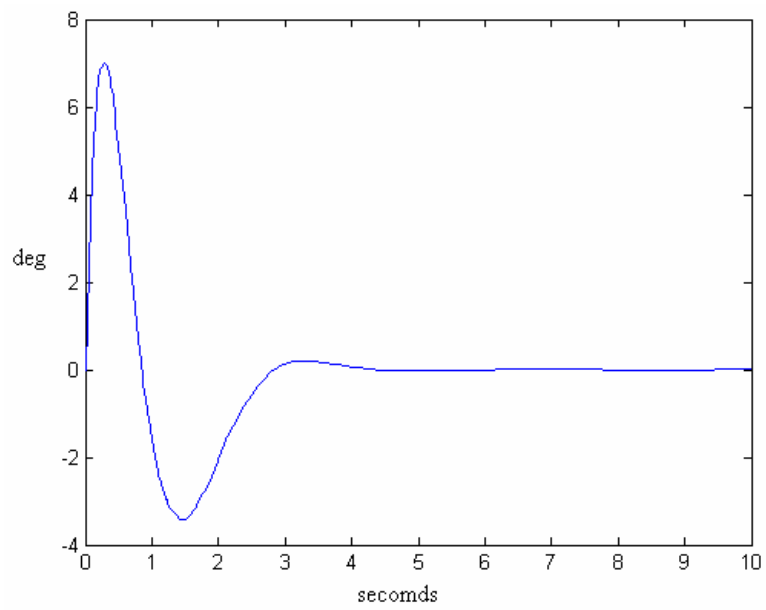


圖 5-26 Walker 模擬-台車定位至 0.6m 時單擺角度的響應

因此我們利用相同的數學模型下，將控制器拆解為 observer 控制器的方式，來作為模擬；將台車定位置 0.05m 以及 0.6m 的位置，而台車位置與單擺角度的初始值都在 0 的位置，模擬的情況如下：

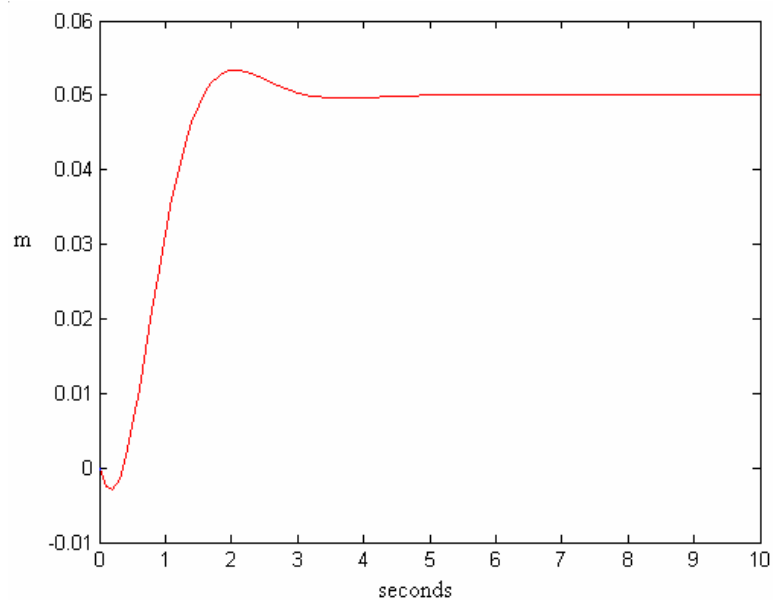


圖 5-27 Observer 控制器-定位至 0.05m 的台車位置模擬圖

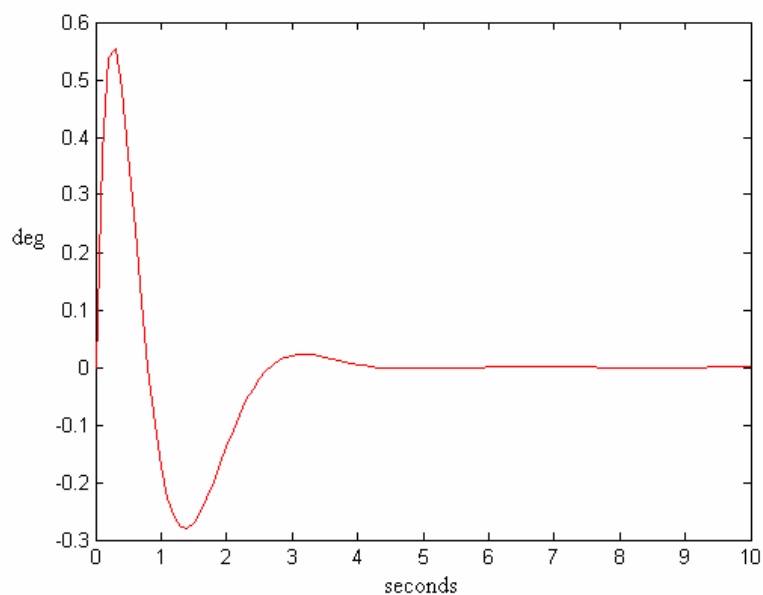


圖 5-28 Observer 控制器-定位至 0.05m 的單擺角度模擬圖

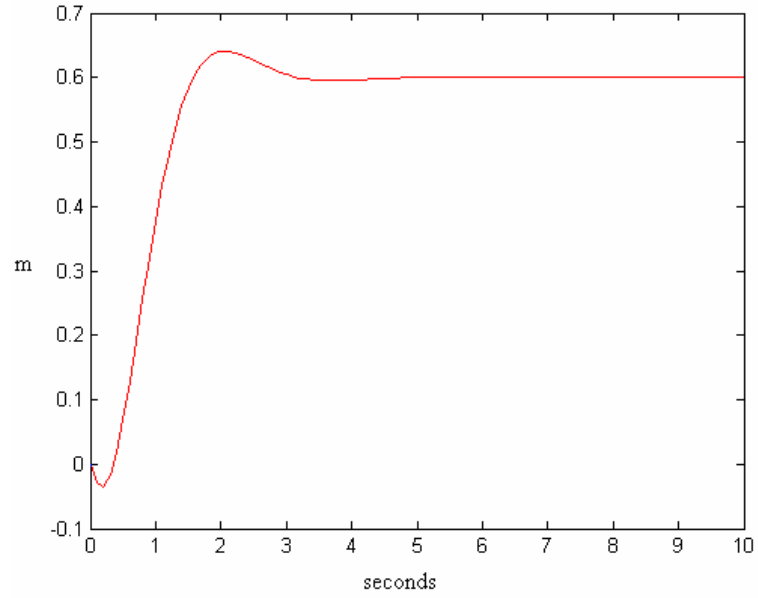


圖 5-29 Observer 控制器-定位至 0.6m 的台車位置模擬圖

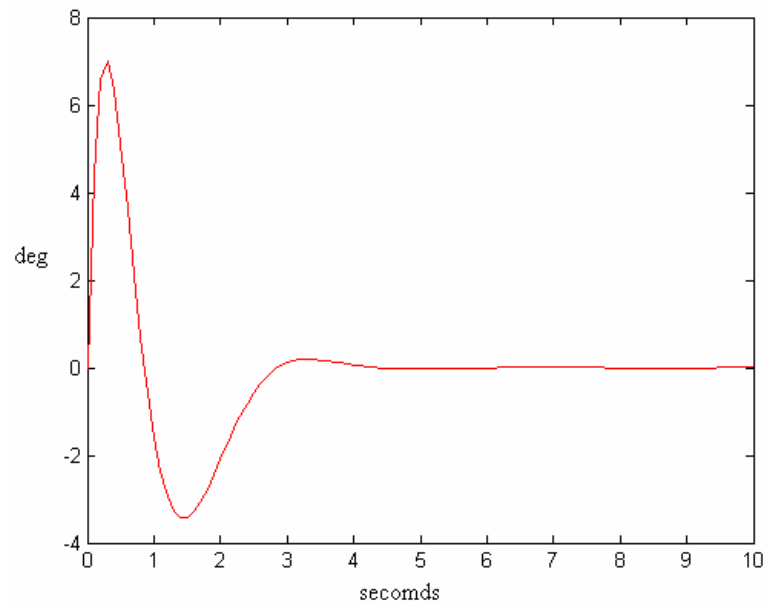


圖 5-30 Observer 控制器-定位至 0.6m 的單擺角度模擬圖

比較兩者的響應：

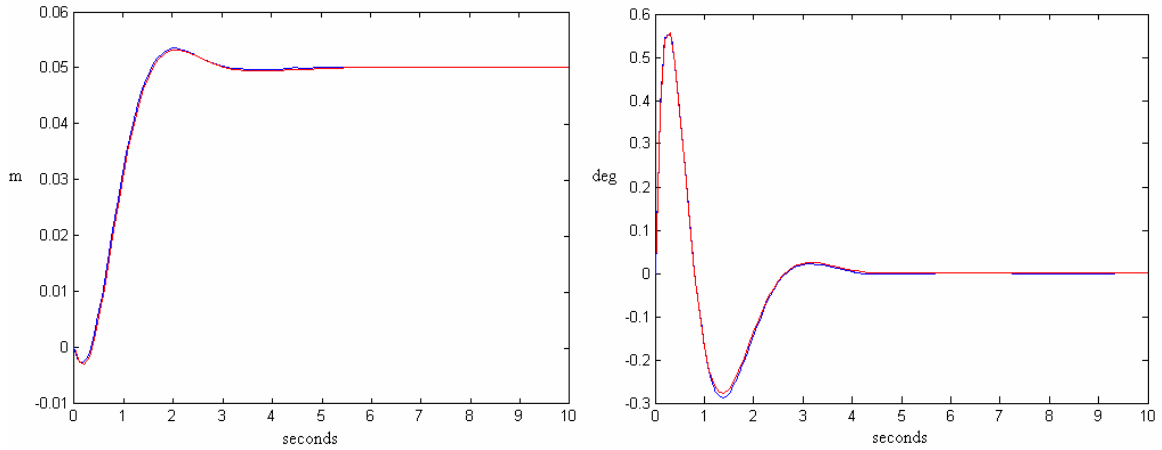


圖 5-31 Observer 控制器-定位至 0.05m 的響應比較圖

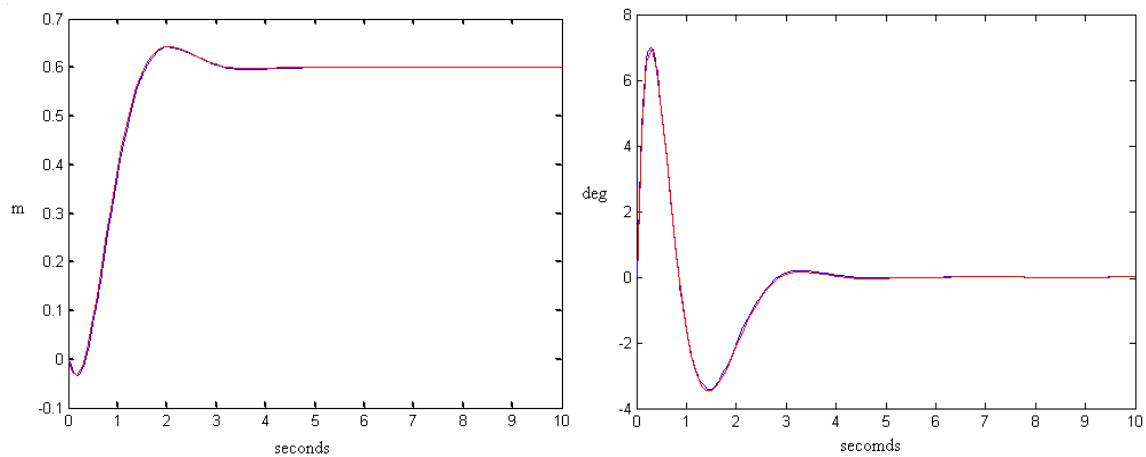


圖 5-32 Observer 控制器-定位至 0.6m 的響應比較圖

觀察控制器響應，拆解為 Observer 控制器與原來 Walker 未拆解的比較，由於拆解為 Observer 控制器後，系統的輸入與輸出並不會改變，在台車位置以及單擺角度初始值均為 0 的情況下，響應幾乎相同。而在初始值均為 0 的情況下加入 4.4 節所提到的 H 轉移函數，對響應影響不大；以下我們利用改變初始值的方式，來討論加入 H 轉移函數對響應影響。加入 H 轉移函數的架構圖可參考圖 4-30 加入 H 轉移函數後的 observer 控制器等效架構圖中的架構。

在此由先前的經驗，我們將 Observer 控制器的極點移到五倍遠處，也就是選擇：

$$H = \frac{(s+885)(s+115)(s+6.608)(s+3.674)(s+1.152)}{(s+4425)(s+575)(s+33.04)(s+18.37)(s+5.76)} \quad (5-10)$$

接著我們利用不同台車位置以及單擺角度的初始值，來討論加入 H 轉移函數的效能。

在此，我們將初始值分別設為：I、台車初始值為 0.1m，單擺角度為 5° ，定位至 0.6m；II、台車初始值為 0.1m，單擺角度為 0° ，定位至 0.6m；III、台車初始值為 0m，單擺角度為 5° ，定位至 0.6m；IV、台車初始值為 0.1m，單擺角度為 5° ，定位至 0m；觀查這四種初始值下的響應情況。

I. 將台車初始值設為 0.1m，單擺角度設為 5° ，定位至 0.6m

■ 未加 H 轉移函數之響應為：

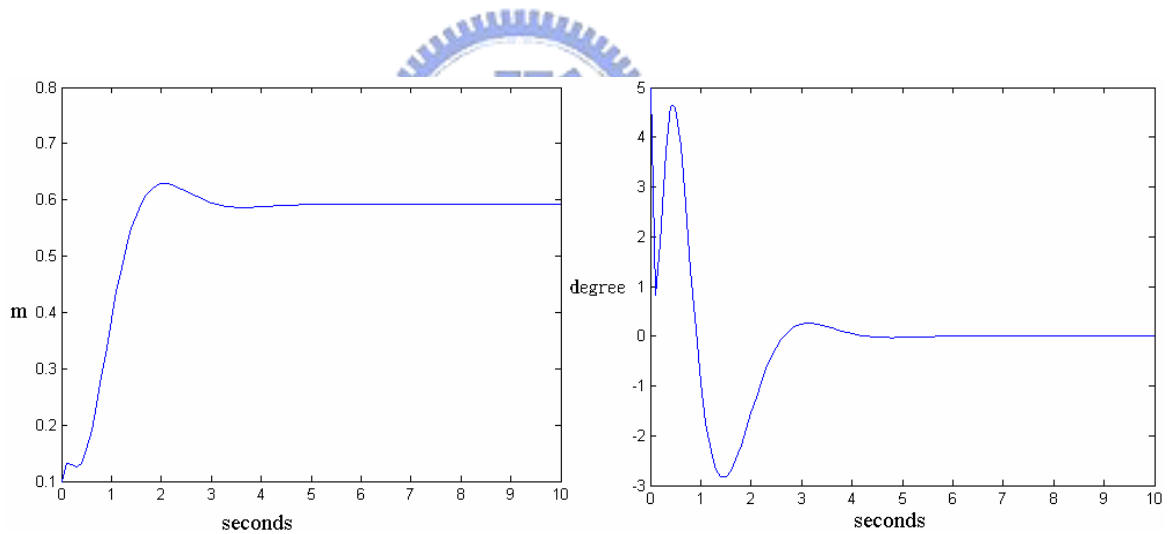


圖 5-33 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0.6m，未加 H 之響應圖

■ 加入 H 轉移函數的響應為：

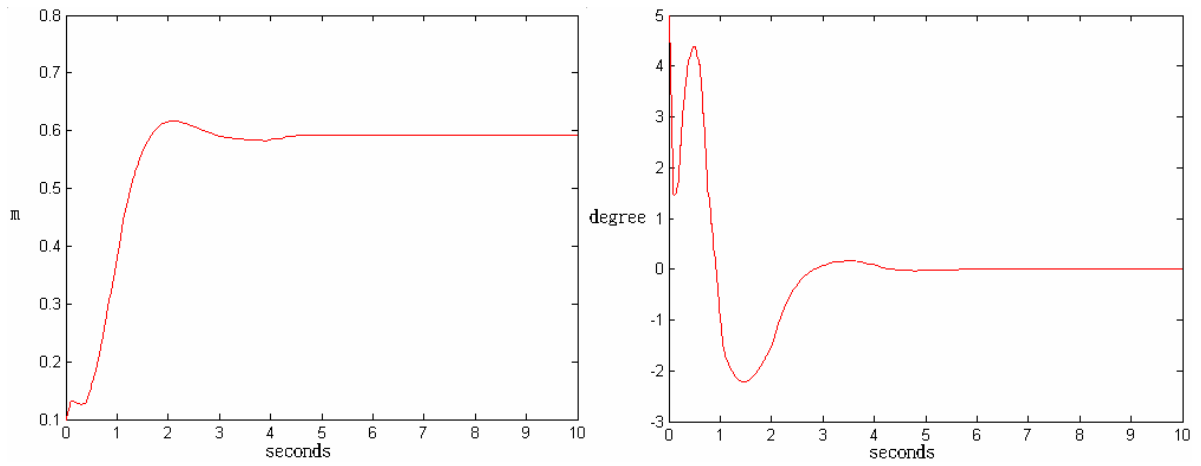


圖 5-34 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0.6m ，加入 H 之響應圖

■ 二者的比較圖如下：

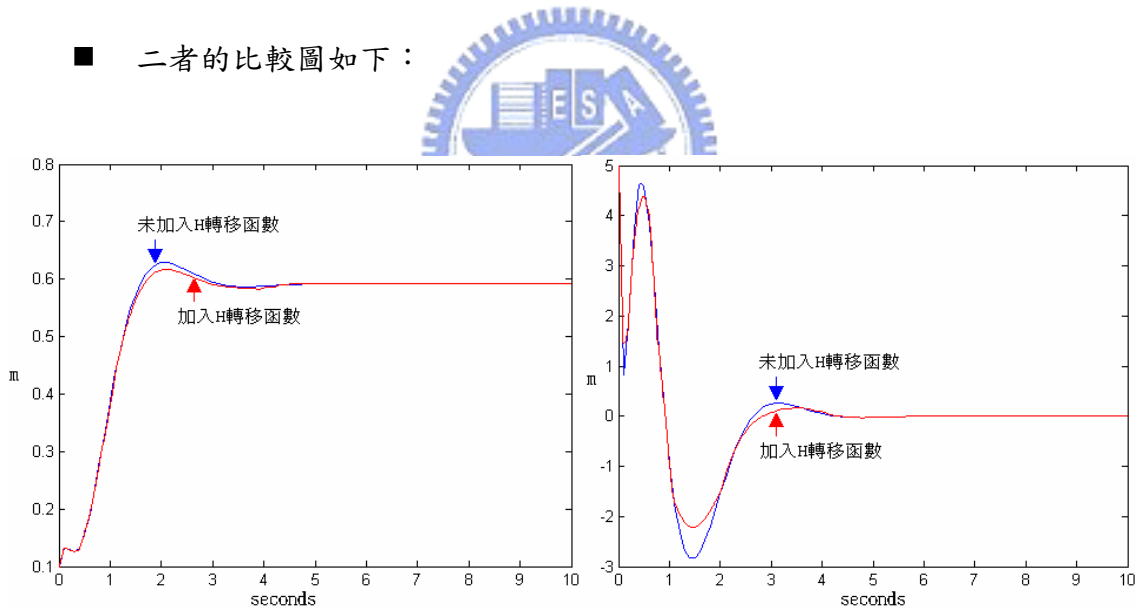


圖 5-35 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0.6m 之響應比較圖

II. 將台車初始值設為 0.1m，單擺角度設為 0° ，定位至 0.6m

■ 未加 H 轉移函數之響應為：

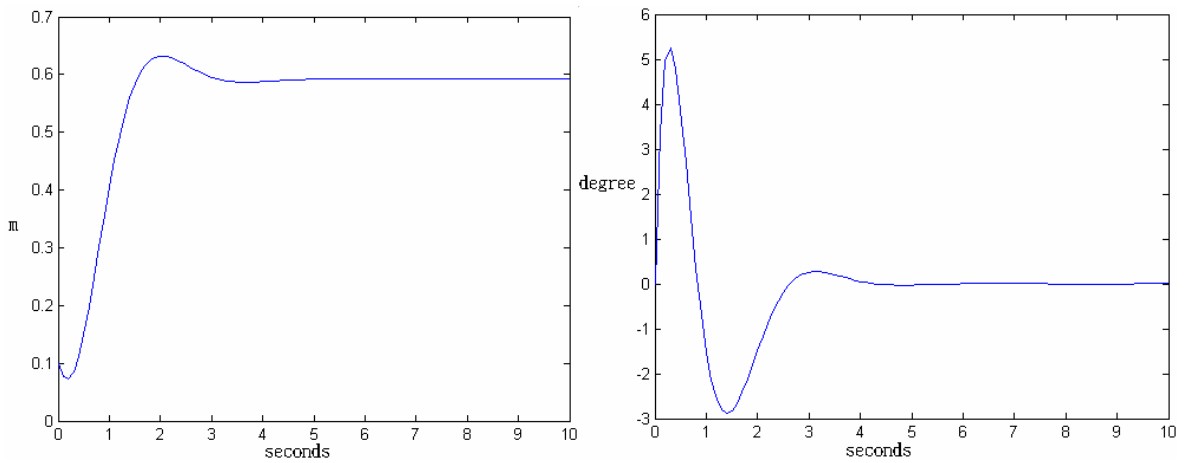


圖 5-36 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 0^\circ$ ，定位至 0.6m，未加 H 之響應圖

■ 加入 H 轉移函數的響應為：

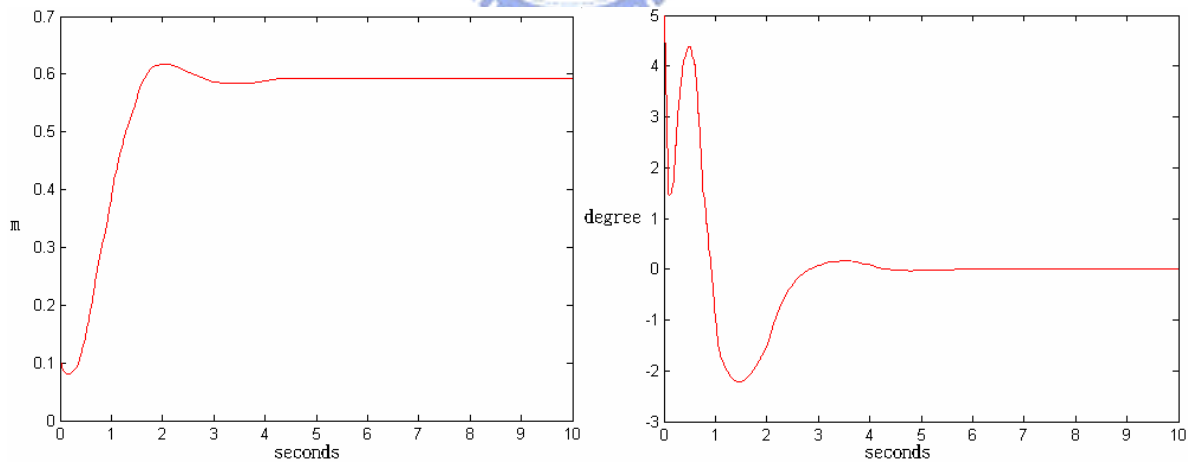


圖 5-37 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 0^\circ$ ，定位至 0.6m，加入 H 之響應圖

■ 二者響應比較：

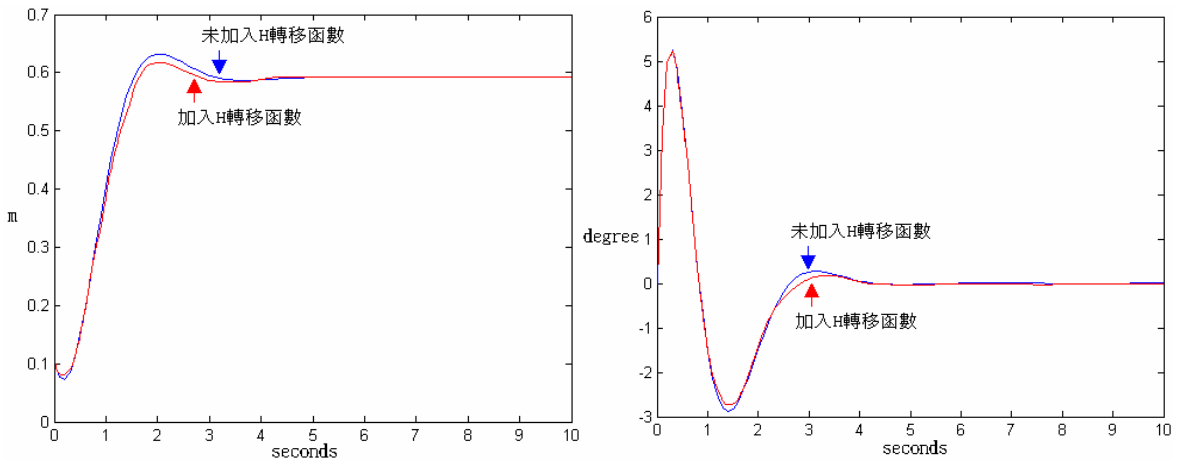


圖 5-38 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 0^\circ$ ，定位至 0.6m 之響應比較圖

III. 將台車初始值設為 0m ，單擺角度設為 5° ，定位至 0.6m

■ 未加 H 轉移函數之響應為：

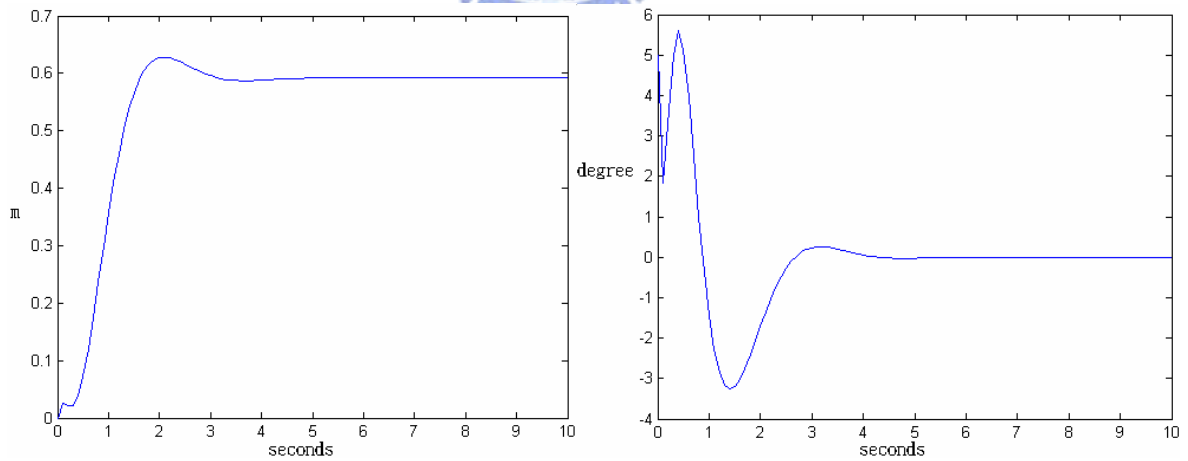


圖 5-39 初始值 $x = 0\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0.6m ，未加 H 之響應圖

■ 加入 H 轉移函數的響應為：

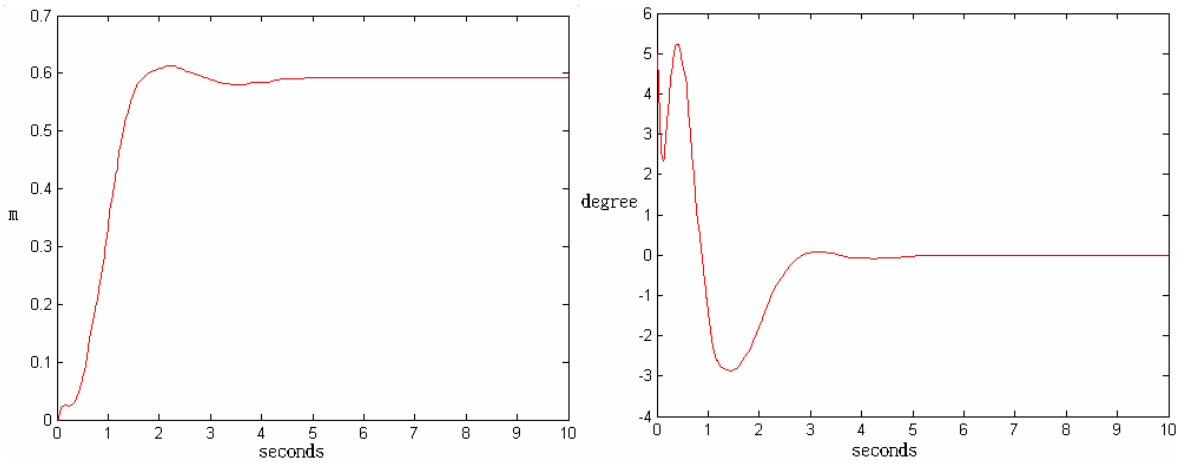


圖 5-40 初始值 $x = 0\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0.6m ，加入 H 之響應圖

■ 二者響應比較：

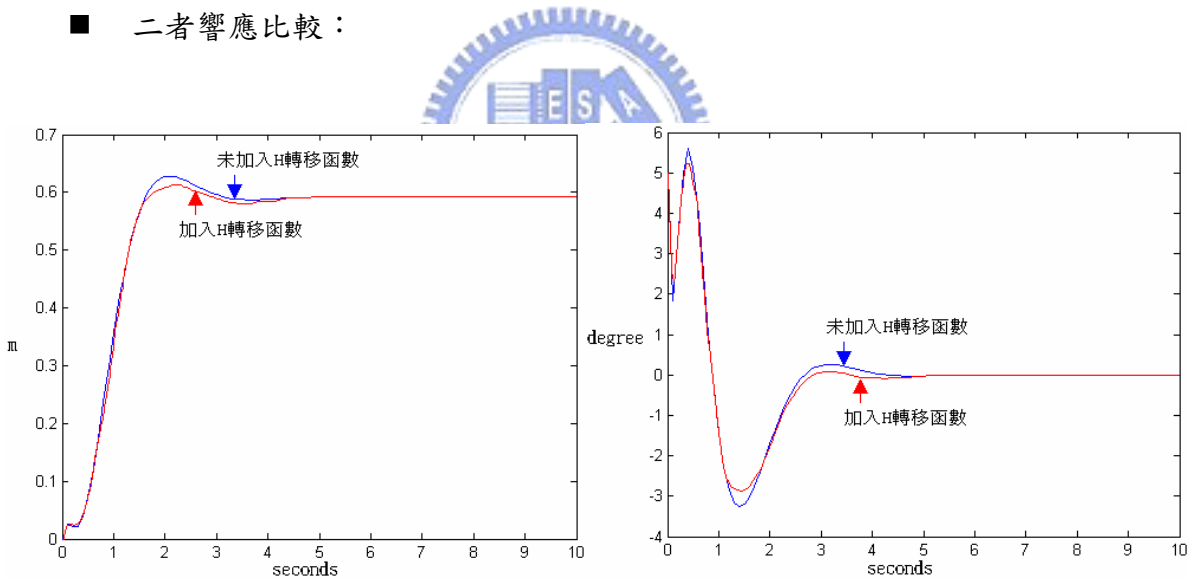


圖 5-41 初始值 $x = 0\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0.6m 之響應比較圖

IV. 將台車初始值設為 0.1m，單擺角度設為 5° ，定位至 0 m

■ 未加 H 轉移函數之響應為：

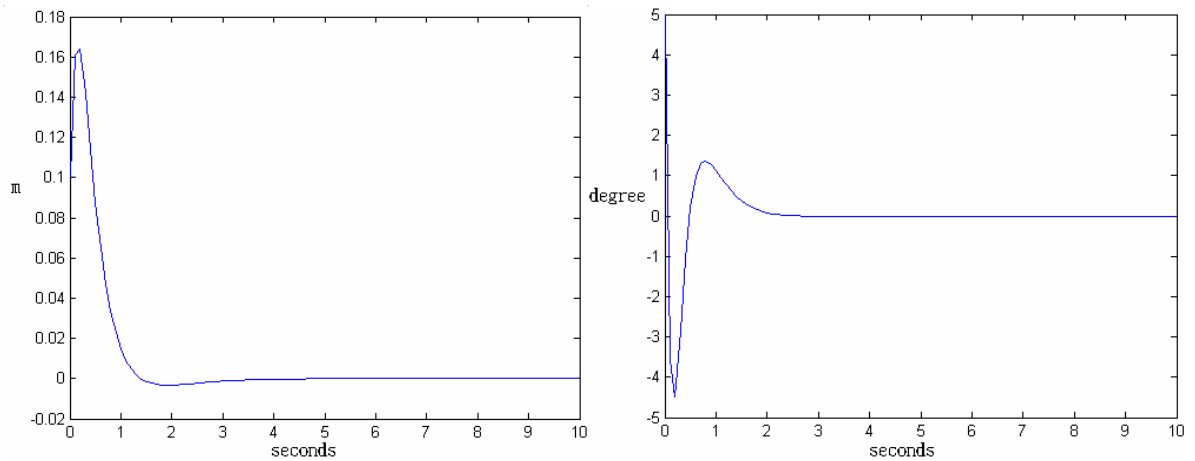


圖 5-42 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0m，未加 H 之響應圖

■ 加入 H 轉移函數的響應為：

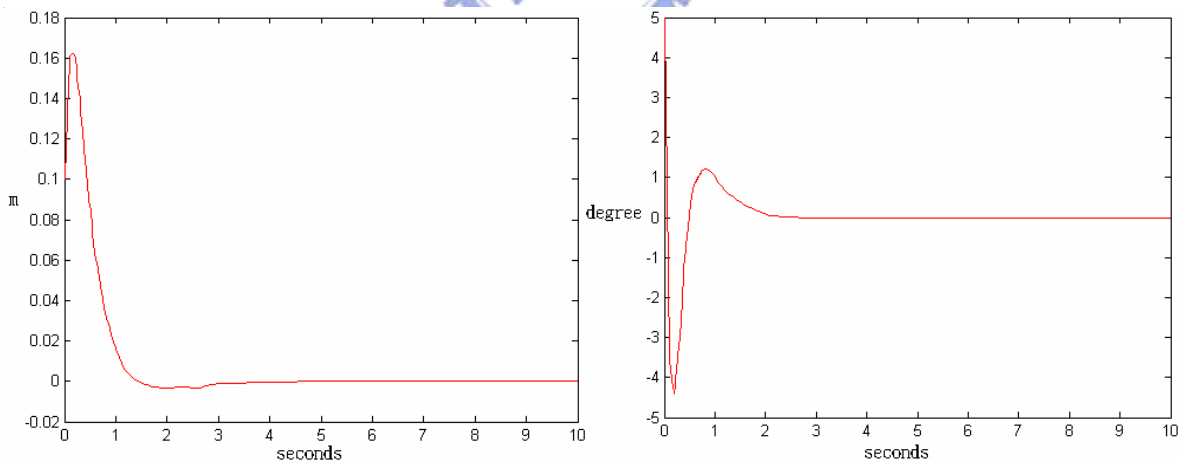


圖 5-43 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0m，加入 H 之響應圖

■ 二者響應比較：

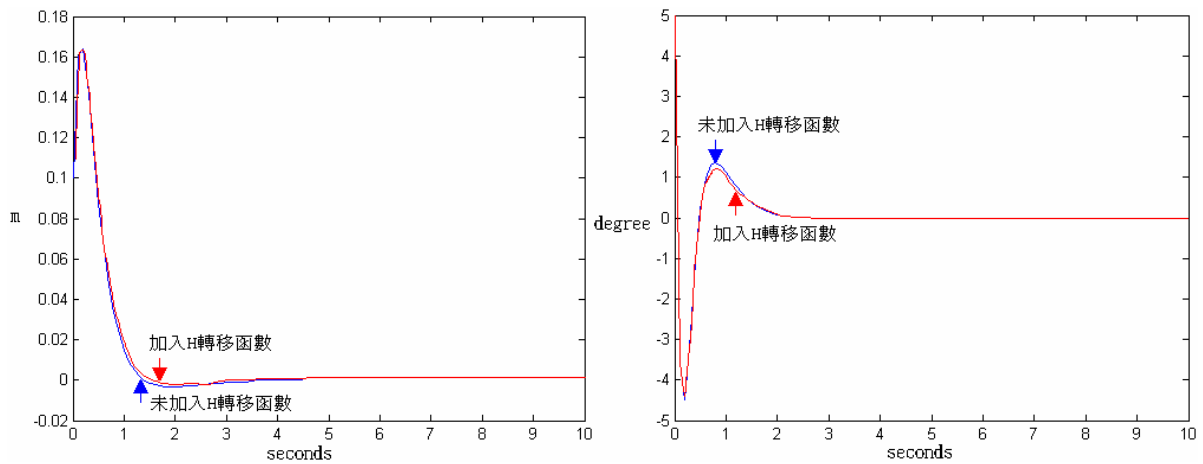


圖 5-44 初始值 $x = 0.1\text{m}$ ， $\theta = 5^\circ$ ，定位至 0m 之響應比較圖

觀察發現，加入 H 轉移函數和未加入 H 轉移函數的響應，在初始值改變的情況下，加入 H 轉移函數對控制器響應的確會有改善，當我們將初始值定在非 0 的位置時，加入 H 轉移函數的響應振盪會較小，在 I、II、III 的情況下，我們可以很明顯的觀察出這種效果；而在 IV 的情況下，定位位置與台車位置初始值與 I、II、III 比較，相差較小，因此效果較不顯著。因此使用 H 轉移函數，最佳時機應該是當初始值與定位值差距到一定程度時，可觀察到的效果最顯著。

最後，以控制器而言，Walker 所設計出的控制器本身會有一個右半平面的極點，控制器本身是不穩定的¹⁴；而我們設計出的控制器本身的極點都在左半平面，因此控制器本身是穩定的。

¹⁴ 在此是指控制器本身開回路不穩定，但整個閉回路仍然是穩定的。

第6章 實驗與討論

第6章主要是針對 DSP 與電腦連結的方式以及硬體實驗內容做一介紹。首先將對 PC 端介面、DSP 晶片的編譯方式先做一介紹，主要內容為 DSP 晶片本身的編譯方式以及介面規劃；接著再介紹控制器程式的流程以及實驗的架構方式；最後我們討論實驗所遇到的問題。

6.1 節介紹 DSP 控制卡的程式撰寫流程與 DSP 晶片的編譯方式；

6.2 節介紹 PC 端介面與 DSP 連結的方式、利用 matlab 內部工具的設定方式以及程式架構與需要注意的事項；

6.3 節說明實驗的方式以及遭遇問題。



6.1 程式的撰寫流程以及工具介面

在這節中，將說明程式撰寫的流程架構、DSP 控制卡程式的發展環境以及所使用的編譯介面。

6.1.1 DSP 控制卡 C 語言撰寫格式

DSP 控制卡中，C 語言的撰寫格式，如果以方塊圖的方式表示，可參照圖 6-1。參考文獻[12]，其中主要架構可區分成程式檔頭宣告，傳輸參數設定區，程式內部參數設定區，主程式模組，online_loop 程式模組，offline_loop 程式模組，main_loop 程式模組，與控制實現模組。而在實現控制器時，我們要注意的是傳輸參數設定與控制實現模組，其餘大部份均為既定的格式；其中程式檔頭宣告包含了我們所使用的.h 檔案；main_loop 程式模組主要是執行 4KHz 的中斷；迴路控制模組主要是啟動伺服迴路控制；online_loop 主要是設定取樣頻率。接著我們對傳輸參數設定與控制實現模組這兩個模組作一簡單介紹：



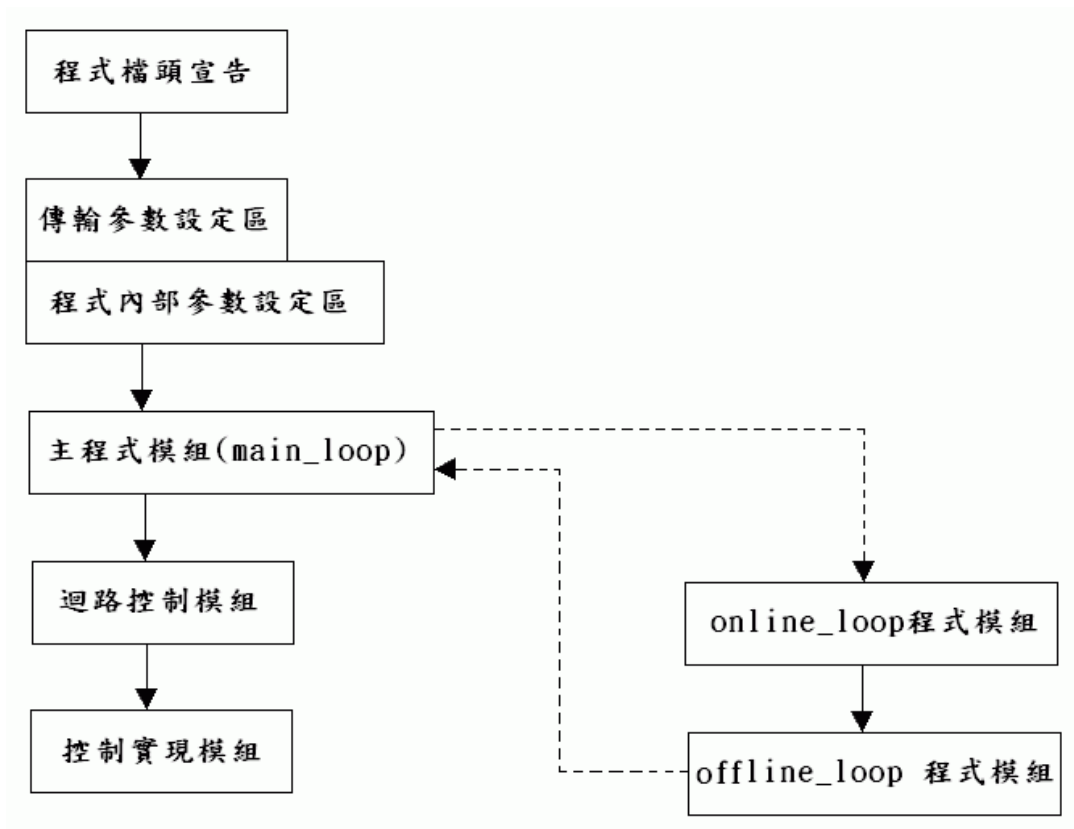


圖 6-1 控制程式模組化關係圖

■ 傳輸參數設定區：

本區定義 C 語言程式模組與 DSP 程式模組聯結參數的固定位址，分成三種類型，一為模組輸入，ex.命令輸入；二為模組輸出，ex.台車位置；三為模組內部的參數設定，ex.控制器的參數設定。需要注意的是 DSP 控制卡中可以設定的變數位置由 0x8000 至 0x807f 共 128 個位置可供使用者使用。

■ 控制實現模組：

此模組為使用者實現控制理論法則之處，使用者可將控制程式置於此區；亦即將第 4 章中所求出的控制器，放在這個部分實現。

6.1.2 DSP 控制卡程式編譯介面發展環境

撰寫控制程式時，使用 TI 所提供的 C 語言編輯器，進行 DSP 控制程式的發展，該介面是使用 DOS 發展環境，因此先在 DOS 的環境下建立一批次檔並執行之，以設定程式使用工具的搜尋路徑，以及設定執行程式的位置；設定好路徑之後，接著在 DOS 的環境下，將可能用到如程式編輯(edit)，編譯(compile)，均整理集中在命名為 dsp24x.bat 的批次檔中。批次檔執行的畫面如下：

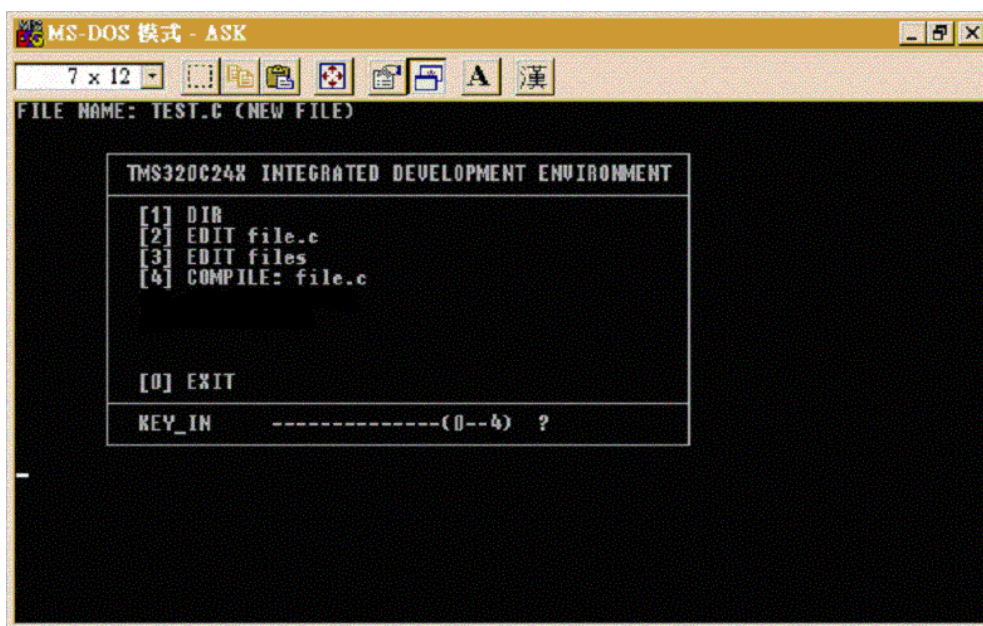
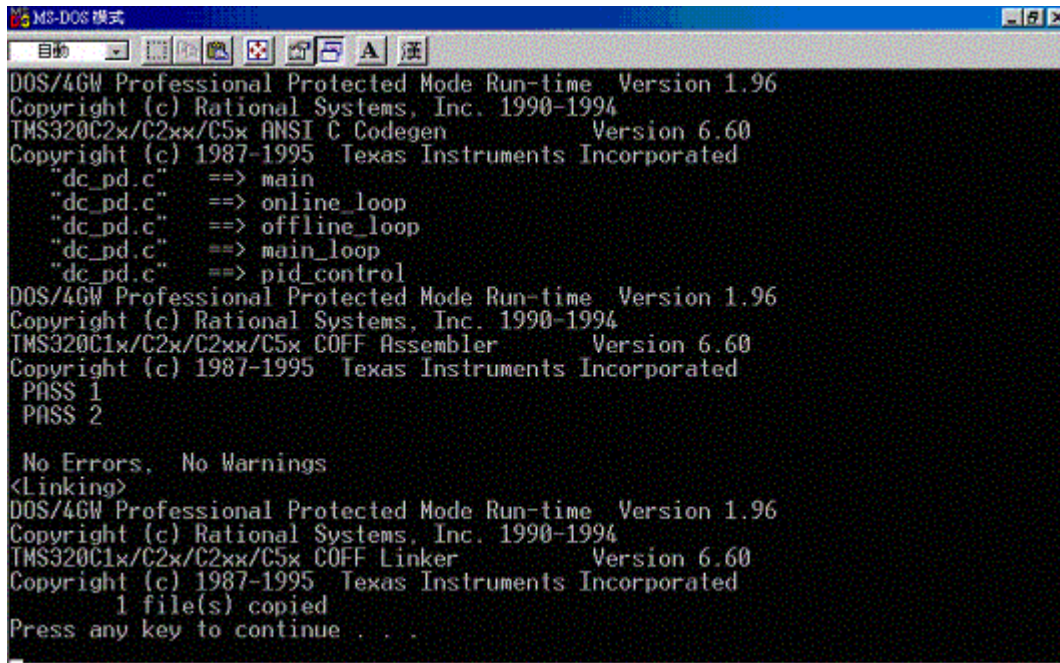


圖 6-2 在 DOS 模式下的編譯介面

主要是利用此介面來做程式的編譯工作，將完成的控制器寫成 C 檔案後，在此介面下選擇[4](compile file)的選項，即可完成轉譯工作，若轉譯過程正常，沒有錯誤出現，則會出現下圖中完成的訊息：



```
MS-DOS 模式
DOS/4GW Professional Protected Mode Run-time Version 1.96
Copyright (c) Rational Systems, Inc. 1990-1994
TMS320C2x/C2xx/C5x ANSI C Codegen Version 6.60
Copyright (c) 1987-1995 Texas Instruments Incorporated
"dc_pd.c" ==> main
"dc_pd.c" ==> online_loop
"dc_pd.c" ==> offline_loop
"dc_pd.c" ==> main_loop
"dc_pd.c" ==> pid_control
DOS/4GW Professional Protected Mode Run-time Version 1.96
Copyright (c) Rational Systems, Inc. 1990-1994
TMS320C1x/C2x/C2xx/C5x COFF Assembler Version 6.60
Copyright (c) 1987-1995 Texas Instruments Incorporated
PASS 1
PASS 2

No Errors, No Warnings
<Linking>
DOS/4GW Professional Protected Mode Run-time Version 1.96
Copyright (c) Rational Systems, Inc. 1990-1994
TMS320C1x/C2x/C2xx/C5x COFF Linker Version 6.60
Copyright (c) 1987-1995 Texas Instruments Incorporated
1 file(s) copied
Press any key to continue . . .
```

圖 6-3 編譯完成時的訊息

轉譯完成後，會再執行的資料夾中產生一個.out檔，可經由 RS232 將檔案傳送至 DSP 控制卡上，即可使 DSP 控制卡依照我們所規劃的控制程式來作動。



6.2 PC 端介面與 DSP 連結

PC 和 DSP 連結主要是利用 matlab 中 simulink 的 S-function 方塊，而 C 語言程式模組與 DSP 控制卡內建的的程式模組，均寫在 DspC.dll 的函式中，我們設計的 simulink 介面，主要的目的在於作為 DSP 控制卡透過 RS-232 與 PC 溝通的管道；接著我們將介紹整個 PC 端介面的設定，以及和 DSP 控制卡溝通的方式。6.2.1 小節中介紹 S-function 的設定； 6.2.2 小節對我們整個 PC 端的介面做一整理。

6.2.1 S-function 的設定

本節說明如何在 simulink 的環境中，建立我們所需要的功能方塊。在 matlab 的 simulink 工具中，點選 S-function 的方塊。方塊介面有兩個參數需要設定，一個是使用的函數名稱，在此我們使用 DspC.dll；一個是傳輸參數的設定，為上一節所提到，最多

可使用 128 個傳輸參數。在設定 S-function 的介面參數時，依據 DspC.dll 函式的設定，有幾個部分需要注意：

- 每個自定的 S-function 方塊可傳輸的參數總數目，最多為 10 個，不足時個時要補零，如果所使用的傳輸參數多於 10 個，則必須另開 S-function。
- 輸入參數的格式設定為[位置,旗標]。旗標設定為 $30+n$, $n=1,2,3\dots$ ，第一個輸入 $n=1$ ，第二個輸入 $n=2$ ，依此類推；如[32768,31]表示第一個輸入值的位置是 32768。
- 輸出參數的格式設定為[位置,旗標]。旗標設定為 $40+n$, $n=1,2,3\dots$ ，第一個輸出 $n=1$ ，第二個輸出 $n=2$ ，依此類推；如[32769,41]表示第一個輸出值的位置是 32769。
- 內部調整參數格式設定為[變數名,位置]。如[ccmd,32770]表示內部參數 ccmd 值的儲存位置是 32770。

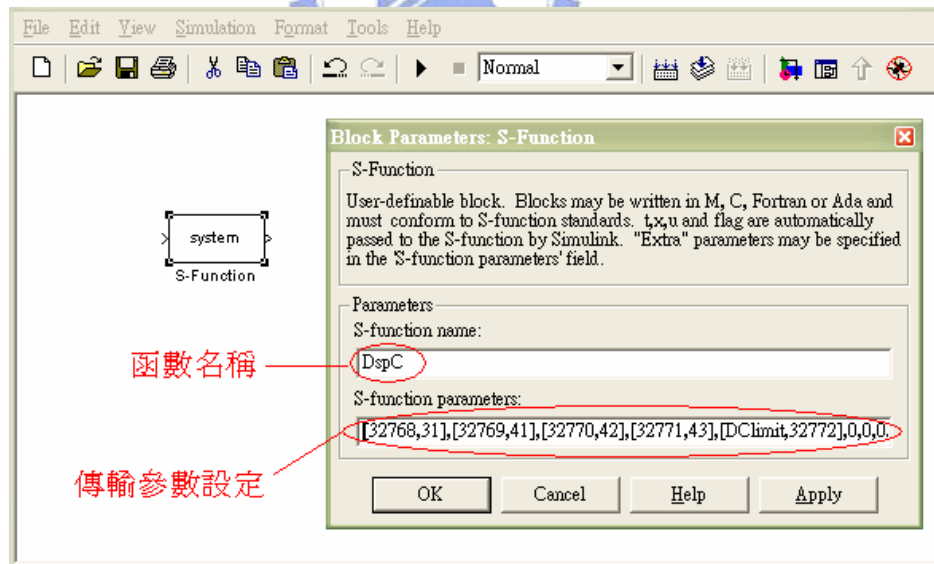


圖 6-4 S-function 函數以及傳輸參數設定

介面參數設定完之後，還必須設定內部參數的資料，點選 Edit Mask s-function，可以對內部的參數、s-function 的圖示以及註解作一設定。

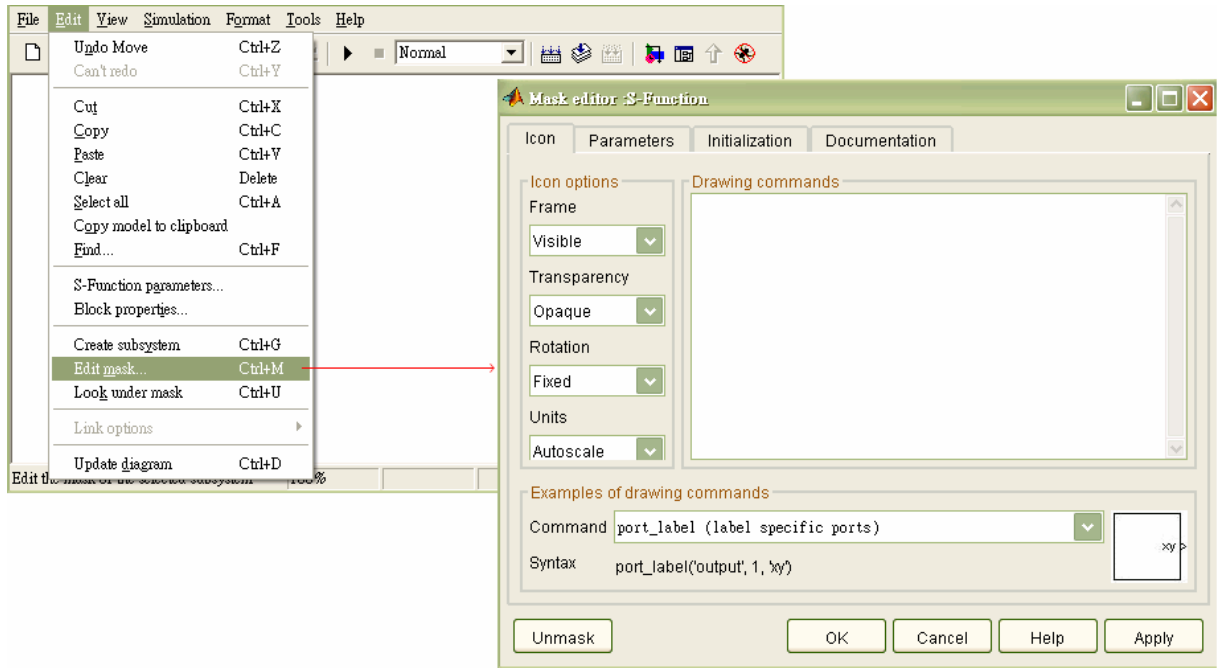


圖 6-5 設定 s-function 圖示、參數以及註解

6.2.2 PC 端控制介面

在本節中我們將介紹利用 6.2.1 節中 s-function 的設定與 DSP 控制卡連結，所設計出在 PC 端的控制介面，其介面如下圖所示：



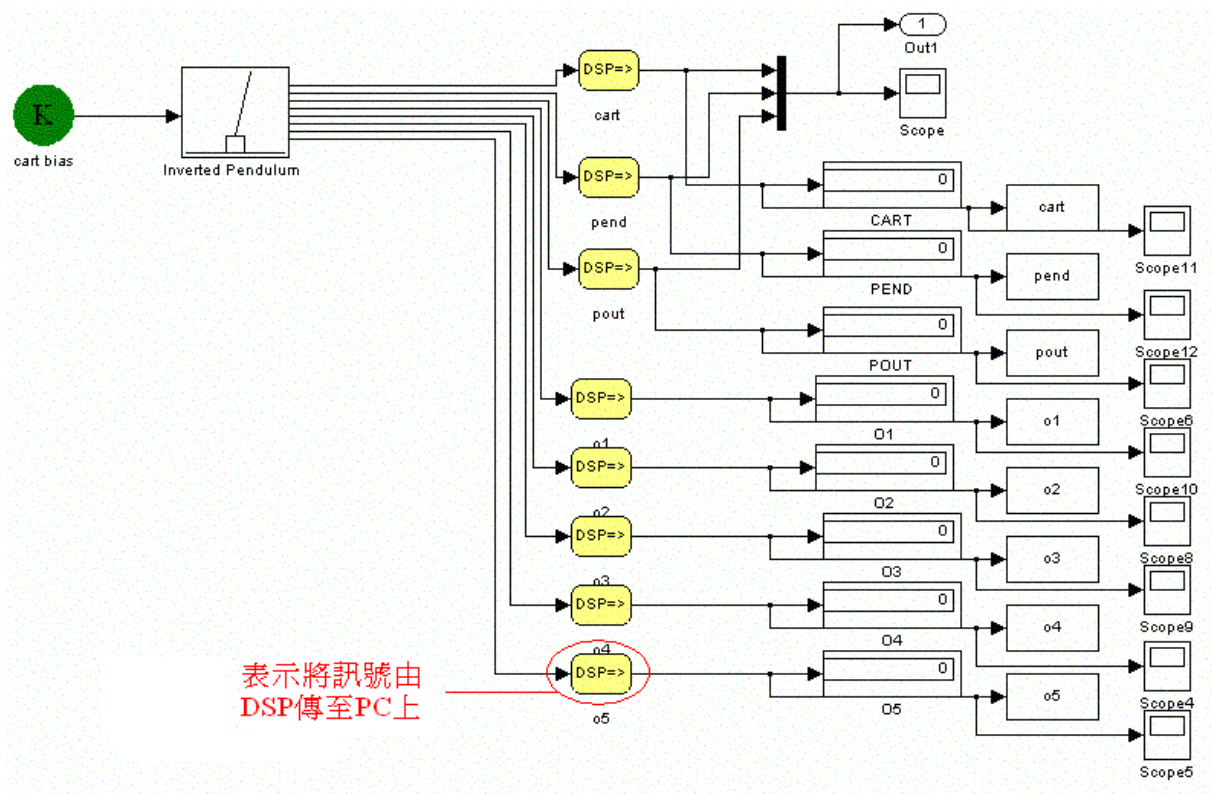


圖 6-6 PC 端訊號接收介面

其中

cart bias 為設定台車定位的位置；

cart 為即時的台車位置輸出顯示；

pend 為即時的單擺角度輸出顯示；

pout 為即時的電壓命令輸出顯示；

o1~o5 為檢查程式內部參數值用，用來確認程式的正確性。

6.2.3 程式架構以及注意事項

■ 程式架構部份

我們利用 H_{∞} 方式所求出來的控制器，拆解為 observer 控制器後的程式架構圖如下：

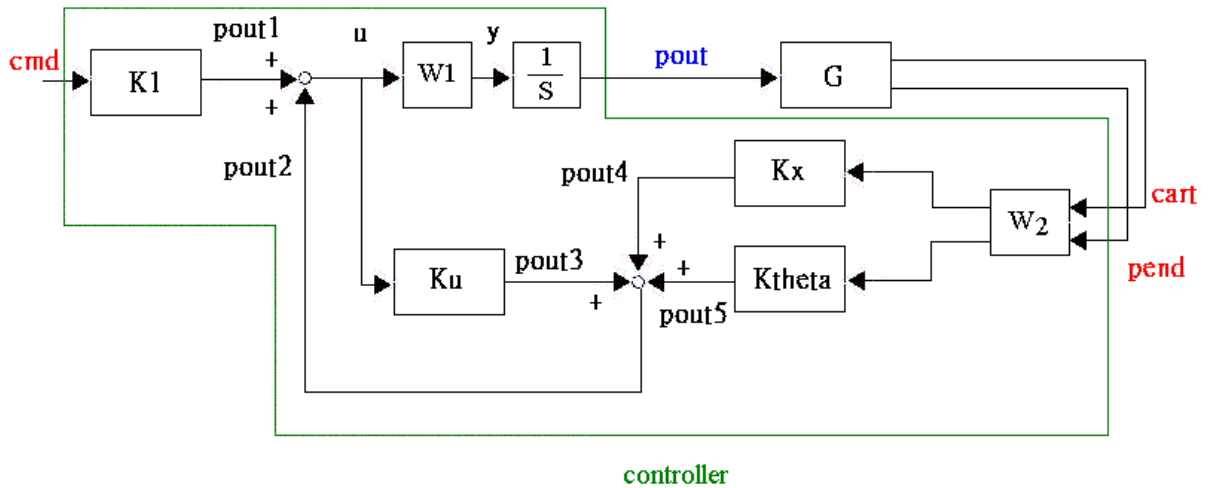


圖 6-7 控制器程式架構

- G : nominal plant
- K1 : prefilter
- Ku : observer
- Kx : 台車位置輸入控制器
- Ktheta : 單擺角度輸入控制器
- W1 : pre-weighting
- W2 : post-weighting
- $\frac{1}{S}$ 為積分器



其中 Ku、Kx 以及 Ktheta 為 observer 控制器，分別均為八階轉移函數¹⁵。

■ 注意事項

- I. 控制訊號的方向定義：我們在推導倒單擺方程式時，台車位置以及單擺角度方向的定義如下圖所示：

¹⁵ 利用 H_∞ 設計出的控制器，控制器階數會和系統皆數相同；以本篇論文而言，shaped plant 為八階，因此求出的控制器本身也是八階大小。

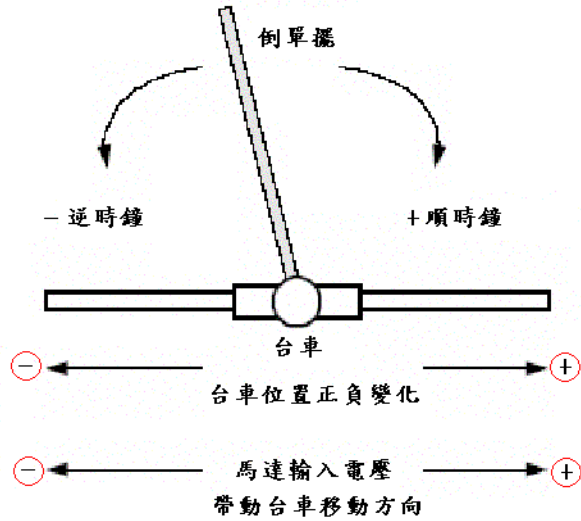


圖 6-8 推導時的方向定義

但硬體上的定義有些不同，其定義如下圖所示：

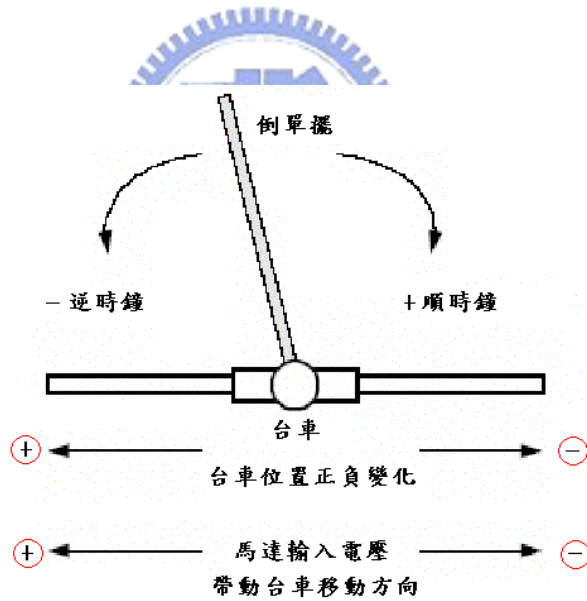


圖 6-9 實驗時的方向定義

因此在撰寫程式時，必須注意其正負值。

- II. 控制器拆方式：我們所設計出的控制器分別各為八階大小，在此我們參考文獻[7]中的並聯方式，將控制器拆解為四個二階並聯；如下圖所示：

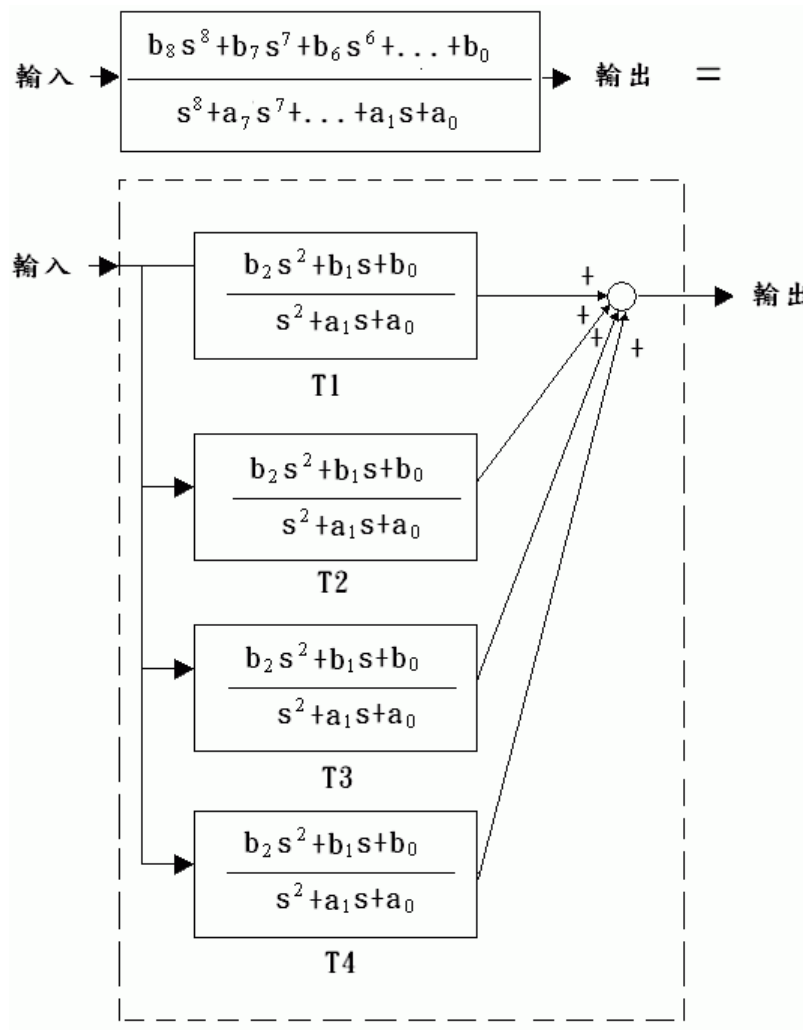


圖 6-10 控制器高階實現時的並聯方式

III. 積分項的實現方式：參考文獻[7]使用 backward difference 積分法，也就是將 $\frac{1}{S}$ 在實

現時利用 $\frac{1}{S} = \frac{T}{1-z^{-1}}$ 帶入。

依照此節所提到的架構以及注意事項，我們將控制器程式建立在 6.1.1 節中提到的控制實現模組中。

6.3 實驗遭遇之問題

在實驗時，硬體遭遇了許多問題，再此我們一一將問題作一說明以及討論：

- A. 單擺轉動磨擦力問題：單擺角度在轉動時，我們發現軸承部分的轉動摩擦力過大，測試結果約在 ± 20 個 counter(相對於 $\pm 2^\circ$ 之間)單擺的角度都還可以維持平衡；位置如下圖所示：

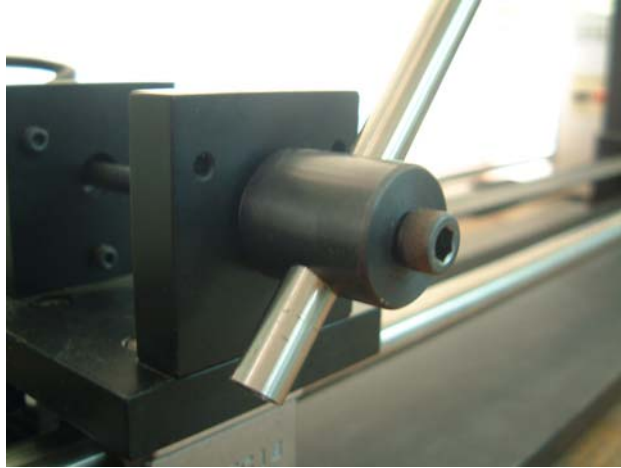


圖 6-11 單擺轉軸圖

若要減少摩擦力的影響，最好的方式是經由加工，可使軸承間的磨擦力大為減小。

- B. 取樣頻率問題：DSP 控制卡上的取樣頻率時間，設定為 100Hz，我們試著改變 6.1.1 中所提到的 `online_loop` 中的取樣頻率參數，改變其取樣頻率的時間；但發現最多可將取樣頻率提高至 200Hz 左右；若試著選取更高的取樣頻率，我們發現取樣頻率仍然維持在 200Hz 左右，無法在往上提昇。
- C. 速度模式實驗問題：由於驅動器無法使用力矩模式，因此我們利用 4.2 節的鑑別方式，假設一個 Force command 來作為輸出，但是實際的電壓值仍須經過積分，我們發現經過積分的訊號和實際的電壓速度命令輸出值，會有 90° 的相位落後現象，造成實驗上的很大困難，如下圖所示：

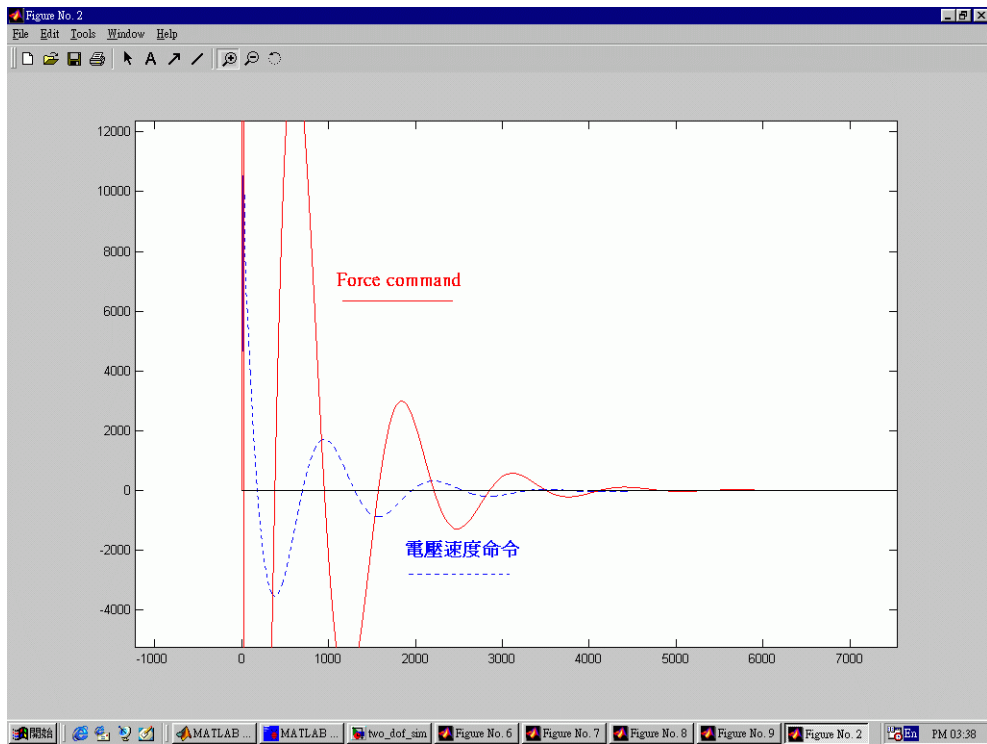


圖 6-12 Force command 和實際電壓速度命令的訊號圖

利用這種 Force command 的方式在實作上會有困難，因此改善的方式可以將驅動器換為可以使用力矩模式的驅動器來實驗，輸出即為力量，可以改善輸出訊號的落後現象。

第7章 總結與未來發展

- I. 對倒單擺系統而言，我們利用 H_{∞} 設計出的控制器，在模擬中可以看出，控制器可以有效的使單擺角度以及台車位置都到達我們要求的位置(單擺到達 0° ，台車定位到 0 的位置)；然而在實現上，觀察我們的模擬情況，台車達到穩定的時間約為 5 秒，角度達到穩定的時間約為 3~4 秒，在實際控制時，這樣的穩定時間對倒單擺而言，效果並不良好，實現上也有困難；我們設計控制器依照鑑別的系统設計，由於鑑別出的系統本身頻寬過低(約 0.31Hz)，因此設計控制器的頻寬大多也在 1~2Hz 之間，如果能得到實際的馬達參數以及系統參數，實際頻寬會比較大，求出來的控制器響應相對的也會比較快。
- II. 在 3.1 節中提到 H_{∞} 控制器可以接受系統本身的不確定性(uncertainty)，但若是設計系統和實際的系統相差太多，超出 robust 可接受的範圍，控制器也就無法有效的達到良好的控制效果；因此在設計控制器之前，確定系統的數學模型，對 H_{∞} 控制器設計是很重要的一項工作。
- III. 由 4.4 小節中，我們採用的 H 轉移函數，改變 observer 控制器的極點方式，在 5.4.1 小節中，將此方式套用至我們的系統來做模擬，可以發現有效的對響應的震盪現象作改善，最大的優點是在於不會影響我們求出的 γ 值，也就是不影響我們利用 H_{∞} 方式設計出控制器的效能。
- IV. 本篇中的實驗，由於硬體設備的限制，馬達只能在速度模式下作動，對於我們的控制訊號有很大的影響；在 4.2 節中我們所鑑別出的系統，是利用一個虛擬的力矩模式作為鑑別出的系統，而力矩模式和速度模式在輸出時會有一個積分項的差異，造成訊號會有遲緩(delay)，使得實驗無法達成；若能將驅動器改用力矩模式，可改變本篇論文 4.2 節中，鑑別系統的假想力，直接使用力矩模式的馬達驅動器控制馬達，以力矩作為輸出，對實際實驗將有很大的幫助。

附錄 A 利用 flow chart 得到轉移函數

Force command 對加速度以及 加速度對位置和角度的轉移函數如下：

$$\frac{\ddot{x}}{F} = \frac{X4}{F} = \frac{-0.0188s^3 - 0.0803s^2 + 27.7s + 618.5}{s^4 + 11.77s^3 + 53.72s^2 + 113.2s + 92.77}$$

將參數定義為

$$\frac{\ddot{x}}{F} = \frac{b4s^3 + b3s^2 + b2s + b1}{s^4 + a4s^3 + a3s^2 + a2s + a1}$$

$$\frac{x}{\ddot{x}} = \frac{1}{s^2}$$

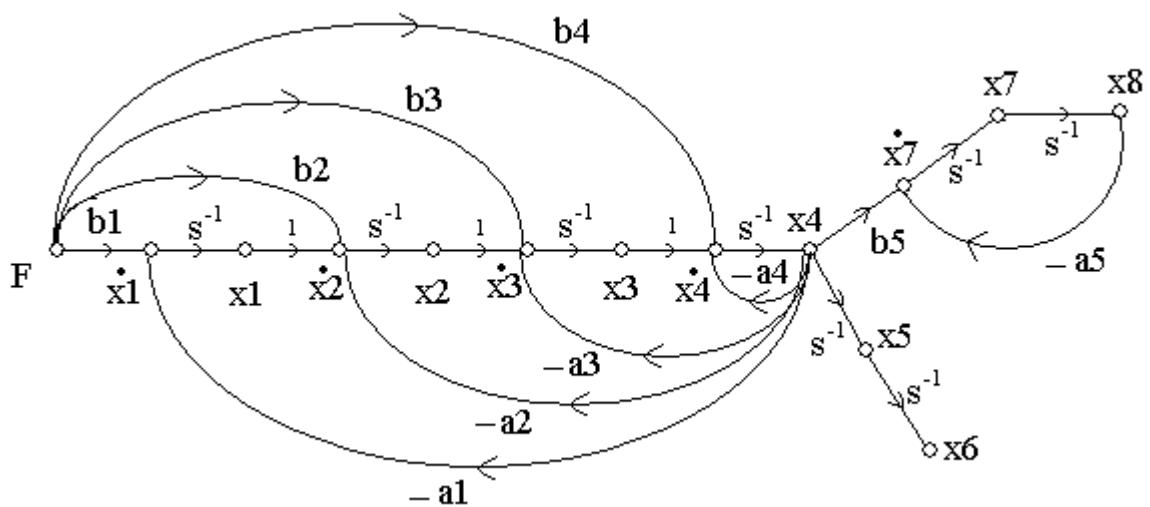
$$\frac{\theta}{\ddot{x}} = \frac{-0.3375}{s^2 - 3.308}$$

將參數定義為

$$\frac{\theta}{\ddot{x}} = \frac{b5}{s^2 + a5}$$



Flow chart 如下：



state-space

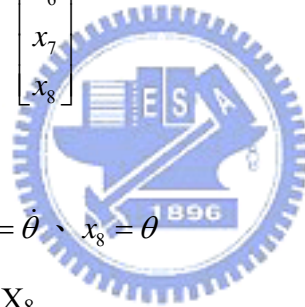
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -92.77 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -113.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -53.72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11.77 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3375 & 0 & 0 & 0 & 3.308 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 618.5 \\ 27.7 \\ -0.0803 \\ -0.0188 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

其中：

$$x_4 = \ddot{x} \text{、} x_5 = \dot{x} \text{、} x_6 = x \text{、} x_7 = \dot{\theta} \text{、} x_8 = \theta$$

位置狀態為 X_6 、角度狀態為 X_8



附錄 B reference model 中 ω_n 與最大速度的相關性

二階的參考模型(reference model)

$$M_0 = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

由最大過衝量(maximum overshoot)可得到 ζ

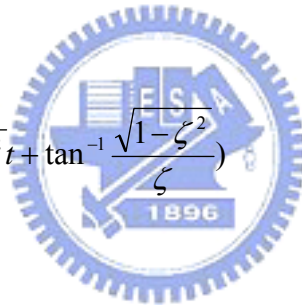
$$X = e^{-\pi\zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}}$$

$$\zeta = \left(\frac{(\ln x)^2}{((\ln x)^2 + \pi^2)} \right)^{1/2}$$

利用步階響應 step response (for $0 < \zeta < 1$, $\omega_n > 0$)

$$X(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s}$$

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$



微分後

$$v(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\zeta\omega_n t) \sin((1-\zeta^2)^{1/2} \omega_n t)$$

再微分求最大值(d/dt=0)

$$\tan((1-\zeta^2)^{1/2} \omega_n T) = \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta}$$

$$\sin((1-\zeta^2)^{1/2} \omega_n T) = (1-\zeta^2)^{1/2}$$

$$T = \frac{1}{(1-\zeta^2)^{1/2} \omega_n} \sin^{-1} (1-\zeta^2)^{1/2}$$

帶入 v(t) 可得

$$V_{\max}(t) = \omega_n \exp\left(\frac{-\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin^{-1}(1-\zeta^2)^{1/2}\right)$$

因此

$$\omega_n = V_{\max}(t) \exp\left(\frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin^{-1}(1-\zeta^2)^{1/2}\right)$$

ω_n 和速度的最大值有上式的關係。

參考模型(reference model)和最大速度的關係為參照參考文獻[2]中所提出，在此將公式推導並整理完整。



附錄 C 模擬時控制器的實際值

將 5.45.4.1 兩小節模擬的實際控制器數值，收錄在此。

$$1、\text{weighting} : W1 = \frac{72521.2225(s^2 + 0.4832s + 0.1174)}{(s^2 + 423.5s + 8.516e004)}、W2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix};$$

$$2、\text{reference model} : \zeta \text{ 選用 } 0.6, \omega_n \text{ 選用 } 6, M_r = \frac{36}{s^2 + 7.2s + 36};$$

3、利用 matlab hinfsyn 指令所求出的 output feedback 控制器為，再利用式(4-20)、式(4-21)

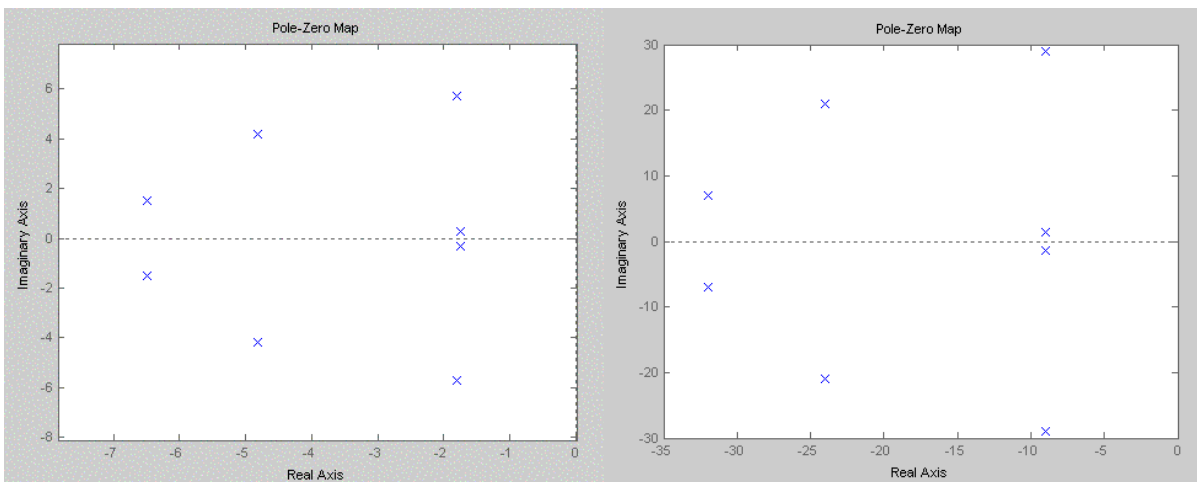
可得到 observer 控制器，其值如下：

$$G_u = \frac{-2.012(s+12.44)(s+0.2335)(s-0.1767)(s^2+0.4812s+0.1143)(s^2+13.25s+136)}{(s^2+0.3199s+0.05135)(s^2+0.6912s+0.2229)(s^2+13.21s+48.56)(s^2+5.822s+36.91)}$$

$$G_y = \frac{0.91384(s+0.1078)(s^2+0.5293s+0.1397)(s^2+13.99s+54.33)(s^2+6.549s+42.08)}{(s^2+0.3199s+0.05135)(s^2+0.6912s+0.2229)(s^2+13.21s+48.56)(s^2+5.822s+36.91)}$$

$$\text{prefilter} : Kp = \frac{-0.042416(s+83.03)}{(s^2+82.61s+2500)}$$

4、 H 轉移函數選擇將原來的 pole 位置轉移至 5 倍遠之處



左圖為 G_u 與 G_y 極點的原位置，其值為：

$$-6.6050 + 2.2213i, -6.6050 - 2.2213i; -2.9110 + 5.3325i, -2.9110 - 5.3325i;$$

$$-0.3456 + 0.3217i, -0.3456 - 0.3217i; -0.1600 + 0.1605i, -0.1600 - 0.1605i;$$

右圖為將 G_u 與 G_y 極點移至 5 倍遠處，其值為：

$$-33.0250 + 11.1063i, -33.0250 - 11.1063i; -14.5550 + 26.6627i, -14.5550 - 26.6627i;$$

$$-1.7280 + 1.6083i, -1.7280 - 1.6083i; -0.7998 + 0.8026i, -0.7998 - 0.8026i;$$

此時選擇的 H 轉移函數為

$$H = \frac{(s^2 + 0.3199s + 0.05135)(s^2 + 0.6912s + 0.2229)(s^2 + 13.21s + 48.56)(s^2 + 5.822s + 36.91)}{(s^2 + 66.05s + 1214)(s^2 + 29.11s + 922.7)(s^2 + 3.456s + 5.573)(s^2 + 1.6s + 1.284)}$$

參考式(4-28) $G_u^* = 1 - H + H \cdot G_u$ ，可求出 G_u^* ：

$$G_u^* = \frac{80.1729(s + 23.81)(s^2 + 1.6s + 1.284)(s^2 + 3.458s + 5.575)(s^2 + 25.65s + 586.8)}{(s^2 + 1.6s + 1.284)(s^2 + 3.456s + 5.573)(s^2 + 66.05s + 1214)(s^2 + 29.11s + 922.7)}$$

最後利用圖 5-11 matlab simulink 模擬架構圖以及圖 4-30 加入 H 轉移函數後的 observer 控制器等效架構圖來進行模擬，即可得到我們 5.4 節中的響應。

參考文獻

- [1] D.C. McFarlane, K. Glover, Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions, Springer-Verlag, 1990.
- [2] D.J. Walker, “On the structure of a two-degree-of-freedom H_∞ loop shaping controller,” IEEE J. CONTROL, Vol 63, No.6, pp.1105-1127, 1996.
- [3] M. Vidyasagar, Control System Synthesis, MIT Press, 1985.
- [4] M. Vidyasagar, “Normalized coprime factorizations for non strictly proper system,” IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.33, pp.300-301, 1988.
- [5] K. Glover, and D. Mustafa, “Derivation of the maximum entropy H_∞ controller and a state-space formula for its entropy,” Int. J. Control, to appear, 1989.
- [6] S. Skogestad, I. Postlethwaite, Multivariable feedback control:analysis and design, J. Wiley & Sons, New York, 1996.
- [7] L. Phillips, H. Troy Nagle, Digital Control System Analysis and Design, prentice hall, 1995.
- [8] J.F. Whidborne, P. Pangalos, Y.H. Zweiri, and S.J. King, “A graphical user interface for computer-aided robust control system design, ” Engineering Design Conf., pp. 383-392, London, July 2002.
- [9] F. Franklin, J. David Powell, Feedback control of dynamic systems, third edition, Addison Wesley 1995.
- [10] K. Zhou, Essential of Robust Control, Prentice Hall, 1998.
- [11] W.J. Chen, L. Fang, “Fuzzy Logic Control for Inverted Pendulum System,” IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems, October 28-31, 1997.
- [12] E.L. Chin, Y.R. Sheu, “A Hybrid-Control Approach for Pendulum-Car Control,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.39, No.3, June 1992.
- [13] J. Whidborne, I. Postlethwaite and D.W. Gu, “Robust Controller Design Using H_∞

- Loop-Shaping and The Method of Inequalities,” Proceeding of the 32nd Conference on Decision and Control, Texas, December 1993.
- [14] S.U. Cheang, W.J. Chen, “Stabilizing Control of an Inverted Pendulum System Based on H_∞ Loop Shaping Design Procedure,” Proceeding of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation, June 28-July 2, 2000.
- [15] Saïd Mammer, “Application of Two-Degree-of-Freedom H_∞ Optimization to Robust Lateral Vehicle Control,” Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications, Hartford, CT, October 5-7, 1997.
- [16] D.J. Hoyle, R.A. Hyde, D.J.N. Limebeer, “An H_∞ Approach to Two Degree of Freedom Design,” Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, December 1991.
- [17] R.A. Hyde, K. Glover, “The Application of Scheduled H_∞ Controllers to a VSTOL Aircraft,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.38, No.7, July 1993.
- [18] D.J.N. Limebeer, E.M. Kasenally, J.D. Perkins, “On the Design of Robust Two Degree of Freedom Controllers,” Automatica, Vol.29, No.1, pp.157-168, 1993.
- [19] 俊元科技, DSP C 語言與 Simulink 介面連結操作手冊, Ver 1.0, 技術應用報告.