

國立交通大學
機械工程學系博士班
博士論文

薄壁開口梁之自由振動分析及幾何非線性動態
反應研究

A STUDY ON THE FREE VIBRATION ANALYSIS AND
GEOMETRICALLY NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF
THIN-WALLED BEAMS WITH GENERIC OPEN SECTION



研究生：陳弘虎
指導教授：蕭國模 博士

中華民國 九十六 年 十二 月

薄壁開口梁之自由振動分析及幾何非線性動態反應研究

研究生：陳弘虎

指導教授：蕭國模

國立交通大學機械工程學系博士班

摘要

本研究的主要目的是以一致性共旋轉法推導一個薄壁開口梁元素，並將其應用在梁結構的自由振動分析及幾何非線性動態分析。

本文中推導的梁元素有兩個節點，每個節點有七個自由度，本研究用傳統的力、力矩及雙力矩為廣義的節點力。本文中將元素節點定在元素兩端斷面的剪心，並取剪心軸當作描述元素變形的參考軸。本研究在一移動元素座標上描述元素的變形，本研究用三個旋轉參數描述元素斷面在移動元素座標上的方位，但用對固定座標的旋轉向量描述元素間共同節點的旋轉。本研究在梁元素當前的變形位置上，利用元素節點的座標及斷面方位建立一個移動元素座標並決定元素節點的旋轉參數，對應於元素節點旋轉參數擾動量的廣義節點力為一廣義力矩，為推導傳統力和力矩與該廣義力矩的關係，本研究在一個與當前的移動元素座標重合的固定元素座標上，推導出元素節點在當前固定元素座標的擾動位移和擾動旋轉與元素節點旋轉參數的擾動量的關係。本研究利用元素節點在當前固定元素座標的位移和旋轉及其擾動量、速度、加速度、角速度、角加速度，推導出移動元素座標的角速度及角加速度及元素節點的變形參數對時間的一次及二次微分。本研究利用虛功原理和 D'Alembert 原理，以及完整的幾何非線性梁理論的一致性二次線性化在當前的固定元素座標推導元素節點變形力及慣性力，本研究中保留了變形力中撓曲、扭曲及軸向變形間之耦合項、軸向扭轉率的三階項、慣性力中速度間的耦合項。為了推導上的方便，本研究用虛功原理推導梁元素節點變形力時，先推導出廣義節點力矩，再用

controgradient law 求得傳統節點力和力矩。本研究在推導元素節點在當前固定元素座標的擾動位移和擾動旋轉與元素節點旋轉參數的擾動量的關係時，保留了值為零的節點位移及旋轉向量，故可由元素節點變形力對節點參數微分求得元素切線剛度矩陣。本研究推導元素的節點慣性力時，先將元素擾動位移表示成當前固定元素座標的擾動位移和旋轉之函數，故可直接求得元素的節點慣性力，元素的一致性質量矩陣 (consistent mass matrix) 可由元素節點的慣性力對元素節點的加速度微分求得。

本研究採用基於弧長法和牛頓-拉福森法的增量迭代法解非線性平衡方程式，本研究採用次空間法(Subspace Iteration Method)解梁結構的自然頻率及振動模態。本文應用 Newmark 直接積分法和牛頓-拉福森法的增量迭代法解非線性運動方程式。本研究以數值例題探討不同斷面、邊界條件及負載對開口薄壁梁之自然頻率、振動模態及幾何非線性之動態反應之影響，以說明本研究提出之非線性開口薄壁梁元素的正確性及有效性，並驗證文獻上梁結構之自然頻率及幾何非線性之動態反應之正確性。



A STUDY ON THE FREE VIBRATION ANALYSIS AND
GEOMETRICALLY NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF THIN-
WALLED BEAMS WITH GENERIC OPEN SECTION

Student : Hong-Hu Chen

Advisor : Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

A consistent co-rotational finite element formulation for the free vibration analysis and geometric nonlinear dynamic analysis of thin-walled beams with generic open section is presented. The element developed here has two nodes with seven degrees of freedom per node. The element nodes are chosen to be located at the shear centers of the end cross sections of the beam element and the shear center axis is chosen to be the reference axis. The deformations of the beam element are described in a current moving element coordinate system constructed at the current configuration of the beam element. Three rotation parameters are used to describe the orientation of the beam cross section in the moving element coordinate system. However, the rotation vector is used to describe the element nodal rotations in fixed coordinates. The values of the nodal rotation vectors are reset to zero at current configuration. The element equations are derived in a fixed current element coordinates which are coincident with the current moving element coordinates. The perturbed moving element coordinates and the variation of the element nodal rotation parameters corresponding to the perturbation of element nodal displacements and rotations referred to the current fixed element coordinates is consistently determined

using the first order linearization of the way used to determine the current element coordinates and element nodal rotation parameters corresponding to the incremental element nodal displacements and rotations referred to the global coordinates. The angular velocity and acceleration of the current moving element coordinates and the first and the second time derivative of the element nodal rotation parameters are consistently determined using the current element nodal displacements and rotations, nodal velocities and accelerations, and nodal angular velocities and accelerations. The element deformation and inertia nodal forces are derived using the virtual work principle, the d'Alembert principle, and the consistent second order linearization of the fully geometrically nonlinear beam theory. In element nodal forces, all coupling among bending, twisting, and stretching deformations of the beam element is considered. For convenience, in the derivation of the element deformation nodal force, the generalized nodal moments corresponding to the variation of the nodal rotation parameters are derived first, and then transformed to the conventional moments and forces using contragradient law. Because the element nodal displacements and rotations with value of zero are retained in the relationship between the variation of the element nodal rotation parameters and the variation of element nodal displacements and rotations, the element tangent stiffness matrix may be obtained by differentiating the element deformation nodal force with respect the element nodal parameters.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations. The subspace iterative method is used for the solution of natural frequencies and vibration modes for the free vibration of beam structures. An incremental-iterative method based on the Newmark direct integration method and the Newton-Raphson method is employed for the solution of nonlinear equations of motion. Numerical examples are presented to investigate the accuracy and efficiency of

the proposed method. The effect of different cross sections, boundary conditions and different loads on the natural frequencies, vibration modes, and nonlinear dynamic behavior of three dimensional thin-wall beam structures are also investigated through numerical examples.



誌謝

在此論文定稿之際，感謝指導教授 蕭國模博士五年來的悉心指導，使學生得以完成此篇論文，在此致上由衷的謝意。同時感謝學弟們在各方面的幫忙與照應。在此也感謝葉孟考教授、蔡佳霖教授、蔣長榮教授以及尹慶中教授撥冗擔任口試委員，為本文提出寶貴的意見。

感謝父親與母親多年來辛苦的栽培與不斷的鼓勵及支持，還有哥哥、姊姊與弟弟給予很多的協助。最後，僅以此成果與榮耀，獻給我最摯愛的家人以及所有關心我的人。



目 錄 :

中文摘要.....	I
英文摘要.....	III
誌謝.....	VI
目錄.....	VII
表目錄.....	IX
圖目錄.....	XII
第一章 導論	1
第二章 理論推導	7
2.1 基本假設	7
2.2 座標系統	7
2.3 旋轉向量旋轉向量及其時間微分	9
2.4 梁之剪心軸的位移及其斷面的旋轉.....	10
2.5 節點參數與節點力	14
2.6 元素斷面座標、移動元素座標、元素節點位移及旋轉 參數之決定.....	16
2.7 移動元素座標與固定元素座標的關係.....	17
2.7.1 擾動後之移動元素座標及元素節點參數.....	17
2.7.2 移動元素座標的角速度、角加速度與元素節點 參數對時間的微分.....	20
2.8 梁元素之變形描述.....	24
2.8.1 梁元素之位置向量.....	24
2.8.2 梁元素之位置向量的擾動量及其對時間的微分....	26
2.8.3 梁元素之應變.....	27
2.8.4 梁元素應變之變分.....	30
2.9 元素節點力之推導.....	32
2.9.1 元素節點變形力向量之推導.....	34
2.9.2 元素節點慣性力向量之推導.....	39

2.10 元素剛度矩陣及質量矩陣.....	45
2.11 與變形位置相關之節點作用力與負荷剛度矩陣.....	51
2.12 系統平衡方程式與收斂準則.....	55
第三章 數值計算方法與程序	56
3.1 靜態分析	56
3.1.1 增量迭代法	56
3.1.2 二分法	58
3.1.3 N循環迭代法	59
3.2 動態分析	60
3.2.1 Newmark直接積分法	60
3.2.2 Hilber-Hughes-Taylor scheme	62
第四章 數值例題	63
4.1 開口薄壁梁的線性自由振動分析.....	63
4.2 開口薄壁梁受軸向負載作用下的振動分析.....	66
4.3 開口薄壁梁的幾何非線性動態反應.....	72
第五章 結論與展望	83
參考文獻	87
附表	95
附圖	136
附錄 A 擾動後的移動元素座標及節點旋轉參數.....	264
附錄 B 不同的元素節點參數向量之擾動量的關係及其 對時間微分的關係.....	271
附錄 C 元素節點力向量 \mathbf{f}^D 與 \mathbf{f}_θ^D 的關係.....	279
附錄 D 位置向量的擾動量及對時間的微分.....	281
附錄 E \mathbf{H}_R 與 \mathbf{H}_θ 之顯式.....	287
附錄 F 計算系統節點內力向量之數值程序.....	291
附錄 G 元素具不同節點自由度所對應的元素矩陣.....	293
附錄 H 推導 lump mass 所產生之節點質量矩陣.....	296
LIST OF PAPERS	302

表 目 錄

表 4.1 單對稱槽型斷面性質(例題 4.1.1, 例題 4.2.2).....	95
表 4.2 例題 4.1.1 單對稱槽型斷面梁之自然頻率之自然頻率 (rad/s)	96
表 4.3 單對稱半圓型斷面性質(例題 4.1.2, 例題 4.2.1).....	97
表 4.4 例題 4.1.2 單對稱半圓型斷面梁之自然頻率(rad/s).....	98
表 4.5 不對稱斷面 A 性質(例題 4.1.3).....	99
表 4.6 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A 之自然頻率(rad/s).....	100
表 4.7 不對稱斷面 B 性質(例題 4.1.4).....	102
表 4.8 例題 4.1.4 不對稱斷面梁 B 之自然頻率(rad/s).....	103
表 4.9 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) ($P = 0.4P_{cr} = 1790 N$)	104
表 4.10 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1P).....	105
表 4.11 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1CM(C)).....	106
表 4.12 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC2X).....	107
表 4.13 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s) ($P = 2560 N$)	108
表 4.14 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1P).....	109
表 4.15 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1CM(C)).....	110
表 4.16 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC2X).....	111
表 4.17 I 型斷面性質(例題 4.2.3).....	112
表 4.18 例題 4.2.3 I 型斷面梁之自然頻率(rad/s)	113

表 4.19	單對 T 型斷面性質(例題 4.2.4, 例題 4.2.5, 例題 4.3.7).....	115
表 4.20	例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁之自然頻率(rad/s) :	
	(a) 邊界條件 BC1P.....	116
表 4.21	例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁之自然頻率(rad/s) :	
	(b) 邊界條件 BC1CM.....	117
表 4.22	例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁之自然頻率(rad/s).....	118
表 4.23	不斷稱角型斷面性質(例題 4.2.6, 例題 4.3.10).....	119
表 4.24	例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁之自然頻率(rad/s).....	120
表 4.25	I 型斷面性質(例題 4.3.4).....	121
表 4.26	不對稱 Z 型斷面性質(例題 4.3.5).....	122
表 4.27	例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁在靜態負載下的自然頻率 (rad/s).....	123
表 4.28	單對稱槽型斷面性質(例題 4.3.6).....	124
表 4.29	例題 4.3.6 懸臂單對稱槽型斷面直角構架的自然頻率 (rad/s)(Case (a)).....	125
表 4.30	例題 4.3.6 懸臂單對稱槽型斷面直角構架的自然頻率 (rad/s)(Case (b)).....	126
表 4.31	例題 4.3.7 懸臂單對稱 T 型斷面梁在靜態負荷作用下的 自然頻率(rad/s)($Q=0$).....	127
表 4.32	單對稱槽型斷面性質(例題 4.3.8).....	128
表 4.33	例題 4.3.8 懸臂單對稱槽型斷面梁在靜態負荷作用下的 自然頻率(rad/s).....	129
表 4.34	不對稱槽型斷面性質(例題 4.3.9).....	130
表 4.35	例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁在靜態負荷作用下的 自然頻率(rad/s).....	131
表 4.36	例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁在靜態負荷作用下 的自然頻率(rad/s).....	132
表 4.37	不對稱 Z 型斷面性質(例題 4.3.11, 例題 4.3.12).....	133
表 4.38	例題 4.3.11 懸臂 Z 型斷面梁在靜態負荷作用下的自然	

頻率 (rad/s).....	134
表 4.39 例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁在靜態負荷作用下的自然 頻率 (rad/s).....	135



圖 目 錄

圖 2.1 元素座標與元素截面座標	136
圖 2.2 固定元素座標與移動元素座標.....	137
圖 2.3 旋轉向量	138
圖 2.4 元素節點參數與節點力.....	138
圖 2.5 決定 x_2 軸與 x_3 軸之第一步驟.....	139
圖 2.6 決定 x_2 軸與 x_3 軸之第二步驟.....	140
圖 2.7 圓盤受力偶作用機制圖.....	141
圖 2.8 圓盤受力型態之 QT/ST 力矩示意圖.....	142
圖 2.9 剛性桿受力作用機制圖	143
圖 4.1 雙對稱 I 型斷面幾何圖	144
圖 4.2 單對稱半圓型斷面幾何圖	145
圖 4.3 單對稱 T 型斷面幾何圖	146
圖 4.4 單對稱槽型斷面幾何圖.....	147
圖 4.5 不對稱 Z 型斷面幾何圖.....	148
圖 4.6 不對稱角型斷面幾何圖.....	149
圖 4.7 不對稱槽型斷面幾何圖.....	150
圖 4.8 不對稱斷面 A 幾何圖.....	151
圖 4.9 不對稱斷面 B 幾何圖.....	152
圖 4.10a 薄壁梁的示意圖及座標系統.....	153
圖 4.10b 梁 A、B 兩端的邊界條件.....	153
圖 4.11 例題 4.1.1 單對稱槽型斷面梁(邊界 BC1RM)之振動模態 圖.....	154
圖 4.12 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A (邊界 BC1P)之振動模態圖...	156
圖 4.13 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A (邊界 BC1CM)之振動模態圖.	158
圖 4.14a 薄壁梁受軸力作用的示意圖及座標系統.....	160
圖 4.14b 薄壁梁受軸力作用在 A、B 兩端的邊界條件.....	160
圖 4.15 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁承受一軸向負載之結構圖.....	161

圖 4.16 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁在中心點 C 的負荷—扭轉角 曲線圖.....	162
圖 4.17 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸力($P/P_{cr} = 0.8$)之振動 模態圖.....	163
圖 4.18 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸力($P/P_{cr} = 1.2$)之振動 模態圖.....	165
圖 4.19 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸向負載的自然頻率— 軸力曲線圖.....	167
圖 4.20 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁承受一軸向負載之結構圖.....	168
圖 4.21 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁在中心點 D 的負荷—位移 曲線圖.....	169
圖 4.22 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁的頻率—負荷曲線圖.....	170
圖 4.23 例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁自由端承受一軸向負載之 結構圖.....	171
圖 4.24 例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁的負荷—位移曲線圖.....	172
圖 4.25 例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁的頻率—負荷曲線圖.....	173
圖 4.26 例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁自由端承受一軸向負載之 結構圖.....	174
圖 4.27 例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁的負荷—位移曲線圖.....	175
圖 4.28 例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁的頻率—負荷曲線圖.....	176
圖 4.29 例題 4.3.1 懸臂直角構架之幾何及受力圖.....	177
圖 4.30 例題 4.3.1 懸臂直角構架 A 點在 X_3^G 方向之位移.....	178
圖 4.31 例題 4.3.1 懸臂直角構架自由端 B 點 X_3^G 方向之位移.....	178
圖 4.32 例題 4.3.2 旋轉圓盤之幾何及受力圖.....	179
圖 4.33 例題 4.3.2 旋轉圓盤之初始速度、加速度.....	180
圖 4.34 例題 4.3.2 旋轉圓盤之中心在 X 方向的加速度.....	181
圖 4.35 例題 4.3.2 旋轉圓盤之角速度變化過程.....	181
圖 4.36 例題 4.3.2 旋轉圓盤中心在 XY 平面的運動軌跡.....	182
圖 4.37 例題 4.3.2 旋轉圓盤中心在 X 方向的加速度.....	183

圖 4.38 例題 4.3.3 球窩接頭之空間桿之幾何及受力圖.....	184
圖 4.39 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_2^G 方向的分量 (Case (a)).....	185
圖 4.40 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_3^G 方向的分量 (Case (a)).....	185
圖 4.41 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_2^G 方向的分量 (Case (b)).....	186
圖 4.42 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_3^G 方向的分量 (Case (b)).....	186
圖 4.43 例題 4.3.4 I 型斷面梁之幾何及受力圖.....	187
圖 4.44 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (a)).....	188
圖 4.45 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (b)).....	188
圖 4.46 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (c)).....	189
圖 4.47 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (d)).....	189
圖 4.48 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (e)).....	190
圖 4.49 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (f)).....	190
圖 4.50 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (g)).....	191
圖 4.51 例題 4.3.5 Z 型斷面梁之幾何及受力圖.....	192
圖 4.52 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷一位移曲線圖.....	193
圖 4.53 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖($P=0$).....	194
圖 4.54 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖($P=40\text{ kN}$).....	195
圖 4.55 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖($P=80\text{ kN}$).....	196
圖 4.56 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖($P=100\text{ kN}$)...	197
圖 4.57 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移($P_0=40\text{ kN}$).....	198
圖 4.58 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移($P_0=80\text{ kN}$).....	198
圖 4.59 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移($P_0=100\text{ kN}$).....	199

圖 4.60	例題 4.3.6 槽型直角構架之幾何及受力圖.....	200
圖 4.61	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 靜態負荷—位移曲線圖(Case (a)).....	201
圖 4.62	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 靜態負荷—位移曲線圖(Case (b)).....	202
圖 4.63	例題 4.3.6 懸臂槽型斷面直角構架之振動模態圖 (Case (a)、 $P=0$).....	203
圖 4.64	例題 4.3.6 懸臂槽型斷面直角構架之振動模態圖 (Case (b)、 $P=0$).....	205
圖 4.65	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移 (Case (a)、 $P_0=1\text{ kN}$).....	207
圖 4.66	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0=1\text{ kN}$).....	207
圖 4.67	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移 (Case (a)、 $P_0=5\text{ kN}$).....	208
圖 4.68	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0=5\text{ kN}$).....	208
圖 4.69	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移 (Case (a)、 $P_0=10\text{ kN}$).....	209
圖 4.70	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0=10\text{ kN}$).....	209
圖 4.71	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0=15\text{ kN}$).....	210
圖 4.72	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 位移(Case (a)、 $P_0=16\text{ kN}$).....	210
圖 4.73	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 位移(Case (a)、 $P_0=17\text{ kN}$).....	211
圖 4.74	例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移 (Case (b)、 $P_0=1\text{ kN}$).....	212

圖 4.75 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 1 \text{ kN}$).....	212
圖 4.76 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移 (Case (b)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$).....	213
圖 4.77 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$).....	213
圖 4.78 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移 (Case (b)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$).....	214
圖 4.79 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$).....	214
圖 4.80 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 位移(Case (b)、 $P_0 = 15 \text{ kN}$).....	215
圖 4.81 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移 (Case (b)、 $P_0 = 15 \text{ kN}$).....	215
圖 4.82 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 位移(Case (b)、 $P_0 = 16 \text{ kN}$).....	216
圖 4.83 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 位移(Case (b)、 $P_0 = 17 \text{ kN}$).....	216
圖 4.84 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_2^G 、 X_3^G 方向之位移之 頻譜圖(Case (a)).....	217
圖 4.85 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_2^G 、 X_3^G 方向之位移之 頻譜圖(Case (b)).....	218
圖 4.86 例題 4.3.7 懸臂 T 型斷面梁之幾何及受力圖.....	219
圖 4.87 例題 4.3.7 懸臂 T 型斷面梁之自由端 A 點在 $Q = 0$ 之 靜態負荷—位移曲線圖.....	220
圖 4.88 例題 4.3.7 懸臂 T 型斷面梁之振動模態圖($P = 0$ 、 $Q = 0$).....	221
圖 4.89 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (a)、 $Q = 0$).....	222
圖 4.90 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移	

	(Case (a)、 $Q = 0.001P$).....	222
圖 4.91	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (a)、 $Q = 0.01P$).....	223
圖 4.92	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (a)、 $Q = 0.1P$).....	223
圖 4.93	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (b)、 $Q = 0$).....	224
圖 4.94	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (b)、 $Q = 0.001P$).....	224
圖 4.95	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (b)、 $Q = 0.01P$).....	225
圖 4.96	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (b)、 $Q = 0.1P$).....	225
圖 4.97	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (c)、 $Q = 0$).....	226
圖 4.98	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (c)、 $Q = 0.001P$).....	226
圖 4.99	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (c)、 $Q = 0.01P$).....	227
圖 4.100	例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 (Case (c)、 $Q = 0.1P$).....	227
圖 4.101	例題 4.3.8 懸臂槽型斷面梁之幾何及受力圖.....	228
圖 4.102	例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之 靜態負荷—位移曲線圖.....	229
圖 4.103	例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖 ($P = 0$).....	230
圖 4.104	例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖 (Case (a)、 $P = 5 \text{ kN}$).....	231
圖 4.105	例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖	

	(Case (a)、 $P = 10\text{ kN}$).....	232
圖 4.106	例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖 (Case (a)、 $P = 15\text{ kN}$).....	233
圖 4.107	例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移(Case (a)、 $P_0 = 5\text{ kN}$).....	234
圖 4.108	例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移(Case (a)、 $P_0 = 10\text{ kN}$).....	234
圖 4.109	例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移(Case (b)、 $P_0 = 5\text{ kN}$).....	235
圖 4.110	例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移(Case (b)、 $P_0 = 10\text{ kN}$).....	235
圖 4.111	例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移(Case (c)、 $P_0 = 5\text{ kN}$).....	236
圖 4.112	例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移(Case (c)、 $P_0 = 10\text{ kN}$).....	236
圖 4.113	例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型梁之幾何及受力圖.....	237
圖 4.114	例題 4.3.9 梁自由端在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷 —位移曲線圖(Case (a):負荷作用在斷面剪心位置， Case (b):負荷作用在斷面形心置).....	238
圖 4.115	例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁之振動模態圖 ($P = 0$).....	239
圖 4.116	例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁之振動模態圖 (Case (a)、 $P = 3\text{ kN}$).....	240
圖 4.117	例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁之振動模態圖 (Case (b)、 $P = 3\text{ kN}$).....	241
圖 4.118	例題 4.3.9 自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 (Case (a)).....	242
圖 4.119	例題 4.3.9 自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 (Case (b)).....	242

圖 4.120	例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之幾何及受力圖.....	243
圖 4.121	例題 4.3.10 梁自由端在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態 負荷—位移曲線圖.....	244
圖 4.122	例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之振動模態圖 ($P = 0$).....	245
圖 4.123	例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之振動模態圖 ($P_0 = 15 \text{ kN}$).....	246
圖 4.124	例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之振動模態圖 ($P_0 = 25 \text{ kN}$).....	247
圖 4.125	例題 4.3.10 梁自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移 ($P_0 = 15 \text{ kN}$).....	248
圖 4.126	例題 4.3.10 梁自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之 位移 ($P_0 = 25 \text{ kN}$).....	248
圖 4.127	例題 4.3.11 懸臂 Z 型斷面梁之幾何及受力圖.....	249
圖 4.128	例題 4.3.11 自由端 C 點之靜態負荷—位移曲線圖.....	250
圖 4.129	例題 4.3.11 Z 型斷面懸臂梁之振動模態圖 ($P = 0$).....	251
圖 4.130	例題 4.3.11 Z 型斷面懸臂梁之振動模態圖 ($P = 400 \text{ kN}$).	252
圖 4.131	例題 4.3.11 Z 型斷面懸臂梁之振動模態圖 ($P = 800 \text{ kN}$).	253
圖 4.132	例題 4.3.11 自由端 C 點在 X_1^G 方向與扭轉角之位移.....	254
圖 4.133	例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之幾何及受力圖.....	255
圖 4.134	例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 、 X_3^G 方向之靜態 負荷—位移曲線圖.....	256
圖 4.135	例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_2^G 方向之靜態負荷—位移 曲線圖.....	257
圖 4.136	例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P_C = 0$ 、 $P = 200 \text{ kN}$).....	258
圖 4.137	例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P_C = 200 \text{ kN}$ 、 $P = 200 \text{ kN}$).....	259
圖 4.138	例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖	

	$(P_C = 400\text{ kN}、P = 200\text{ kN})$	260
圖 4.139	例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖	
	$(P_C = 800\text{ kN}、P = 200\text{ kN})$	261
圖 4.140	例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向 之位移 ($P_C = 0$)	262
圖 4.141	例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向 之位移 ($P_C = 200\text{ kN}$)	262
圖 4.142	例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向 之位移 ($P_C = 400\text{ kN}$)	263
圖 4.143	例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向 之位移 ($P_C = 800\text{ kN}$)	263



第一章 導論

梁在結構工程系統中，長久以來一直扮演著非常重要的角色，在機械、航空太空、建築、車輛及土木工程中皆有很廣泛的應用。有些結構如飛機、太空船、船舶等，為了減輕重量而使用了高強度材料及薄壁斷面。這些結構在使用中，常受不同形式及大小的負載，並伴隨著高速旋轉、振動及大變形，所以在結構設計及分析時，便必須考慮結構的幾何非線性的靜態及動態反應、挫屈負荷、及其在不同負載及轉速下的自然振動頻率。開口薄壁梁斷面的剪力中心與形心位置通常不是一致，故即使是線性動態分析，其撓曲及扭曲的運動方程式是耦合的[1]，當開口薄壁梁在大變形或高速旋轉時，其撓曲、扭曲及軸向變形間及速度間的耦合效應不能忽略[2, 3]，否則無法求得其正確的靜態及動態反應、挫屈負荷、自然振動頻率。因線性梁理論無法考慮這些耦合效應，所以薄壁梁的平衡方程式、挫屈統御方程式、運動方程式、負載下的梁或旋轉梁的振動方程式都需使用非線性梁理論推導，即使是旋轉梁線性振動的統御方程式[4]及線性挫屈分析的統御方程式[5]，也必需是由非線性梁理論的一致線性化推導[2-8]才能得到正確的統御方程式及結果。在探討薄壁梁結構在負載下的自然振動[3, 9, 10]時，應指對該負載下之靜態平衡點的微小振動，故靜態的變形對結構切線剛度的影響不能忽略，否則無法求得正確的振動頻率。因挫屈有時候並不代表失效(failure)，薄壁梁結構在挫屈後的行為及振動特性也是值得探討的[10]。

文獻上有許多薄壁梁理論及數值方法被提出，其中大部分是薄壁梁的幾何非線性靜態分析及挫屈分析[7, 8, 11-36]，其中[33-36]用 corotational formulation 推導一個含翹曲剛度並考慮翹曲、扭曲及軸向變形間耦合效應之三維 Euler 薄壁梁元素，探討薄壁梁的幾何非線性靜態反應及挫屈負荷，其結果相當精確。薄壁梁無負載的自由振動分析[1, 10, 37-50]比較少。文獻[37]中使用有限元素法來分析開口薄壁梁的耦合自由振動，並考慮薄壁梁的翹曲剛度。文獻[38-44, 48, 49]使用 Dynamic stiffness method 進行開口薄壁梁的自然振動分析，求得自然頻率及振動模態，其中文獻[38,

40]忽略翹曲剛度。文獻[43]以文獻[40]理論為基礎且包含翹曲剛度矩陣，探討翹曲剛度對開口薄壁梁之自然頻率的影響，並以例題說明忽略翹曲剛度將造成自然頻率極大的誤差，但文獻上都是假設軸向振動是獨立的，故僅考慮側向及扭轉振動間的耦合，當梁在鉸接端的軸向位移受到拘限時，若拘限點不是梁斷面的形心時，軸向振動和側向及扭轉振動應是耦合的，故本研究擬探討薄壁梁在不同邊界條件下的自由振動。結構在使用時，通常受到各種形式及大小的負載，故薄壁梁結構在負載下自然振動的特性應很重要，但這方面的文獻不多[3, 9, 10, 39, 42, 44, 48, 49]，文獻[9, 10, 39, 42, 44, 48-49]探討軸向負載對開口薄壁梁耦合的自然頻率的影響，文獻[9]考慮了偏心軸向負載，但沒有考慮該負載造成的側向變形對自然頻率的影響。文獻[10]考慮了挫屈前及挫屈後的變形對自然頻率的影響，但文獻[10]僅考慮簡單的邊界條件且其運動方程式並非由完整之非線性梁理論推導，其結果的準確性仍須以較正確的梁理論求得之結果來驗證。旋轉梁的穩態解可視為梁在慣性力作用下的靜態平衡點，文獻[3]推導出三維旋轉 Timoshenko 梁以穩態解為平衡點之側向、軸向及扭轉振動正確的線性運動方程式，並探討其自然頻率及振動模態，但文獻[3]僅考慮雙對稱薄壁梁，故本研究擬用完整的非線性梁理論探討不對稱薄壁梁在負載下的自由振動，以補足文獻上的不足。梁之幾何非線性動態分析的文獻很多[51-74]，文獻[51-53]梁挫屈後的非線性振動，但僅考慮矩形斷面。文獻[56]利用 corotational formulation 提出一簡單有效的梁元素及數值程序來分析三維梁的動態問題，但其梁元素並非由完整之非線性梁理論推導，所以其變形力和慣性力中並不能包含全部的耦合項。文獻[2]採用 corotational formulation 及完整之幾何非線性梁理論推導梁元素，分析三維梁的幾何非線性動態反應，由[2]之例題可發現其結果相當精確，但文獻[2]沒有考慮梁斷面的翹曲剛度及剪力中心與形心不一致的問題。

對任意斷面之開口薄壁梁，文獻上似乎仍欠缺完整的非線性運動方程式，故本研究擬考慮梁斷面的翹曲剛度及剪力中心與形心不一致的開口薄壁梁，用有限元素法推導一不對稱開口薄壁梁元素的非線性運動方程式，以探討薄壁梁結構的自然振動及其對負載下之靜態平衡點的自然振動、還

有其幾何非線性動態反應及其在挫屈後的非線性振動。

開口薄壁梁結構運動時的耦合效應包括變形間、慣性(速度)間、及慣性(速度)與變形間的耦合，其變形分為撓曲、扭轉、扭轉翹曲及軸向變形。為了正確地考慮開口薄壁梁各種的耦合效應，在推導其運動方程式時必須使用開口薄壁梁正確的變形機制，其中包括了正確地描述梁斷面的有限旋轉及考慮有限旋轉的非向量特性，即使不考慮材料非線性，開口薄壁梁的運動方程式仍為一高度的非線性方程式，但該非線性為幾何非線性，幾何非線性主要是由剛體旋轉造成，若將剛體旋轉從總位移中去掉，則剩下的位移為小變形及小旋轉。此時若去掉運動方程式中的高次非線性項，可使運動方程式大幅地簡化，但仍可保持分析結果的精度。文獻上一般採用共旋轉法[2, 5, 7, 8, 33-36, 56]除掉剛體旋轉，即將梁分割成數個元素，然後在每一梁元素當前的變形位置上建立一元素座標。每一梁元素的變形、節點內力、運動方程式都是建立在該元素座標上。文獻[33-36]中提出一開口薄壁梁正確的變形機制，定義了三個旋轉參數及建立一套描述梁斷面的有限旋轉的方法以決定變形後斷面座標之方位，該變形機制能夠正確地考慮撓曲、扭曲與軸向變形的耦合效應，[33-36]中探討薄壁梁的幾何非線性靜態反應及挫屈負荷，其結果相當精確，文獻[36]中之不對稱薄壁梁元素考慮了梁斷面的翹曲剛度及剪力中心與形心不一致的問題，但文獻[33-36]都沒有考慮動態效應。文獻[2]採用 corotational formulation 及完整之幾何非線性梁理論，利用虛功原理、d'Alembert 原理推導梁元素的運動方程式，並探討三維梁的幾何非線性動態反應，由[2]之例題可發現其結果相當精確，文獻[2]的方法能夠正確地考慮撓曲、扭曲與軸向變形及慣性間之耦合的效應，但文獻[2]沒有考慮梁斷面的翹曲剛度及剪力中心與形心不一致的問題。

文獻[2, 33-35]用虛功原理推導元素節點力時，都視梁元素當前的元素座標為一固定的局部座標，當元素受到擾動節點位移及旋轉作用時，在該元素座標上定義擾動前及擾動後的元素節點旋轉參數，所以元素節點旋轉參數的擾動量僅與擾動節點旋轉有關，與擾動節點位移無關，在推導上很

方便，且因定義在固定元素座標的元素節點參數(節點位移及節點旋轉參數)包含了剛體運動的效應，故由元素節點內力對元素節點參數的微分及可求得元素的切線剛度矩陣。文獻[2]還在當前的固定元素座標定義元素節點參數對時間的微分，故元素節點參數對時間的一次微分為元素節點的速度及角速度，元素節點參數對時間的二次微分為元素節點的加速度及角加速度，故文獻[2]在當前的固定元素座標上推導元素節點的慣性力與在慣性座標上推導元素節點的慣性力[57, 59]一樣簡單。因文獻[2, 33-35] 在元素受到擾動前的當前變形位置上建立當前的元素座標及定義當前的元素節點參數，但並非在元素受到擾動後的變形位置上建立擾動後的元素座標及定義擾動後的元素節點參數，即擾動前後元素節點參數的定義方式不一致。一般文獻上[22-24]的共旋轉法，將梁元素當前的元素座標為一移動的局部座標，即擾動前後元素節點參數的定義方式一致，故本文中稱文獻[2, 33-35]的方法為「廣義共旋轉推導法」，稱一般文獻上[22-24]的共旋轉法為「一致性共旋轉推導法」。文獻[36]中提到文獻[33, 34]的元素節點力中，因擾動前後元素節點參數的定義方式不一致，有少數變形參數的二次項無法滿足力矩的平衡，但這些項在元素增多時會趨近於零，由文獻[8, 33-35]中的例題可以發現採用文獻[8]的梁元素分析長寬比較大的矩形斷面薄壁梁受扭矩作用的挫屈負荷時，需要相當多的元素才能得到滿意的收斂解，這可能是因文獻[33-35]的梁元素變形力的二次項及切線剛度的一次項中有些項在元素很小時會趨近於零，但其收斂速度很慢，故造成收斂緩慢的問題，文獻[36]發現若將文獻[8]中所有在元素很小時會趨近於零的項去掉，則可以大幅改善文獻[8, 35]的梁元素之收斂速率，即用較少的元素得到相同的精度。文獻[36]中還推導出元素受擾動前、後之元素座標的關係及受擾動後的元素節點參數，並以一致性共旋轉法推導一不對稱薄壁梁元素，該元素節點力可以滿足力矩的平衡，若將元素增多時元素節點力會趨近於零的二次項去掉，則該元素與文獻[8, 33-35]的元素一樣會大幅加快在一些問題的收斂速率。在一致性共旋轉推導法中，因元素座標的定義方式，除了元素節點 2 的軸向位移外，所有元素節點在當前的固定元素座標上的位移都為零，文獻[36]中，在任何變形位置都將元素節點對固定元素座標的

旋轉向量重新設定為零，因這些值為零的節點位移及旋轉向量對擾動前後之元素座標的關係沒有貢獻，文獻[36]在推導元素受擾動前、後之元素座標的關係時，未將其考慮進去，這可以簡化元素節點力的推導，但這些值為零的節點位移及旋轉向量對節點參數的微分不為零，該微分對切線剛度矩陣的貢獻相當於剛體旋轉造成元素節點內力方向改變的貢獻，所以文獻[36]在推導元素切線剛度矩陣時，除了元素節點內力對元素節點參數的微分外，還要外加一個穩定矩陣(Stability matrix)。這些值為零的節點位移及旋轉向量對時間的微分亦不為零，如果用文獻[36]的方法推導元素的絕對速度及絕對加速度時，還須考慮移動元素座標的角速度及角加速度的貢獻，但文獻[36]的方法未考慮值為零的節點位移及旋轉向量，應不能求得移動元素座標的角加速度。

若推導元素受擾動前、後之元素座標的關係時，將值為零的節點位移及旋轉向量考慮進去，則文獻[36]的一致性共旋轉推導法可以用在薄壁梁的動態分析，故本研究擬採用文獻[31-35]中提出的薄壁梁變形機制及以文獻[2]推導梁元素的運動方程式的方法為基礎，並將文獻[36]的一致性共旋轉推導法做必要的修改，推導薄壁梁元素的非線性運動方程式。為考慮各種變形及慣性間完整的非線性耦合，本研究將利用虛功原理、d'Alembert原理與完整的非線性梁理論之一致性二階線性化來推導梁元素的節點變形力及節點慣性力。

本研究推導開口薄壁梁元素時，為了推導的方便且不遺漏各種變形間的耦合，須先將節點變形參數保留到適當的階數，然後在適當的時候將節點內力作一致性二階線性化[2, 31-35]，以推導正確之節點變形力、節點慣性力、切線剛度矩陣及質量矩陣。因將元素節點變形力中在元素很小時會趨近於零的變形項去掉，可以大幅改善某些問題的收斂速率[36]，故本研究在動態分析時，元素節點慣性力中的變形耦合項將僅保留在元素很小時不會趨近於零的變形耦合項。

本研究將探討薄壁梁結構的自然振動及其在負載下之靜態平衡點的自然振動分析、幾何非線性動態反應、以及梁在預負載下的非線性動態反應。若將本研究推導之薄壁梁結構之非線性運動方程式中的非線性項去

掉，則成為薄壁梁結構之自然振動的統御方程式。薄壁梁結構在負載下的自然振動為薄壁梁結構對該負載下之靜態平衡點的微小振動，故梁在負載下的位移包含靜態平衡變形及以靜態平衡變形為平衡點的自由振動。將本研究推導之薄壁梁元素的非線性運動方程式的慣性項去掉，即為薄壁梁靜態平衡變形的非線性平衡方程式，本研究利用基於牛頓法的增量迭代法解在不同負載下的非線性靜態變形，將靜態變形代入薄壁梁元素的運動方程式，以一致性一階線性化可求得在負載下自由振動的統御方程式。因本研究考慮的振動是以對負載下之靜態平衡點的微小振動，故可視其為擾動量，所以本研究在自由振動的統御方程式中振動的部份僅保留到一次項，而靜態平衡變形為有限量，可視為零次項，故除了在元素很小時會趨近於零的項外，將全部保留。本研究中自由振動的統御方程式為一線性常微分方程組，故可將自由振動設為振態和時間週期函數的乘積，並將其代入自由振動的統御方程式，即可得其自然頻率的統御方程式，因自然頻率的統御方程式應為一廣義的標準的特徵值問題(Generalized standard eigenvalue problem) [75]，因本研究僅需要求開口薄壁梁結構的前幾個自然頻率及振動模態，所以本研究以次空間法(subspace iteration method) [75]解廣義的標準的特徵值問題。本研究採用 Newmark 直接積分法和牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法的增量迭代法解非線性運動方程式。薄壁梁在預負載下的非線性動態反應為薄壁梁結構在預負載下之靜態平衡位置受到外力作用的非線性動態反應。

本研究在第四章中以數值例題探討薄壁梁結構的自然振動及其在負載下之靜態平衡點的自然振動、幾何非線性動態反應、以及在預負載下的非線性動態反應，並與文獻上的結果比較，以說明本研究提出之方法的正確性及有效性。本研究將探討不同斷面及負載對開口薄壁梁之自然頻率與振動模態、幾何非線性動態反應之影響、以及對開口薄壁梁在預負載下的非線性動態反應之影響。

第二章理論推導

本章採用一致性共旋轉法推導梁元素節點變形力、慣性力、剛度矩陣及慣性矩陣。

2.1 基本假設

本文對非線性梁元素的推導，作如下的假設：

- (1) 梁為細長的等斷面梁，且Euler-Bernoulli假說成立。
- (2) 當去除剪心扭轉造成正應變，梁元素的形心軸剩餘之縱向正應變(longitudinal normal strain)為一常數。
- (3) 梁元素在斷面上沒有變形。
- (4) 梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。
- (5) 梁元素的變形為小變形。



2.2 座標系統

本文採用共旋轉之全拉格蘭日推導法(co-rotational total Lagrangian formulation)。為了描述系統的運動、元素的變形、邊界條件、以及與結構變形位置相關的外力(configuration dependent load)，本文中共定義了四套直角座標系統，並說明如下：

- (1) 固定總體座標系統(圖2.1)， $X_i^G (i=1, 2, 3)$ ；系統的節點座標、方位、位移、旋轉、速度、加速度、角速度、角加速度，系統的運動方程式，其他座標系統之座標軸的方向餘弦，皆在此座標系統中定義。
- (2) 元素座標系統(圖2.1，圖2.2)， $x_i (i=1, 2, 3)$ 、 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ ；本研究採用兩組元素座標，一組為與元素一起剛體運動，但不一起變形的移動元素座標 $x_i (i=1, 2, 3)$ ，一組為固定在元素當前的變形位置之固定元素座標 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ 。兩組元素座標在當前梁元素變形的位置上

是重合的。此座標系統附屬在每一梁元素上，其原點位於該元素的節點1上， x_1 軸通過該元素的兩端節點(1、2，即兩端斷面的剪心)， x_2 軸與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致，而元素變形後的 x_2 軸與 x_3 軸，可由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定[7]，即分別將位於節點 1、2 變形後的斷面繞一個與該斷面之法線及 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致(此時並不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向無法定義)，然後再以兩斷面主軸方向的角平分線作為 x_2 軸及 x_3 軸的方向。本研究在當前的移動元素座標定義元素的變形、節點變形參數，在當前的固定元素座標定義元素的節點位移向量及旋轉向量、節點位移向量及旋轉向量的擾動量，節點速度及加速度、節點角速度及角加速度、節點力、剛度矩陣、質量矩陣。當梁元素在當前的變形位置受到擾動時，擾動後的移動元素座標及對應的元素節點變形參數是由元素當前的元素座標及節點變形參數、節點位移向量與旋轉向量、擾動節點位移向量與旋轉向量決定。元素節點變形參數的擾動量是指元素在擾動前及擾動後，移動元素座標上之節點變形參數的差。移動元素座標的速度、加速度、角速度、角加速度是由當前的元素節點速度、加速度、角速度、角加速度、節點變形參數決定。

- (3) 元素斷面座標系統(圖2.1)， $x_i^S (i=1,2,3)$ ；此座標系統與元素的斷面一起平移和旋轉，其原點剛接於未翹曲斷面的形心上， x_1^S 軸為未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 軸與 x_3^S 軸分別與未翹曲斷面的主軸重合。元素的變形是由斷面座標相對於元素座標的旋轉來決定。
- (4) 負荷基底座標系統， $X_i^P (i=1,2,3)$ ；此座標系統是用來描述與結構變形位置相關的作用力機制。該作用力機制造成的系統節點外力及力矩，和負荷剛度矩陣(load stiffness matrix)，皆建立在此座標系統中。此座標系統的原點剛接於與結構變形位置相關的作用力作用的節點上。

本文中用符號 $\{\}$ 代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{X_1^G, X_2^G, X_3^G\}$ 與元素座標 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ 、元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{x_1^S, x_2^S, x_3^S\}$ 、負荷基底座標 $\mathbf{X}^P = \{X_1^P, X_2^P, X_3^P\}$ 之關係可表示如下，

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GE}\mathbf{x}, \\ \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GS}\mathbf{x}^S, \\ \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GP}\mathbf{X}^P,\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 、 \mathbf{A}_{GP} 分別代表元素座標、元素斷面座標、負荷基底座標相對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣。

2.3 旋轉向量及其對時間的微分

本文中使用旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖2.3所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\mathbf{a} = \phi\mathbf{e}$ 的作用而轉到一個新的位置 $\tilde{\mathbf{b}}$ ，向量 $\tilde{\mathbf{b}}$ 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成[80]

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}\cos\phi + (1 - \cos\phi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + \sin\phi(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \\ &= \left[\mathbf{I} + \frac{\sin\phi}{\phi}(\mathbf{a} \times \mathbf{I}) + \frac{1 - \cos\phi}{\phi^2}\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{I})\right]\mathbf{b} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{b}\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 \mathbf{I} 為 3×3 的單位矩陣， \times 表向量外積， \cdot 表向量內積， ϕ 表繞旋轉軸的旋轉角， \mathbf{e} 表旋轉軸的單位向量， \mathbf{R} 稱為旋轉矩陣。

由(2.2)式 $\tilde{\mathbf{b}}$ 對時間的微分可表示成

$$\frac{d\tilde{\mathbf{b}}}{dt} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{b} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t\tilde{\mathbf{b}}\tag{2.3}$$

因 $\tilde{\mathbf{b}}$ 的長度固定，所以其對時間的微分可表示成

$$\frac{d\tilde{\mathbf{b}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{b}}\tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 為角速度向量。

因 $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t$ 為一反對稱矩陣，從(2.3)式和(2.4)式可得

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t \quad (2.5)$$

由(2.2)及(2.5)式可得 $\boldsymbol{\omega}$ 和旋轉向量 \mathbf{a} 對時間的一次微分有以下關係[2]：

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma(\mathbf{a})\dot{\mathbf{a}}$$

$$\Gamma(\mathbf{a}) = [\mathbf{I} + a_1(\mathbf{a} \times \mathbf{I}) + b_1\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{I})] \quad (2.6)$$

其中 $a_1 = \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2}$ ， $b_1 = \frac{1}{\phi^2}(1 - \frac{\sin \phi}{\phi})$ ，當 $\phi \rightarrow 0$ ， $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $b_1 = \frac{1}{6}$ 。

當旋轉向量 \mathbf{a} 有一微小變量 $\delta\mathbf{a}$ 時會使向量 $\tilde{\mathbf{b}}$ 繞 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸做微小旋轉 $\delta\phi_i$ ， $\delta\mathbf{a}$ 與 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 的關係和 $\dot{\mathbf{a}}$ 與 $\boldsymbol{\omega}$ 的關係相同[2]，即

$$\delta\boldsymbol{\phi} = \Gamma(\mathbf{a})\delta\mathbf{a} \quad (2.7)$$

將(2.6)式對時間微分可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\Gamma}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{a}} + \Gamma(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{a}} \quad (2.8)$$

$$\dot{\Gamma}(\mathbf{a}) = \dot{a}_1(\mathbf{a} \times \mathbf{I}) + \dot{b}_1\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{I}) + a_1(\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{I})$$

$$+ b_1\dot{\mathbf{a}} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{I}) + b_1\mathbf{a} \times (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{I})$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 為角加速度， $\ddot{\mathbf{a}}$ 為旋轉向量對時間的兩次微分。

由(2.6)、(2.8)式可知當 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 時， $\Gamma(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ ， $\dot{\Gamma}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ 所以

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{a}} \quad (2.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\mathbf{a}} \quad (2.10)$$

即在旋轉向量 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 時，其對時間的一次、二次微分之值，等於角速度、角加速度。

2.4 梁之剪心軸的位移及其斷面的旋轉

本文是在當前的移動元素座標上，描述梁元素當前的的變形，由2.1節中的基本假設可知，梁元素的變形可由其剪心軸在移動元素座標上的位移及其斷面繞剪心軸的旋轉決定。本文以梁元素之剪心軸為參考軸、

以梁元素兩端斷面的剪心為節點，節點自由度及廣義力都在剪心上定義，所以本文在描述梁元素的變形前，先描述其剪心軸的位移及其斷面的旋轉。

本文中若 (\quad) 表示定義於移動元素座標中的變數，則 $(\bar{\quad})$ 表示定義於固定移動元素座標中的對應變數，在當前梁元素變形的位置上，固定元素座標與移動元素座標是重合的，所以定義在兩座標系統的對應變數有相同的值，但其擾動量及對時間的微分並不相同。

令梁剪心軸上的任一點P(見圖2.1)，在不計扭轉翹曲時，變形前後的位置向量分別為 $\{x, 0, 0\}$ 及 $\{x_p(x, t), v(x, t), w(x, t)\}$ ，其中 $v(x, t)$ 與 $w(x, t)$ 為剪心軸的側向位移，本文中符號 $\{\}$ 代表行矩陣。

本文中符號 $(\quad)'$ 代表 $(\quad)_{,x} = \partial(\quad)/\partial x$ 。變形後剪心軸的單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos\theta_n, \theta_3, -\theta_2\} \quad (2.11)$$

$$\cos\theta_n = \frac{\partial x_p(x, t)}{\partial s} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.12)$$

$$\theta_2 = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial s} = -\frac{w'}{1 + \varepsilon_o} \quad (2.13)$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v(x, t)}{\partial s} = \frac{v'}{1 + \varepsilon_o} \quad (2.14)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_o = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.15)$$

其中 θ_n 為元素座標之 x_1 軸和 \mathbf{t} 的夾角， s 為節點1至點P間的剪心軸在不計扭轉翹曲時，變形後的弧長， ε_o 為剪心軸的單位伸長量(unit extension)。由梁剪心軸上的任一點P在變形後的位置向量及(2.12)至(2.15)式，在 ε_o 、 $v_{,x}$ 與 $w_{,x}$ 都遠小於1時， $x_p(x, t)$ 可以表示成

$$x_p(x, t) = \int_0^x (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.16)$$

由(2.16)式可知 $u_1 = x_p(0, t)$ 為節點1在 x_1 方向上的位移，由移動元素座標系統的定義方式可知 u_1 、其擾動量 δu_1 及對時間的微分都為零。

令 L 及 ℓ 分別為變形前及變形後剪心軸的弦長， u_2 為節點2在 x_1 方向上的位移，由(2.16)式可得

$$u_2 = x_p(L, t) - L = \ell - L \quad (2.17)$$

$$\ell = \int_0^L (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2} v_{,x}^2 - \frac{1}{2} w_{,x}^2) dx \quad (2.18)$$

本文用元素斷面座標軸的旋轉表示梁之斷面的旋轉。令 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1, 2, 3$) 分別代表移動元素座標的 x_i ($i=1, 2, 3$) 方向的單位向量與元素斷面座標的 x_i^S ($i=1, 2, 3$) 軸方向的單位向量。由座標系統的定義方式可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S 軸的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_i^S 與(2.11)式的 \mathbf{t} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1, 2, 3$) 的方向是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$) 來決定：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n}, \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_t \mathbf{t}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{n} = \{0, \theta_2 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \theta_3 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0, n_2, n_3\}, \quad (2.21)$$

其中 \mathbf{n} 為垂直於 \mathbf{e}_1 與 \mathbf{t} 之單位向量， θ_n 定義於(2.12)式， \mathbf{t} 定義於(2.11)式， θ_t 為斷面繞 \mathbf{t} 旋轉的角度。

旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 作用在 \mathbf{e}_i 上，將其轉至一中繼位置 \mathbf{e}'_i ($i=1, 2, 3$)，此時 \mathbf{e}'_1 與 \mathbf{t} 重合，再將 $\boldsymbol{\theta}_t$ 作用在 \mathbf{e}'_i ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_n$ 、以及 $\boldsymbol{\theta}_t$ 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 與 $\boldsymbol{\theta}_t$ 亦唯一決定。

由(2.2)式、(2.11)–(2.12)式與(2.19)–(2.21)式， \mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$) 之關係可表示如下

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{t} \quad \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad (2.22)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{r}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_1 \mathbf{r}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-\theta_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_2^2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{\theta_2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_3^2\}$$

其中 \mathbf{R} 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R} 為 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。

本文中假設梁元素變形後的剪心軸，其側向位移 $v(x, t)$ 與 $w(x, t)$ 及剪力中心軸的扭轉角 $\theta_1(x, t)$ 皆為 x 的三次Hermitian氏多項式。因此(2.15)式之 $v(x, t)$ 與 $w(x, t)$ 可表成

$$v(x, t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v_1', v_2, v_2'\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.23)$$

$$w(x, t) = \{N_1, -N_2, N_3, -N_4\}^t \{w_1, -w_1', w_2, -w_2'\} = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (2.24)$$

$$\theta_1(x, t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{\theta_{11}, \beta_1, \theta_{12}, \beta_2\} = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), & N_2 &= \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), & N_4 &= \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.27)$$

其中 v_j 與 w_j ($j=1, 2$) 分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值， v'_j 及 w'_j 則是(2.15) 式中 v' 及 w' 在節點 j ($j=1, 2$) 之節點值， θ_{1j} ($j=1, 2$) 是(2.20)式之 θ_1 在節點 j 的節點值， β_j ($j=1, 2$) 是 $\theta_{1,x}$ 在節點 j 的節點值。 N_i ($i=1-4$) 代表形狀函數(shape function)。

2.5 節點參數與節點力

本文中用旋轉向量描述梁元素兩端節點之斷面的有限旋轉，但用旋轉參數描述梁元素在兩端節點及內部之斷面的有限旋轉，因對應於旋轉向量及旋轉參數的廣義力矩不一樣且非向量，所以不同元素在共同節點的廣義力矩不能以向量的方式相加，傳統力矩為向量，所以本文將元素節點的廣義力矩轉換成等效的傳統力矩，使其能以向量的方式相加，因對應於傳統力矩向量的廣義位移為繞該力矩向量的微小旋轉，所以本文在推導梁元素時需使用以下七類元素節點參數：

(1) \bar{u}_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)，如圖2.4所示， \bar{u}_{ij} ($\bar{u}_{1j} = \bar{u}_j$ ， $\bar{u}_{2j} = \bar{v}_j$ ， $\bar{u}_{3j} = \bar{w}_j$) 為元素節點 j 的位移向量 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 在其當前的固定元素座標軸 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 方向的分量，由固定元素座標系統的定義方式可知 \bar{u}_{ij} 中除了 \bar{u}_{12} 外，其餘的值皆為零，但 \bar{u}_{ij} 的增量 $\Delta\bar{u}_{ij}$ 、 \bar{u}_{ij} 的擾動量 $\delta\bar{u}_{ij}$ 、及 \bar{u}_{ij} 對時間的微分 $\dot{\bar{u}}_{ij}$ 、 $\ddot{\bar{u}}_{ij}$ 並不為零。對應於 $\delta\bar{u}_{ij}$ 的廣義節點力 f_{ij} ，為在 \bar{x}_i 軸方向的力。

(2) $\delta\phi_{ij}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)， $\delta\phi_{ij}$ 是元素節點 j 繞其當前的固定元素座標軸 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 的擾動旋轉，對應於 $\delta\phi_{ij}$ 的廣義節點力 m_{ij} ，為繞 \bar{x}_i 軸的傳統力矩(見圖 2.4)。

(3) ϕ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)， ϕ_{ij} 是元素節點 j 的旋轉向量 ϕ_j 在其固定元素座標軸 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 方向的分量，本研究中，在任何時刻及位置都將節點的旋轉向量 ϕ_j 的值重新設定為零，但 ϕ_{ij} 的增量 $\Delta\phi_{ij}$ 、擾動量 $\delta\phi_{ij}$ 及對時間的微分並不為零。對應於 $\delta\phi_{ij}$ 的廣義節點力 m_{ij}^ϕ 為一廣義力矩。因 ϕ_j 的值重新設定為零，由(2.6)及(2.7)式可知 $\delta\phi_{ij}$ 和 $\delta\phi_{ij}$ 的值相同，所以廣義力矩 m_{ij}^ϕ 和傳統力矩 m_{ij} 的值相同，但對應於 $\delta\phi_{ij}$ 和 $\delta\phi_{ij}$ 的切線剛度矩陣並不相同(詳見 2.10 節)。

(4) u_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) , u_{ij} ($u_{1j}=u_j$, $u_{2j}=v_j$, $u_{3j}=w_j$) 為元素節點 j 的位移向量 \mathbf{u}_j 在其當前的移動元素座標軸 x_i ($i=1, 2, 3$) 方向的分量，由移動元素座標系統的定義方式可知除了 u_{12} 外， u_{ij} 、 u_{ij} 的增量 Δu_{ij} 、 u_{ij} 的擾動量 δu_{ij} 及 u_{ij} 對時間的微分 \dot{u}_{ij} 、 \ddot{u}_{ij} 的值皆為零。對應於 δu_{ij} 的廣義節點力 f_{ij}^θ ，為在 x_i 軸方向的力。

(5) θ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) , θ_{ij} 是元素旋轉參數 θ_i 在節點 j 的值， θ_1 定義於(2.20)式， θ_2 與 θ_3 定義於(2.13)與(2.14)式， θ_{ij} 是用來描述梁元素在兩端節點及內部之斷面的有限旋轉。因元素變形後 θ_{ij} 的值不為零，所以 $\delta\theta_{ij}$ 並不是繞 x_i 軸的無限小旋轉。

(6) β_j ($j=1, 2$) , 如圖 2.4 所示， β_j 是梁元素之剪心軸的扭轉率 $\beta = \partial\theta_1 / \partial x$ 在元素節點 j 的值。對應於 β_j 之擾動量 $\delta\beta_j$ 的廣義節點力 B_j 為雙力矩(Bimoment)。 β_j 及 $\delta\beta_j$ 與標系統無關。

(7) θ_{ij}^* ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) , $\theta_{1j}^* = \theta_{1j}$ 、 $\theta_{2j}^* = -w'_j$ 、 $\theta_{3j}^* = v'_j$ ，其中 θ_{1j} 是元素旋轉參數 θ_1 在節點 j 的節點值， θ_1 定義於(2.20)式， v'_j 與 w'_j 為(2.15)式中 v' 與 w' 在節點 j 的節點值。本文中採用 θ_{ij}^* 及 β_j 來決定梁元素剪心軸的側向位移及軸向扭轉角。對應於 θ_{ij}^* 之擾動量 $\delta\theta_{ij}^*$ 的節點力為廣義力矩 m_{ij}^θ 。因為 θ_{ij}^* 在變形後不為零，所以 $\delta\theta_{ij}^*$ 並不是繞固定元素座標 x_i 軸的無限小旋轉，所以廣義力矩 m_{ij}^θ 並非繞固定元素座標 x_i 軸的傳統力矩。

本文中在元素節點 j ($j=1, 2$) 對應於元素節點參數 \bar{u}_{ij} 、 ϕ_{ij} 、 $\delta\phi_{ij}$ 及 β_j ($i=1, 2, 3$) 的系統節點參數為 u_{ij}^G 、 ϕ_{ij}^G 、 $\delta\phi_{ij}^G$ 及 β_j ，其中 u_{ij}^G 是節點 j 的位移向量 \mathbf{u}_j^G 在固定總體座標軸 X_i^G ($i=1, 2, 3$) 方向的分量； ϕ_{ij}^G 是元素節點 j 的旋轉向量 ϕ_j^G 在固定總體座標軸 X_i^G ($i=1, 2, 3$) 方向的分量。本研究中，在任何時刻及位置都將節點的旋轉向量 ϕ_j^G 的值重新設定為零，但 ϕ_{ij}^G 的增量 $\Delta\phi_{ij}^G$ 、擾動量 $\delta\phi_{ij}^G$ 及對時間的微分並不為零。本文用元素節點 j ($j=1, 2$) 的位移增量 Δu_{ij}^G 及 $\Delta\phi_{ij}^G$ 決定當前的元素斷面座標、移動元素座標、元素節點變形位移 u_{ij} 及旋轉參數 θ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) (詳見2.6節)，因本文中 ϕ_j^G 的值重新設定為零，所以由(2.6)及(2.7)式可知 $\Delta\phi_{ij}^G$ 和 $\Delta\phi_{ij}^G$ 的值相同。對應於 $\delta\phi_{ij}^G$ 的廣義節點力，為繞 X_i^G 軸的傳統力矩；對應於 u_{ij}^G 的擾動量 δu_{ij}^G 的廣義節點力為在 X_i^G 方向的力；因 β_j 與座標系統無關，對

應於 $\delta\beta_j$ 的廣義節點力，亦為廣義雙力矩 (Bimoment) B_j 。 Δu_{ij}^G 、 $\Delta\phi_{ij}^G$ 與 $\Delta\bar{u}_{ij}$ 、 $\Delta\phi_{ij}$ 的關係可以由標準的座標轉換求得。

2.6 元素斷面座標、移動元素座標、元素節點位移及旋轉參數之決定

本文是使用增量迭代法 (incremental iterative method) 解非線性平衡方程式。假設第 I 個位置為已知，此處所謂的第 I 個位置，是指第 I 個增量的平衡位置，或是指某一增量中第 I 次迭代後的位置。令 ${}^I\mathbf{X}_j^G$ 與 ${}^I x_{ij}^S$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 分別是元素節點 j 在第 I 個位置的總體座標向量與元素斷面座標，令 $\Delta\mathbf{u}_j^G$ 與 $\Delta\phi_j^G (= \Delta\varphi_j^G)$ ($j=1, 2$) 分別代表元素節點 j 在總體座標系統中的增量(或改正)位移向量與增量(或改正)旋轉向量。當元素節點 j ($j=1, 2$) 受到 $\Delta\mathbf{u}_j^G$ 及 $\Delta\phi_j^G$ 作用後，其當前的座標 \mathbf{X}_j^G 可由 ${}^I\mathbf{X}_j^G$ 加上 $\Delta\mathbf{u}_j^G$ 得到，當前的元素弦長 ℓ (即兩元素節點的距離) 可以由 \mathbf{X}_j^G 求得，由移動元素座標的定義方式可知 u_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 中除了 u_{12} 外，其餘的值皆為零， $u_{12} = u_2$ 的值可以由(2.17)式求得。當前的元素斷面座標 x_{ij}^S 是將旋轉向量 $\Delta\phi_j^G$ 作用在 ${}^I x_{ij}^S$ 軸上而得到。

本文以下列方法決定在當前變形位置的移動元素座標[7]。

由通過當前元素兩節點的軸決定當前移動元素座標的 x_1 軸。令 θ_{nj} ($j=1, 2$) 為(2.19)式中旋轉向量 θ_n 在節點 j 之節點值，由 θ_n 的定義方式， θ_{nj} 可以表示成

$$\theta_{nj} = \theta_{nj} \mathbf{n}_j \quad (2.28)$$

$$\sin \theta_{nj} \mathbf{n}_j = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_{1j}^S$$

其中 \mathbf{e}_1 為 x_1 軸的單位向量， \mathbf{e}_{1j}^S 為 x_{1j}^S ($j=1, 2$) 軸的單位向量。

當前移動元素座標的 x_2 及 x_3 軸可由下列兩個步驟決定：

步驟1：將旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用在 x_{ij}^S 軸上(圖2.5)，使其旋轉到標示為 $x_{ij}^{S'}$ (圖2.6)的新位置。此時， $x_{1j}^{S'}$ 軸與 x_1 軸重合，且 $x_{2j}^{S'}$ 和 $x_{3j}^{S'}$ 軸與 x_1 軸垂直。

步驟2：定義移動元素座標之 x_i ($i=2, 3$) 軸的單位向量 \mathbf{e}_i ($i=2, 3$) 如下

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e}_{i1}^{S'} + \mathbf{e}_{i2}^{S'}}{\|\mathbf{e}_{i1}^{S'} + \mathbf{e}_{i2}^{S'}\|} \quad (2.29)$$

其中 $\mathbf{e}_{ij}^{S'}$ ($i=2,3; j=1,2$) 為 $x_{ij}^{S'}$ 軸的單位向量。

在當前的變形位置及移動元素座標上，元素節點的旋轉參數，可依下列的方法決定。令 $\theta_{1j}\mathbf{e}_1$ ($j=1,2$) 表示將 x_2 軸旋轉到 $x_{2j}^{S'}$ 軸的旋轉向量，則由(2.20)式可知 θ_{1j} 為節點旋轉參數，本文中以下式計算 θ_{1j}

$$\theta_{1j} = \sin^{-1}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_{2j}^{S'} \cdot \mathbf{e}_1) \quad (2.30)$$

由(2.19)、(2.21)、以及(2.28)式，節點旋轉參數 θ_{ij} ($i=2,3; j=1,2$) 可用下式求得

$$\theta_{ij} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_{1j}^S \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.31)$$

2.7 移動元素座標與固定元素座標的關係

移動元素座標與固定元素座標在梁元素當前的變形位置上是重合的，但定義在固定元素座標的元素節點參數受到擾動時，移動元素座標就不再與固定元素座標重合，且定義在其上的元素節點參數亦有一對應的擾動，本節中將探討擾動後之移動元素座標及元素節點參數。本文中移動元素座標對固定元素座標的速度及加速度是由定義在固定元素座標的節點速度及加速度決定，本節中亦將推導其關係。

2.7.1 擾動後之移動元素座標及元素節點參數

令 t 表示當前的時間， \bar{x}_i 與 x_i ($i=1,2,3$) 表示在當前變形位置重合的固定元素座標與移動元素座標，在當前變形位置的固定元素座標與移動元素座標是重合的。令 $\bar{\mathbf{u}}_j = \bar{\mathbf{u}}_j(t) = \{\bar{u}_{1j}, \bar{u}_{2j}, \bar{u}_{3j}\} = \{\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j\}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\phi}}_j = \bar{\boldsymbol{\phi}}_j(t) = \{\bar{\phi}_{1j}, \bar{\phi}_{2j}, \bar{\phi}_{3j}\}$ ($j=1,2$) 分別表示元素節點 j 當前的位移向量、旋轉向量， $\theta_{ij} = \theta_{ij}(t)$ ($i=1,2,3; j=1,2$) 及 $\bar{\ell} = \bar{\ell}(t)$ 分別表示元素節點 j 當前的旋轉參數及元素當前的弦長。本文中旋轉向量 $\bar{\boldsymbol{\phi}}_j$ 的值在當前變形位置重新設定為零， $\bar{\mathbf{u}}_j$ 的分量除了 \bar{u}_{12} (即 \bar{u}_2) 外其餘的值皆為零，但因推導移動元素座標的速度、角速度、加速度及角加速度過程的需要，故仍保留全部的 $\bar{\boldsymbol{\phi}}_j$ 及 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 。令 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ 表示固定在移動元素座標上的一個點在移動

元素座標的位置向量，該點在當前變形位置的固定元素座標的位置向量可表示成

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)\mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}}_1(t) \quad (2.32)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}(t) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ ， $\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)$ 的值為 \mathbf{I}_3 (3×3 的單位矩陣)。如前所述， $\bar{\mathbf{u}}_1$ 的值為零，所以在當前的變形位置 \mathbf{x} 和 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 有相同的值。

令 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta\phi_j$ ($j=1, 2$) 分別代表元素節點 j 的位移向量 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 與旋轉向量 ϕ_j 的擾動量， δt 代表元素節點 j 受擾動的時間。當元素節點 j 受到 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta\phi_j$ ($j=1, 2$) 作用後，可由 2.5 節的方法及一致性一階線性化 (consistent first order linearization) 決定受擾動後的移動元素座標、元素節點旋轉參數 $\theta_{ij}(t + \delta t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)、元素弦長 $l(t + \delta t)$ ，其推導過程詳見附錄 A。

在當前的變形位置，元素節點受擾動後，移動元素座標中的固定點 \mathbf{x} 在當前的固定元素座標中的位置向量可表示成 (詳見附錄 A)

$$\bar{\mathbf{x}}(t + \delta t) = \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t)\mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \delta\bar{\mathbf{u}}_1 \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t) = {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} + {}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} \quad (2.34)$$

$${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} & -\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} \\ \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} & 1 & -\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \\ \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} & \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l}\phi_{1m} & \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l}\phi_{1m} \\ -\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} + \frac{\Delta\bar{w}}{l}\delta\phi_{1m} & 0 & -A_1 \\ -\frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} - \frac{\Delta\bar{v}}{l}\delta\phi_{1m} & A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{w}}{\ell^2} & -\frac{\Delta\bar{w}}{\ell}\delta\phi_{1m} & \frac{\Delta\bar{v}}{\ell}\delta\phi_{1m} \\ -\frac{\Delta\bar{w}}{\ell}\delta\phi_{1m} & -\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} + B_1 & -\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{v}}{2\ell^2} \\ \frac{\Delta\bar{v}}{\ell}\delta\phi_{1m} & -\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{v}}{2\ell^2} & -\frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{w}}{\ell^2} + B_1 \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}(t + \delta t)$ 為擾動後的移動元素座標相對於固定元素座標的方向餘弦矩陣， ${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}$ 及 ${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}$ 為節點參數的零次項及一次項，

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\phi_{21} + \phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\phi_{31} + \phi_{32}) \\ &+ \frac{1}{4} \theta_{31} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{21} \right) + \frac{1}{4} \theta_{32} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{22} \right) + \frac{1}{4} \theta_{21} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{31} \right) + \frac{1}{4} \theta_{22} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{32} \right) \\ &+ \frac{\phi_{21}\delta\phi_{31} - \phi_{31}\delta\phi_{21}}{4} + \frac{\phi_{22}\delta\phi_{32} - \phi_{32}\delta\phi_{22}}{4}, \quad \phi_{1m} = \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2}, \\ \delta\phi_{1m} &= \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2}, \quad B_1 = -\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \delta\phi_{1m}. \end{aligned}$$

擾動後元素弦長可表示成(詳見附錄 A)

$$\ell(t + \delta t) = \ell + \delta\Delta\bar{u} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \Delta\bar{v} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \Delta\bar{w} \quad (2.35)$$

$$\Delta\bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1, \quad \Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \quad \Delta\bar{w} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \quad (2.36)$$

$$\delta\Delta\bar{u} = \delta\bar{u}_2 - \delta\bar{u}_1, \quad \delta\Delta\bar{v} = \delta\bar{v}_2 - \delta\bar{v}_1, \quad \delta\Delta\bar{w} = \delta\bar{w}_2 - \delta\bar{w}_1 \quad (2.37)$$

擾動後元素節點 j 的旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij} = \theta_{ij}(t + \delta t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 在擾動後的移動元素座標上可表示成(詳見附錄 A)

$$\hat{\theta}_{12} = -\hat{\theta}_{11} \quad (2.38)$$

$$= -\frac{\theta_{11}}{2} + \frac{\theta_{12}}{2} - \frac{\delta\phi_{11}}{2} + \frac{\delta\phi_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31})$$

$$- \frac{1}{4} \theta_{31} \delta\phi_{21} + \frac{1}{4} \theta_{32} \delta\phi_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \delta\phi_{31} - \frac{1}{4} \theta_{22} \delta\phi_{32} + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} (\delta\phi_{22} - \delta\phi_{21})$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} (\delta\phi_{32} - \delta\phi_{31}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\phi_{32} - \phi_{31})$$

$$+ \frac{\phi_{21}\delta\phi_{31} - \phi_{31}\delta\phi_{21}}{4} - \frac{\phi_{22}\delta\phi_{32} - \phi_{32}\delta\phi_{22}}{4}$$

$$\hat{\theta}_{2j} = \theta_{2j} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j} + \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \theta_{3j} - \theta_{3j} \delta\phi_{1j} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{3j} \right)$$

$$+ \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \phi_{3j}\right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{3j}\right) - \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \phi_{3j} \delta\phi_{1j}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{3j} = & \theta_{3j} - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} + \delta\phi_{3j} - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \theta_{2j} + \theta_{2j} \delta\phi_{1j} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j}\right) \\ & - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{2j}\right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j}\right) + \frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \phi_{2j} \delta\phi_{1j} \end{aligned}$$

本文中元素的弦長及元素節點旋轉參數的擾動量指擾動前後之元素弦長的差及節點旋轉參數的差，所以由(2.35)式及(2.38)式可得

$$\delta l = l(t + \delta t) - l \quad (2.39)$$

$$\delta\theta_{ij} = \theta_{ij}(t + \delta t) - \theta_{ij}(t) = \hat{\theta}_{ij} - \theta_{ij} \quad (2.40)$$

由移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$) 的定義可知元素節點位移在 x_i 方向的擾動可表示成

$$\delta u_1 = \delta v_j = \delta w_j = 0 \quad (2.41)$$

由(2.17)、(2.35)及(2.39)式可得

$$\delta u_2 = \delta l = \delta\Delta\bar{u} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \Delta\bar{v} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \Delta\bar{w} \quad (2.42)$$

由(2.13)、(2.14)式可得

$$\delta\theta_{2j}^* = -\delta w'_j = (1 + \varepsilon_{oj}) \delta\theta_{2j} + \theta_{2j} \delta\varepsilon_{oj} \quad (2.43)$$

$$\delta\theta_{3j}^* = \delta v'_j = (1 + \varepsilon_{oj}) \delta\theta_{3j} + \theta_{3j} \delta\varepsilon_{oj}$$

其中 ε_{oj} ($j=1, 2$) 為剪心軸的單位伸長量 ε_o 在元素節點 j 之值， $\delta\theta_{ij}$ ($i=2, 3; j=1, 2$) 為(2.40)式之元素旋轉參數 θ_i 在元素節點 j 的擾動量。

2.7.2 移動元素座標的角速度、角加速度與元素節點參數對時間的微分

本文中 $(\dot{\quad})$ 代表 (\quad) 對時間的微分。令 $\dot{\mathbf{u}}_j = \{\dot{u}_{1j}, \dot{u}_{2j}, \dot{u}_{3j}\} = \{\dot{u}_j, \dot{v}_j, \dot{w}_j\}$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}_j = \{\ddot{u}_{1j}, \ddot{u}_{2j}, \ddot{u}_{3j}\} = \{\ddot{u}_j, \ddot{v}_j, \ddot{w}_j\}$ 、 $\dot{\Phi}_j = \{\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{2j}, \dot{\phi}_{3j}\}$ 與 $\ddot{\Phi}_j = \{\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{2j}, \ddot{\phi}_{3j}\}$ ($j=1, 2$) 分別代表在時間 t ，元素節點 j 在當前的固定元素座標中的絕對速

度、絕對加速度、絕對角速度、絕對角加速度。因本文中旋轉向量 ϕ_j 的值在當前變形位置重新設定為零，由(2.9)及(2.10)式可知節點 j 之旋轉向量對時間之一次微分 $\dot{\phi}_j = \{\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{2j}, \dot{\phi}_{3j}\}$ 及二次微分 $\ddot{\phi}_j = \{\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{2j}, \ddot{\phi}_{3j}\}$ 的值分別與 $\dot{\phi}_j = \{\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{2j}, \dot{\phi}_{3j}\}$ 與 $\ddot{\phi}_j = \{\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{2j}, \ddot{\phi}_{3j}\}$ 的值相等。

由(2.32)–(2.34)式，移動元素座標中的固定點 \mathbf{x} 在當前的固定元素座標中的絕對速度可表示成

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{x}}(t + \delta t) - \bar{\mathbf{x}}(t)}{\delta t} = \dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} \mathbf{x} + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_1(t) \quad (2.44)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t) - \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)}{\delta t} = {}^0\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} + {}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} = \boldsymbol{\Omega} + {}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} & -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l} \\ \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} & 0 & -\frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \\ \frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l} & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$${}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta \bar{v} \Delta \dot{u}}{l^2} + \Omega_y \phi_{1m} & \frac{\Delta \bar{w} \Delta \dot{u}}{l^2} + \Omega_z \phi_{1m} \\ -\frac{\Delta \bar{v} \Delta \dot{u}}{l^2} + \frac{\Delta \bar{w}}{l} \Omega_x & 0 & -\dot{A}_1 \\ -\frac{\Delta \bar{w} \Delta \dot{u}}{l^2} - \frac{\Delta \bar{v}}{l} \Omega_x & \dot{A}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{\Delta \bar{v}}{l} \Omega_z + \frac{\Delta \bar{w}}{l} \Omega_y & -\frac{\Delta \bar{w}}{l} \Omega_x & \frac{\Delta \bar{v}}{l} \Omega_x \\ -\frac{\Delta \bar{w}}{l} \Omega_x & -\frac{\Delta \bar{v}}{l} \Omega_z + \dot{B}_1 & -\frac{-\Delta \bar{v} \Omega_y + \Delta \bar{w} \Omega_z}{2l} \\ \frac{\Delta \bar{v}}{l} \Omega_x & -\frac{-\Delta \bar{v} \Omega_y + \Delta \bar{w} \Omega_z}{2l} & \frac{\Delta \bar{w} \Omega_y}{l} + \dot{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_x = \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2}, \quad \Omega_y = -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l}, \quad \Omega_z = \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} \quad (2.48)$$

$$\Delta \dot{u} = \dot{u}_2 - \dot{u}_1, \quad \dot{B}_1 = -\frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{4} (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} (\dot{\phi}_{21} + \dot{\phi}_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} (\dot{\phi}_{31} + \dot{\phi}_{32}) + \frac{1}{4} \Omega_z (\phi_{21} + \phi_{22}) - \frac{1}{4} \Omega_y (\phi_{31} + \phi_{32}) \\ &+ \frac{1}{4} \theta_{31} (-\Omega_y + \dot{\phi}_{21}) + \frac{1}{4} \theta_{32} (-\Omega_y + \dot{\phi}_{22}) + \frac{1}{4} \theta_{21} (\Omega_z - \dot{\phi}_{31}) + \frac{1}{4} \theta_{22} (\Omega_z - \dot{\phi}_{32}) \\ &+ \frac{\phi_{21} \dot{\phi}_{31} - \phi_{31} \dot{\phi}_{21}}{4} + \frac{\phi_{22} \dot{\phi}_{32} - \phi_{32} \dot{\phi}_{22}}{4}\end{aligned}$$

其中(2.44)式中 $\dot{\mathbf{u}}_1$ 為元素節點 1 的絕對速度，亦為移動元素座標的速度，(2.45)式中之 $\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x}$ 為移動元素座標的角速度矩陣(Angular velocity matrix)，因本文中不考慮隨元素減小時會趨近於零的變形參數，角速度矩陣僅考慮(2.45)式中之 Ω ，故(2.48)式中之 Ω_x 、 Ω_y 及 Ω_z 可視為移動元素座標對固定元素座標之 \bar{x}_i 軸的角速度。因推導移動元素座標的角加速度的需要，(2.45)式中之 ${}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x}$ 仍需保留。

由移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$)的定義，可知元素節點在 x_i 方向對移動元素座標的速度中

$$\dot{u}_1 = \dot{v}_j = \dot{w}_j = 0 \quad (j=1, 2) \quad (2.50)$$

由(2.17)及(2.35)式可得

$$\dot{u}_2 = \dot{\ell} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\ell(t + \delta t) - \ell(t)}{\delta t} = \Delta \dot{\mathbf{u}} + \Omega_z \Delta \bar{v} - \Omega_y \Delta \bar{w} \quad (2.51)$$

由(2.38)、(2.40)式及 $\dot{\theta}_{ij} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \theta_{ij}}{\delta t}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)可得

$$\dot{\theta}_{12} = -\dot{\theta}_{11} = -\frac{\dot{\phi}_{11}}{2} + \frac{\dot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{\bar{v}}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{\bar{w}}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31}) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{4} \theta_{31} \dot{\phi}_{21} + \frac{1}{4} \theta_{32} \dot{\phi}_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \dot{\phi}_{31} - \frac{1}{4} \theta_{22} \dot{\phi}_{32} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} (\dot{\phi}_{22} - \dot{\phi}_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} (\dot{\phi}_{32} - \dot{\phi}_{31}) \\ & + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{\bar{v}}}{\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{\bar{w}}}{\ell} (\phi_{32} - \phi_{31}) + \frac{\phi_{21} \dot{\phi}_{31} - \phi_{31} \dot{\phi}_{21}}{4} - \frac{\phi_{22} \dot{\phi}_{32} - \phi_{32} \dot{\phi}_{22}}{4}\end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_{2j} = \frac{\Delta \dot{\bar{w}}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{3j} - \theta_{3j} \dot{\phi}_{1j} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\Delta \dot{\bar{v}}}{\ell} - \dot{\phi}_{3j} \right)$$

$$+ \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} + \phi_{3j} \right) + \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta \dot{\bar{v}}}{\ell} + \dot{\phi}_{3j} \right) - \frac{\Delta \bar{w} \Delta \dot{\mathbf{u}}}{\ell^2} - \phi_{3j} \dot{\phi}_{1j}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{3j} = & -\frac{\Delta\dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{3j} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{2j} + \theta_{2j} \dot{\phi}_{1j} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} \right) \\ & - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} \right) + \frac{\Delta\bar{v}\Delta\dot{u}}{\ell^2} + \phi_{2j} \dot{\phi}_{1j}\end{aligned}$$

將(2.13)、(2.14)式對時間微分並取其在節點 j ($j=1, 2$) 之值可得

$$\dot{\theta}_{2j}^* = -\dot{w}'_j = (1 + \varepsilon_{oj}) \dot{\theta}_{2j} + \theta_{2j} \dot{\varepsilon}_{oj} \quad (2.53)$$

$$\dot{\theta}_{3j}^* = \dot{v}'_j = (1 + \varepsilon_{oj}) \dot{\theta}_{3j} + \theta_{3j} \dot{\varepsilon}_{oj}$$

其中 $\dot{\varepsilon}_{oj}$ ($j=1, 2$) 為剪心軸的單位伸長量 ε_o 在元素節點 j 之節點值， $\dot{\theta}_{ij}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已在(2.52)式中定義。

移動元素座標中的固定點 \mathbf{x} 在當前的固定元素座標中的絕對加速度可由(2.44)式對時間微分求得，若不考慮隨元素減小時會趨近於零的變形參數，(2.44)式對時間微分可表示成

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega})\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{u}}_1(t) \quad (2.54)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\alpha_x = \frac{\ddot{\phi}_{11} + \ddot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{2} \Omega_z (\dot{\phi}_{21} + \dot{\phi}_{22}) - \frac{1}{2} \Omega_y (\dot{\phi}_{31} + \dot{\phi}_{32})$$

$$\alpha_y = -\frac{\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1}{\ell} - 2 \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell} \Omega_y + \Omega_z \Omega_x$$

$$\alpha_z = \frac{\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1}{\ell} - 2 \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell} \Omega_z - \Omega_y \Omega_x$$

其中 $\mathbf{\Omega}$ 已在(2.46)式定義， α_x 、 α_y 及 α_z 為移動元素座標對固定元素座標之 \bar{x}_i 軸的角加速度。

由移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$) 的定義，可知元素節點在 x_i 方向對移動元素座標的加速度中

$$\ddot{u}_1 = \ddot{v}_j = \ddot{w}_j = 0 \quad (j=1, 2) \quad (2.56)$$

將(2.51)式對時間微分可得

$$\ddot{u}_2 = \ddot{\ell} = \Delta \ddot{u} + \Omega_z \Delta \dot{v} - \Omega_y \Delta \dot{w} = \ddot{u}_2 - \ddot{u}_1 + \ell(\Omega_z^2 + \Omega_y^2) \quad (2.57)$$

將(2.52)式對時間微分，並忽略隨元素減小時會趨近於零的變形參數可得

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{12} = -\ddot{\theta}_{11} = & -\frac{\ddot{\phi}_{11}}{2} + \frac{\ddot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{v}}{\ell} (\dot{\theta}_{22} - \dot{\theta}_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{w}}{\ell} (\dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{31}) \quad (2.58) \\ & - \frac{1}{4} \dot{\theta}_{31} \dot{\phi}_{21} + \frac{1}{4} \dot{\theta}_{32} \dot{\phi}_{22} + \frac{1}{4} \dot{\theta}_{21} \dot{\phi}_{31} - \frac{1}{4} \dot{\theta}_{22} \dot{\phi}_{32} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\Delta \dot{v}}{\ell} (\dot{\phi}_{22} - \dot{\phi}_{21}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta \dot{w}}{\ell} (\dot{\phi}_{32} - \dot{\phi}_{31}) \\ \ddot{\theta}_{2j} = & \frac{\Delta \ddot{w}}{\ell} - 2 \frac{\Delta \dot{w} \Delta \dot{u}}{\ell^2} + \ddot{\phi}_{2j} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{3j} - \dot{\theta}_{3j} \dot{\phi}_{1j} - \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2} \left(\frac{\Delta \dot{v}}{\ell} - \dot{\phi}_{3j} \right) \\ & + (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \left(-\frac{\Delta \dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{3j} \right) - \dot{\phi}_{1j} \dot{\phi}_{3j} \\ \ddot{\theta}_{3j} = & -\frac{\Delta \ddot{v}}{\ell} + 2 \frac{\Delta \dot{v} \Delta \dot{u}}{\ell^2} + \ddot{\phi}_{3j} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{2j} + \dot{\theta}_{2j} \dot{\phi}_{1j} - \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2} \left(\frac{\Delta \dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} \right) \\ & - (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \left(\frac{\Delta \dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} \right) + \dot{\phi}_{1j} \dot{\phi}_{2j} \end{aligned}$$

將(2.53)式對時間微分，並忽略隨元素減小時會趨近於零的變形參數可得

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{2j}^* = -\dot{w}'_j = & (1 + \varepsilon_{oj}) \ddot{\theta}_{2j} + 2 \dot{\theta}_{2j} \dot{\varepsilon}_{oj} \quad (2.59) \\ \ddot{\theta}_{3j}^* = \dot{v}'_j = & (1 + \varepsilon_{oj}) \ddot{\theta}_{3j} + 2 \dot{\theta}_{3j} \dot{\varepsilon}_{oj} \end{aligned}$$

(2.43)、(2.53)及(2.59)式中之 ε_{oj} 及 $\dot{\varepsilon}_{oj}$ 的值與梁元素的變形假設有關係，將在2.8節說明。

2.8 梁元素之變形描述

本文採用一致性共旋轉法，即在梁元素當前的移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$)描述梁元素當前的變形；在梁元素受擾動後的移動元素座標描述梁元素受擾動後的變形。本推導是在元素當前的變形位置之固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$)上進行，所有向量的分量都是指在該座標上的分量。

2.8.1 梁元素之位置向量

圖 2.1 中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在剪心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於同一斷面上。令當前的時間為 t ， \mathbf{r}_0 為梁元素變形前，Q 點在當前的移動元素座標上的位置向量， $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 、 $\mathbf{r}(t)$ 是為梁元素變形後，Q 點在當前的固定及移動元素座標上的位置向量。 \mathbf{r}_0 、 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 與 $\mathbf{r}(t)$ 可表示如下

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + (y - y_p)\mathbf{e}_2 + (z - z_p)\mathbf{e}_3 \quad (2.60)$$

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)\mathbf{r}(t) + \bar{\mathbf{u}}_1(t) \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & x_p(x,t)\mathbf{e}_1 + v(x,t)\mathbf{e}_2 + w(x,t)\mathbf{e}_3 \\ & + (y - y_p)\mathbf{e}_2^S + (z - z_p)\mathbf{e}_3^S + \theta_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^S \end{aligned} \quad (2.62)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}_1(t)$ 為元素節點 1 對固定元素座標的位移向量，由元素座標的定義方式可知 $\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)$ 的值為 \mathbf{I}_3 ，即 3×3 的單位矩陣， $\bar{\mathbf{u}}_1(t)$ 的值為零，即當前的移動元素座標 \bar{x}_i 與固定元素座標 x_i 是重合的， $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 與 $\mathbf{r}(t)$ 的值相同。 \mathbf{e}_i 為 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸的單位向量， \mathbf{e}_i^S 為 x_i^S 軸的單位向量， $x_p(x,t)$ 、 $v(x,t)$ 、以及 $w(x,t)$ 分別是 P 點在 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸上的座標(見 2.4 節)， y_p 、 z_p 及 y 、 z 分別是 P 和 Q 在 x_2^S 軸與 x_3^S 軸的座標。(2.62) 式中前三項是 P 點的位置向量，四、五項是 Q 相對於 P 的位置向量，最末項表示 Q 點扭轉翹曲的位移。 $\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x}$ 是沿變形後的剪心軸的斷面之軸向扭轉率， $\omega = \omega(y,z)$

代表等斷面梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數[83]。

本文中若 $(\bar{\quad})$ 表示定義於固定元素座標中的變數，則 (\quad) 表示定義於移動元素座標中的對應變數，例如 $\bar{\mathbf{r}}$ 是定義在固定元素座標上的位置向量， $\mathbf{r}(t)$ 是定義在移動元素座標上的位置向量。

將(2.22)式代入(2.62)式，並利用近似式 $\cos \theta_n = 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$ ，可得 \mathbf{r} 在 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 r_i 如下

$$\begin{aligned} r_1 = & x_p + (y - y_p)(\theta_2 \sin \theta_1 - \theta_3 \cos \theta_1) \\ & + (z - z_p)(\theta_2 \cos \theta_1 + \theta_3 \sin \theta_1) + \theta_{1,x} \left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2\right) \omega \\ r_2 = & v + (y - y_p) \left[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \sin \theta_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\theta_3^2\right) \cos \theta_1 \right] \\ & + (z - z_p) \left[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \cos \theta_1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta_3^2\right) \sin \theta_1 \right] + \theta_{1,x} \theta_3 \omega \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$r_3 = w + (y - y_p) \left[\frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 \cos \theta_1 + \left(1 - \frac{1}{2} \theta_2^2\right) \sin \theta_1 \right] \\ + (z - z_p) \left[\left(1 - \frac{1}{2} \theta_2^2\right) \cos \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 \sin \theta_1 \right] - \theta_{1,x} \theta_2 \omega$$

2.8.2 梁元素之位置向量的擾動量及其對時間的微分

如圖2.2所示，在時刻 t ，元素節點 j ($j=1, 2$)受到一定義於固定元素座標的擾動位移向量 $\delta \bar{\mathbf{u}}_j$ 及擾動旋轉向量 $\delta \phi_j$ 作用後，在 $t + \delta t$ 時刻，Q點位置向量可表示成

$$\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) = \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t) [\mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}] + \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \delta \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (2.64)$$

其中 δt 為擾動的時間， $\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t)$ 為受擾動後的移動元素座標與固定元素座標的轉換矩陣(見(2.34)式)， $\delta \mathbf{r}$ 為Q點對移動元素座標的擾動位移向量， $\delta \bar{\mathbf{u}}_1$ 元素節點1對固定元素座標的擾動位移向量。

由(2.63)式Q點對固定元素座標的位移擾動量 $\delta \bar{\mathbf{r}}$ 可表示成

$$\delta \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) - \bar{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t) [\mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}] + \delta \bar{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t) \mathbf{r}(t) \quad (2.65)$$

由(2.34)式及(2.65)式，Q點在時刻 t 的絕對速度 $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 可表示成

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \bar{\mathbf{r}}}{\delta t} = \dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x}(t) \mathbf{r} + \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t) \dot{\mathbf{r}} + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_1(t) \quad (2.66)$$

其中 $\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x}$ 已定義於(2.45)式，為移動元素座標的角速度矩陣(Angular velocity matrix)，本文中 $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，但因推導絕對加速度的需要，(2.66)式中變形參數的一次項仍需保留。

將(2.66)式對時間微分，並保留變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，絕對加速度 $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$ 可表示成

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega})\mathbf{r} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1 \quad (2.67)$$

其中 $\mathbf{\Lambda}$ 已定義於(2.55)式，為移動元素座標對固定元素座標的角加速度矩陣。

2.8.3 梁元素之應變

本文中應變的度量是採用 Green strain。本文中以 ε_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) 表示 Green strain。由於基本假設(3)，所以本文只考慮 ε_{11} 、 ε_{12} 與 ε_{13} ，並表示如下

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2\end{aligned}\quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.69)$$

其中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 定義於(2.62)式。

將(2.16)、(2.62)式代入(2.69)式，並保留變形參數及其微分到二次項，可得 \mathbf{g}_i 的分量 g_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 如下

$$\begin{aligned}g_{11} &= 1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_3^2) + (y - y_p)(\theta_1 \theta_{2,x} + \theta_2 \theta_{1,x} - \theta_{3,x}) \\ &\quad + (z - z_p)(\theta_1 \theta_{3,x} + \theta_3 \theta_{1,x} + \theta_{2,x}) + \theta_{1,xx} \omega \\ g_{12} &= (1 + \varepsilon_o) \theta_3 - (y - y_p)(\theta_1 \theta_{1,x} + \theta_3 \theta_{3,x}) \\ &\quad + (z - z_p) \left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_{3,x} + \frac{1}{2} \theta_3 \theta_{2,x} - \theta_{1,x} \right) + \theta_{1,xx} \theta_3 \omega + \theta_{1,x} \theta_{3,x} \omega \\ g_{13} &= -(1 + \varepsilon_o) \theta_2 + (y - y_p) \left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_{3,x} + \frac{1}{2} \theta_3 \theta_{2,x} + \theta_{1,x} \right) \\ &\quad - (z - z_p)(\theta_1 \theta_{1,x} + \theta_2 \theta_{2,x}) - \theta_{1,xx} \theta_2 \omega - \theta_{1,x} \theta_{2,x} \omega \\ g_{21} &= \theta_1 \theta_2 - \theta_3 + \theta_{1,x} \omega_{,y} \\ g_{22} &= 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) + \theta_{1,x} \theta_3 \omega_{,y} \\ g_{23} &= \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 - \theta_{1,x} \theta_2 \omega_{,y} \\ g_{31} &= \theta_1 \theta_3 + \theta_2 + \theta_{1,x} \omega_{,z}\end{aligned}\quad (2.70)$$

$$g_{32} = -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,z}$$

$$g_{33} = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,z}$$

將(2.70)式代入(2.68)， ε_{11} 可表示如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & \varepsilon_o - (y - y_p)\theta_{3,x} + (z - z_p)\theta_{2,x} + \omega\theta_{1,xx} + \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + \omega\varepsilon_o\theta_{1,xx} \\ & + (y - y_p)(\theta_1\theta_{2,x} - \varepsilon_o\theta_{3,x}) + (z - z_p)(\theta_1\theta_{3,x} + \varepsilon_o\theta_{2,x}) \\ & - (y - y_p)\omega\theta_{3,x}\theta_{1,xx} + (z - z_p)\omega\theta_{2,x}\theta_{1,xx} \\ & + \frac{1}{2}(y - y_p)^2(\theta_{1,x}^2 + \theta_{3,x}^2) + \frac{1}{2}(z - z_p)^2(\theta_{1,x}^2 + \theta_{2,x}^2) \\ & - (y - y_p)(z - z_p)\theta_{2,x}\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

上式所有項皆保留至二次項。

令 ε_c 表示去掉扭轉造成的正應變後，形心軸之正應變，由(2.71)式 ε_c 可表示如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_c = & \varepsilon_o + y_p\theta_{3,x} - z_p\theta_{2,x} + \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + y_p\varepsilon_o\theta_{3,x} - z_p\varepsilon_o\theta_{2,x} \\ & + \frac{1}{2}y_p^2\theta_{3,x}^2 + \frac{1}{2}z_p^2\theta_{2,x}^2 - y_pz_p\theta_{2,x}\theta_{3,x} \end{aligned} \quad (2.72)$$

(2.72)式可表示成 ε_o 的二次方程式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + (y_p\theta_{3,x} - z_p\theta_{2,x} + 1)\varepsilon_o + \left(\frac{1}{2}y_p^2\theta_{3,x}^2 + \frac{1}{2}z_p^2\theta_{2,x}^2 - y_pz_p\theta_{2,x}\theta_{3,x} + y_p\theta_{3,x} - z_p\theta_{2,x} - \varepsilon_c\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

使用(2.73)式及 $(1 + 2\varepsilon_c)^{1/2} = 1 + \varepsilon_c$ 的近似關係， ε_o 可表示成

$$\varepsilon_o = \varepsilon_c - y_p\theta_{3,x} + z_p\theta_{2,x} \quad (2.74)$$

將(2.74)式代入(2.16)及基本假設(2)，可得 ε_c 為

$$\varepsilon_c = \frac{\ell - L}{L} + \frac{y_p}{L}(\theta_{32} - \theta_{31}) - \frac{z_p}{L}(\theta_{22} - \theta_{21}) + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.75)$$

其中 L 及 l 分別為變形前及變形後剪心軸的弦長， θ_{ij} 則是 θ_i ($i=2,3$) 在節點 j ($j=1,2$) 的節點值。

將(2.70)式代入(2.68)式，並保留所有項至二次項，可得應變為

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.76)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_c - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^2 = & \frac{1}{2}\varepsilon_c^2 + \varepsilon_{o,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) + \omega\varepsilon_c\theta_{1,xx} + \frac{1}{2}[(y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]\theta_{1,x}^2 \\ & + \left(\frac{1}{2}y^2 - y_p y\right)v_{,xx}^2 + \left(\frac{1}{2}z^2 - z_p z\right)w_{,xx}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2 - (y - y_p)\theta_{1,x}w_{,xx} \\ & + (z - z_p)\theta_{1,x}v_{,xx} + (yz - y_p z - z_p y)v_{,xx}w_{,xx} - y\omega v_{,xx}\theta_{1,xx} - z\omega w_{,xx}\theta_{1,xx} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}[\omega_{,y} - (z - z_p)]\theta_{1,x}$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,y}\varepsilon_c\theta_{1,x} + (\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x}v_{,xx} - z\omega_{,y}\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}(z - z_p)(v_{,x}w_{,xx} - w_{,x}v_{,xx}) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2}[\omega_{,z} + (y - y_p)]\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,z}\varepsilon_c\theta_{1,x} + (\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}w_{,xx} - y\omega_{,z}\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}(y - y_p)(w_{,x}v_{,xx} - v_{,x}w_{,xx}) \end{aligned}$$

其中 ε_{1j}^k ($j=1, 2, 3, k=1, 2$) 代表 ε_{1j} 中之 k 次項， $\varepsilon_{o,x}$ 為(2.74)式之 ε_o 對 x 的微分。

2.8.4 梁元素應變之變分

本研究採用虛功原理及 D'Alembert 原理推導元素節點內力，所以需要應變的變分。將(2.76)–(2.78)式變分可得

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{11}^0 + \delta\varepsilon_{11}^1 \quad (2.79)$$

$$\delta\varepsilon_{11}^0 = \delta\varepsilon_c + \delta v_{,xx}(-y) + \delta w_{,xx}(-z) + \delta\theta_{1,xx}\omega$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{11}^1 = & \delta\varepsilon_{o,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) + \delta\varepsilon_c(\varepsilon_c + \omega\theta_{1,xx}) + \delta v_{,x}(y\varepsilon_{o,x}) + \delta w_{,x}(z\varepsilon_{o,x}) \\ & + \delta v_{,xx}[(y^2 - 2y_p y)v_{,xx} + (yz - y_p z - z_p y)w_{,xx} + (z - z_p)\theta_1 - y\omega\theta_{1,xx}] \\ & + \delta w_{,xx}[(yz - y_p z - z_p y)v_{,xx} + (z^2 - 2z_p z)w_{,xx} - (y - y_p)\theta_1 - z\omega\theta_{1,xx}] \\ & + \delta\theta_1[(z - z_p)v_{,xx} - (y - y_p)w_{,xx}] + \delta\theta_{1,x}[(y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]\theta_{1,x} \\ & + \delta\theta_{1,xx}(\omega\varepsilon_c - y\omega v_{,xx} - z\omega w_{,xx} + \omega^2\theta_{1,xx}) \end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{12}^0 + \delta\varepsilon_{12}^1 \quad (2.80)$$

$$\delta\varepsilon_{12}^0 = \delta\theta_{1,x}\left[\frac{1}{2}(\omega_{,y} - z + z_p)\right]$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{12}^1 = & \delta\varepsilon_c\left(\frac{1}{2}\omega_{,y}\theta_{1,x}\right) + \delta v_{,x}\left[\frac{1}{4}(z - z_p)w_{,xx}\right] + \delta w_{,x}\left[-\frac{1}{4}(z - z_p)v_{,xx}\right] \\ & + \delta\theta_{1,x}\left[\frac{1}{2}\omega_{,y}\varepsilon_c + \frac{1}{2}(\omega - y\omega_{,y})v_{,xx} - \frac{1}{2}z\omega_{,y}w_{,xx} + \frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\theta_{1,xx}\right] \\ & + \delta v_{,xx}\left[\frac{1}{2}(\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x} - \frac{1}{4}(z - z_p)w_{,xx}\right] \\ & + \delta w_{,xx}\left[\frac{1}{4}(z - z_p)v_{,xx} - \frac{1}{2}\omega_{,y}z\theta_{1,x}\right] + \delta\theta_{1,xx}\left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\right) \end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{13}^0 + \delta\varepsilon_{13}^1 \quad (2.81)$$

$$\delta\varepsilon_{13}^0 = \delta\theta_{1,x} \left[\frac{1}{2}(\omega_{,z} + y - y_p) \right]$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{13}^1 = & \delta\varepsilon_c \left(\frac{1}{2}\omega_{,z}\theta_{1,x} \right) + \delta v_{,x} \left[-\frac{1}{4}(y - y_p)w_{,xx} \right] + \delta w_{,x} \left[\frac{1}{4}(y - y_p)v_{,xx} \right] \\ & + \delta\theta_{1,x} \left[\frac{1}{2}\omega_{,z}\varepsilon_c + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})w_{,xx} - \frac{1}{2}y\omega_{,z}v_{,xx} + \frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,xx} \right] \\ & + \delta v_{,xx} \left[-\frac{1}{2}y\omega_{,z}\theta_{1,x} + \frac{1}{4}(y - y_p)w_{,x} \right] \\ & + \delta w_{,xx} \left[-\frac{1}{4}(y - y_p)v_{,x} + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x} \right] + \delta\theta_{1,xx} \left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,x} \right) \end{aligned}$$

由(2.13)、(2.14)、(2.23)、(2.24)、(2.43)、(2.74)、(2.75)式，可得

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_c = & \delta\mathbf{u}_a^t \left[1 - \frac{y_p}{L}(\mathbf{B}^t \mathbf{u}_b) - \frac{z_p}{L}(\mathbf{C}^t \mathbf{u}_c) \right] \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \left(\frac{y_p}{L} \mathbf{B} + \mathbf{G}_b \right) \\ & + \delta\mathbf{u}_c^t \left(\frac{z_p}{L} \mathbf{C} + \mathbf{G}_c \right) \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\delta\varepsilon_{o,x} = \delta\mathbf{u}_b^t (-y_p \mathbf{N}_b''') + \delta\mathbf{u}_c^t (-z_p \mathbf{N}_c''') \quad (2.83)$$

$$\mathbf{B} = \{0, -1, 0, 1\}, \quad \mathbf{C} = \{0, 1, 0, -1\}, \quad \mathbf{G}_a = \frac{1}{L} \{-1, 1\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_b = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'_b v_{,x} d\xi - \frac{y_p}{L} \varepsilon_c \mathbf{B} + \frac{y_p^2}{L^2} \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_b + \frac{y_p z_p}{L^2} \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}_c \\ \mathbf{G}_c = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'_c w_{,x} d\xi - \frac{z_p}{L} \varepsilon_c \mathbf{C} + \frac{y_p z_p}{L^2} \mathbf{Q}_3 \mathbf{u}_b + \frac{z_p^2}{L^2} \mathbf{Q}_4 \mathbf{u}_c \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{Q}_1 = L(\mathbf{N}'_{b2} \mathbf{N}''_{b2} - \mathbf{N}'_{b1} \mathbf{N}''_{b1} + \mathbf{N}''_{b2} \mathbf{N}'_{b2} - \mathbf{N}''_{b1} \mathbf{N}'_{b1}) - \mathbf{B} \mathbf{B}^t$$

$$\mathbf{Q}_2 = L(\mathbf{N}'_{b2} \mathbf{N}''_{c2} - \mathbf{N}'_{b1} \mathbf{N}''_{c1} + \mathbf{N}''_{b2} \mathbf{N}'_{c1} - \mathbf{N}''_{b1} \mathbf{N}'_{c1}) - \mathbf{B} \mathbf{C}^t$$

$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2^t \quad (2.85)$$

$$\mathbf{Q}_4 = L(\mathbf{N}'_{c2}\mathbf{N}''_{c2} - \mathbf{N}'_{c1}\mathbf{N}''_{c1} + \mathbf{N}''_{c2}\mathbf{N}'_{c2} - \mathbf{N}''_{c1}\mathbf{N}'_{c1}) - \mathbf{C}\mathbf{C}^t$$

其中()'表示()對x的微分， \mathbf{N}'_{bj} 、 \mathbf{N}''_{bj} 、 \mathbf{N}'_{cj} 及 \mathbf{N}''_{cj} 分別為 \mathbf{N}'_b 、 \mathbf{N}''_b 、 \mathbf{N}'_c 及 \mathbf{N}''_c 在節點j的值。(2.84)式中加底線"---"之項在元素很小時會趨近於零，故本文中計算時將其忽略。

2.9 元素節點力之推導

本文利用完整之幾何非線性梁理論、D'Alembert 原理及虛功原理推導出節點變形力及節點慣性力。由於採用共旋轉法(corotational formulation)並適當選取元素大小，所以節點參數很小，可以對完整之節點變形力及慣性力作一致性線性化(consistent linearization)將其簡化。為保留各變形間之耦合項，所以在變形力中保留至節點參數之二次項，因薄壁梁之扭轉率的三次項對其幾何非線性的分析的影響不能忽略[8]，故本研究將扭轉率的三次項保留。採用共旋轉法時，隨著元素減小，元素的長度，位移、旋轉參數都會趨近於零，但元素的曲率、扭轉率會趨近常數，本文將忽略變形力中隨元素減小會趨近於零的項。在慣性力中保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，即含扭轉率的項在空間中高速運動時，速度間之耦合效果不可忽略，所以在慣性力中保留全部的速度間耦合項。

由 D'Alembert 原理及虛功原理，可知

$$\delta \mathbf{q}_\varphi^t \mathbf{f}_\varphi = \int_V [(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13}) + \rho\delta\mathbf{r}^t\ddot{\mathbf{r}}]dV \quad (2.86)$$

$$\delta \mathbf{q}_\varphi = \{\delta\bar{\mathbf{u}}_1, \delta\boldsymbol{\varphi}_1, \delta\bar{\mathbf{u}}_2, \delta\boldsymbol{\varphi}_2, \delta\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.87)$$

$$\mathbf{f}_\varphi = \mathbf{f}^D + \mathbf{f}^I \quad (2.88)$$

$$\mathbf{f}^D = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{f}^I = \{\mathbf{f}_1^I, \mathbf{m}_1^I, \mathbf{f}_2^I, \mathbf{m}_2^I, \mathbf{B}^I\} \quad (2.90)$$

其中 $\delta \mathbf{q}_\varphi$ 為定義於固定元素座標的元素節點虛擾動位移向量， $\delta\bar{\mathbf{u}}_j = \{\delta\bar{u}_j, \delta\bar{v}_j, \delta\bar{w}_j\}$ ， $\delta\boldsymbol{\varphi}_j = \{\delta\varphi_{1j}, \delta\varphi_{2j}, \delta\varphi_{3j}\}$ ， $\delta\boldsymbol{\beta} = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$ ， $j=1, 2$ ， $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 為節點j對固定元素座標的擾動位移向量， $\delta\boldsymbol{\varphi}_j$ 的分量為節點j之斷面繞固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸的擾動旋轉， $\delta\boldsymbol{\beta}$ 為擾動扭轉率向量， $\delta\beta_j$ 為

元素扭轉率在節點 j 的擾動量。 \mathbf{f}_ϕ 為對應於 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 的元素節點力向量， \mathbf{f}^D 和 \mathbf{f}^I 分別為元素節點變形力及慣性力向量， $\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}$ ， $\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}$ ， $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$ ， $\mathbf{f}_j^I = \{f_{1j}^I, f_{2j}^I, f_{3j}^I\}$ ， $\mathbf{m}_j^I = \{m_{1j}^I, m_{2j}^I, m_{3j}^I\}$ ， $\mathbf{B} = \{B_1^I, B_2^I\}$ ($j=1, 2$)， f_{ij} 、 m_{ij} 及 B_j ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$) 已經在 2.5 節中說明， $()^I$ 為對應於變形力 $()$ 之慣性力。 V 為未變形梁元素的體積， ε_{1j} ($j=1, 2, 3$) 為梁元素之應變(見(2.76)–(2.78)式)， $\delta\varepsilon_{1j}$ 為梁元素之應變的變分(見(2.79)–(2.81)式)， σ_{1j} ($j=1, 2, 3$) 是對應於 ε_{1j} 的第二類 Piola-Kirchhoff 應力。 ρ 為梁元素之密度， $\delta\mathbf{r}$ 為對固定元素座標的位移擾動量(見(2.65)式)， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為絕對加速度(見(2.67)式)。本文中假設材料為線彈性材料，其應力–應變關係為

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}, \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \quad (2.91)$$

其中 E 是楊氏係數(Young's modulus)， G 是剪力係數(Shear modulus)。

因 $\delta\varepsilon_{1j}$ ($j=1, 2, 3$) 中之節點參數的擾動量都在移動元素座標中定義，為了推導上的方便，本研究將(2.86)式改寫成

$$\delta\mathbf{q}_\phi^t \mathbf{f}^D = \delta\mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^D = \int_V (\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta\varepsilon_{13}) dV \quad (2.92)$$

$$\delta\mathbf{q}_\phi^t \mathbf{f}^I = \int_V \rho \delta\mathbf{r}^t \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.93)$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\theta_1^*, \delta\mathbf{u}_2, \delta\theta_2^*, \delta\beta\} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{f}_\theta^D = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\} \quad (2.95)$$

其中 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 為一定義於移動元素座標的廣義元素節點擾動位移向量， $\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\theta_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $\delta\beta = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$ ， $\delta\mathbf{u}_j$ 為節點 j 對移動元素座標的擾動位移向量， $\delta\theta_{1j}$ 為元素扭轉角在節點 j 的擾動量， $\delta v'_j$ 及 $\delta w'_j$ 為定義於(2.15)式之 w' 及 v' 在元素節點 j 的擾動量， $\delta\beta_j$ 為元素扭轉率在節點 j 的擾動量。 \mathbf{f}_θ^D 為對應於 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的廣義元素節點變形力向量， $\mathbf{f}_j^\theta = \{f_{1j}^\theta, f_{2j}^\theta, f_{3j}^\theta\}$ ， $\mathbf{m}_j^\theta = \{m_{1j}^\theta, m_{2j}^\theta, m_{3j}^\theta\}$ ， $\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\theta_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $j=1, 2$ ， f_{ij}^θ 、 m_{ij}^θ 及 B_j ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已經在 2.5 節中說明。

(2.94) 式之 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 與(2.87)式之 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 有以下的關係

$$\delta\mathbf{q}_\theta = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \delta\mathbf{q}_\phi = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \delta\mathbf{q}_\phi \quad (2.96)$$

(2.96)式的推導在附錄B中， $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 、 \mathbf{T}_R 、 $\mathbf{T}_{\phi\phi}$ 的顯式在附錄B之(B.11)式、(B.17)式及(B.6)式中。

利用(2.96)式與反梯度法則(contragradient law) [76]，可求得(2.89)式及(2.95)式中元素節點變形力向量 \mathbf{f}^D 與 \mathbf{f}_θ^D 之關係如下

$$\mathbf{f}^D = \mathbf{T}_{\phi\phi}(\mathbf{T}_{\theta\phi}^t + \mathbf{T}_R^t)\mathbf{f}_\theta^D \quad (2.97)$$

\mathbf{f}^D 與 \mathbf{f}_θ^D 的關係的顯式在附錄C中。

為了推導上的方便，本研究推導元素節點變形力向量 \mathbf{f}^D 時，先將 $\delta\varepsilon_{1j}$ ($j=1, 2, 3$)表示成 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的函數，由(2.92)式推導出 \mathbf{f}_θ^D ，再由(2.97)式求得 \mathbf{f}^D ，其推導過程在2.9.1節說明；推導元素節點慣性力向量 \mathbf{f}^I 時，將 $\delta\mathbf{r}$ 表示成 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 的函數，由(2.93)式推導出 \mathbf{f}^I ，其推導過程在2.9.2節說明。

2.9.1 元素節點變形力向量之推導

為推導方便，本文將(2.94)式之 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 拆成以下四個擾動位移向量

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}_a &= \{\delta u_1, \delta u_2\}, \quad \delta\mathbf{u}_b = \{\delta v_1, \delta v'_1, \delta v_2, \delta v'_2\} \\ \delta\mathbf{u}_c &= \{\delta w_1, -\delta w'_1, \delta w_2, -\delta w'_2\}, \quad \delta\mathbf{u}_d = \{\delta\theta_{11}, \delta\beta_1, \delta\theta_{12}, \delta\beta_2\} \end{aligned} \quad (2.98)$$

其中 $\delta\mathbf{u}_i$ ($i=b, c, d$)為定義於(2.23)–(2.25)式中之 \mathbf{u}_i 的擾動量。

對應於 $\delta\mathbf{u}_i$ ($i=a, b, c, d$)的廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i^θ ($i=a, b, c, d$)可表示如下

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^\theta &= \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\}, \quad \mathbf{f}_b^\theta = \{f_{21}^\theta, m_{31}^\theta, f_{22}^\theta, m_{32}^\theta\} \\ \mathbf{f}_c^\theta &= \{f_{31}^\theta, m_{21}^\theta, f_{32}^\theta, m_{22}^\theta\}, \quad \mathbf{f}_d^\theta = \{m_{11}^\theta, B_1, m_{12}^\theta, B_2\} \end{aligned} \quad (2.99)$$

利用(2.98)及(2.99)式，(2.92)式可改寫成

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^\theta + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^\theta + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^\theta + \delta\mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^\theta \\ = \int_V (\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta\varepsilon_{13}) dV \end{aligned} \quad (2.100)$$

將(2.91)式代入(2.100)式可得

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^\theta + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^\theta + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^\theta + \delta\mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^\theta \\ = E \int (\int \varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{11} dA) dx + G \int [4 \int (\varepsilon_{12} \delta\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \delta\varepsilon_{13}) dA] dx \end{aligned} \quad (2.101)$$

由(2.76)、(2.79)式及 $\int ydA = \int zdA = \int yzdA = 0, \int \omega dA = \int y\omega dA = \int z\omega dA = 0$ 可將(2.101)式中之 $\int \delta\varepsilon_{11}\varepsilon_{11}dA$ 表示成

$$\begin{aligned}
& \int \varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{11}dA \\
&= \delta\varepsilon_c \left\{ A\varepsilon_c + \frac{3}{2}A\varepsilon_c^2 + \frac{1}{2}[I_p + A(y_p^2 + z_p^2)]\theta_{1,x}^2 + \frac{1}{2}I_z v_{,xx}^2 + \frac{1}{2}I_y w_{,xx}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}I_\omega \theta_{1,xx}^2 - Az_p \theta_1 v_{,xx} + Ay_p \theta_1 w_{,xx} \right\} \\
&+ \delta\varepsilon_{o,x}(-I_z v_{,x} v_{,xx} - I_y w_{,x} w_{,xx}) + \delta v_{,x}(-I_z \varepsilon_{o,x} v_{,xx}) + \delta w_{,x}(-I_y \varepsilon_{o,x} w_{,xx}) \\
&+ \delta\theta_1[-Az_p \varepsilon_c v_{,xx} + Ay_p \varepsilon_c w_{,xx} + (I_z - I_y)v_{,xx} w_{,xx}] \\
&+ \delta\theta_{1,x} \left\{ [I_p + A(y_p^2 + z_p^2)]\varepsilon_c \theta_{1,x} - (\alpha_z + \alpha_{yz} - 2y_p I_z)\theta_{1,x} v_{,xx} \right. \\
&\quad \left. - (\alpha_y + \alpha_{zy} - 2z_p I_y)\theta_{1,x} w_{,xx} + (\alpha_{y\omega} + \alpha_{z\omega})\theta_{1,x} \theta_{1,xx} + \frac{1}{2}K_I \theta_{1,x}^3 \right\} \\
&+ \delta\theta_{1,xx} \left[(1 + 3\varepsilon_c)I_\omega \theta_{1,xx} + \frac{1}{2}(\alpha_{y\omega} + \alpha_{z\omega})\theta_{1,xx}^2 + \frac{3}{2}\alpha_{z\omega} v_{,xx}^2 + \frac{3}{2}\alpha_{y\omega} w_{,xx}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}\alpha_\omega \theta_{1,xx}^2 - 3\alpha_{\omega z} \theta_{1,xx} v_{,xx} - 3\alpha_{\omega y} \theta_{1,xx} w_{,xx} + 3\alpha_{\omega yz} v_{,xx} w_{,xx} \right] \\
&+ \delta v_{,xx}[-Az_p \varepsilon_c \theta_1 + (1 + \varepsilon_c)I_z v_{,xx} - I_z \varepsilon_{o,x} v_{,x} - \frac{1}{2}(\alpha_z + \alpha_{yz} - 2y_p I_z)\theta_{1,x}^2 \\
&\quad - (\frac{3}{2}\alpha_z - 3y_p I_z)v_{,xx}^2 - (\frac{3}{2}\alpha_{yz} - y_p I_y)w_{,xx}^2 - \frac{3}{2}\alpha_{\omega z} \theta_{1,xx}^2 + (I_z - I_y)\theta_1 w_{,xx} \\
&\quad + 3\alpha_{z\omega} \theta_{1,xx} v_{,xx} + 3\alpha_{\omega yz} \theta_{1,xx} w_{,xx} - (3\alpha_{zy} - 2z_p I_z)v_{,xx} w_{,xx}] \\
&+ \delta w_{,xx}[Ay_p \varepsilon_c \theta_1 + (1 + \varepsilon_c)I_y w_{,xx} - I_y \varepsilon_{o,x} w_{,x} - \frac{1}{2}(\alpha_y + \alpha_{zy} - 2z_p I_y)\theta_{1,x}^2 \\
&\quad - (\frac{3}{2}\alpha_{zy} - z_p I_z)v_{,xx}^2 - (\frac{3}{2}\alpha_y - 3z_p I_y)w_{,xx}^2 - \frac{3}{2}\alpha_{\omega y} \theta_{1,xx}^2 + (I_z - I_y)\theta_1 v_{,xx} \\
&\quad + 3\alpha_{\omega yz} \theta_{1,xx} v_{,xx} + 3\alpha_{y\omega} \theta_{1,xx} w_{,xx} - (3\alpha_{yz} - 2y_p I_y)v_{,xx} w_{,xx}]
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
I_y &= \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA, \quad K_I = \int [(y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]^2 dA \\
\alpha_y &= \int z^3 dA, \quad \alpha_z = \int y^3 dA, \quad \alpha_{yz} = \int z^2 y dA, \quad \alpha_{zy} = \int y^2 z dA \\
I_\omega &= \int \omega^2 dA, \quad \alpha_\omega = \int \omega^3 dA, \quad \alpha_{y\omega} = \int z^2 \omega dA, \quad \alpha_{z\omega} = \int y^2 \omega dA \\
\alpha_{\omega y} &= \int \omega^2 z dA, \quad \alpha_{\omega z} = \int \omega^2 y dA, \quad \alpha_{\omega yz} = \int \omega y z dA, \quad I_p = I_y + I_z \quad (2.103)
\end{aligned}$$

其中 A 為截面的面積，(2.102) 式中保留節點參數至二次項，及 $\theta_{1,x}$ 的三次項。

由 (2.77)、(2.78)、(2.80)、(2.81) 式可將 (2.101) 式中之 $\int 4(\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\delta\varepsilon_{13})dA$ 表示成

$$\begin{aligned}
& \int 4(\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\delta\varepsilon_{13})dA \\
&= \delta v_{,x} \left(-\frac{1}{2}J\theta_{1,x}w_{,xx}\right) \\
&+ \delta w_{,x} \left(\frac{1}{2}J\theta_{1,x}v_{,xx}\right) \\
&+ \delta\theta_{1,x} [J\theta_{1,x} - 2J_y\theta_{1,x}w_{,xx} + 2J_z\theta_{1,x}v_{,xx} + 2J_\omega\theta_{1,x}\theta_{1,xx} + \frac{1}{2}J(w_{,x}v_{,xx} - v_{,x}w_{,xx})] \\
&+ \delta v_{,xx} \left(J_z\theta_{1,x}^2 + \frac{1}{2}Jw_{,x}\theta_{1,x}\right) \\
&+ \delta w_{,xx} \left(-J_y\theta_{1,x}^2 - \frac{1}{2}Jv_{,x}\theta_{1,x}\right) \\
&+ \delta\theta_{1,xx} (J_\omega\theta_{1,x}^2)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
J &= \int \{[-(z - z_p) + \omega_{,y}]^2 + [(y - y_p) + \omega_{,z}]^2\} dA, \\
J_y &= \int [(y - y_p)(z\omega_{,z} - \omega) - z(z - z_p)\omega_{,y} + z(\omega_{,y}^2 + \omega_{,z}^2) - \omega\omega_{,z}] dA, \\
J_z &= \int [(z - z_p)(y\omega_{,y} - \omega) - y(y - y_p)\omega_{,z} - y(\omega_{,y}^2 + \omega_{,z}^2) + \omega\omega_{,y}] dA, \\
J_\omega &= \int [\omega(\omega_{,y}^2 + \omega_{,z}^2) + (y - y_p)\omega\omega_{,z} - (z - z_p)\omega\omega_{,y}] dA
\end{aligned} \tag{2.105}$$

對於雙對稱斷面， y_p 、 z_p 、 α_y 、 α_z 、 α_{yz} 、 J_y 、 J_z 、 J_ω 、 $\alpha_{y\omega}$ 、 $\alpha_{z\omega}$ 、 $\alpha_{\omega y}$ 、 $\alpha_{\omega z}$ 及 α_ω 的值皆為零。對於 $z_p = 0$ 的單對稱斷面， α_y 、 α_{yz} 、 J_y 、 J_ω 、 $\alpha_{y\omega}$ 、 $\alpha_{z\omega}$ 、 $\alpha_{\omega y}$ 及 α_ω 的值皆為零。

將 (2.102)、(2.104) 式代入 (2.101) 式中，並保留元素節點參數至二次項，由 (2.101) 式的等號兩邊的 $\delta\mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 之係數對等之關係，可求得對應於 $\delta\mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的節點變形力向量為

$$\mathbf{f}_a^\theta = [A_1 - AE\varepsilon_c(y_p \mathbf{B}^t \mathbf{u}_b + z_p \mathbf{C}^t \mathbf{u}_c)] \mathbf{G}_a \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= AEL\varepsilon_c + \frac{3}{2}AEL\varepsilon_c^2 + \frac{1}{2}[EI_p + AE(y_p^2 + z_p^2)] \int \theta_{1,x}^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2}EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2}EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx \\ &+ AEy_p \int \theta_1 w_{,xx} dx - AEz_p \int \theta_1 v_{,xx} dx \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b^\theta &= f_{12}^\theta L \mathbf{G}_b + \frac{y_p}{L} A_1 \mathbf{B} + y_p EI_y \int \mathbf{N}_b'' w_{,xx} w_{,xx} dx + y_p EI_z \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} v_{,xx} dx \\ &- EI_z \int \varepsilon_{o,x} (\mathbf{N}'_b v_{,xx} + \mathbf{N}''_b v_{,x}) dx - AEz_p \varepsilon_c \int \mathbf{N}_b'' \theta_1 dx \\ &+ EI_z (1 + \varepsilon_c) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + [GJ_z - \frac{E}{2}(\alpha_z + \alpha_{yz} - 2y_p I_z)] \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,x}^2 dx \\ &- E(\frac{3}{2}\alpha_z - 3y_p I_z) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx}^2 dx - E(\frac{3}{2}\alpha_{yz} - y_p I_y) \int \mathbf{N}_b'' w_{,xx}^2 dx \\ &- \frac{3}{2}E\alpha_{\omega z} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx}^2 dx + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \theta_1 w_{,xx} dx + 3E\alpha_{z\omega} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} v_{,xx} dx \\ &- E(3\alpha_{zy} - 2z_p I_z) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} w_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} w_{,xx} dx \\ &+ \frac{1}{2}GJ \int (\mathbf{N}_b'' \theta_{1,x} w_{,x} - \mathbf{N}'_b \theta_{1,x} w_{,xx}) dx \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_c^\theta = & f_{12}^\theta \mathbf{L} \mathbf{G}_c + \frac{z_p}{L} A_1 \mathbf{C} + z_p EI_y \int \mathbf{N}_c''' w_{,x} w_{,xx} dx + z_p EI_z \int \mathbf{N}_c''' v_{,x} v_{,xx} dx \\
& - EI_y \int \varepsilon_{o,x} (\mathbf{N}'_c w_{,xx} + \mathbf{N}''_c w_{,x}) dx + AE y_p \varepsilon_c \int \mathbf{N}''_c \theta_1 dx \\
& + EI_y (1 + \varepsilon_c) \int \mathbf{N}''_c w_{,xx} dx - [GJ_y + \frac{E}{2} (\alpha_y + \alpha_{zy} - 2z_p I_y)] \int \mathbf{N}''_c \theta_{1,x}^2 dx \\
& - E (\frac{3}{2} \alpha_{zy} - z_p I_z) \int \mathbf{N}''_c v_{,xx}^2 dx - E (\frac{3}{2} \alpha_y - 3z_p I_y) \int \mathbf{N}''_c w_{,xx}^2 dx \\
& - \frac{3}{2} E \alpha_{\omega y} \int \mathbf{N}''_c \theta_{1,xx}^2 dx + E (I_z - I_y) \int \mathbf{N}''_c \theta_1 v_{,xx} dx + 3E \alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}''_c \theta_{1,xx} v_{,xx} dx \\
& - E (3\alpha_{yz} - 2y_p I_y) \int \mathbf{N}''_c v_{,xx} w_{,xx} dx + 3E \alpha_{y\omega} \int \mathbf{N}''_c \theta_{1,xx} w_{,xx} dx \\
& + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}'_c \theta_{1,x} v_{,xx} - \mathbf{N}''_c \theta_{1,x} v_{,x}) dx
\end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_d^\theta = & \{GJ + [EI_p + AE(y_p^2 + z_p^2)]\varepsilon_c\} \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} dx \\
& + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_c) \int \mathbf{N}''_d \theta_{1,xx} dx + AE y_p \varepsilon_c \int \mathbf{N}_d w_{,xx} dx \\
& - AE z_p \varepsilon_c \int \mathbf{N}_d v_{,xx} dx + [GJ_\omega + \frac{E}{2} (\alpha_{y\omega} + \alpha_{z\omega})] \int \mathbf{N}''_d \theta_{1,x}^2 dx \\
& + \frac{3}{2} E \alpha_{y\omega} \int \mathbf{N}''_d w_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2} E \alpha_{z\omega} \int \mathbf{N}''_d v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2} E \alpha_\omega \int \mathbf{N}''_d \theta_{1,xx}^2 dx \\
& - 3E \alpha_{\omega y} \int \mathbf{N}''_d \theta_{1,xx} w_{,xx} dx - 3E \alpha_{\omega z} \int \mathbf{N}''_d \theta_{1,xx} v_{,xx} dx \\
& + 3E \alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}''_d v_{,xx} w_{,xx} dx + E (I_z - I_y) \int \mathbf{N}_d v_{,xx} w_{,xx} dx \\
& + \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}'_d (w_{,x} v_{,xx} - v_{,x} w_{,xx}) dx \\
& - [2GJ_y + E(\alpha_y + \alpha_{zy} - 2z_p I_y)] \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} w_{,xx} dx \\
& + [2GJ_z - E(\alpha_z + \alpha_{yz} - 2y_p I_z)] \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} v_{,xx} dx \\
& + [2GJ_\omega + E(\alpha_{y\omega} + \alpha_{z\omega})] \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} \theta_{1,xx} dx \\
& + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x}^3 dx
\end{aligned} \tag{2.110}$$

上列各式的積分範圍是由0至 L ，(2.107)–(2.110)式中加底線”---”之項，含 θ_1 或 $v_{,x}$ 或 $w_{,x}$ 之一次項，加底線”-·-·-”之項，含元素長度 L 之一次項或二次項，在元素很小時都會趨近於零，本文中將這些項忽略。(2.110)式中畫實線底線之項為 $\theta_{1,x}$ 之三次項。

節點變形力向量 \mathbf{f}_θ^D 可以由(2.106)–(2.110)式之 \mathbf{f}_i^θ ($i=a, b, c, d$)組合而成，因 \mathbf{f}_θ^D 僅保留至隱節點參數的二次項及部分之三次項，所以由(2.97)、(B.6)、(B.11)、(B.17)式，節點變形力向量 \mathbf{f}^D 可以表示成

$$\mathbf{f}^D = \mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t} \mathbf{f}_\theta^D + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t} + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{2t}) \mathbf{f}_\theta^{D1} + (\mathbf{T}_R^t + \mathbf{T}_{\phi\phi}^1 \mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t}) \mathbf{f}_\theta^D \quad (2.111)$$

其中 \mathbf{f}_θ^{D1} 為節點變形力向量 \mathbf{f}_θ^D 的一次項， $\mathbf{T}_{\theta\phi}^0$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^1$ 及 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^2$ 為(2.96)式中 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 的零次、一次及二次項，在(B.11)式已有定義。因為 $\bar{v}_j = \bar{w}_j = 0$ 及 $\phi_{ij} = 0$ ，所以 $\mathbf{T}_R = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{T}_{\phi\phi}^1 = \mathbf{0}$ ，對節點變形力向量 \mathbf{f}^D 沒有貢獻，但對其微分會對元素切線剛度矩陣有影響。若將(2.108)及(2.109)式中之 $f_{12}^\theta \mathbf{G}_i L$ ($i=b, c$)改成 $f_{12} \mathbf{G}_i L$ ，則須拿掉(C.10)–(C.13)式中的 $f_{12}^{\theta\phi} G_{ij} L$ ($i=b, c$) ($j=2, 4$)項，(2.111)式可以改寫成

$$\mathbf{f}^D = (\mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t} + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t}) \mathbf{f}_\theta^{D+} + (\mathbf{T}_R^t + \mathbf{T}_{\phi\phi}^1 \mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t}) \mathbf{f}_\theta^{D+} \quad (2.112)$$

其中 \mathbf{f}_θ^{D+} 是將 \mathbf{f}_θ^D 在(2.108)及(2.109)式中 $f_{12}^\theta \mathbf{G}_i L$ ($i=b, c$)改成 $f_{12} \mathbf{G}_i L$ 。

2.9.2 元素節點慣性力向量之推導

為推導方便，本文將(2.87)式之 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 拆成四個廣義位移向量 $\delta \mathbf{u}_i^\phi$ ($i=a, b, c, d$)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_a^\phi &= \{\delta \bar{u}_1, \delta \bar{u}_2\}, \quad \delta \mathbf{u}_b^\phi = \{\delta \bar{v}_1, \delta \phi_{31}, \delta \bar{v}_2, \delta \phi_{32}\} \\ \delta \mathbf{u}_c^\phi &= \{\delta \bar{w}_1, \delta \phi_{21}, \delta \bar{w}_2, \delta \phi_{22}\}, \quad \delta \mathbf{u}_d^\phi = \{\delta \phi_{11}, \delta \beta_1, \delta \phi_{12}, \delta \beta_2\} \end{aligned} \quad (2.113)$$

對應於 $\delta \mathbf{u}_i^\phi$ ($i=a, b, c, d$)的廣義節點慣性力向量 \mathbf{f}_i^I ($i=a, b, c, d$)可表示如下

$$\mathbf{f}_a^I = \{f_{11}^I, f_{12}^I\}, \quad \mathbf{f}_b^I = \{f_{21}^I, m_{31}^I, f_{22}^I, m_{32}^I\}$$

$$\mathbf{f}_c^I = \{f_{31}^I, m_{21}^I, f_{32}^I, m_{22}^I\}, \quad \mathbf{f}_d^I = \{m_{11}^I, B_1^I, m_{12}^I, B_2^I\} \quad (2.114)$$

其中 f_{ij}^I 、 m_{ij}^I ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 為節點 j 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 方向的慣性力及繞固定元素座標 \bar{x}_i 軸的傳統慣性力矩， B_j^I ($j=1, 2$) 為節點 j 的慣性雙力矩。

利用(2.113)及(2.114)式，(2.93)式可改寫成

$$\delta \mathbf{u}_a^{\phi t} \mathbf{f}_a^I + \delta \mathbf{u}_b^{\phi t} \mathbf{f}_b^I + \delta \mathbf{u}_c^{\phi t} \mathbf{f}_c^I + \delta \mathbf{u}_d^{\phi t} \mathbf{f}_d^I = \int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.115)$$

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則(2.65)式之 $\delta \mathbf{r}$ 可表示成

$$\delta \mathbf{r} = {}^0 \mathbf{A}_{\bar{x}x} \mathbf{r} + \delta \mathbf{r} + \delta \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (2.116)$$

其中 ${}^0 \mathbf{A}_{\bar{x}x}$ 在(2.34)式已經定義， $\delta \bar{\mathbf{u}}_1 = \{\delta \bar{u}_1, \delta \bar{v}_1, \delta \bar{w}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的擾動位移向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 軸上的位置向量， \mathbf{r} 已在(2.62)式定義， $\delta \mathbf{r}$ 為位置向量 \mathbf{r} 的變分。

$\delta \mathbf{r}$ 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 $\delta \bar{r}_i$ 可表示成

$$\delta \bar{r}_1 = \mathbf{N}_a^t \delta \mathbf{u}_a^\phi + y_p \mathbf{N}_e^t \delta \mathbf{u}_b^\phi + z_p \mathbf{N}_f^t \delta \mathbf{u}_c^\phi - y \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b^\phi - z \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c^\phi + \omega \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d^\phi \quad (2.117)$$

$$\delta \bar{r}_2 = \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b^\phi - (z - z_p) \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d^\phi + \omega \theta_{1,x} \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b^\phi$$

$$\delta \bar{r}_3 = \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c^\phi + (y - y_p) \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d^\phi + \omega \theta_{1,x} \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c^\phi$$

$$\delta \mathbf{u}_a^\phi = \{\delta \bar{u}_1, \delta \bar{u}_2\}, \quad \mathbf{N}_a = \{N_5, N_6\} \quad (2.118)$$

$$\mathbf{N}_e = \{0, N_5, 0, N_6\}, \quad \mathbf{N}_f = \{0, -N_5, 0, -N_6\} \quad (2.119)$$

$$N_5 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_6 = \frac{1+\xi}{2}$$

其中 \mathbf{N}_i ($i=b, c, d$) 及 ξ 已在(2.23)–(2.25)、(2.27)式中定義。(2.117)–(2.119)式的推導詳見附錄D。

若保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，

則(2.67)式之 $\ddot{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 $\ddot{\bar{r}}_i$ 可表示成

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{r}}_1 = & \ddot{u}_1 + \ddot{x}_p - (1 + \varepsilon_c) x (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + 2(\Omega_y \dot{w} - \Omega_z \dot{v}) + (y - y_p) [\Omega_x \Omega_y - \alpha_z \\ & + 2(\Omega_y + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3] + (z - z_p) [\Omega_x \Omega_z + \alpha_y + 2(\Omega_z + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + \omega \ddot{\theta}_{1,x} \\ & - \omega \theta_{1,x} [(\Omega_y + \dot{\theta}_2)^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_3)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_2 &= \ddot{v}_1 + \ddot{v} + x\Omega_x\Omega_y - 2\Omega_x\dot{w} + x\alpha_z + 2\Omega_z\dot{x}_p - (y - y_p)[(\Omega_x + \dot{\theta}_1)^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_3)^2] \\
&\quad + (z - z_p)[\Omega_y\Omega_z - \alpha_x + (2\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1] + 2\omega(\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_{1,x} \\
&\quad + \omega\theta_{1,x}(\Omega_x\Omega_y - \alpha_z + 2\Omega_x\dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_3) \\
\ddot{r}_3 &= \ddot{w}_1 + \ddot{w} + x\Omega_x\Omega_z + 2\Omega_x\dot{v} - x\alpha_y - 2\Omega_y\dot{x}_p - (z - z_p)[(\Omega_y + \dot{\theta}_2)^2 + (\Omega_x + \dot{\theta}_1)^2] \\
&\quad + (y - y_p)[\Omega_y\Omega_z + \alpha_x + (2\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1] - 2\omega(\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_{1,x} \\
&\quad + \omega\theta_{1,x}(\Omega_x\Omega_z - \alpha_y + 2\Omega_x\dot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_2)
\end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\dot{x}_p = x\dot{\varepsilon}_c - y_p(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_{31}) + z_p(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{21}) - \int_0^x (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_p &= \frac{x(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)}{L} + y_p\mathbf{N}_e^t\ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + z_p\mathbf{N}_f^t\ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - y_p\ddot{\theta}_3 + z_p\ddot{\theta}_2 + \frac{x}{L}\int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)dx \\
&\quad - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)dx + \frac{\ell x}{L}(\Omega_z^2 + \Omega_y^2)
\end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\dot{\theta}_2 = -(1 - \varepsilon_o)\dot{w}_{,x}, \quad \dot{\theta}_3 = (1 - \varepsilon_o)\dot{v}_{,x} \tag{2.123}$$

$$\ddot{\theta}_2 = 2\dot{\varepsilon}_o\dot{w}_{,x} - \ddot{w}_{,x}, \quad \ddot{\theta}_3 = -2\dot{\varepsilon}_o\dot{v}_{,x} + \ddot{v}_{,x} \tag{2.124}$$

$$\dot{\varepsilon}_o = \dot{\varepsilon}_c - y_p\dot{\theta}_{3,x} + z_p\dot{\theta}_{2,x} \tag{2.125}$$

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\Delta\ddot{u}}{L} + \frac{y_p}{L}(\dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{31}) - \frac{z_p}{L}(\dot{\theta}_{22} - \dot{\theta}_{21}) \tag{2.126}$$

其中 $\ddot{\mathbf{u}}_b^\theta = \{\ddot{v}_1, \ddot{\theta}_{31}, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_{32}\}$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}_c^\theta = \{\ddot{w}_1, \ddot{\theta}_{21}, \ddot{w}_2, \ddot{\theta}_{22}\}$ ， $\dot{\theta}_{2j}$ 及 $\dot{\theta}_{3j}$ ($j=1, 2$) 表示 (2.123) 式中 $\dot{\theta}_2$ 及 $\dot{\theta}_3$ 在節點 j 的節點值， $\ddot{\theta}_{2j}$ 及 $\ddot{\theta}_{3j}$ ($j=1, 2$) 表示 (2.124) 式中 $\ddot{\theta}_2$ 及 $\ddot{\theta}_3$ 在節點 j 的節點值。(2.120)–(2.126) 式的推導詳見附錄 D。

將 (2.117)、(2.120) 式及 $\int ydA = \int zdA = \int yz dA = 0$ ， $\int \omega dA = \int y\omega dA = \int z\omega dA = 0$ 關係代入 (2.115) 式等號右邊的項，並保留至變形參數的零次項，(2.115) 式中 $\int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \ddot{\mathbf{r}} dV$ 可表示成

$$\begin{aligned}
&\int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \ddot{\mathbf{r}} dV \\
&= \delta \mathbf{u}_a^{\theta t} \{ \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a^\theta - 2\rho A \int \mathbf{N}_a (\Omega_z \dot{v} - \Omega_y \dot{w}) dx \\
&\quad + \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{1+\xi}{2} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \right] dx \\
&\quad + \rho A y_p \int \mathbf{N}_a (\alpha_z + \mathbf{N}_e^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
&\quad - 2\rho A y_p \int \mathbf{N}_a (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho A z_p \int \mathbf{N}_a (\alpha_y - \mathbf{N}_f^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho A z_p \int \mathbf{N}_a (\dot{\theta}_1 + \Omega_x)(\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx \} \\
+ \delta \mathbf{u}_b^{\theta t} \{ & \rho A \int \mathbf{N}_b [\ddot{w}_1 + \ddot{v} + x\alpha_z + x\Omega_y \Omega_x - 2\Omega_x \dot{w} + 2\Omega_z \frac{x}{L} (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)] dx \\
& + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b (-2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x} + \alpha_z + \ddot{v}_{,x} + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho I_z \int \mathbf{N}'_b (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)(\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx + \rho A y_p \int \mathbf{N}_e \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a^\theta dx \\
& - 2\rho A y_p \int \mathbf{N}_e (\Omega_z \dot{v} - \Omega_y \dot{w}) dx \\
& + \rho A y_p \int \mathbf{N}_e [\frac{1+\xi}{2} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx] dx \\
& + \rho A y_p \int \mathbf{N}_b (\dot{\theta}_1 + \Omega_x)^2 dx + \rho A y_p \int \mathbf{N}_b (\dot{v}_{,x}^2 + 2\Omega_z \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_z^2) dx \\
& + \rho A y_p^2 \int \mathbf{N}_e (\alpha_z + \mathbf{N}_e^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho A y_p^2 \int \mathbf{N}_e (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)(\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_b (\alpha_x + \dot{\theta}_1 + \Omega_y \dot{v}_{,x} - \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_z \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta) dx \\
& - \rho A z_p \int \mathbf{N}_b (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)(\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx - 2\rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_e (\dot{v}_{,x} + \Omega_z)(\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& - \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_e (\alpha_y - \mathbf{N}_f^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& + 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_b (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx \} \\
+ \delta \mathbf{u}_c^{\theta t} \{ & \rho A \int \mathbf{N}_c [\ddot{w}_1 + \ddot{w} - x\alpha_y + x\Omega_x \Omega_z + 2\Omega_x \dot{v} - 2\Omega_y \frac{x}{L} (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)] dx \\
& - \rho I_y \int \mathbf{N}'_c (2\dot{\varepsilon}_o \dot{w}_{,x} + \alpha_y - \ddot{w}_{,x} - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho I_y \int \mathbf{N}'_c (\dot{v}_{,x} + \Omega_z)(\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx + \rho A z_p \int \mathbf{N}_f \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a^\theta dx \\
& - 2\rho A z_p \int \mathbf{N}_f (\Omega_z \dot{v} - \Omega_y \dot{w}) dx \\
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_f [\frac{1+\xi}{2} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx] dx \\
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_c (\dot{\theta}_1 + \Omega_x)^2 dx + \rho A z_p \int \mathbf{N}_c (\dot{w}_{,x}^2 - 2\Omega_y \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta + \Omega_y^2) dx \\
& - \rho A z_p^2 \int \mathbf{N}_f (\alpha_y - \mathbf{N}_f^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho A z_p^2 \int \mathbf{N}_f (\dot{v}_{,x} + \Omega_z)(\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& - \rho A y_p \int \mathbf{N}_c (\alpha_x + \dot{\theta}_1 - \Omega_y \dot{v}_{,x} + \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_y \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta) dx \\
& - \rho A y_p \int \mathbf{N}_c (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)(\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx - 2\rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_f (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)(\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& + \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_f (\alpha_z + \mathbf{N}_e^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_c (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx \} \\
+ \delta \mathbf{u}_d^{\theta t} \{ & \rho I_P \int \mathbf{N}_d (\alpha_x + \dot{\theta}_1 + \Omega_z \dot{w}_{,x} + \Omega_y \dot{v}_{,x}) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho A y_p^2 \int \mathbf{N}_d (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 - \Omega_y \dot{v}_{,x} + \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_y \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta) dx \\
& + \rho A z_p^2 \int \mathbf{N}_d (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 + \Omega_y \dot{v}_{,x} - \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_z \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta) dx \\
& - \rho (I_y - I_z - A y_p^2 + A z_p^2) \int \mathbf{N}_d (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_d^t dx \ddot{\mathbf{u}}_d^\theta \\
& - \rho A y_p \int \mathbf{N}_d [\ddot{w}_1 + \ddot{w} - x \alpha_y + x \Omega_x \Omega_z + 2\Omega_x \dot{v} - 2\Omega_y \frac{x}{L} (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)] dx \\
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_d [\ddot{v}_1 + \ddot{v} + x \alpha_z + x \Omega_x \Omega_y - 2\Omega_x \dot{w} + 2\Omega_z \frac{x}{L} (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)] dx \\
& - \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_d (\dot{w}_{,x}^2 - 2\Omega_y \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta + \Omega_y^2) dx \\
& + \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_d (\dot{v}_{,x}^2 + 2\Omega_z \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_z^2) dx \\
& - \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d [(-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)^2 + (\dot{v}_{,x} + \Omega_z)^2] \theta_{1,x} dx \}
\end{aligned} \tag{2.127}$$

$$I_y = \int z^2 dA, I_z = \int y^2 dA, I_\omega = \int \omega^2 dA, I_p = I_y + I_z \tag{2.128}$$

上式中A為梁的斷面積， $\int(\cdot)dx$ 中的積分範圍從0到L。

將(2.127)式代入(2.115)式，等號兩邊之 $\delta \mathbf{u}_i^\theta$ ($i = a, b, c, d$)的係數相等，則節點慣性力向量 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$)可表示成

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a^I & = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a^\theta - 2\rho A \int \mathbf{N}_a (\Omega_z \dot{v} - \Omega_y \dot{w}) dx \\
& + \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{1+\xi}{2} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \right] dx \\
& + \rho A y_p \int \mathbf{N}_a (\alpha_z + \mathbf{N}_e^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho A y_p \int \mathbf{N}_a (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) dx \\
& - \rho A z_p \int \mathbf{N}_a (\alpha_y - \mathbf{N}_f^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho A z_p \int \mathbf{N}_a (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_b^I & = \rho A \int \mathbf{N}_b [\ddot{v}_1 + \ddot{v} + x \alpha_z + x \Omega_y \Omega_x - 2\Omega_x \dot{w} + 2\Omega_z \frac{x}{L} (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)] dx \\
& + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b (-2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x} + \alpha_z + \ddot{v}_{,x} + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho I_z \int \mathbf{N}'_b (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx + \rho A y_p \int \mathbf{N}_e \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a^\theta \\
& - 2\rho A y_p \int \mathbf{N}_e (\Omega_z \dot{v} - \Omega_y \dot{w}) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho A y_p \int \mathbf{N}_e \left[\frac{1+\xi}{2} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \right] dx \\
& + \rho A y_p \int \mathbf{N}_b (\dot{\theta}_1 + \Omega_x)^2 dx + \rho A y_p \int \mathbf{N}_b (\dot{v}_{,x}^2 + 2\Omega_z \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_z^2) dx \\
& + \rho A y_p^2 \int \mathbf{N}_e (\alpha_z + \mathbf{N}_e^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho A y_p^2 \int \mathbf{N}_e (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_b (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 + \Omega_y \dot{v}_{,x} - \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_z \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta) dx \\
& - \rho A z_p \int \mathbf{N}_b (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx - 2\rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_e (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& - \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_e (\alpha_y - \mathbf{N}_f^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& + 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_b (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_c^I & = \rho A \int \mathbf{N}_c [\ddot{w}_1 - x \alpha_y + \ddot{w} + x \Omega_x \Omega_z + 2\Omega_x \dot{v} - 2\Omega_y \frac{x}{L} (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)] dx \\
& - \rho I_y \int \mathbf{N}'_c (2\dot{\epsilon}_o \dot{w}_{,x} + \alpha_y - \ddot{w}_{,x} - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho I_y \int \mathbf{N}'_c (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx + \rho A z_p \int \mathbf{N}_f \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a^\varphi \\
& - 2\rho A z_p \int \mathbf{N}_f (\Omega_z \dot{v} - \Omega_y \dot{w}) dx \\
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_f \left[\frac{1+\xi}{2} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \right] dx \\
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_c (\dot{\theta}_1 + \Omega_x)^2 dx + \rho A z_p \int \mathbf{N}_c (\dot{w}_{,x}^2 - 2\Omega_y \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta + \Omega_y^2) dx \\
& - \rho A z_p^2 \int \mathbf{N}_f (\alpha_y - \mathbf{N}_f^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho A z_p^2 \int \mathbf{N}_f (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& - \rho A y_p \int \mathbf{N}_c (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 - \Omega_y \dot{v}_{,x} + \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_y \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta) dx \\
& - \rho A y_p \int \mathbf{N}_c (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx - 2\rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_f (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx \\
& + \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_f (\alpha_z + \mathbf{N}_e^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx \\
& - 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_c (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_d^I & = \rho I_p \int \mathbf{N}_d (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 + \Omega_z \dot{w}_{,x} + \Omega_y \dot{v}_{,x}) dx \\
& + \rho A y_p^2 \int \mathbf{N}_d (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 - \Omega_y \dot{v}_{,x} + \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_y \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta) dx \\
& + \rho A z_p^2 \int \mathbf{N}_d (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 + \Omega_y \dot{v}_{,x} - \Omega_z \dot{w}_{,x} + 2\Omega_z \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta) dx \\
& - \rho (I_y - I_z - A y_p^2 + A z_p^2) \int \mathbf{N}_d (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_d^t dx \ddot{\mathbf{u}}_d^\varphi \\
& - \rho A y_p \int \mathbf{N}_d [\ddot{w}_1 - x \alpha_y + \ddot{w} + x \Omega_x \Omega_z + 2\Omega_x \dot{v} - 2\Omega_y \frac{x}{L} (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho A z_p \int \mathbf{N}_d [\ddot{v}_1 + x \alpha_z + \ddot{v} + x \Omega_x \Omega_y - 2 \Omega_x \dot{w} + 2 \Omega_z \frac{x}{L} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)] dx \\
& - \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_d (\dot{w}_{,x}^2 - 2 \Omega_y \mathbf{N}_f^t \dot{\mathbf{u}}_c^\theta + \Omega_y^2) dx \\
& + \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_d (\dot{v}_{,x}^2 + 2 \Omega_z \mathbf{N}_e^t \dot{\mathbf{u}}_b^\theta + \Omega_z^2) dx \\
& - \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d [(-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)^2 + (\dot{v}_{,x} + \Omega_z)^2] \theta_{1,x} dx
\end{aligned} \tag{2.129}$$

2.10 元素剛度矩陣及質量矩陣

令 $d\mathbf{q}_\varphi = \{d\bar{\mathbf{u}}_1, d\boldsymbol{\phi}_1, d\bar{\mathbf{u}}_2, d\boldsymbol{\phi}_2, d\boldsymbol{\beta}\}$ 表示元素節點參數向量之真實擾動量，其定義與(2.87)式之虛擾動量 $\delta\mathbf{q}_\varphi$ 一致。當元素節點受到 $d\mathbf{q}_\varphi$ 擾動時，其節點變形力向量 \mathbf{f}^D (見(2.112)式)會有一對應的擾動 $d\mathbf{f}^D$ ， $d\mathbf{f}^D$ 與 $d\mathbf{q}_\varphi$ 的關係可表示成

$$d\mathbf{f}^D = \mathbf{k} d\mathbf{q}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}_\varphi} d\mathbf{q}_\varphi \tag{2.130}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}_\varphi}$$

其中 \mathbf{k} 稱為元素切線剛度矩陣。

由(2.96)式、(2.112)式，(2.130)式中之 $\frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}_\varphi}$ 可表示成

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}_\varphi} \\
&= \frac{\partial (\mathbf{T}_R^t + \mathbf{T}_{\varphi\phi}^1 \mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t})}{\partial \mathbf{q}_\phi} \frac{\partial \mathbf{q}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\varphi} \mathbf{f}_\theta^{D+} + \frac{\partial (\mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t} + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t}) \mathbf{f}_\theta^{D+}}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\varphi} \\
&= \mathbf{H}_R + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t} \mathbf{k}_\theta + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t} \mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_\theta) \mathbf{T}_{\theta\phi}
\end{aligned} \tag{2.131}$$

$$\mathbf{H}_R = \frac{\partial (\mathbf{T}_R^t + \mathbf{T}_{\varphi\phi}^1 \mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t})}{\partial \mathbf{q}_\phi} \frac{\partial \mathbf{q}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\varphi} \mathbf{f}_\theta^{D+} \tag{2.132}$$

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^{D+}}{\partial \mathbf{q}_\theta} = \mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{k}_\theta^1 \tag{2.133}$$

$$\mathbf{H}_\theta = \frac{\partial(\mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t} + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t})}{\partial \mathbf{q}_\theta} \mathbf{f}_\theta^{D+} \quad (2.134)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\theta} = \mathbf{I} \quad (2.135)$$

其中 \mathbf{k}_θ 是對應於元素點參數擾動量 $d\mathbf{q}_\theta$ 的元素切線剛度矩陣，為一對稱矩陣， \mathbf{k}_θ^0 和 \mathbf{k}_θ^1 為 \mathbf{k}_θ 中節點參數的零次項及一次項； \mathbf{H}_R 及 \mathbf{H}_θ 是 14×14 的非對稱矩陣，其顯式在附錄 E 中有詳細的表示。

利用直接勁度法[76]，(2.133)式之 \mathbf{k}_θ 可由下列的次矩陣組合而成

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^{\theta+}}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.136)$$

其中 $\mathbf{f}_i^{\theta+}$ ($i = a, b, c, d$) 是將(2.108)及(2.109)式之 \mathbf{f}_i^θ ($i = b, c$) 中之 $f_{12}^\theta \mathbf{G}_i L$ 換成 $f_{12} \mathbf{G}_i L$ 。而 $\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\}$ ， \mathbf{u}_j ($j = b, c, d$) 已在(2.23)–(2.25)式中定義。矩陣 \mathbf{k}_{ij} 可表示如以下各式

$$\mathbf{k}_{aa} = AEL(1 + 3\varepsilon_c - 2\frac{y_p}{L} \mathbf{B}^t \mathbf{u}_b - 2\frac{z_p}{L} \mathbf{C}^t \mathbf{u}_c) \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{G}_a [AEL \mathbf{G}_b^t + AEy_p (1 + 2\varepsilon_c - \frac{y_p}{L} \mathbf{B}^t \mathbf{u}_b - \frac{z_p}{L} \mathbf{C}^t \mathbf{u}_c) \mathbf{B}^t - AEz_p \int \mathbf{N}_b^{tt} \theta_1 dx + EI_z \int \mathbf{N}_b^{tt} v_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ac} = \mathbf{G}_a [AEL \mathbf{G}_c^t + AEz_p (1 + 2\varepsilon_c - \frac{y_p}{L} \mathbf{B}^t \mathbf{u}_b - \frac{z_p}{L} \mathbf{C}^t \mathbf{u}_c) \mathbf{C}^t + AEy_p \int \mathbf{N}_c^{tt} \theta_1 dx + EI_y \int \mathbf{N}_c^{tt} w_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ad} = \mathbf{G}_a \{ [EI_p + AE(y_p^2 + z_p^2)] \int \mathbf{N}_d'^t \theta_{1,x} dx + AEy_p \int \mathbf{N}_d^t w_{,xx} dx - AEz_p \int \mathbf{N}_d^t v_{,xx} dx + 3EI_\omega \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{bb} = & EI_z (1 + \varepsilon_c) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx + \frac{AEy_p^2}{L} [(1 + 2\varepsilon_c) \mathbf{B} \mathbf{B}^t + \varepsilon_c \mathbf{Q}_1] \\ & + AEy_p (\mathbf{G}_b \mathbf{B}^t + \mathbf{B} \mathbf{G}_b^t) - \frac{AEy_p z_p}{L} \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{B}^t + \mathbf{B} \mathbf{N}_b''^t) \theta_1 dx \\ & - EI_z \varepsilon_{o,x} \int (\mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b''^t + \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b'^t) dx + f_{12} \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx + 3E\alpha_{z\omega} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t \theta_{1,xx} dx \\ & - 3E(\alpha_z - 2y_p I_z) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t v_{,xx} dx - E(3\alpha_{zy} - 2z_p I_z) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t w_{,xx} dx \\ & + y_p EI_z \int [(\mathbf{N}_b''' \mathbf{N}_b''^t + \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b'''^t + \frac{1}{L} \mathbf{N}_b'' \mathbf{B}^t + \frac{1}{L} \mathbf{B} \mathbf{N}_b''^t) v_{,xx} + \frac{(\mathbf{N}_b''' \mathbf{N}_b''^t + \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b'''^t) v_{,x}}{L}] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{bc} = & AEy_p \mathbf{B} \mathbf{G}_c^t + AEz_p \mathbf{G}_b \mathbf{C}^t + \frac{AEy_p^2}{L} \int \mathbf{B} \mathbf{N}_c''^t \theta_1 dx - \frac{AEz_p^2}{L} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{C}^t \theta_1 dx \\ & + \frac{AEy_p z_p}{L} [(1 + 2\varepsilon_c) \mathbf{B} \mathbf{C}^t + \varepsilon_c \mathbf{Q}_2] + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_1 dx \\ & + y_p EI_y \int [(\mathbf{N}_b''' \mathbf{N}_c''^t + \frac{1}{L} \mathbf{B} \mathbf{N}_c''^t) w_{,xx} + \frac{\mathbf{N}_b''' \mathbf{N}_c''^t w_{,x}}{L}] dx \\ & + z_p EI_z \int [(\mathbf{N}_b' \mathbf{N}_c'''^t + \frac{1}{L} \mathbf{N}_b'' \mathbf{C}^t) v_{,xx} + \frac{\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c'''^t v_{,x}}{L}] dx \\ & + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_{1,xx} dx - E(3\alpha_{zy} - 2z_p I_z) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t v_{,xx} dx \\ & - E(3\alpha_{yz} - 2y_p I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx \\ & + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_c''^t) \theta_{1,x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{bd} = & \frac{y_p}{L} [EI_p + AE(y_p^2 + z_p^2)] \int \mathbf{B} \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx \\
& - \frac{AEz_p \varepsilon_c}{L} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d^t dx + \frac{3y_p EI_\omega}{L} \int \mathbf{B} \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \\
& + \frac{AEy_p^2}{L} \int \mathbf{B} \mathbf{N}_d^t w_{,xx} dx - \frac{AEy_p z_p}{L} \int \mathbf{B} \mathbf{N}_d^t v_{,xx} dx \\
& + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d^t w_{,xx} dx - 3E\alpha_{\omega z} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \\
& + 3E\alpha_{z\omega} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega y z} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx \\
& + [2GJ_z - E(\alpha_z + \alpha_{yz} - 2y_p I_z)] \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx \\
& + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,x} - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx}) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{cc} = & EI_y (1 + \varepsilon_c) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t dx + \frac{AEz_p^2}{L} [(1 + 2\varepsilon_c) \mathbf{C} \mathbf{C}^t + \varepsilon_c \mathbf{Q}_4] \\
& + AEz_p (\mathbf{G}_c \mathbf{C}^t + \mathbf{C} \mathbf{G}_c^t) + \frac{AEy_p z_p}{L} \int (\mathbf{N}_c'' \mathbf{C}^t + \mathbf{C} \mathbf{N}_c''^t) \theta_1 dx \\
& - EI_y \varepsilon_{o,x} \int (\mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c''^t + \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c^t) dx + f_{12} \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c^t dx + 3E\alpha_{y\omega} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t \theta_{1,xx} dx \\
& - E(3\alpha_{yz} - 2y_p I_y) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t v_{,xx} dx - 3E(\alpha_y - 2z_p I_y) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx \\
& + z_p EI_y \int [(\mathbf{N}_c''' \mathbf{N}_c''^t + \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c'''^t + \frac{1}{L} \mathbf{N}_c'' \mathbf{C}^t + \frac{1}{L} \mathbf{C} \mathbf{N}_c''^t) w_{,xx} + (\mathbf{N}_c''' \mathbf{N}_c''^t + \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c'''^t) w_{,x}] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{cd} = & \frac{z_p}{L} [EI_p + AE(y_p^2 + z_p^2)] \int \mathbf{C} \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx \\
& + \underline{\underline{AEy_p \varepsilon_c \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d^t dx}} + \frac{3z_p EI_\omega}{L} \int \mathbf{C} \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \\
& - \frac{AEz_p^2}{L} \int \mathbf{C} \mathbf{N}_d^t v_{,xx} dx + \frac{AEy_p z_p}{L} \int \mathbf{C} \mathbf{N}_d^t w_{,xx} dx \\
& + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d^t v_{,xx} dx - 3E\alpha_{\omega y} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \\
& + 3E\alpha_{\omega z} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx + 3E\alpha_{y\omega} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx \\
& - [2GJ_y + E(\alpha_y + \alpha_{zy} - 2z_p I_y)] \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d^t \theta_{1,x} dx \\
& + \frac{1}{2} GJ \int (\underline{\underline{\mathbf{N}_c' \mathbf{N}_d^t v_{,xx}}} - \underline{\underline{\mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d^t v_{,x}}}) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{dd} = & \{GJ + [EI_p + AE(y_p^2 + z_p^2)]\varepsilon_c\} \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t dx \\
& + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_c) \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t dx + 3E\alpha_\omega \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \\
& - [2GJ_y + E(\alpha_y + \alpha_{zy} - 2z_p I_y)] \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx \\
& + [2GJ_z - E(\alpha_z + \alpha_{yz} - 2y_p I_z)] \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx \\
& + [2GJ_\omega + E(\alpha_{y\omega} + \alpha_{z\omega})] \int [\mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} + (\mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t + \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d^t) \theta_{1,x}] dx \\
& - 3E\alpha_{\omega y} \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx - 3E\alpha_{\omega z} \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx \\
& + \underline{\underline{\frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x}^2 dx}}
\end{aligned}$$

(2.137)

上式中加底線”---”之項含 θ_1 或 $v_{,x}$ 或 $w_{,x}$ 之一次項，加底線”-...-”之項，含元素長度 L 之一次項或二次項，在元素很小時都會趨近於零，本文中將這些項忽略。畫實線底線之項為 $\theta_{1,x}$ 之二次項。

元素的質量矩陣 \mathbf{m} 可表示成

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\phi} \quad (2.138)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\phi = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\phi}_1, \ddot{\beta}_1, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\phi}_2, \ddot{\beta}_2\} \quad (2.139)$$

其中 \mathbf{f}^I 定義在(2.90)式，可以由(2.129)式之 f_i^I ($i = a, b, c, d$) 組合而成， $\ddot{\mathbf{u}}_j$ 、 $\ddot{\phi}_j$ ($j=1, 2$) 分別為節點 j 的絕對加速度及絕對角加速度。 \mathbf{m} 為一對稱矩陣，利用直接勁度法[76]， \mathbf{m} 可由下列的次矩陣組合而成

$$\mathbf{m}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_j^\phi} \quad (2.140)$$

其中 $i, j = a, b, c, d$ ， \mathbf{f}_i^I 為(2.129)式之節點慣性力， $\ddot{\mathbf{u}}_a^\phi = \{\ddot{u}_1, \ddot{u}_2\}$ ， $\ddot{\mathbf{u}}_b^\phi = \{\ddot{v}_1, \ddot{\phi}_{31}, \ddot{v}_2, \ddot{\phi}_{32}\}$ ， $\ddot{\mathbf{u}}_c^\phi = \{\ddot{w}_1, \ddot{\phi}_{21}, \ddot{w}_2, \ddot{\phi}_{22}\}$ ， $\ddot{\mathbf{u}}_d^\phi = \{\ddot{\phi}_{11}, \ddot{\beta}_1, \ddot{\phi}_{12}, \ddot{\beta}_2\}$ 。將(2.23)–(2.27)、(2.55)、(2.58)及(2.129)式代入(2.139)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{aa} &= \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \\ \mathbf{m}_{ab} &= \rho A y_p \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_e^t dx \\ \mathbf{m}_{ac} &= \rho A z_p \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_f^t dx \\ \mathbf{m}_{ad} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_{bb} &= \rho A y_p^2 \int \mathbf{N}_e \mathbf{N}_e^t dx + \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t dx \\ \mathbf{m}_{bc} &= \rho A y_p z_p \int \mathbf{N}_e \mathbf{N}_f^t dx \\ \mathbf{m}_{bd} &= \rho A z_p \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_d^t dx \\ \mathbf{m}_{cc} &= \rho A z_p^2 \int \mathbf{N}_f \mathbf{N}_f^t dx + \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + \rho I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_c{}^t dx \\ \mathbf{m}_{cd} &= -\rho A y_p \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_d^t dx \\ \mathbf{m}_{dd} &= \rho I_p \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t dx + \rho A (y_p^2 + z_p^2) \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx \end{aligned} \quad (2.141)$$

因為系統平衡方程式是定義於總體座標系統中，所以(2.131)式的元素顯切線剛度矩陣及(2.138)式質量矩陣需經下列的座標轉換，方可組合成系統矩陣。

$$\mathbf{k}^G = \mathbf{T}_{GE} \mathbf{k} \mathbf{T}_{GE}^t,$$

$$\mathbf{m}^G = \mathbf{T}_{GE} \mathbf{m} \mathbf{T}_{GE}^t, \quad (2.142)$$

$$\mathbf{T}_{GE} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

其中 $\mathbf{0}$ 是一 3×3 階的零矩陣， $\bar{\mathbf{0}}$ 是一 3×2 階的零矩陣。及 \mathbf{A}_{GE} 為(2.1)式中總體座標與元素座標間之轉換矩陣。

2.11 與變形位置相關之節點作用力與負荷剛度矩陣

本文中僅考慮由固定方向之保守力造成的與變形位置相關之節點力矩。由保守力造成的節點力矩是保守力矩[77, 78]；但是其大小與方向通常會隨著變形而改變[77,79]。與變形位置相關的節點作用力，在結構變形時對系統剛度矩陣的貢獻稱為負荷剛度矩陣(load stiffness matrix)。本文中與變形位置相關的節點作用力(configuration dependent load)、負荷向量(load vector)、以及負荷剛度矩陣都是在一個負荷基底座標 X_i^P ($i = 1, 2, 3$) 上定義。如2.2節所述， X_i^P 的原點是剛接在與變形位置相關的外力作用的節點上。在本文中上標 P 表示該量是在負荷基底座標上定義。在本節之推導，除有特別之聲明以外，各向量都是表示成負荷基底座標的分量。為了表達之簡潔，在不會造成混淆時，本節中有時省略了向量之上標 P 。本文中定義了兩種與變形位置相關的節點作用力機制，並分別說明如下：

(1) 第一型節點作用力機制。如圖2.7所示，一個半徑 R 的剛性圓盤，其圓心 O 剛接於節點上，在盤緣上纏繞著二條繩子，二條繩子的自由端承受了一對大小相等方向相反的保守力。假設在梁變形前，繩子和圓盤位於同一平面上；梁變形後，圓盤和梁的節點一起平移和旋轉，但繩子的方向仍維持不變，所以在梁變形後，繩子和圓盤通常不在同一平面上。A 點為

繩子與圓盤邊緣的接觸點，若假設剛性圓盤是半徑為 R 球心為 O 之球上的一個大圓，則 OA 和繩子互相垂直。

為了描述上的方便，如圖2.7所示，本文將 X_1^P 軸定在圓盤的法線方向， X_2^P 軸定在盤面上的任意方向， X_3^P 軸則由右手定則決定。

在圖2.7中，因 OA 和繩子及 X_1^P 軸垂直，所以 OA 線上的單位向量 \mathbf{e}_A 可表示成

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{a} / (\mathbf{a}^t \mathbf{a})^{1/2} \quad (2.144)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_P^P \times \mathbf{e}_1^P = \{0, l_3, -l_2\} \quad (2.145)$$

其中 $\mathbf{e}_P^P = \{l_1, l_2, l_3\}$ 為繩子方向(或保守力 P 方向)上的單位向量， $\mathbf{e}_1^P = \{1, 0, 0\}$ 為 X_1^P 軸上的單位向量。雖然繩子在固定座標中的方向是固定的，但因負荷基地座標隨梁變形改變而改變，所以 \mathbf{e}_P^P 的分量 $l_i (i = 1, 2, 3)$ 亦隨變形改變而改變。

圖2.7中之二平行力對 O 點造成的力矩 \mathbf{M} 可以表示成

$$\mathbf{M} = 2RPe_A \times \mathbf{e}_P^P \quad (2.146)$$

當與圓盤剛接的節點受到一個微小的旋轉向量 $\Delta\boldsymbol{\varphi}^P = \{\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3\}$ 擾動時，負荷基地座標會有一微小的旋轉，所以 \mathbf{e}_1^P 會有一微小的變量 $\Delta\mathbf{e}_1^P$ 。當 $\Delta\varphi_i (i = 1, 2, 3)$ 足夠小時， $\Delta\mathbf{e}_1^P$ 可以表示成

$$\Delta\mathbf{e}_1^P = \Delta\boldsymbol{\varphi}^P \times \mathbf{e}_1^P = \{0, \Delta\varphi_3, -\Delta\varphi_2\} \quad (2.147)$$

因(2.146)式中之 \mathbf{e}_A 為 \mathbf{e}_1^P 的函數，所以(2.146)式中的 \mathbf{M} 亦有一變量 $\Delta\mathbf{M}$ 如下式所示

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{M} &= 2RP\Delta \mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_P^P \\ &= 2RP\left(\frac{\Delta \mathbf{a} \times \mathbf{e}_P^P}{(\mathbf{a}^t \mathbf{a})^{1/2}} - \frac{\mathbf{a}^t \Delta \mathbf{a}}{(\mathbf{a}^t \mathbf{a})^{3/2}} \mathbf{a} \times \mathbf{e}_P^P\right)\end{aligned}\quad (2.148)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{e}_P^P \times \Delta \mathbf{e}_1^P = \{-l_2 \Delta \varphi_2 - l_3 \Delta \varphi_3, l_1 \Delta \varphi_2, l_1 \Delta \varphi_3\}$$

$$\Delta \mathbf{a} \times \mathbf{e}_P^P = \begin{Bmatrix} l_1 l_3 \Delta \varphi_2 - l_1 l_2 \Delta \varphi_3 \\ l_2 l_3 \Delta \varphi_2 + (l_1^2 + l_3^2) \Delta \varphi_3 \\ -(l_1^2 + l_2^2) \Delta \varphi_2 - l_2 l_3 \Delta \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{e}_P^P = \{l_2^2 + l_3^2, -l_1 l_2, -l_1 l_3\}$$

$$\mathbf{a}^t \Delta \mathbf{a} = l_1 l_3 \Delta \varphi_2 - l_1 l_2 \Delta \varphi_3$$

$$\mathbf{a}^t \mathbf{a} = l_2^2 + l_3^2 \quad (2.149)$$



因本文僅考慮與變形位置相關的節點力矩，所以依定義，負荷剛度矩陣 \mathbf{K}_P 可由下式求得

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{K}_P \Delta \varphi^P \quad (2.150)$$

比較(2.148)與(2.150)式，可得 \mathbf{K}_P 為

$$\mathbf{K}_P = 2RP(l_2^2 + l_3^2)^{-1/2} \mathbf{K}_{PA} + 2RP(l_2^2 + l_3^2)^{-3/2} \mathbf{K}_{PB} \quad (2.151)$$

$$\mathbf{K}_{PA} = \begin{bmatrix} 0 & l_1 l_3 & -l_1 l_2 \\ 0 & l_2 l_3 & l_1^2 + l_3^2 \\ 0 & -l_1^2 - l_2^2 & -l_2 l_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{PB} = \begin{bmatrix} 0 & -l_1 l_3 (\ell_2^2 + \ell_3^2) & l_1 l_2 (\ell_2^2 + \ell_3^2) \\ 0 & \ell_1^2 l_2 l_3 & -\ell_1^2 l_2^2 \\ 0 & \ell_1^2 l_3^2 & -\ell_1^2 l_2 l_3 \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

仿照文獻中[77]對與變形位置相關的節點力矩之命名方式，本文中分別稱圖2.8(a)、(b)、(c)為第一型準切線(QT1, quasitangential of the first type)力矩、第二型準切線(QT2, quasitangential of the second type)力矩、及半準切線(ST, semitangential)力矩。從圖2.8中，可以發現QT1力矩中外力 P 和 X_2^P 軸平行，QT2力矩中 P 與 X_3^P 軸平行，ST力矩可視為是QT1和QT2力矩的組合。

(2)第二型節點作用力機制。如圖2.9所示，一長度為 R 的剛性桿，一端剛接於節點上，另一端受到一保守力向量 $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_P^P$ 的作用，其中 P 是向量的大小， $\mathbf{e}_P^P = \{l_1, l_2, l_3\}$ 為一單位向量。此機制的 X_1^P 軸是定義在剛性桿上， X_2^P 軸是與 X_1^P 軸垂直的任意軸， X_3^P 軸則由右手定則決定。

此作用力機制對 O 點造成的力矩向量 \mathbf{M} 可表示成

$$\mathbf{M} = RP\mathbf{e}_1^P \times \mathbf{e}_P^P \quad (2.153)$$

當與剛性桿相接的節點受到一微小的旋轉向量 $\Delta\boldsymbol{\varphi}^P = \{\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3\}$ 擾動時， \mathbf{e}_1^P 亦會有和(2.147)式一樣的微小變量 $\Delta\mathbf{e}_1^P$ ，所以(2.153)式中之 \mathbf{M} 有一如下之變量 $\Delta\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{M} &= RP\Delta\mathbf{e}_1^P \times \mathbf{e}_P^P \\ &= RP\{l_2\Delta\varphi_2 + l_3\Delta\varphi_3, -l_1\Delta\varphi_2, -l_1\Delta\varphi_3\} \end{aligned} \quad (2.154)$$

由(2.150)及(2.154)式，可得負荷剛度矩陣

$$\mathbf{K}_P = RP \begin{bmatrix} 0 & l_2 & l_3 \\ 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

由於系統平衡方程式是定義在固定總體座標系統中，負荷剛度矩陣 \mathbf{K}_P 需先經以下的座標轉換，方可疊加到系統剛度矩陣中，亦即

$$\mathbf{K}_P^G = \mathbf{A}_{GP} \mathbf{K}_P \mathbf{A}_{GP}^t \quad (2.156)$$

其中 \mathbf{A}_{GP} 為(2.1)式中，總體座標與負荷基底座標間的轉換矩陣。

2.12 系統平衡方程式與收斂準則

系統離散化後的動平衡方程式，是由在固定元素座標上算出的元素節點變形力、慣性力經標準的座標轉換後，在總體座標上所合成之系統內力向量及系統外力向量所組成，可表示如下

$$\Psi = \mathbf{F}^D + \mathbf{F}^I - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.157)$$

其中 Ψ 為不平衡力向量， \mathbf{F}^D 為系統變形力內力向量， \mathbf{F}^I 是系統慣性力內力向量， \mathbf{P} 表系統外力向量。 \mathbf{F}^D 、 \mathbf{F}^I 可分別由(2.112)式之元素節點變形力向量及(2.90)式之元素節點慣性力向量經由元素座標轉換到固定總體座標上組合而成， \mathbf{P} 可由與變形位置相關的節點作用力及與變形無關之節點作用力組合而成。

本文以不平衡力向量 Ψ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N} \lambda^*} \leq e_{tol} \quad (2.158)$$

其中 N 表離散系統的自由度數，在靜態分析時 λ^* 取為 $\|\mathbf{P}\|$ ，動態分析時 λ^* 取為 1， e_{tol} 是一給定的容許誤差值。

第三章 數值計算方法與程序

本章將在3.1節及3.2節分別說明開口薄壁梁之幾何非線性靜態分析及動態分析的數值計算方法與程序。本研究分析薄壁梁結構的自然振動及其在負載下之靜態平衡位置的自然振動是採用次空間法(subspace iteration method) [75]解廣義的標準的特徵值問題。

3.1 靜態分析

本文解非線性靜平衡方程式(2.157)式(不包含系統顯節點慣性力 \mathbf{F}^I)的數值計算方法是基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法配合弧長控制(arc length control)法的增量迭代法[81]。為了求得挫屈負荷，本文採用文獻[3]中所提出的二分法，決定增量位移向量的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了改善平衡迭代的收斂情況，本文中採用了 N 循環迭代法[56]。以下對本文使用的增量迭代法、二分法及 N 循環迭代法加以說明。



3.1.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，則在此位置的系統切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 可以求得，且第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值(Euler predictor)求得

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{Q}_T, \quad (3.1)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， $\mathbf{Q}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}_{ref}$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 的切線解。 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出[81]

$$\Delta\lambda = \pm \Delta\ell / (\mathbf{Q}_T^t \mathbf{Q}_T)^{1/2}, \quad (3.2)$$

其中正負符號之決定方法如下：若第 I 與 $I-1$ 個增量收斂時，系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 $\Delta\ell$ 表第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定

$$\Delta\ell = (J_D/J_I)^{1/2} \Delta\ell_I, \quad (3.3)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量，迭代至平衡所使用的迭代次數， $\Delta\ell_I$ 為第 I 個增量的增量弧長。

本文中第一個增量的增量弧長 $\Delta\ell_1$ 是由下式決定

$$\Delta\ell_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|} \quad (3.4)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 作用下的系統線性解 \mathbf{R}_0 的 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量的絕對值。

在平衡迭代時，若增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ 及增量負荷 $\Delta\lambda$ 已知，則利用 2.6 節的方法，可求得梁結構新的變形位置，再利用 2.9 與 2.10 節的方法，可求得元素座標上的節點內力及剛度矩陣。對應此位置的負荷參數為 $\lambda = \lambda_I + \Delta\lambda$ ，其中 λ_I 為第 I 個增量達平衡時的負荷參數， $\Delta\lambda$ 即增量負荷參數。當系統內力及外力求得後，不平衡力量 Ψ 向量可由 (2.157) 式求得。若 (2.158) 式的收斂準則不能滿足，則利用定弧長控制法 [81]，求得一位移修正量 $\delta\mathbf{Q}$ 與負荷參數修正量 $\delta\lambda$ ，並加入前一次迭代的 $\Delta\mathbf{Q}$ 與 $\Delta\lambda$ 中，而得一新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次的迭代。 $\delta\mathbf{Q}$ 與 $\delta\lambda$ 可由下列二式決定

$$\delta\mathbf{Q} = \mathbf{K}_T^{-1} (-\psi + \delta\lambda\mathbf{P}) \quad (3.5)$$

$$\Delta\ell^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q})^t (\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}) \quad (3.6)$$

以上之迭代計算過程一直重覆至滿足(2.158)式的收斂準則為止。

3.1.2 二分法

利用3.1節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構切線剛度矩陣的行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 $I+1$ 的增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 $\Delta\ell_{I+1}$ 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{NB} ：

- (1) 令 $\Delta\ell_L = 0, \Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}, \lambda_L = \lambda_I, \lambda_R = \lambda_{I+1}$ ，其中下標 L 及 R 表示左界及右界。
- (2) 取 $\Delta\ell_{I+1} = \frac{\Delta\ell_L + \Delta\ell_R}{2}$ ，重作第 $I+1$ 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。
- (3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}, \Delta\ell_L = \Delta\ell_{I+1}$
若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}, \Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}$
- (4) 若下列二式挫屈誤差準則同時滿足

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D \quad (3.7)$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda \quad (3.8)$$

其中 e_D 及 e_λ 為給定的容許誤差值

則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。

經由二分法求得挫屈負荷 λ ，再利用系統切線剛度 $\mathbf{K}(\lambda)$ 計算挫屈模態，以下將說明挫屈模態的計算程序

(1) 將 $\mathbf{K}(\lambda)$ 分解成一下三角矩陣 \mathbf{L} 及上三角矩陣 \mathbf{U} 使 $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$ ，其中 \mathbf{L} 的對角線元素值皆為 1。

(2) 找出矩陣 \mathbf{U} 主對角線元素之絕對值有最小值的行令為第 I 行。

(3) 令模態第 I 個分量 $\Theta_I = 1$ ，再將 $\mathbf{K}\Theta = \mathbf{0}$ 改寫成下式

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,I-1} & 0 & K_{1,I+1} & \cdots & K_{1,N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ K_{I-1,1} & & & 0 & & & K_{I-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{I+1,1} & & & 0 & & & K_{I+1,N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ K_{N+1,1} & & & 0 & & & K_{N,N} \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{I-1} \\ \Theta_I \\ \Theta_{I+1} \\ \vdots \\ \Theta_N \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} -K_{1,I} \\ \vdots \\ -K_{I-1,I} \\ 1 \\ -K_{I+1,I} \\ \vdots \\ K_{N,I} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (3.9)$$

(4) 用高斯消去法求解(3.9)式得到模態 Θ

(5) 將 Θ 除以其分量中絕對值最大的分量 Θ_{\max} ，即

$$\bar{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta_{\max}} \quad (3.10)$$

3.1.3 N 循環迭代法

在計算元素的剛度矩陣及節點內力時，必須使用形心的正應變 ε_c 。對某些問題，最初幾次迭代之形心正應變會比其收斂值的階數(order)大很多，因此可能引起平衡迭代收斂困難或發散。為了改善收斂情況，本文採用了 N 循環迭代法[56]，並說明如下：

在第 I 次 ($N > I \geq 1$) 循環迭代中，(2.106) – (2.110) 式中，除了 (2.108)、(2.109) 式中的廣義節點力 f_{12}^θ 使用上一個增量收斂的 f_{12}^θ 外，其餘部份皆使用目前變形的形心正應變來計算元素的節點力。(2.137) 式中計算元素的剛度矩陣皆使用上一個增量收斂的形心正應變。在第 N 次循環迭代中，所有的內力及剛度矩陣都用當前的變形計算。

3.2 動態分析

本文解非線性動平衡方程式(2.157)的數值計算是採用基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法配合 Newmark 直接積分法[84]的增量迭代法。本文中使用了 Newmark trapezoidal rule 為數值積分方法，然而此法應用在受拘束的系統時，會有不穩定的現象發生，若加入 Numerical damping 則可獲得改善。近年來，有許多具有 Numerical damping 的數值方法被提出，如 Newmark- β damping scheme 及 Hilber-Hughes-Taylor scheme [85]。故本文除了 Newmark trapezoidal rule 外，亦探討了上述兩種具 damping 效果的數值方法的準確性與收斂性。

3.2.1 Newmark 直接積分法

Newmark 直接積分法乃假設在時間 t_n 時，滿足動平衡方程式(2.157)的平衡位置、速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$ 為已知，則在 $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ 時刻之平衡位置、速度 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 可由下述迭代過程得到。

1. 令在 t_{n+1} 時刻的初始增量位移猜測值 $\Delta\mathbf{U}=\mathbf{0}$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{U} - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_n - \left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0] \quad (3.12)$$

$$\beta = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}(1-2\alpha) \quad (3.13)$$

其中 $\alpha \leq 0$ 。

2. 令 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$ ， $\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$

3. 由 $\Delta\mathbf{U}$ (或 $\delta\mathbf{U}$)及上次迭代後的變形位置得到此迭代的變形位置，再算出系統的節點變形力 \mathbf{F}_{n+1}^D (詳見附錄 F)。由 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 、 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 及最近的變形位置算出系統的節點慣性力 \mathbf{F}_{n+1}^I (詳見附錄 F)。由在 t_{n+1} 時刻的外力 \mathbf{P}_{n+1} 、

\mathbf{F}_{n+1}^D 、 \mathbf{F}_{n+1}^I 及系統平衡方程式(2.157)算出系統不平衡力

$$\mathbf{\Psi}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^I + \mathbf{F}_{n+1}^D - \mathbf{P}_{n+1} \quad (3.14)$$

4. 檢查 $\|\mathbf{\Psi}_{n+1}\|$ 是否滿足收斂準則，若滿足則迭代停止。

5. 若不滿足，則由

$$\delta\mathbf{U} = -[\hat{\mathbf{K}}]^{-1}\mathbf{\Psi}_{n+1} \quad (3.15)$$

得一增量位移修正量 $\delta\mathbf{U}$ ，其中

$$[\hat{\mathbf{K}}] = \frac{1}{\beta\Delta t^2}[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] \quad (3.16)$$

為系統有效剛度矩陣(effective stiffness matrix)， $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{K}]$ 表系統之質量與剛度矩陣。

6. 令

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\delta\mathbf{U} \quad (3.17)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\delta\mathbf{U} \quad (3.18)$$

7. 回到 2.

若上述迭代程序經過一預先設定的迭代次數還不收斂時，則將時間增量 Δt 減半，令 $t_{n+1} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ，然後再重複上述迭代程序。但在下一時刻，則

將時間增量改為 $\Delta t + \frac{\Delta t}{2}$ 。

Newmark 直接積分法中，(3.13)式中若取 $\alpha = 0$ ，即 $\beta = 1/4$ 、 $\gamma = 1/2$ 則稱為 Newmark trapezoidal rule [84]，本文的數值例題中除非另有說明都採用 Newmark trapezoidal rule。因 Newmark trapezoidal rule 不會造成振幅衰減，無法除掉高頻的振動，為了使 Newmark 直接積分法能造成振幅衰減，以除掉不必要的高頻振動，(3.13)式中須取 $\alpha < 0$ 。Newmark 直接積分法中若 $\alpha < 0$ ，則稱為 Newmark- β Damping Scheme [84]。本文中取 $\alpha = -0.05$ ，即 $\beta = 0.275625$ ， $\gamma = 0.55$ 。

3.2.2 Hilber-Hughes-Taylor scheme

Hilber-Hughes-Taylor scheme (HHT)是一種 Multistep 的數值方法[85]，即其在求取目前的收斂位置時，不僅考慮目前的內力、外力，同時亦考慮了上一次收斂時刻的內力、外力。

在應用 HHT Scheme 時，前節中 Newmark 直接積分法之數值方法及方程式(3.11)、(3.12)、(3.17)及(3.18)仍可適用，但(3.14)式之不平衡力需改為

$$\mathbf{\Psi}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^I + (1 + \alpha)\mathbf{F}_{n+1}^D - \alpha\mathbf{F}_n^D - (1 + \alpha)\mathbf{P}_{n+1} + \alpha\mathbf{P}_n \quad (3.19)$$

其中 \mathbf{F}_n^D 及 \mathbf{P}_n 為 t_n 時刻在平衡位置的節點變形力及外力， $\alpha \leq 0$ 為一控制參數，當 $\alpha = 0$ 時，(3.19)式與(3.14)式，即 Newmark trapezoidal rule 相同。

HHT scheme 中之 β 、 γ 亦需符合(3.13)式之要求。

第四章數值例題與結果

為了測試本研究提出的方法的有效性及準確性，本章分別探討開口薄壁梁的線性自由振動、負載下的自由振動及開口薄壁梁的幾何非線性動態反應。本章中考慮的梁斷面包括圖4.1-4.9中所示之I型斷面、單對稱半圓型斷面、單對稱T型斷面、單對稱槽型斷面、不對稱Z型斷面、不對稱角型斷面、不對稱槽型斷面及不對稱斷面A、B的斷面幾何圖。本章中數值例題分析了各種薄壁斷面梁在不同負載及不同邊界條件下的自由振動及非線性動態反應。

4.1 開口薄壁梁的線性自由振動分析

當開口薄壁梁斷面的形心與剪心不重合時，其側向振動與扭轉振動是耦合的，文獻上一般都是認為其軸向振動是獨立的，但在軸向位移受到拘限的銜接邊界，若拘限點並非斷面形心，則軸向振動與側向振動及扭轉振動是全部或部分耦合的，但文獻上並沒有這一方面的報告，故本節將探討不同邊界條件對開口薄壁梁自由振動的影響。本研究之梁元素的節點自由度都定義在剪心上，但為了正確地描述邊界條件，節點的位置必須和邊界的自由度一致，所以本文在附錄G中利用元素斷面為剛體的假設，導出不同節點自由度的關係及對應於不同節點自由度之元素剛度矩陣的關係。如圖4.10a所示之梁結構為本節例題的示意圖，其總體座標與元素座標重合，本節中如果沒有特別說明，都使用20個梁元素離散例題中的梁結構。本節的振動模態圖中以 U_C 表示形心軸的軸向位移， V 和 W 是剪心軸在 X_2^G 與 X_3^G 方向上的側向位移， ϕ_1 表示剪心軸的扭轉角。

令BCIX， $I = 1-5$ ， $X = P, RM, CM, C, R$ ，表示圖4.10a中梁A、B兩端的邊界條件為第I種邊界條件及梁元素的節點自由度向量為 \mathbf{q}_X （詳見附錄G）， P 為斷面剪心、 C 為斷面形心及 R 為斷面上非剪心或形心且不在對稱軸上的任意點。 \mathbf{q}_X ($X = P, C, R$)表示軸向與側向位移的節點自由度是定義在斷面的 X ($X = P, C, R$)位置。 \mathbf{q}_X ($X = CM, RM$)表示軸向位移的節點自由度

是定義在斷面的X (X = C, R)點，以及側向位移的節點自由度是定義在斷面剪心P點。如圖4.10b所示，梁A、B兩端的邊界條件BCIX，I = 1-5可以表示成

$$\text{BC1X} : u_A^X = 0, v_A^X = v_B^X = 0, w_A^X = w_B^X = 0, \theta_{1A} = \theta_{1B} = 0$$

$$\text{BC2X} : u_A^X = 0, v_A^X = 0, v_A'^X = 0, w_A^X = 0, w_A'^X = 0, \theta_{1A} = 0, \beta_A = 0$$

$$\text{BC3X} : u_A^X = u_B^X = 0, v_A^X = v_B^X = 0, v_A'^X = v_B'^X = 0, w_A^X = w_B^X = 0, \\ w_A'^X = w_B'^X = 0, \theta_{1A} = \theta_{1B} = 0, \beta_A = \beta_B = 0$$

$$\text{BC4X} : u_A^X = 0, v_A^X = v_B^X = 0, v_A'^X = 0, w_A^X = w_B^X = 0, w_A'^X = 0, \theta_{1A} = 0, \beta_A = 0$$

$$\text{BC5X} : u_A^X = u_B^X = 0, v_A^X = v_B^X = 0, v_A'^X = 0, w_A^X = w_B^X = 0, w_A'^X = 0, \theta_{1A} = 0, \\ \beta_A = 0$$

其中 β_j ($j = A, B$) 為剪心軸的扭轉率， $\beta_j = 0$ 表示節點 j 為抑制翹屈。

BC1X兩端為銷接，但是軸向位移只有在端點A被固定，兩端不能繞 X_1^G 軸轉動，但是兩端可自由翹屈。BC2X為一懸臂結構，一端固定及另一端為自由端，固定端在軸向、側向、扭轉與翹屈自由度皆被固定。BC3X為兩端固定的結構。BC4X一端為固定端，另一端為銷接，在銷接端只有側向位移自由度被固定。BC5X一端為固定端，另一端為銷接，在銷接端軸向與側向位移自由度皆被固定。

本文在自然頻率加註()表示對應於該自然頻率的振動型態，(A)和(V)分別表示振態為無耦合軸向振動與 X_2^G 方向的無耦合側向振動，(A,V)表示該自然頻率為軸向振動與側向振動在 X_2^G 方向的耦合振動，(A,W)表示振態為軸向振動與側向振動在 X_3^G 方向的耦合振動，(W,T)表示振態為在 X_3^G 方向的側向振動與扭轉振動的耦合振動，(V,W,T)表示振態為在 X_2^G 、 X_3^G 方向的側向振動與扭轉振動的耦合振動。

例題 4.1.1：單對稱槽型斷面梁

本例題考慮一長度為 L 的單對稱槽型斷面(見圖4.4)梁在各種邊界條件下的自由振動，其幾何及材料性質為： $L = 1.28 \text{ m}$ ， $h = 0.09875 \text{ m}$ ， $b = 0.057375 \text{ m}$ ， $t_f = t_w = 0.00125 \text{ m}$ ，點R的座標為 $y_R = -0.03771 \text{ m}$ ， $z_R = 0.03771 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E = 216.4 \text{ GPa}$ ，剪力模數 $G = 80.1 \text{ GPa}$ ，線密度

$m = 2.095 \text{ kg/m}$ ，表4.1為其斷面性質，表4.2為本例題在各種邊界條件下的前10個最小的自然頻率，由表4.2可知邊界條件BC1CM, BC2X, BC3X, BC4P(RM), BC4C及BC5C的振動包含了側向-扭轉耦合振動(W,T)、軸向無耦合振動(A)與側向無耦合振動(V)，邊界條件BC1P與BC5P的振動包含了軸向-側向耦合振動(A,V)及側向-扭轉耦合振動(W,T)，邊界條件BC4R的振動包含了側向(V)-側向(W)-扭轉耦合振動(V,W,T)與軸向無耦合振動(A)，邊界條件BC1RM(R), BC5RM, BC5R 的軸向振動、兩個側方向振動及扭轉振動都互相耦合。由表4.2可看出邊界條件BC1P與BC1CM(C)有相同的側向-扭轉耦合振動(W,T)，文獻[48]分析了邊界條件為BC1CM ($I = 1, 2, 3$)的自由振動，由表4.2中可以看出本研究與文獻[48]結果相當吻合，圖4.11為邊界條件BC1RM的振動模態。

例題 4.1.2：單對稱半圓型斷面梁

本例題為一長度為 L 的單對稱半圓型斷面(見圖4.2)梁在各種邊界條件下的自由振動，其幾何及材料性質為： $L = 0.82 \text{ m}$ ， $r = 0.0245 \text{ m}$ ， $t = 0.004 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E = 68.9 \text{ GPa}$ ，剪力係數 $G = 26.5 \text{ GPa}$ ，線密度 $m = 0.835 \text{ kg/m}$ ，點R的座標為 $y_R = -0.0155 \text{ m}$ ， $z_R = 0.0155 \text{ m}$ 。表4.3為其斷面性質。表4.4為本例題在各種邊界條件下的前10個最小的自然頻率，本例題在各種邊界條件下自由振動耦合的特徵與例題4.1.1相同。文獻[49]分析了邊界條件為BC1CM ($I = 1, 2, 3$)的自由振動，由表4.4中可以看出本研究與文獻[49]結果相當吻合。

例題4.1.3：不對稱斷面梁 A

本例題為一長度為 L 的不對稱斷面(見圖4.8)梁在各種邊界條件下的自由振動，其幾何及材料性質為： $L = 10 \text{ m}$ ， $h = 0.3 \text{ m}$ ， $b = 0.1 \text{ m}$ ， $t = 0.02 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E = 210 \text{ GPa}$ ，剪力模數 $G = 80.7 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 8.002 \text{ kN} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^4$ ，表4.5為其斷面性質。本例題將梁離散成20及40個元素兩種情況來比較，表4.6為本例題在各種邊界條件下的前13個最小的自然頻率，表4.6(a)、(b)分別為將梁離散成20個元素及40個元素分析的結果，

由表4.6(a)、(b)的比較可以發現，本例題將梁離散成20個元素與40個元素分析的結果相當接近，故皆可視為收斂解，邊界條件BC1P與BC5P為梁兩銷接端的軸向位移被抑制在斷面剪心 P ($y_p \neq 0, z_p \neq 0$)，故其軸向振動、兩個側方向振動及扭轉振動都互相耦合，其餘邊界條件只有(V,W,T)三階耦合振動(triply coupled vibrations)與軸向無耦合振動(A)，文獻[50]分析了邊界條件為BC1CM的自由振動，由表4.6中可以看出本研究與文獻[50]結果相當吻合，圖4.12-4.13為邊界條件BC1P、BC1CM的振動模態，雖然使用20個元素所求得的自然頻率已相當精確，但是，為了避免較高的自然頻率所對應的振動模態發生失真的情形，振動模態圖為使用40個元素分析的結果，由圖4.12與圖4.13可見BC1P與BC1CM之振動的耦合特徵有明顯的差異。

例題4.1.4：不對稱斷面梁 B

本例題為一長度為 L 的不對稱斷面(見圖4.9)梁在各種邊界條件下的自由振動，其幾何及材料性質為： $L=10\text{ m}$ ， $h=0.4\text{ m}$ ， $b=0.2\text{ m}$ ， $t=0.01\text{ m}$ ，楊氏係數 $E=210\text{ GPa}$ ，剪力模數 $G=80.7\text{ GPa}$ ，密度 $\rho=8.002\text{ kN}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$ ，表4.7為其斷面性質。表4.8為本例題在各種邊界條件下的前12個最小的自然頻率，本例題之自由振動的耦合特徵與例題4.1.3相同，文獻[50]分析了邊界條件為BC1CM的自由振動，由表4.8中可以看出本研究與文獻[50]結果相當吻合。

4.2 開口薄壁梁受軸向負載作用下的振動分析

當梁斷面的形心承受軸向壓力時，隨著軸向壓力的增加，梁的自然頻率會漸漸減小，當軸向壓力為該梁的挫屈負荷時，其第一個自然頻率的值為零，文獻上探討梁在軸向壓力下之耦合振動的論文都認為其軸向振動是獨立的[9, 10, 39, 42, 44, 48-49]，但如4.1節所述，若軸向位移之銷接邊界之拘限點非斷面形心時，軸向振動與側向振動及扭轉振動是全部或部分耦合的。故本節中將探討梁在不同邊界條件受軸向壓力的耦合振動。本節中亦將探討梁在挫屈後的自然頻率，並與文獻上的結果比較。如圖4.14a所示

為例題4.2.1及4.2.2之梁受軸力的示意圖及座標系統，令 BCIX，I = 1-4、X = P, CM, C，表示梁A、B兩端的邊界條件為第I種邊界且其對應的節點自由度為 \mathbf{q}_X (詳見附錄G)。如圖4.14b所示，梁A、B兩端的邊界條件BCIX，I = 1-4可以表示成

$$\text{BC1X} : u_A^X = 0, v_A^X = v_B^X = 0, w_A^X = w_B^X = 0, \theta_{1A} = \theta_{1B} = 0$$

$$\text{BC2X} : u_A^X = 0, v_A^X = 0, v_A'^X = 0, w_A^X = 0, w_A'^X = 0, \theta_{1A} = 0, \beta_A = 0$$

$$\text{BC3X} : u_A^X = 0, v_A^X = v_B^X = 0, v_A'^X = v_B'^X = 0, w_A^X = w_B^X = 0, \\ w_A'^X = w_B'^X = 0, \theta_{1A} = \theta_{1B} = 0, \beta_A = \beta_B = 0$$

$$\text{BC4X} : u_A^X = 0, v_A^X = v_B^X = 0, v_A'^X = 0, w_A^X = w_B^X = 0, w_A'^X = 0, \theta_{1A} = 0, \\ \beta_A = 0$$

其中邊界條件 BC1X、BC2X 與 BC4X 的定義與 4.1 節中的定義相同，BC3X 表示一端為固定，另一端除了軸向自由度可以運動外其餘自由度皆被固定。

本節中如果沒有特別說明，都使用 20 個梁元素離散例題中的梁結構。梁結構在負載下的自然振動是指梁結構對該負載下之靜態平衡點的微小振動，故梁在負載下的位移包含靜態平衡變形及以靜態平衡變形為平衡點的自由振動。

例題 4.2.1：單對稱半圓形斷面梁

本例題為一單對稱半圓形斷面(見圖 4.2)梁在其斷面形心承受軸向負載的自由振動，其幾何、材料性質及斷面性質與例題 4.1.2 相同。表 4.9 為梁受軸向負載 $P = 0.4P_{cr} = 1790 \text{ N}$ ($P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$ 懸臂梁的線性挫屈負荷)作用時，在各種邊界條件下的前 11 個最小的自然頻率，邊界條件為 BC1P 的振動包含在 X_3^G 方向之側向振動與扭轉振動的耦合振動(W,T)及軸向振動與 X_2^G 方向之側向振動的耦合振動(A,V)，其餘邊界條件的振動包含側向-扭轉耦合振動(W,T)、 $X_1^G - X_2^G$ 平面上無耦合的側向振動(V)及軸向無耦合振動(A)。由表 4.9 可見本文的分析結果與[39, 49]的結果相當吻合。文獻[39, 49]並未考慮梁變形對自然頻率的影響，故 $P = 1790 \text{ N}$ 時的軸向變形似乎對本

例題之自然頻率的影響很小。表 4.10-4.12 為不同大小的軸向負載及邊界條件為 BC1P、BC1CM(C)、BC2X 時的前 11 個最小的自然頻率。本例題在簡支邊界的線性挫屈負荷為 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} = 17900 N$ ，本文求得之非線性挫屈負荷為 17807 N，由表 4.10 可見其振動包含(W,T)耦合振動與(A,V)耦合振動，對應於每個模態的自然頻率隨著負載的增加逐漸減小，當 $P/P_{cr} = 0.2$ 時，第 10 個振動頻率對應的振動為(A,V)耦合振動，但當 $P/P_{cr} \geq 0.4$ 時，第 10 個振動頻率對應的振態為(W,T)振動，即隨著 P/P_{cr} 的增加，(A,V)振動的頻率會從第 10 個振動頻率變成第 11 個振動頻率。由表 4.11 可見邊界條件為 BC1CM(C)時，振動包含(W,T)耦合振動與(V)無耦合振動。本例題在懸臂邊界的線性挫屈負荷 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2} = 4475 N$ ，本文求得之非線性挫屈負荷為 4469 N，由表 4.12 可見邊界條件為 BC2X 時，振動包含(W,T)耦合振動與無耦合的側向振動(V)，由表 4.10-4.12 可以發現軸力的大小對前兩個自然振動頻率有很大的影響，但對第三個以後的振動頻率的影響不大。



例題 4.2.2：單對稱槽型斷面梁

本例題為一單對稱槽型斷面(見圖 4.4)梁在形心承受軸向負載下的自由振動，其幾何、材料性質及斷面性質與例題 4.1.1 相同。表 4.13 為軸向負載 $P = 2560 N$ 時，在各種邊界條件下的前 10 個最小的自然頻率，邊界條件為 BC1P 的振動包含側向(W)-扭轉耦合振動(W,T)與軸向-側向(V)的耦合振動(A,V)，其餘邊界條件的振動包含側向(W)-扭轉耦合振動(W,T)、無耦合的側向振動(V)以及無耦合軸向振動(A)，邊界條件為 BC1P 與 BC1CM(C)的(W,T)耦合振動是相同的，文獻[48]分析邊界條件為 BC1CM、BC2X 及 BC3X 的自然振動，由表 4.13 可見本文的分析結果與[48]的結果相當吻合。表 4.14 與 4.15 分別為邊界條件 BC1P 及 BC1CM(C) 在不同大小之軸向負載的前 10 個最小的自然頻率，邊界條件 BC1CM 的線性挫屈負荷[32] 可以表示成

$$P_{cr} = \frac{P_y + P_\theta - \sqrt{(P_y + P_\theta)^2 - 4\left(1 - \frac{Ay_c^2}{I_p}\right)P_y P_\theta}}{2\left(1 - \frac{Ay_c^2}{I_p}\right)} = 61878 \text{ N} \quad (4.1)$$

$$\text{其中 } I_p = I_y + I_z + Ay_c^2, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}, \quad P_\theta = \frac{A}{I_p} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GJ \right)$$

本例題邊界條件 BC1P 與 BC1CM 的非線性挫屈負荷皆為 61596 N，邊界條件為 BC1P 的振動包含耦合振動(W,T)與耦合振動(A,V)，BC1CM 的側向振動(V)並不會與軸向耦合，當振動頻率接近 BC1CM 的軸向振動的頻率(第 8 個振動頻率)時，BC1P 軸向振動與側向振動的耦合效應顯著，由表 4.13-4.15 可以發現 BC1CM 的側向振動(V)頻率(第 7 振動頻率)與 BC1P 的第 7 振動頻率有明顯的差異。表 4.16 為邊界條件 BC2X 的前 10 個最小的自然頻率，BC2X 的非線性挫屈負荷為 17636 N，邊界條件 BC2X 的振動包含耦合振動(W,T)、無耦合側向振動(V)及軸向振動(A)。由表 4.14-4.16 可以發現與例題 4.2.1 相同，當軸力增加時對應的自然頻率會減小，且軸力的大小僅對前兩個自然頻率有很大的影響。

例題 4.2.3：I 型斷面簡支梁承受一軸向力

如圖 4.15 所示，本例題為一簡支雙對稱 I 型斷面(見圖 4.1)梁承受一軸向力 P ，本例題僅考慮簡支梁受軸力的扭轉振動與軸向振動，故節點自由度除了軸向與扭轉自由度外其餘皆被固定，梁兩端是自由翹曲，不能繞 X_1^G 軸轉動，端點 A 不能沿 X_1^G 軸平移但端點 B 可以沿 X_1^G 軸平移。其幾何及材料性質為： $L=4 \text{ m}$ ， $d=0.3 \text{ m}$ ， $t_f=0.0107 \text{ m}$ ， $t_w=0.0071 \text{ m}$ ， $b=0.15 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E=210 \text{ GPa}$ ，剪力係數 $G=80.77 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$ 。表 4.17 為其斷面性質。本例題之線性扭轉挫屈負荷 P_{cr} [10] 可以表示成

$$P_{cr} = \frac{A}{I_y + I_z} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GJ \right) = 1744.34 \text{ kN} \quad (4.2)$$

本研究求得之非線性挫屈負荷為1735.60 kN。本例題之最小扭轉振動自然頻率的解析解可表示成[50]

$$\omega_1 = \lambda_n \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(\frac{1 + \frac{GJ}{\lambda^2 EI_\omega}}{1 + \frac{I_y + I_z}{\lambda^2 I_\omega}} \right)^{1/2}} = 161.81 \text{ (rad/s)}, \quad \lambda = \frac{\pi}{L} \quad (4.3)$$

本例題將梁離散成 20 及 40 個元素兩種情況來比較，以 EN 表示使用 N 個元素離散梁結構，圖 4.16 為非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.18 為在不同軸力時前 10 個最小的自然頻率，表 4.18(a)、(b)分別為將梁離散成 20 個元素及 40 個元素分析的結果，圖 4.17 與圖 4.18 分別為 $P/P_{cr} = 0.8$ 及 $P/P_{cr} = 1.2$ 的振動模態圖，由圖 4.16 與表 4.18 可以發現，將梁離散成 20 個元素分析之結果已相當準確，但是，為了避免較高的自然頻率所對應的振動模態發生失真的情形，振動模態圖為使用 40 個元素分析的結果，由表 4.18 可發現軸力為零時，本研究之最小扭轉振動自然頻率與(4.3)式之解析解一樣。由表 4.18 及圖 4.17 可以發現梁在挫屈前振動包含扭轉振動(T)與軸向振動(A)，但在挫屈後由圖 4.18 可看出軸向振動與扭轉振動是耦合的，由表 4.18 可見梁在挫屈前最小的振動頻率隨著負載的增加逐漸減少，在挫屈時其值為 0，但挫屈後又逐漸增加。圖 4.19 為前三個最小自然頻率的頻率—負荷曲線圖。文獻[10]挫屈負荷為1768 kN 與最小自然頻率為 163 (rad/s)，由圖中可知本文結果與[10]的結果相當吻合。

例題 4.2.4：T 型斷面簡支梁承受一軸向力

如圖 4.20 所示，本例題為一簡支單對稱 T 型斷面(見圖 4.3)梁兩端形心承受一軸向力 P ，本例題考慮邊界條件(a) BC1P, (b) BC1CM 兩種。其幾何及材料性質為： $L = 2 \text{ m}$ ， $h = 0.192 \text{ m}$ ， $t_f = 0.0085 \text{ m}$ ， $t_w = 0.0056 \text{ m}$ ， $b = 0.1 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E = 210 \text{ GPa}$ ，剪力係數 $G = 80.77 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ 。表 4.19 為其斷面性質。圖 4.21 為非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，本研究邊界條件 BC1CM 的負荷—位移曲線與圖 4.21 中邊

界條件 BC1P 的結果相同。本例題之線性側向-扭轉挫屈負荷解析解[32]為 $P_{cr} = 221.65 \text{ kN}$ ，本研究之非線性挫屈負荷為 221.49 kN ，零負載時本例題之最小自然頻率為 190.81 (rad/s) ，文獻[10]側向-扭轉挫屈負荷為 222 kN 與最小的自然頻率為 191.49 (rad/s) ，表 4.20 與表 4.21 為前 10 個最小的自然頻率，本例題在挫屈前最小的振頻隨著負載的增加逐漸減少，直到挫屈時自然頻率為 0。挫屈前 BC1P 的振動包含側向-扭轉振動(V,T)與軸向-側向耦合振動(A,W)，BC1CM 的振動包含側向-扭轉振動(V,T)與側向無耦合振動(W)，在挫屈後邊界條件 BC1P 與 BC1CM 的振動為軸向、兩側方向及扭轉的耦合振動。圖 4.22 為前三個最小自然頻率的頻率—負荷曲線圖。由圖 4.22 可見本文與文獻[10]的最小自然頻率在挫屈前的結果相當吻合，但挫屈後的結果有明顯差異，因文獻[10]中沒有考慮軸向位移，故其挫屈後的結果可能不正確。由圖 4.22、表 4.20 及表 4.21 可發現邊界條件 BC1P 及 BC1CM 的自然頻率相差很小，這可能是因為本例題之第一個軸向振動頻率太高，故與低頻的振動之耦合不顯著。

例題 4.2.5：T 型斷面懸臂梁自由端承受一軸向力

如圖 4.23 所示，一單對稱 T 型斷面(見圖 4.3)懸臂梁在自由端斷面形心承受一軸向力 P ，其幾何、材料性質及斷面性質與例題 4.2.4 相同。本例題之非線性挫屈負荷為 82.1393 kN ，圖 4.24 為非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.22 為前 10 個最小的自然頻率，本例題在挫屈前最小的振頻隨著負載的增加逐漸減少，直到挫屈時自然頻率為 0。圖 4.25 為前三個最小自然頻率的頻率—負荷曲線圖。

例題 4.2.6：L 型斷面懸臂梁自由端承受一軸向力

如圖 4.26 所示，一不對稱角型斷面(見圖 4.6)懸臂梁在自由端斷面形心 C 承受一軸向力 P ，其幾何及材料性質為： $L=1.4 \text{ m}$ ， $h=0.07275 \text{ m}$ ， $b=0.04775 \text{ m}$ ， $t=0.0065 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E=193.05328 \text{ GPa}$ ，包松比 $\nu=0.3$ ，密度 $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$ 。表 4.23 為其斷面性質。本例題的挫屈負荷為 22.791 kN ，圖 4.27 為非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.24 為

本例題承受固定軸力下的前 10 個最小的自然頻率，圖 4.28 為前三個最小自然頻率的頻率－負荷曲線圖，本例題挫屈前的振動皆為(V,W,T)耦合振動，挫屈後的振動為軸向、兩側方向及扭轉的耦合振動，由表 4.24 及圖 4.28 可見本例題在軸力 $P=0$ 的基頻 ω_1 為 97.37 (rad/s) ，隨著軸向負荷 P 增加， ω_1 逐漸減小，挫屈時 $\omega_1=0$ ，但挫屈後隨著 P 增加， ω_1 逐漸增大。

4.3 開口薄壁梁的幾何非線性動態反應

本節以不同的數值例題探討具不同斷面、邊界條件及負載之開口薄壁梁的幾何非線性動態反應，本節中先分析各例題的非線性靜態反應及在固定負載下的自然頻率，再探討動態負載大小與負載型態對梁的幾何非線性動態反應的影響。本文亦考慮梁結構在固定預負載下的靜態平衡位置受到動態負載作用的動態反應，並探討不同大小預負載對梁結構動態反應的影響。本節中如果沒有特別說明，都使用 20 個梁元素離散例題中的梁結構，容許誤差設為 10^{-4} 。

例題4.3.1：懸臂直角構架角隅點承受一鉛直力

如圖 4.29 所示，一懸臂直角構架在其角隅點 A 承受一鉛直力 $P(t)$ ，在時間 $t=2$ 時即移去外力，讓它自由振動[57]，其幾何及材料性質為： $L=10$ ， $EA=10^6$ ， $EI_y = EI_z = GJ = 10^3$ ， $A\rho=1$ ， $\rho I_y = \rho I_z = 10$ 。本例題共用了 10 個元素，時間增量 Δt 取為 0.25，每個時間增量平均使用的迭代次數約 6 次。由圖 4.30 和 4.31 中所示的 A、B 兩點在 X_3^G 方向上的位移與文獻[57]及[58]的結果相近。本例題之軸向角速度與側向角速度的乘積相當大，若不考慮速度耦合效應的影響，則所得到的結果與圖 4.30 及 4.31 的結果在最大位移處約有 10% 的誤差。

例題 4.3.2：旋轉薄圓盤的運動

本題考慮如圖 4.32 所示之旋轉薄圓盤的運動，此圓盤藉著一無質量的剛性桿與一球接頭連接並受重力的作用，其初始角速度及幾何形狀如圖 4.32 所示。為了模擬此無質量剛性桿的作用，假設此剛性桿之半徑

$r = 0.01$, $\rho A = 10^{-10}$, $EA = 10^{12}$, $GJ = EI_y = EI_z = 2.5 \times 10^7$ 。本例題中僅使用一個元素來進行分析，同時將此圓盤視為元素端點上的 lump mass (詳見附錄 H)，本例題時間增量 Δt 取為 0.001，由於此系統之運動為剛體運動，可以應用三維剛體動力學求出此系統之初始速度及加速度見圖 4.33(a)、(b)。在受拘束的系統中若使用 Newmark trapezoidal rule ($\alpha = 0$)，則其加速度會有不穩定的現象[60]，本文使用了[60]中所建議的 Newmark- β damping scheme ($\alpha = -0.05$) 及 HHT scheme ($\alpha = -0.05$) 來改善其收斂性。圖 4.34 為本研究 $\alpha = 0$ 及 $\alpha = -0.05$ 時，圓盤中心 X 方向之加速度的歷時分析的比較，由圖中可以發現當 $\alpha = 0$ ，X 方向加速度會有劇烈抖動的情形，若使用 HHT scheme ($\alpha = -0.05$) 或 Newmark- β damping scheme ($\alpha = -0.05$)，則抖動情形會獲得明顯改善。本例題使用 Newmark- β damping scheme ($\alpha = -0.05$) 之結果與 HHT ($\alpha = -0.05$) 的結果相同。圖 4.35 為系統角速度的變化過程，在圖 4.36 中則描述圓盤中心在 XY 平面上的運動軌跡。圖 4.37 為本研究圓盤中心 X 方向之加速度的歷時分析與文獻結果的比較。由圖 4.35-4.37 可知本文結果與文獻[60]的結果相當吻合。

例題 4.3.3：一端為球窩接頭之空間桿

如圖 4.38 所示，考慮一桿件，其一端與球窩接頭連結，自由端則受到兩個衝擊力的作用，其幾何及材料性質為： $L = 141.42$ ， $A = 9$ ， $J = 11.3886$ ， $I_y = I_z = 6.75$ ，密度 $\rho = 7.8 \times 10^{-3}$ ，包松比 $\nu = 0.3$ 。本例題分析具不同 Young's Modulus 之桿件的運動情形：(a) $E = 2.1 \times 10^9$ ，(b) $E = 6.3 \times 10^6$ 。

此種一端與球窩接頭連接，一端不受拘束的桿件，其自然頻率為

$$\omega_n = (\beta_n \ell)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho \ell^4}} \quad (4.4)$$

第一個模態為 $n = 1$ ， $(\beta_1 \ell)^2 = 0$ 為剛體模態，即 $\omega_1 = 0$ ，第二個模態為 $n = 2$ ， $(\beta_2 \ell)^2 = 15.418$ ，由(4.4)式可求得情況(a) $\omega_2 = 1038.04$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.006053$ ，情況(b) $\omega_2 = 56.9221$ ，其週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.1104$ 。

本例題使用 5 個梁元素，時間增量 Δt 取為 0.001，圖 4.39-4.40 為情況(a)端

點的 X_2^G 、 X_3^G 座標，圖 4.41-4.42 為情況(b)端點的 X_2^G 、 X_3^G 座標。由圖可知，本文結果與文獻[61]的結果非常接近。

例題4.3.4：一雙對稱I型斷面梁承受均佈側向載重

如圖 4.43 所示，一簡支雙對稱 I 型斷面(見圖 4.1)梁承受均佈側向載重，其幾何及材料性質為： $L=10\text{ m}$ ， $d=0.56\text{ m}$ ， $t_f=0.03\text{ m}$ ， $t_w=0.012\text{ m}$ ， $b=0.3\text{ m}$ ， $x_C=6.9048\text{ m}$ ，楊氏係數 $E=210\text{ GPa}$ ，剪力模數 $G=80.77\text{ GPa}$ ，線密度 $m=188.40\text{ kg/m}$ 。表 4.25 為其斷面性質。本例題考慮 A、B 兩端的邊界情況如下：(a) $u_A=u_B=0$ ， $w_A=w_B=0$ ， $w'_A=w'_B=0$ ，(b) $u_A=u_B=0$ ， $w_A=w_B=0$ ， $w'_A=0$ ，(c) $u_A=u_B=0$ ， $w_A=w_B=0$ ，(d) $u_A=0$ ， $w_A=w_B=0$ ，(e) $u_A=0$ ， $w_A=w_B=0$ ， $w'_A=0$ ，(f) $u_A=0$ ， $w_A=w_B=0$ ， $w'_A=w'_B=0$ ，(g) $u_A=0$ ， $w_A=0$ ， $w'_A=0$ 。情況(a)-(f) 負載 $P_0=3000\text{ kN/m}$ ，情況(g)負載 $P_0=300\text{ kN/m}$ 。本例題時間增量 Δt 取為 0.0001 sec 。圖 4.44-4.50 為 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移。本例題情況(d) 的時間增量 Δt 取為 0.00001 sec 時與時間增量 $\Delta t=0.0001\text{ sec}$ 的結果相同。由圖 4.44-4.50 可知本文結果邊界(a)-(c)、(f)及(g)與文獻[72]的結果相當吻合，情況(d)、(e)與文獻[72]的結果有些差異。這可能是因為文獻[72]沒有考慮梁的慣性矩造成的。

例題4.3.5：簡支Z型斷面梁兩端承受一偏心軸向力

如圖 4.51 所示，一簡支不對稱 Z 型斷面(見圖 4.5)梁兩端承受偏心軸向力 P ，該梁的兩端為自由翹曲，其幾何及材料性質為： $L=6.096\text{ m}$ ， $h=0.14288\text{ m}$ ， $b=0.08573\text{ m}$ ， $t_w=t_f=0.0127\text{ m}$ ，楊氏係數 $E=200\text{ GPa}$ ，剪力模數 $G=77.23\text{ GPa}$ ，密度 $\rho=7800\text{ kg/m}^3$ ，表 4.26 為其斷面性質。當一軸向壓力 P 作用在梁斷面時，該點之節點外力除了軸向力，還存在一雙力矩其值為 $-P$ 與翹曲函數在負荷作用點之值 -0.00445420 m^2 的乘積。圖 4.52 為非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.27 為梁在靜態負荷作用下的最小的 5 個自由振動頻率，圖 4.53-4.56 為其振態，由圖 4.53 可以發現當 $P=0$ 時，前兩個自然頻率的振態為側向

振動，因本例題之總體座標軸非斷面主軸，故其振動為在 X_2^G 方向的側向振動與在 X_3^G 方向的側向振動的耦合振動，由圖 4.54 可發現 $P=40\text{ kN}$ 時，側向振動與 X_1^G 方向扭轉振動有明顯的耦合，但與 X_1^G 方向之軸向振動的耦合甚小，由圖 4.52 可見 $P=40\text{ kN}$ 時，梁的位移還很小，故圖 4.54 的結果是可預期的。當 $P=80\text{ kN}$ 及 $P=100\text{ kN}$ 時，梁的靜態位移相當大，故由圖 4.55-4.56 可發現其 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之振動的耦合非常明顯。本例題分別分析了三種不同的負載 $P_0=40, 80, 100\text{ kN}$ 的動態響應，圖 4.57-4.59 為梁的時間—位移曲線圖。本例題時間增量 Δt 取為 0.001 sec ，每個時間增量平均使用的迭代次數約 5 次。圖 4.57-4.59 應可視為對 $P_0=40, 80, 100\text{ kN}$ 之靜態平衡點的大振幅的振動，比較圖 4.54-4.56 及圖 4.57-4.59 可以發現圖 4.57-4.59 的振動週期與圖 4.54-4.56 之前二個振態的週期大約相同，故本例題對靜態平衡點的大振幅振動的週期與小振幅的週期似乎變化不大。

例題4.3.6：懸臂槽型斷面直角構架自由端承受一水平力

如圖 4.60 所示，一懸臂單對稱槽型斷面(見圖 4.4)直角構架在其自由端斷面剪力中心承受一水平力 P 。該構架為 C15×50 斷面，其腹板平放在 $X_1^G - X_2^G$ 平面上，其幾何及材料性質為： $L=6.096\text{ m}$ (240 in)， $b=0.0943864\text{ m}$ (3.716 in)， $t_f=0.01651\text{ m}$ (0.65 in)， $h=0.381\text{ m}$ (15 in)， $t_w=0.0181864\text{ m}$ (0.716 in)，楊氏係數 $E=199.81\text{ GPa}$ (29,000 ksi)，剪力係數 $G=77.168\text{ GPa}$ (11,200 ksi)，密度 $\rho=7800\text{ kg/m}^3$ ，表 4.28 為其斷面性質。本例題在端點考慮兩種翹曲邊界條件：(a)在固定端和自由端為自由翹曲，構架角隅接點 B 兩邊為自由翹曲，(b)在固定端為抑制翹曲和自由端為自由翹曲，構架角隅接點 B 兩邊抑制翹曲。圖 4.61 與圖 4.62 分別為邊界條件(a)及(b)的靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.29-4.30 為梁在靜態負荷作用下的自由振動頻率。圖 4.63-4.64 為 $P=0$ 時，最小 6 個自然頻率的振態，由表 4.29-4.30 及圖 4.63-64 可知，當負載為 0 時，邊界條件(a)和(b)的第一個自然頻率的振動主要為 AB 段的扭轉振動，BC 段是 B 點旋轉造成的剛體運動及 X_3^G 方向的側向振動，第三個自然頻率的振動主要為 AB 段在 X_2^G 方向的側向振動，BC 段的軸向振動是由 B 點的轉動造成的剛

體運動，第四到六個自然頻率的振動為軸向、兩側向振動與扭轉振動的耦合振動。由上述知邊界條件(a)和(b)之第一個振態為構架中桿件 AB 的扭轉振動，因為邊界條件(b)在固定端 A、角隅接點 B 皆為抑制翹曲，故其第一個自然頻率比邊界條件(a)大。第三個振態為直角構架中桿件 AB 在 X_2^G 方向的側向振動，故邊界條件(a)與邊界條件(b)的第三個自然頻率很接近。本例題分析了負載 $P_0 = 1, 5, 10, 15, 16, 17 \text{ kN}$ 的動態反應，本例題之時間增量 Δt 在邊界條件(a)、(b)分別取為 0.0001 sec 及 0.001 sec ，本研究發現邊界條件(a)的時間增量 Δt 取 0.001 sec 時，在某些負載作用下的累積誤差會隨時間增加而造成結果的發散，故其時間增量 Δt 取 0.0001 sec 。圖 4.65-4.83 為本文分析之結果。為了探討負載較小時，其自由端振動主要由那些振態貢獻，本例題使用快速傅利葉轉換，分析負載 $P_0 = 1, 5, 10 \text{ kN}$ 自由端在側方向位移的頻譜圖，使用快速傅利葉轉換分析時，邊界條件(a)取樣的週期時間為 13.1072 sec ，於一個週期時間內取樣的位移點數為 2^{17} 個，邊界條件(b)取樣的週期時間為 8.192 sec ，於一個週期時間內取樣的位移點數為 2^{13} 個，圖 4.84 與 4.85 分別為邊界條件(a)與邊界條件(b)在側方向位移的頻譜圖，由邊界條件(a)的頻譜分析可以求得，當負載 $P_0 = 1, 5, 10 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_2^G 方向頻譜圖(見圖 4.84)中最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率皆為 22.0510 (rad/s) ，當負載 $P_0 = 1 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_3^G 方向頻譜圖(見圖 4.84)中 7 個最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率由小至大分別為 1.43811 、 9.10801 、 22.0510 、 52.2512 、 57.5243 、 65.1942 、 82.4515 (rad/s) ，當負載 $P_0 = 5 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_3^G 方向頻譜圖(見圖 4.84)中 7 個最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率由小至大分別為 1.43811 、 8.62864 、 22.0510 、 50.3337 、 58.0036 、 66.6323 、 80.5340 (rad/s) ，當負載 $P_0 = 10 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_3^G 方向頻譜圖(見圖 4.84)中最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率為 1.43811 (rad/s) ，由邊界條件(b)的頻譜分析可以求得，當負載 $P_0 = 1, 5, 10 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_2^G 方向頻譜圖(見圖 4.85)中最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率皆為 22.2427 (rad/s) ，當負載 $P_0 = 1 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_3^G 方向頻譜圖(見圖 4.85)中 7 個最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率由小至大分別為 1.53398 、 9.20388 、 22.2427 、 54.4563 、

58.2913、69.0291、82.8350 (rad/s)，當負載 $P_0 = 5 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_3^G 方向頻譜圖(見圖 4.85)中 7 個最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率由小至大分別為 1.53398、9.20388、22.2427、52.9223、59.0583、70.5631、81.3010 (rad/s)，當負載 $P_0 = 10 \text{ kN}$ 時，側向位移在 X_3^G 方向頻譜圖(見圖 4.85)中最大的無因次振幅尖峰值所對應的頻率為 1.53398 (rad/s)。由圖 4.65-4.70 的振動週期、圖 4.63 的振態及週期與頻譜圖(見圖 4.84)可以發現，當作用之負載 $P_0 \leq 10 \text{ kN}$ 時，自由端 C 點位移在 X_1^G 、 X_2^G 方向的振動主要是第三振態的貢獻，當作用之負載 $P_0 = 1, 5 \text{ kN}$ 時，自由端 C 點位移在 X_3^G 方向的振動主要應是第一至第七振態的貢獻，當作用之負載 $P_0 = 10 \text{ kN}$ 時，自由端 C 點位移在 X_3^G 方向的振動主要應是第一個振態的貢獻，由頻譜圖(見圖 4.84)可以發現，第二至第七振態的貢獻已經不明顯。表 4.29 及 4.30 中可發現第三個振動頻率隨著負載的增加變化很小，圖 4.65-4.70 為自由端 C 點之時間-位移曲線圖，由圖中可發現位移在 X_1^G 、 X_2^G 方向振動週期隨著負載的增加變化很小。雖然本例題沒有偵測到挫屈負荷，但當 $P_0 \geq 15 \text{ kN}$ 時，由圖 4.61 中可看出靜態位移有明顯劇增的情況，由圖 4.71-4.73 亦可以發現位移的振幅急速變大。由圖 4.74-4.83 可以發現邊界條件(a)與邊界條件(b)的振動特徵相似。由邊界條件(a)的時間-位移圖(見圖 4.71-4.73)與邊界條件(b)的時間-位移圖(見圖 4.81-4.83)的比較可以發現，當負載 $P_0 \geq 15 \text{ kN}$ 且邊界條件(a)與邊界條件(b)作用相同的負載時，邊界條件(a)振動的最大位移比邊界條件(b)振動的最大位移要大很多，即邊界條件(b)有較大的承載能力。

例題4.3.7：懸臂T型斷面梁自由端承受一鉛直力

如圖 4.86 所示，一懸臂單對稱 T 型斷面(見圖 4.3)梁在其自由端剪心承受一鉛直力 P 及水平力 $Q = \alpha P$ 、 $\alpha = 0, 0.001, 0.01, 0.1$ ，其幾何及材料性質為： $L = 4 \text{ m}$ ， $h = 0.192 \text{ m}$ ， $b = 0.1 \text{ m}$ ， $t_f = 0.0085 \text{ m}$ ， $t_w = 0.0056 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E = 210 \text{ GPa}$ ，剪力模數 $G = 80.77 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ，表 4.19 為其斷面性質。圖 4.87 為 $\alpha = 0$ 時，非線性靜態分析的負荷-位移曲線圖，其非線性挫屈負荷為 3.26410 kN ，表 4.31 為梁在靜態負荷作用下

的自由振動頻率，圖 4.88 為 $P=0$ 時前五個自然頻率的振態圖。本例題動態分析考慮圖 4.86 所示之三種不同的負荷情況 Case (a)、Case (b) 與 Case (c)，圖 4.89-4.100 為自由端 A 點在 X_3^G 方向的位移，本例題情況(a)及(b)的時間增量 Δt 取為 0.001 sec，情況(c) 時間增量 Δt 取為 0.001 sec 時與時間增量 Δt 取為 0.0001 sec 有少許差異，所以情況(c)的時間增量 Δt 取為 0.0001 sec。由表 4.31 及圖 4.88 可知，當負載為 0 時，第一個自然頻率為 $\omega_1 = 21.3660 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.294074 \text{ sec}$ ，其振動為在 X_2^G 方向的側向振動與扭轉振動的耦合振動，第二個自然頻率為 $\omega_2 = 71.9937 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.0872741 \text{ sec}$ ，因圖 4.88 中之軸向位移為剪心之軸向位移，故其振動為軸向振動與在 X_3^G 方向的側向振動的耦合振動。Case (a) 在 $Q=0$ 時，因為 $P(t)$ 到達最大負載的時間約為其振動週期的一半，由圖 4.89 可看出在 X_3^G 方向的最大位移與圖 4.87 負載 $P = 3 \text{ kN}$ 時的靜態位移相比差不多。隨著 $Q = \alpha P$ 的增加，由圖 4.90-4.92 可看出位移在 X_2^G 方向的振幅會變大，但是週期並無明顯變化。Case (c) 當 $Q = 0.001P, 0.01P$ 時，由圖 4.98-4.99 可發現其在 X_2^G 方向振動的振幅有劇增的情形。

例題4.3.8：懸臂單對稱槽型斷面梁自由端承受一偏心鉛直力

如圖 4.101 所示，一懸臂單對稱槽型斷面(見圖 4.4)梁在其自由端承受一偏心鉛直力 P ，其幾何及材料性質為： $L=9 \text{ m}$ ， $h=0.284 \text{ m}$ ， $b=0.095 \text{ m}$ ， $t_f=0.016 \text{ m}$ ， $t_w=0.01 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E=210 \text{ GPa}$ ，包松比 $\nu=0.3$ ，密度 $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$ ，表 4.32 為其斷面性質。本例題考慮的負荷作用點及方向有如圖 4.101 所示三種情況：(a)垂直向下力作用在形心，(b)垂直向下力作用在腹板的頂端，(c)垂直向下力作用在腹板的底端。圖 4.102 為非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.33 為梁在靜態負荷作用下的自由振動頻率，圖 4.103-4.106 為 Case (a) 在不同靜態負載之靜態平衡點的振動模態。由表 4.33 及圖 4.103 可知，當負載為 0 時，第一個自然

頻率為 $\omega_1 = 6.96476 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.902140 \text{ sec}$ ，因圖 4.103 中之軸向位移為剪心之軸向位移，故其振態為軸向振動與在 X_2^G 方向的側向振動的耦合振動，第二個自然頻率為 $\omega_2 = 24.3409 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.258133 \text{ sec}$ ，其振態為在 X_3^G 方向的側向振動與扭轉振動的耦合振動。由表 4.33 可以發現情況(a)-(c)其第一及第二個自然頻率會隨著負載的增加先減小再增加。本例題分析了二種不同大小的負載 $P_0 = 5, 10 \text{ kN}$ ，本例題測試了時間增量 Δt 為 0.001 sec 與時間增量 Δt 為 0.0001 sec 的情況，兩種時間增量的結果相當吻合，本例題的時間-位移曲線圖是時間增量 $\Delta t = 0.001 \text{ sec}$ 的結果，圖 4.107-4.112 為情況(a)-(c)之自由端剪心 A 在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之時間-位移曲線圖。

例題4.3.9：懸臂不對稱槽型梁自由端承受一偏心鉛直力

如圖 4.113 所示，一懸臂不對稱槽型斷面(見圖 4.4)梁在其自由端承受一偏心鉛直力 P ，其幾何及材料性質為： $L = 2 \text{ m}$ ， $h = 0.1 \text{ m}$ ， $b_1 = 0.02 \text{ m}$ ， $b_2 = 0.04 \text{ m}$ ， $t_1 = t_2 = t_w = 0.005 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E = 210 \text{ GPa}$ ，剪力模數 $G = 80.77 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ，表 4.34 為其斷面性質。本例考慮兩種情況：(a) 負荷作用在自由端斷面的剪心，(b) 負荷作用在自由端斷面的形心。圖 4.114 為其非線性靜態分析的負荷-位移曲線圖，表 4.35 為其在不同靜態負荷作用下的自由振動頻率，圖 4.115-4.117 為其振態圖。本例題考慮的動態負載為 $P(t) = 3 \text{ kN}$ ，圖 4.118 與圖 4.119 為自由端負荷作用點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之時間-位移曲線圖，本例題時間增量 Δt 取為 0.0005 sec 。如將時間增量 Δt 減小為 0.0001 sec 時，其動態反應與時間增量 Δt 取為 0.0005 sec 的結果相同。由圖 4.114 可見將負荷加在剪心和形心的負荷-位移曲線相差不是很大，但由圖 4.118 與圖 4.119 可發現其時間-位移圖有相當大的差異。

例題4.3.10：懸臂不對稱角型斷面梁自由端承受一偏心軸向力

如圖 4.120 所示，一懸臂不對稱角型斷面(見圖 4.6)梁在其自由端承受一偏心軸向力 P 。其幾何、材料性質及斷面性質與例題 4.2.6 相同。圖 4.121 為其非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.36 為其在靜態負荷作用下的自由振動頻率，圖 4.122-4.124 為其振態圖。本例題分析了二種不同的負載 $P_0 = 15, 25 \text{ kN}$ 的動態反應，本例題測試了時間增量 $\Delta t = 0.0005 \text{ sec}$ 與時間增量 $\Delta t = 0.0001 \text{ sec}$ 的情況，兩種時間增量的結果相當吻合，所以本例題時間增量 Δt 取為 0.0005 sec 。圖 4.125 為 $P_0 = 15 \text{ kN}$ 時，自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之時間—位移曲線圖，每個時間增量平均使用的迭代次數約 5 次。圖 4.126 為 $P_0 = 25 \text{ kN}$ 時，自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之時間—位移曲線圖，每個時間增量平均使用的迭代次數約 8 次。由表 4.36 及圖 4.122 可以發現，當負載為 0 時，第一個自然頻率為 $\omega_1 = 97.3704 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.0645287 \text{ sec}$ ，因圖 4.122 中之軸向

位移為剪心之軸向位移，故其振動為軸向振動、兩個側方向振動與扭轉振動的耦合振動，第一個自然頻率會隨著負載的增加先遞減後再增加。當負載為 15 kN 時，第一個自然頻率為 $\omega_1 = 59.3423 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1} =$

0.105880 sec ，該振動週期與圖 4.125 之時間—位移圖的振動週期相當吻合，故圖 4.125 的振動主要應是第一個振態的振動，由圖 4.125 可以發現 $P_0 = 15 \text{ kN}$ 時其振幅甚小，所以其振動週期會接近對應的線性振動的自然頻率。當負載為 25 kN 時，第一個自然頻率為 $\omega_1 = 47.0313 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.133596 \text{ sec}$ ，由圖 4.126 可以發現 $P_0 = 25 \text{ kN}$ 時之時間—位移曲

線圖的振動週期較對應之線性振動的 ω_1 大，圖 4.126 之振動的振幅相當大，所以其週期會大於對應的線性振動的自然頻率。

例題4.3.11：懸臂Z型斷面梁自由端形心承受一軸向力

如圖 4.127 所示，一懸臂 Z 型斷面(見圖 4.5)梁自由端形心承受一軸向壓力作用，該懸臂梁的固定端為抑制翹曲，自由端為自由翹曲，其幾何及材料性質為： $L = 3 \text{ m}$ ， $h = 0.3 \text{ m}$ ， $b = 0.2 \text{ m}$ ， $t_w = t_f = 0.01 \text{ m}$ ，楊氏係數

$E = 206 \text{ GPa}$ ，包松比 $\nu = 0.3$ ，密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ，表 4.37 為其斷面性質。當一軸向壓力 P 作用在梁斷面剪心時，該點之節點外力除了軸向力，還存在一雙力矩其值為 $-P$ 與其翹曲函數在斷面剪心之值 0.00857143 m^2 的乘積。圖 4.128 為非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，本例題之非線性挫屈負荷為 906.012 kN ，表 4.38 為梁在靜態負荷作用下的自由振動頻率，圖 4.129-4.131 分別為 $P = 0$ 、 400 、 800 kN 時的振態。圖 4.132 為負載 $P_0 = 800 \text{ kN}$ 時梁自由端 C 點在 X_1^G 方向與扭轉角之時間—位移曲線圖，本例題測試了時間增量 Δt 取為 0.0001 sec 與時間增量 Δt 取為 0.00001 sec 的情況，兩種時間增量的扭轉位移結果相當吻合，所以本例題的結果為取 $\Delta t = 0.0001 \text{ sec}$ 的結果，每個時間增量平均使用的迭代次數約 4 次。由表 4.38 及圖 4.129-4.131 可知，本例題的自然頻率會隨著負載的增加逐漸減小，當負載為 800 kN 時，第一個自然頻率為 $\omega_1 = 34.0450 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.184555 \text{ sec}$ ，其振態主要為在 X_2^G 方向的側向振動，第二個自然頻率為 $\omega_2 = 149.502 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.0420274 \text{ sec}$ ，其振動主要為扭轉振動，第五個自然頻率為 $\omega_5 = 846.474 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_5} = 0.00742277 \text{ sec}$ ，其振動主要為扭轉振動。本例題的第一個軸向振動的頻率為 $\omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2690.82 \text{ (rad/s)}$ ，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2.335 \times 10^{-3} \text{ sec}$ ，由圖 4.132 可見本例題的軸向振動的週期約為第一個軸向振動的週期，故該振動主要為第一個軸向振態的振動。第二個自然頻率的振動週期與圖 4.132 中扭轉振動的週期相當吻合，圖 4.132 中的扭轉振動主要為第二個扭轉振態的振動，但亦包含第五振態的貢獻。

例題4.3.12：懸臂Z型斷面梁自由端承受一軸向預負載然後再加一側向力

如圖 4.133 所示，一懸臂 Z 型斷面(見圖 4.5)梁自由端斷面形心承受一軸向預負載 P_C ，然後再加一側向力 $P = 200 \text{ kN}$ ，梁變形前元素斷面座標 x_i^S ($i = 1, 2, 3$) 與總體固定座標 X_i^G ($i = 1, 2, 3$) 重合，其幾何、材料性質及斷

面性質與例題 4.3.11 相同。當一軸向力 $-P_C$ 作用在梁斷面剪心時，該點之節點外力除了軸向力，還存在一雙力矩其值為 $-P_C$ 與翹曲函數在斷面剪心之值 $0.00857143 m^2$ 的乘積。為了探討預負載對梁結構靜態及動態分析的影響，本例題考慮了預負載 $P_C=0, 200, 400, 800 kN$ ，圖 4.134-4.135 為預負載作用下之非線性靜態分析的負荷—位移曲線圖，表 4.39 為梁在靜態負荷作用下的自由振動頻率，圖 4.136-4.139 為其振態。圖 4.140-4.143 為梁受不同預負載下自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之時間—位移曲線圖，本例題測試了時間增量 Δt 取為 $0.001 sec$ 與時間增量 Δt 取為 $0.0001 sec$ 的情況，兩種時間增量的位移隨著時間增加會有差異，所以本例題時間增量 Δt 取為 $0.0001 sec$ 。由表 4.39 及圖 4.136-4.139 可以發現 $P_C \leq 400 kN$ 時，第三個自然頻率及振態變化很小，圖 4.140-4.142 中可以看出位移在 X_3^G 方向振動的週期變化很小且約等於無負載下之第三個自然頻率，所以圖 4.140-4.142 位移在 X_3^G 方向的振動主要應是第三個振態的貢獻。由表 4.39 可以發現在固定預負載 P_C 作用下其第一個自然頻率會隨著負載的增加先遞減再增加。當負載 $P=200 kN$ 時，第一個自然頻率會隨著預負載 P_C 的增加逐漸遞減，由圖 4.140-4.143 中可以發現位移在 X_2^G 方向振動的週期越來越大，當預負載 $P_C=800 kN$ 時，位移在 X_2^G 方向的振幅已超越位移在 X_3^G 方向的振幅。

第五章 結論與展望

本研究的主要目的是以一致性共旋轉法 (consistent corotational formulation) 推導一個薄壁開口梁元素，並將其應用在梁結構的自由振動分析及幾何非線性動態分析。

本文中推導的梁元素有兩個節點，每個節點有七個自由度，即三個位移、三個旋轉及一個扭轉率。本文中將元素節點定在元素兩端斷面的剪心，並取梁元素的剪心軸當作參考軸。本研究用傳統的力、力矩及雙力矩為廣義的節點力。本文用對固定座標的旋轉向量描述元素間共同節點的有限旋轉 (Finite rotation)，但用對固定座標的傳統角速度及角加速度向量描述節點的旋轉和時間的關係。

為了從元素的總位移中去除剛體旋轉，本研究在梁元素當前的變形位置上，利用元素節點的座標及斷面方位建立一個移動元素座標，並在該移動元素座標上描述元素的變形，本研究用三個旋轉參數描述元素斷面在移動元素座標上的方位，本研究在一個與當前的移動元素座標重合的固定元素座標上，推導出元素節點受到對固定元素座標的擾動節點位移和旋轉作用後，擾動後的移動元素座標與固定元素座標的關係及元素擾動節點位移和旋轉與元素擾動節點旋轉參數的關係。本研究利用元素節點在當前固定元素座標的位移和旋轉及其擾動量、速度、加速度、角速度、角加速度，推導出移動元素座標的角速度及角加速度及元素節點的變形參數對時間的一次及二次微分。據本人所知，文獻上還未見到有人以一致性共旋轉法推導出三維梁元素之移動元素座標的角速度及角加速度。本研究利用虛功原理和 D'Alembert 原理，以梁之正確的變形機制 (Kinematics) 及完整非線性梁理論之二階一致線性化 (consistent second order linearization) 在當前的固定元素座標推導元素節點變形力及慣性力，本研究中保留了變形力中撓曲、扭曲及軸向變形間之耦合項、軸向扭轉率的三階項、慣性力中速度間的耦合項及扭轉率與加速度間的耦合項。為了推導上的方便，本研究用虛功原理推導梁元素節點變形力時，先推導出對應於元素節點旋轉參數的廣義節點力矩，再用 controgradient law 求得傳統節點力和力矩。本研究在推導元

素節點在當前固定元素座標的擾動位移和擾動旋轉與元素節點旋轉參數的擾動量的關係時，保留了其值為零的節點對固定元素座標的位移及旋轉向量，即元素節點變形力中考慮了元素剛體運動的效應，故可由元素節點變形力對節點參數微分求得元素切線剛度矩陣，文獻上用一致性共旋轉法推導元素節點變形力時，都將元素的剛體運動除掉，故在推導元素切線剛度矩陣時，除了元素節點變形力對節點參數微分外，還要另外考慮元素剛體運動對節點力方向的影響，外加一個穩定矩陣(stability matrix)。本研究推導元素的節點慣性力時，先將對移動元素座標的節點擾動位移及擾動旋轉參數表示成當前固定元素座標的節點擾動位移和旋轉之函數，故可直接求得元素的節點慣性力，元素的一致性質量矩陣(consistent mass matrix)可由元素節點的慣性力對元素節點的加速度微分求得。

本研究採用基於弧長法和牛頓-拉福森法的增量迭代法解非線性平衡方程式，本研究採用次空間法(Subspace Iteration Method)解梁結構的自然頻率及振動模態。本文應用 Newmark 直接積分法和牛頓-拉福森法的增量迭代法解非線性運動方程式。本研究以數值例題探討不同斷面、邊界條件及負載對開口薄壁梁之自然頻率、振動模態及幾何非線性之動態反應之影響，以說明本研究提出之非線性開口薄壁梁元素的正確性及有效性，並驗證文獻上梁結構之自然頻率及幾何非線性之動態反應之正確性。

本研究的結論可歸納如下：

1. 本研究推導梁元素過程，為了保留各種變形間的耦合，在計算 Green strain 與決定節點旋轉參數時，須先將 Green strain 及其變分中的變形參數保留到適當的階數，然後在適當的時候將節點內力作一致性二階線性化，以推導正確之節點變形力、節點慣性力、切線剛度矩陣及質量矩陣。
2. 隨著元素數目的增加，梁元素之長度，剪心軸之側向位移的一次微分(斜率)及扭轉角會趨近於零，所以元素節點內力及剛度矩陣中含這些量之項亦會趨近於零，將這些量去掉可以解決某些結構問題需使用過多元素才會收斂的問題[36]，故本研究亦去掉元素節點變形力、元素節點慣性力及元素切線剛矩陣中隨著元素數目的增加會趨近於零的項。雖然隨

著元素數目的增加，梁元素之長度，剪心軸的斜率及扭轉角會趨近於零，可以忽略，但這些量對時間的一次及二次微分並不會趨近於零，所以本研究在元素節點慣性力中，保留這些量對時間的一次及二次微分。

3. 軸向扭轉率的三階項是所有三階項中的支配項，而且是反映梁受到純扭矩時產生非線性行為重要的內力項[8]，所以本文在元素節點變形力保留至軸向扭轉率的三階項。
4. 當開口薄臂梁斷面的形心與剪心不重合時，其側向振動與扭轉振動是耦合的，文獻上一般都是認為其軸向振動是獨立的，但當銷接端的軸向位移不是拘限在斷面形心時，軸向振動與側向振動及扭轉振動應是全部或部分耦合的。本研究之梁元素的節點自由度都定義在剪心上，所有自由度對應的廣義力皆定義在剪心上，為了正確地描述邊界條件，節點的位置必須和邊界的自由度一致，所以本文在附錄 G 中利用元素斷面為剛體的假設，導出薄臂梁元素不同節點自由度的關係及對應於不同節點自由度之元素剛度矩陣的關係。由 4.1 節例題可以發現當銷接端的軸向位移拘限在形心時，本文的結果與文獻的結果相當吻合，但當銷接端的軸向位移拘限不在形心或對稱軸上時，本文的結果證實軸向振動、兩側向振動及扭轉振動是耦合的，但文獻上並無結果可以比較。
5. 梁結構在負載下的自然振動是指梁結構對該負載下之靜態平衡點的微小振動，故梁在負載下的位移包含靜態平衡變形及以靜態平衡變形為平衡點的自由振動。本文 4.2 節的例題是探討梁結構在通過形心的軸力作用下的自然振動，由本節的例題可以發現在挫屈前，本文的結果與文獻上不考慮軸向變形的結果相當吻合，故梁在挫屈前的軸向變形對分析的結果似乎影響很小，由例題 4.2.3 發現僅考慮扭轉振動與軸向振動的 I 型簡支梁受軸力作用時，在挫屈前其扭轉振動與軸向振動是獨立的，但在挫屈後其軸向振動與扭轉振動是耦合的，由例題 4.2.4 發現 T 型簡支梁受軸力作用時，在挫屈前本文的結果與文獻上不考慮軸向變形的結果相當吻合，但在挫屈後本文的結果與文獻上的結果有相當的差異，故梁在挫屈後的軸向變形似乎不能忽略。由例題 4.2.3-4.2.6 可以發現梁在挫屈前最

小的振動頻率隨著軸力的增加逐漸減少，挫屈時最小的振動頻率為 0。軸力的大小對前兩個自然振動頻率有很大的影響，但對第三個以後的振動頻率的影響不大。

6. 用可變形體模擬剛體時，需用很大的剛度，故直接積分法用 Newmark trapezoidal rule 時，加速度會有抖動現象，故本文例題 4.3.2 除使用 Newmark trapezoidal rule 外，另應用了 Newmark- β damping scheme 及 HHT scheme [85]，發現二者有相同的結果且確能消除加速度的抖動現象，本文的結果與文獻[60]的結果相當吻合且有較小的抖動現象。
7. 雖然例題 4.3.6、4.3.8 及 4.3.10 中沒有偵測到挫屈負荷，但由負荷一位移曲線圖中可看出位移有明顯增加的情況，故梁在負載下的靜態平衡變形對其自然頻率應有很大的影響，本文的結果發現第一個自然頻率隨著負載的增加先減小再增加，當梁結構變形小的時候，在階躍負載(Step loading)下的振動週期與對應於該固定負載下之靜態平衡點的自然頻率相當一致。由時間一位移曲線圖可以發現隨著負載的增加位移的振幅亦急速變大。
8. 因文獻上缺乏三維薄壁開口梁動態分析的結果，故本研究 4.3 節中三維薄壁開口梁動態分析的結果可以供以後的研究參考及比較。

以下為本研究未來的展望：

本研究假設材料為線性材料、梁斷面不會扭曲變形、梁結構不會局部挫屈(Local buckling)，在結構受到大變形或較高的負荷可能已產生部分的降伏，所以對開口薄壁梁挫屈後的大變形需考慮其材料非線性。對於較短的梁須要考慮剪變形的效應，還有其挫屈可能是非彈性的並伴隨著局部挫屈(Local buckling)或扭曲挫屈(Distorsional buckling)。故在未來的研究可在局部挫屈、扭曲挫屈、結構之初始不完美(initial imperfection)及阻尼效應做進一步的探討。

參考文獻

- [1] S. Timoshenko, D.H. Young, *Vibration problems in engineering*, John Wiley, New York, 1974.
- [2] K.M. Hsiao, J.Y. Lin, W.Y. Lin, A consist co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-d beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 169 (1999) 1-18.
- [3] 黃智傑，旋轉三維 Timoshenko 梁之振動分析，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，台灣，新竹，2001.
- [4] S.C. Lin and K.M. Hsiao, Vibration analysis of rotating Timoshenko beam, *J. Sound Vib.* 240 (2) (2001) 303-322.
- [5] K.M. Hsiao, R. T. Yang, W.Y. Lin, A consistent finite element formulation for linear buckling analysis of spatial beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 156 (1998) 259-276.
- [6] J.C. Simo and L. Vu-Quoc, The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures, *J. Sound Vib.* 119 (1987) 487-508.
- [7] K.M. Hsiao, Corotational total lagrangian formulation for three-dimensional beam element, *AIAA J.* 30(3) (1992) 797-804.
- [8] K.M. Hsiao and W.Y. Lin, A co-rotational finite element formulation for buckling and postbuckling analysis of spatial beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188 (2000) 567-594.
- [9] M.Y. Kim, H.T. Yun, N.I. Kim, Exact dynamic and static element stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beam-columns, *Comput. Struct.* 81 (2003) 1425-1448.
- [10] F. Mohri, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Vibration analysis of buckled thin-walled beams with open sections, *J. Sound Vib.* 275 (2004) 434-446.
- [11] R.W. Barsoum, R.H. Gallagher, Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2 (1970) 335-352.

- [12] Z.P. Bazant and M. Nimeriri, Large deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames, *J. Engrg. Mech. Div. ASCE* 99(EM6) (1973) 1259-1281.
- [13] N.S. Trahair and S.T. Woolcock, Effect of major axis curvature on I-beam stability, *J. Engrg. Mech. Div. ASCE* 99(EM1) (1974) 85-98.
- [14] J.L. Meek and P. Swannell, The lateral-torsional buckling problem reviewed from virtual displacement principles, *Civ. Engrg. Trans. Australia* CE19(2) (1977) 153-161.
- [15] J.H. Argyris, O. Hilpert, G.A. Malejannakis, D.W. Scharpf, On the geometrical stiffness of a beam in space - a consistent V.W. approach, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 20 (1979) 105-131.
- [16] T.M. Roberts and Z.G. Azizian, Influence of pre-buckling displacement on the elastic critical loads of thin walled bars of open cross section, *Int. J. Mech. Sci.* 25(2) (1983) 93-104.
- [17] Z.M. Elias, *Theory and methods of structural analysis*, John Wiley & Sons, N.Y., 1986.
- [18] Y.B. Yang and W. McGuire, Joint rotation and geometric nonlinear analysis, *J. Struct. Engrg. ASCE*, 112(4) (1986) 879-905.
- [19] M.M. Attard and I.J. Somerville, Nonlinear analysis of thin-walled open beams, *Comput. Struct.* 25(3) (1987) 437-443.
- [20] S.L. Chan and S. Kitipornchai, Geometrically nonlinear analysis of asymmetrical thin-walled beam-columns, *Engrg. Struct.* 9 (1987) 243-254.
- [21] L. Jiang, M.W. Chernuka, N.G. Pegg, A corotational updated lagrangian formulation for geometrically nonlinear finite-element analysis of shell structures, *Finite Elem. Anal. Des.* 18 (1-3) (1994) 129-140.
- [22] C. Pacoste and A. Eriksson, Beam element in instability problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 144 (1997) 163-197.
- [23] M.A. Crisfield, A consistent co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 81

- (1990) 131-150.
- [24] L.H. Teh, M.J. Clarke, Co-rotational and lagrangian formulations for elastic three-dimensional beam finite elements, *J. Construct. Steel Res.* 48 (1998) 123-144.
- [25] M.M. Attard, The elastic flexural-torsional response of thin-walled open beams, Ph.D. Thesis, University of New South Wales, Australia, 1984.
- [26] F. Gruttmann, R. Sauer and W. Wagner, A geometrical nonlinear eccentric 3d-beam element with arbitrary cross-sections, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 160 (1998) 383-400.
- [27] H. Chen and G. E. Blandford, Thin-walled space frames. Part II: Algorithmic details and applications, *J. Struct. Engrg. ASCE* 117(8) (1991) 2521-2539.
- [28] Engel and J.N. Goodier, Measurements of torsional stiffness changes and instability due to tension, compression and bending, *J. Appl. Mech. ASME* (1953) 553-560.
- [29] B.A. Izzuddin, An Eulerian approach to the large displacement analysis of thin-walled frames, *Proc. Instn. Civ. Engrs. Struct. Build., London, England*, 110(1) (1995) 50-65.
- [30] A. Conci and M. Gattass, Natural coordinates for geometric nonlinear analysis of thin-walled frames, *Int. J. Numer. Meths. Engrg.* 30 (1990) 207-231.
- [31] M.Y. Kim, S.P. Chang, S.B. Kim, Spatial stability analysis of thin-walled space frames, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 39 (1996) 499-525.
- [32] F. Mohri, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Flexural–torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections. *Thin-Walled Struct.* 39 (2001) 907-938.
- [33] K.M. Hsiao, W.Y. Lin, A co-rotational formulation for thin-walled beams with monosymmetric open section, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2000) 1163-1185.

- [34] W.Y. Lin and K.M. Hsiao, Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001) 6023-6052.
- [35] W.Y. Lin and K.M. Hsiao, A buckling and postbuckling analysis of rods under end torque and compressive load, *Computer Modeling in Engineering & Sciences* 4 (2003) 259-271.
- [36] H.H. Chen, W.Y. Lin, K.M. Hsiao, Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with generic open section. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195(2006) 2334-2370.
- [37] C. Mei, Coupled vibrations of thin-walled beams of open section using the finite element method, *Int. J. Mech. Sci.* 12 (1970) 883-891.
- [38] P.O. Friberg, Coupled vibrations of beams - an exact dynamic element stiffness matrix, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 19 (1983) 479-493.
- [39] P.O. Friberg, Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 21 (1985) 1205-28.
- [40] E. Dokumaci, An exact solution for coupled bending and torsion vibrations of uniform beams having single cross-sectional symmetry, *J. Sound Vib.* 119(3) (1987) 443-449.
- [41] J.R. Banerjee, Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 28 (1989) 1283-1298.
- [42] J.R. Banerjee and S.A. Fisher, Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for axially loaded beam elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 33 (1992) 739-751.
- [43] R.E.D. Bishop, S.M. Cannon, S. Miao, On coupled bending and torsional vibration of uniform beams, *J. Sound Vib.* 131 (1989) 457-464.
- [44] A.Y.T. Leung, Natural shape functions of a compressed Vlasov element, *Thin-walled Struct.* 11 (1991) 431-438.
- [45] M.J. Klausbruckner and R.J. Pryputniewicz, Theoretical and experimental study of coupled vibrations of channel beams, *J. Sound Vib.* 183(2) (1995)

239-252.

- [46] Y. Yaman, Vibrations of open-section channels: A coupled flexural and torsional, *J. Sound Vib.* 204(1) (1997) 131-158.
- [47] A. Arpacı, E. Bozdağ, On free vibration analysis of thin-walled beams with nonsymmetrical open cross-sections, *Comput. Struct.* 80 (2002) 691-695.
- [48] J. Li, R. Shen, H. Hua, X. Jin, Coupled bending and torsional vibration of axially loaded Bernoulli-Euler beams including warping effects, *Appl. Acoust.* 65 (2004) 153-170.
- [49] J. Li, W. Li, R. Shen, H. Hua, Coupled bending and torsional vibration of nonsymmetrical axially loaded thin-walled Bernoulli-Euler beams, *Mech. Res. Commun.* 31 (2004) 697-711.
- [50] A. Prokić, On triply coupled vibrations of thin-walled beams with arbitrary cross-section, *J. Sound Vib.* 279 (2005) 723-737.
- [51] W.Y. Tseng and J. Dugundji, Nonlinear vibration of a buckled beam under harmonic excitation, *J. Appl. Mechanics* 37 (1970) 292-297.
- [52] J.C. Ji and C. H. Hansen, Nonlinear response of post-buckled beam subjected a harmonic axial excitation, *Journal of Sound and Vibration* 237 (2000) 303-318.
- [53] W.Y. Poon, C. F. Ng and Y. Y. Lee, Dynamic stability of a curved beam under sinusoidal loading, *Proc. Instn Mech. Engers. Part G: J. Aerospace Engineering* 216 (2002) 209-217.
- [54] T.Y. Yang and Sunil Saigal, A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 20 (1984) 851-867.
- [55] A. Rosen, R. G. Loewy, M. B. Mathew, Nonlinear dynamics of slender rods, *AIAA J.* 25(4) (1987) 611-619.
- [56] K.M. Hsiao, H.J. Horng, and Y.R. Chen, A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures, *Comput. Struct.* 27 (6) (1987) 769-781.

- [57] J. C. Simo, L. Vu-Quoc, On the dynamics in space of rods undergoing large motions -a geometrically exact approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 66 (1988) 125-161.
- [58] M. Iura and S.N. Atluri, Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams, *Comput. Struct.* 29(5) (1988) 875-889.
- [59] J.C. Simo and L. Vu-Quoc, A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation, *Int. J. Solids Struct.* 27(3) (1991) 371-393.
- [60] A. Cardona and M. Geradin, Time integration of the equations of motion in mechanism analysis, *Comput. Struct.* 33 (3) (1989) 801-820.
- [61] A. Cardona and M. Geradin, Modeling of super elements in mechanism analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 32 (1991)1565-1593.
- [62] M. Borri, F. Mello and S.N. Atluri, Variational approaches for dynamics and time-finite-elements : Numerical studies, *Comp. Mech.* 7 (1990) 49-76.
- [63] A. Ibrahimbegovic, S. Mamouri, Nonlinear dynamics of flexible beams in planar motion: formulation and time-stepping scheme for stiff problems, *Comput. Struct.* 70 (1999) 1-22.
- [64] A. Ibrahimbegovic, S. Mamouri, Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002) 4241-4258.
- [65] G. Jelenic, M.A. Crisfield, Dynamic analysis of 3d beams with joints in presence of large rotations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001) 4195-4230.
- [66] F. Boyer, N. Glandais and W. Khalil, Flexible multibody dynamics based on a non-linear Euler–Bernoulli kinematics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 54 (2002) 27-59.

- [67] F. Boyer and D. Primault, Finite element of slender beams in finite transformations: a geometrically exact approach, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 59 (2004) 669-702.
- [68] Y. Hu, X. Jin and B. Chen, A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-section, *Comput. Struct.* 61(5) (1996) 897-908.
- [69] R.D. Ambrosini, J.D. Riera, R.F. Danesi, A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams, *Engrg. Struct.* 22 (2000) 890-900.
- [70] A.D. Egidio, A. Luongo and F. Vestroni, A nonlinear model for the dynamics of open cross-section thin-walled beams, Part I: formulation, *Int. J. Non-linear Mech.* 38 (2003) 1067-1081, Part II: 38 (2003) 1083-1094.
- [71] A.Y.T. Leung, W. Guorong, Z. Weifang, Nonlinear dynamic analysis of flexible multibody system, *Acta Mechanica Solida Sinica* 17(4) (2004) 330-336.
- [72] J.T. Katsikadelis, G.C. Tsiatas, Non-linear dynamic analysis of beams with variable stiffness, *J. Sound Vib.* 270 (2004) 847-863.
- [73] J. Gerstmayr, J. Schoberl, A 3d finite element method for flexible multibody systems, *Multibody Syst. Dyn.* 15 (2006) 309-324.
- [74] J.L. Curiel Sosa, E. de Souza Neto, D.R.J. Owen, A combined implicit-explicit algorithm in time for non-linear finite element analysis, *Commun. Numer. Meth. Engng* 22 (2006) 63-75.
- [75] K.J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [76] D.J. Dawe, *Matrix and finite element displacement analysis of structures*, Oxford University, N.Y., 1984.
- [77] J.H. Argyris, P.C. Dunne, and D.W. Scharpf, On large displacement-small strain analysis of structures with rotation degree of freedom, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 14 (1978) 401-451; 15 (1978) 99-135.
- [78] A.F. Saleeb, T.Y.P. Chang, A.S. Gendy, Effective modelling of spatial

buckling of beam assemblages, accounting for warping constraints and rotation-dependency of moments, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 33 (1992) 469-502.

- [79] H. Ziegler, *Principles of structural stability*, Birkhauser Verlag Basel., 1977.
- [80] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [81] M.A. Crisfield, A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through, *Comput. Struct.* 13 (1981) 55-62.
- [82] S.S. Rao, *Mechanical vibrations*, Fourth Edition, Prentice Hall, 2004.
- [83] S.S. William, *The linearized theory of elasticity*, First Edition, Birkhauser Boston, 2001.
- [84] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *J. Engng. Mech. Div. ASCE* 85 (1959) 67-94.
- [85] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Engng. Strut. Dyn.* 5 (1977) 283-292.

表 4.1 單對稱槽型斷面性質(例題 4.1.1, 例題 4.2.2)

Section geometry of monosymmetric channel cross section: $b = 0.057375 \text{ m}$,
 $t_f = t_w = 0.00125 \text{ m}$, $h = 0.09875 \text{ m}$

$e \text{ (m)}$	0.02229
$c \text{ (m)}$	0.01542
$y_p \text{ (m)}$	-0.03771
$z_p \text{ (m)}$	0
$A \text{ (m}^2\text{)}$	2.669×10^{-4}
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	4.5×10^{-7}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	9.396×10^{-8}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	1.449×10^{-9}
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	3.094×10^{-9}
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	0
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	4.741×10^{-9}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	1.4×10^{-10}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	2.621×10^{-12}
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	0
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	1.636×10^{-10}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	1.601×10^{-10}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	0
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	1.922×10^{-12}
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	0

表 4.2 例題 4.1.1 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s)

Mode	BC1P	BC1CM(C)	BC1CM[48]	BC1RM(R)	BC2X	BC2CM[48]	BC3X	BC3CM[48]
1	421.59 (W,T)	421.59 (W,T)	421.73	421.57	159.38 (W,T)	159.40	938.20 (W,T)	938.71
2	587.73 (A,V)	592.83 (V)	N/A	587.70	211.31 (V)	N/A	1343.52 (V)	N/A
3	1653.48 (W,T)	1653.48 (W,T)	1656.69	1652.91	616.68 (W,T)	619.21	2573.86 (W,T)	2579.75
4	1717.33 (W,T)	1717.33 (W,T)	1732.59	1688.39	932.51 (W,T)	934.00	3690.20 (V)	N/A
5	2270.23 (A,V)	2363.83 (V)	N/A	2273.52	1320.33 (V)	N/A	3880.90 (W,T)	3924.04
6	3698.25 (W,T)	3698.25 (W,T)	3714.81	3695.20	2575.91 (W,T)	2585.97	5025.75 (W,T)	5050.68
7	4473.19 (A,V)	5291.02 (V)	N/A	4337.38	3679.45 (V)	N/A	7194.27 (V)	N/A
8	6288.05 (A,V)	6445.14 (A)	N/A	5896.49	3757.01 (W,T)	3866.61	8272.94 (W,T)	8344.01
9	6544.06 (W,T)	6544.06 (W,T)	6596.09	6545.51	5018.13 (W,T)	N/A	10387.2 (W,T)	N/A
10	6687.65 (W,T)	6687.65 (W,T)	N/A	7094.14	6445.14 (A)	N/A	11803.9 (V)	N/A
Mode	BC4P(QM)	BC4C	BC4R	BC5P	BC5CM	BC5RM	BC5C	BC5R
1	163.61 (W,T)	408.32 (W,T)	178.45	163.61 (W,T)	163.61 (W,T)	163.62	408.32 (W,T)	214.67
2	925.95 (V)	823.00 (W,T)	768.58	932.01 (W,T)	925.95 (V)	931.96	823.00 (W,T)	782.78
3	932.01 (W,T)	925.95 (V)	1118.52	1082.89 (A,V)	932.01 (W,T)	1064.72	925.95 (V)	1268.26
4	2554.59(W,T)	2176.52(W,T)	2367.26	2554.59 (W,T)	2554.59 (W,T)	2565.70	2176.52 (W,T)	2369.86
5	2700.77(W,T)	2990.64 (V)	2680.95	2700.77 (W,T)	2700.77 (W,T)	2749.00	2990.64 (V)	2736.22
6	2990.64 (V)	3364.10(W,T)	3236.91	3144.22 (A,V)	2990.64 (V)	3163.62	3364.10 (W,T)	3431.85
7	5015.73(W,T)	4677.57(W,T)	4799.19	5015.73 (W,T)	5015.73 (W,T)	5016.39	4677.57 (W,T)	4800.71
8	6206.27 (V)	6206.27 (V)	6445.14 (A)	6225.49 (A,V)	6206.27 (V)	6225.34	6206.27 (V)	6453.34
9	6445.14 (A)	6445.14 (A)	6454.25	8218.19 (W,T)	8218.19 (W,T)	8166.81	7541.26 (W,T)	8027.73
10	8218.19(W,T)	7541.26(W,T)	8039.06	8475.59 (W,T)	8475.59 (W,T)	8357.95	9555.59 (W,T)	8270.84

X = P, QM, C, R; Q = C, R; $R(y_R, z_R): y_R = -0.03771 m, z_R = 0.03771 m$

表 4.3 單對稱半圓型斷面性質(例題 4.1.2, 例題 4.2.1)

Section geometry of monosymmetric semicircular cross section: $b = 0.057375 \text{ m}$ $t_f = t_w = 0.00125 \text{ m}, h = 0.09875 \text{ m}$	
$e \text{ (m)}$	0.0066
$c \text{ (m)}$	0.0089
$y_p \text{ (m)}$	-0.0155
$z_p \text{ (m)}$	0
$A \text{ (m}^2\text{)}$	308×10^{-6}
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	92.6×10^{-9}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	17.7×10^{-9}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	6.24×10^{-11}
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	4.77×10^{-10}
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	0
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	1.79×10^{-10}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	1.64×10^{-9}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	1.15×10^{-11}
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	0
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	1.52×10^{-12}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	2.31×10^{-12}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	0
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	8.17×10^{-15}
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	0

表 4.4 例題 4.1.2 單對稱半圓型斷面梁之自然頻率(rad/s)

Mode	BC1P	BC1CM(C)	BC1CM[49]	BC1RM(R)	BC2X	BC2CM[49]	BC3X	BC3CM[49]
1	558.74 (A,V)	560.71 (V)	560.90	558.73	199.80 (V)	199.81	1250.52 (W,T)	1249.16
2	945.30 (W,T)	945.30 (W,T)	945.24	944.53	400.66 (W,T)	400.80	1270.95 (V)	1271.59
3	2009.60 (W,T)	2009.60 (W,T)	2012.63	1997.26	865.83 (W,T)	865.07	2673.26 (W,T)	2670.61
4	2206.49 (A,V)	2240.04 (V)	2243.79	2207.87	1250.63 (V)	1252.30	3498.43 (V)	3505.20
5	2300.16 (W,T)	2300.16 (W,T)	2298.45	2299.70	1750.07 (W,T)	1748.92	3871.43 (W,T)	3883.57
6	3798.31 (W,T)	3798.31 (W,T)	3795.86	3797.40	3043.63 (W,T)	3045.90	4372.76 (W,T)	4370.77
7	4807.37 (A,V)	5029.68 (V)	5048.54	4785.50	3495.17 (V)	3506.58	6281.11 (W,T)	6278.85
8	5562.54 (W,T)	5562.54 (W,T)	5560.68	5561.53	4135.81 (W,T)	4171.03	6843.26 (V)	6871.67
9	6860.48 (W,T)	6860.48 (W,T)	6952.91	6488.87	4828.49 (W,T)	4827.69	8580.75 (W,T)	8581.13
10	7537.11 (A,V)	7652.06 (W,T)	7652.73	7640.26	6763.06 (W,T)	6762.97	10443.3 (W,T)	10609.6
Mode	BC4P(QM)	BC4C	BC4R	BC5P	BC5CM	BC5RM	BC5C	BC5R
1	594.37 (W,T)	773.98 (W,T)	534.42 (V,W,T)	594.37 (W,T)	594.37 (W,T)	594.78	773.98 (W,T)	535.13
2	875.88 (V)	875.88 (V)	913.38 (V,W,T)	1028.87 (A,V)	875.88 (V)	1011.10	875.88 (V)	1059.23
3	1748.84 (W,T)	1543.49 (W,T)	1670.78 (V,W,T)	1748.84 (W,T)	1748.84 (W,T)	1754.80	1543.49 (W,T)	1674.20
4	2634.59 (W,T)	2451.26 (W,T)	2577.27 (V,W,T)	2634.59 (W,T)	2634.59 (W,T)	2672.19	2451.26 (W,T)	2650.57
5	2834.65 (V)	2834.65 (V)	2840.87 (V,W,T)	3001.94 (A,V)	2834.65 (V)	3017.54	2834.65 (V)	2859.78
6	3353.38 (W,T)	3799.00 (W,T)	3382.11 (V,W,T)	3353.38 (W,T)	3353.38 (W,T)	3373.17	3799.00 (W,T)	3517.92
7	4820.82 (W,T)	4662.84 (W,T)	4605.69 (V,W,T)	4820.82 (W,T)	4820.82 (W,T)	4821.55	4662.84 (W,T)	4607.77
8	5901.65 (V)	5901.65 (V)	5904.81 (V,W,T)	6037.32 (A,V)	5901.65 (V)	6030.45	5901.65 (V)	5981.86
9	6763.05 (W,T)	6249.81 (W,T)	6782.30 (V,W,T)	6763.05 (W,T)	6763.05 (W,T)	6764.08	6249.81 (W,T)	6837.19
10	8491.39 (W,T)	8138.37 (W,T)	8458.25 (V,W,T)	8491.39 (W,T)	8491.39 (W,T)	8519.58	8138.37 (W,T)	8476.00

X = P, QM, C, R; Q = C, R; $R(y_R, z_R): y_R = -0.0155 m, z_R = 0.0155 m$

表 4.5 不對稱斷面 A 性質(例題 4.1.3)

Section geometry of unsymmetric cross section A: $b = 0.1 m$, $h = 0.3 m$, $t = 0.02 m$	
$e_1 (m)$	0.160460
$e_2 (m)$	0.247742
$c_1 (m)$	0.141176
$c_2 (m)$	0.291176
$\theta (rad)$	-0.0407036
$y_p (m)$	-0.235262
$z_p (m)$	-0.311468
$A (m^2)$	0.034
$I_y (m^4)$	5.81146×10^{-4}
$I_z (m^4)$	1.75303×10^{-3}
$\alpha_y (m^5)$	8.40048×10^{-6}
$\alpha_z (m^5)$	3.78362×10^{-5}
$\alpha_{yz} (m^5)$	-2.08704×10^{-6}
$\alpha_{zy} (m^5)$	9.38024×10^{-6}
$K_I (m^6)$	2.36446×10^{-3}
$J (m^4)$	4.53333×10^{-6}
$J_y (m^5)$	-7.05995×10^{-7}
$J_z (m^5)$	-5.4248×10^{-5}
$J_\omega (m^6)$	-2.94264×10^{-5}
$I_\omega (m^6)$	1.28016×10^{-4}
$\alpha_{y\omega} (m^6)$	3.12452×10^{-6}
$\alpha_{z\omega} (m^6)$	-4.11198×10^{-5}
$\alpha_{\omega yz} (m^6)$	-2.9055×10^{-5}
$\alpha_{\omega y} (m^7)$	1.53481×10^{-5}
$\alpha_{\omega z} (m^7)$	1.44954×10^{-5}
$\alpha_\omega (m^8)$	5.86403×10^{-7}

表 4.6 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A 之自然頻率(rad/s)

(a) 梁離散成 20 個元素

Mode	BC1P	BC1CM(C)	BC1CM[50]	BC2X	BC3X	BC4P(CM)	BC4C	BC5P	BC5CM	BC5C
1	54.41	54.54	54.54	20.56	120.71	28.47	69.09	28.50	28.47	69.09
2	80.83	81.83	81.83	30.27	183.35	105.74	90.48	117.88	105.74	90.48
3	210.56	212.57	212.57	79.36	330.70	143.98	132.43	158.38	143.98	132.43
4	212.58	212.74	212.73	120.46	474.68	306.10	269.73	309.54	306.10	269.73
5	302.70	322.45	322.45	181.25	502.33	341.73	398.81	347.23	341.73	398.81
6	459.11	475.07	475.05	331.20	645.27	425.38	461.71	444.96	425.38	461.71
7	562.80	719.56	719.57	462.95	977.56	629.00	565.30	632.02	629.00	565.30
8	790.77	804.90 (A)	N/A	501.21	1061.68	804.90 (A)	804.90 (A)	850.13	857.03	848.73
9	820.47	819.00	819.01	644.42	1269.75	857.03	848.73	1012.48	1013.10	949.86
10	878.69	840.03	N/A	804.90 (A)	1577.75	1013.10	949.86	1067.82	1072.85	1216.53
11	1293.13	1267.51	N/A	972.67	1601.13	1072.85	1216.53	1223.76	1431.19	1433.88
12	1333.75	1305.48	N/A	1059.01	1611.04 (A)	1431.19	1433.88	1570.27	1570.48	1459.15
13	1767.33	1768.81	1768.75	1241.30	2190.78	1570.48	1459.15	1598.39	1611.04 (A)	1611.04 (A)

X = P, CM, C

(b) 梁離散成 40 個元素

Mode	BC1P	BC1CM(C)	BC2X	BC3X	BC4P(CM)	BC4C	BC5P	BC5CM	BC5C
1	54.41	54.54	20.56	120.71	28.47	69.09	28.50	28.47	69.09
2	80.83	81.83	30.27	183.35	105.74	90.48	117.88	105.74	90.48
3	210.56	212.57	79.36	330.70	143.98	132.43	158.38	143.98	132.43
4	212.58	212.73	120.46	474.68	306.10	269.73	309.54	306.10	269.73
5	302.70	322.45	181.25	502.33	341.72	398.81	347.23	341.72	398.81
6	459.09	475.06	331.19	645.24	425.37	461.71	444.96	425.37	461.71
7	562.77	719.54	462.95	977.50	628.97	565.27	631.99	628.97	565.27
8	790.72	804.74 (A)	501.21	1061.51	804.74 (A)	804.74 (A)	850.07	856.98	848.69
9	820.46	818.99	644.39	1269.73	856.98	848.69	1012.41	1013.04	949.74
10	878.60	839.95	804.74 (A)	1577.19	1013.04	949.74	1067.72	1072.75	1216.50
11	1292.90	1267.39	972.61	1600.88	1072.75	1216.50	1223.40	1430.96	1433.60
12	1333.45	1305.16	1058.85	1609.80 (A)	1430.96	1433.60	1569.81	1570.00	1458.84
13	1767.23	1768.75	1241.28	2189.28	1570.00	1458.84	1597.85	1609.80 (A)	1609.80 (A)

X = P, CM, C

表 4.7 不對稱斷面 B 性質(例題 4.1.4)

Section geometry of unsymmetric cross section: $b = 0.2 \text{ m}$, $h = 0.4 \text{ m}$, $t = 0.01 \text{ m}$

$e_1 \text{ (m)}$	0.0563157
$e_2 \text{ (m)}$	0.0718981
$c_1 \text{ (m)}$	0.0166667
$c_2 \text{ (m)}$	0.133333
$\theta \text{ (rad)}$	0.228387
$y_p \text{ (m)}$	-0.054089
$z_p \text{ (m)}$	0.0865549
$A \text{ (m}^2\text{)}$	0.024
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	6.65827×10^{-4}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	1.82139×10^{-4}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	-7.53099×10^{-5}
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	6.4309×10^{-6}
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	-5.14422×10^{-6}
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	1.31968×10^{-5}
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	1.10815×10^{-4}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	5.2×10^{-6}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	2.25043×10^{-7}
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	1.42503×10^{-7}
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	-9.93268×10^{-6}
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	3.94255×10^{-6}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	-3.74015×10^{-6}
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	-1.82644×10^{-7}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	3.48639×10^{-6}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	5.47062×10^{-7}
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	7.73761×10^{-8}
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	-5.6691×10^{-8}

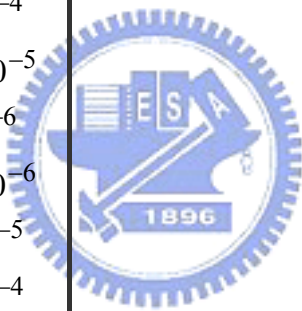


表 4.8 例題 4.1.4 不對稱斷面梁 B 之自然頻率(rad/s)

Mode	BC1P	BC1CM(C)	BC1CM[50]	BC2X	BC3X	BC4P(CM)	BC4C	BC5P	BC5CM	BC5C
1	42.40	42.41	42.41	15.48	84.94	39.24	45.81	39.29	39.24	45.81
2	74.87	74.91	74.91	29.18	127.94	74.36	67.39	76.10	74.36	67.39
3	99.46	99.48	99.48	47.64	203.43	126.16	120.76	127.88	126.16	120.76
4	150.81	150.87	150.87	92.68	213.46	148.00	163.45	148.38	148.00	163.45
5	226.73	227.12	227.12	148.38	331.36	222.28	209.18	223.13	222.28	209.18
6	304.69	304.82	304.81	203.39	392.35	290.06	306.11	291.46	290.06	306.11
7	356.92	357.86	357.85	232.31	553.67	405.22	376.53	405.22	405.22	376.53
8	472.06	474.66	474.64	342.04	624.20	453.38	472.62	454.64	453.38	472.62
9	508.53	508.85	N/A	409.06	632.79	550.77	555.65	552.01	550.77	555.65
10	739.28	766.58	N/A	553.95	910.30	644.14	641.19	644.15	644.14	641.19
11	768.56	792.11	792.13	627.93	1031.86	804.90 (A)	804.90 (A)	891.55	891.86	856.82
12	804.26	804.90 (A)	N/A	649.16	1073.95	891.86	856.82	925.77	926.92	925.45

X = P, CM, C

表 4.9 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) ($P = 0.4P_{cr} = 1790 N$)

Mode	BC1P	BC1CM(C)	BC1CM[49]	BC2X	BC2CM[39]	BC2CM[49]
1	529.93 (A,V)	531.81 (V)	532.12	157.07 (V)	157.14	157.14
2	928.51 (W,T)	928.51 (W,T)	928.47	385.11 (W,T)	385.03	385.22
3	2001.74 (W,T)	2001.74 (W,T)	2004.78	856.22 (W,T)	854.51	855.46
4	2178.32 (A,V)	2211.37 (V)	2215.58	1208.34 (V)	1208.88	1210.27
5	2272.62 (W,T)	2272.62 (W,T)	2270.87	1729.21 (W,T)	1727.25	1728.06
6	3760.80 (W,T)	3760.80 (W,T)	3758.35	3009.95 (W,T)	3006.50	3012.16
7	4780.70 (A,V)	5000.55 (V)	5020.39	3459.19 (V)	3460.15	3471.27
8	5516.97 (W,T)	5516.97 (W,T)	5515.25	4120.34 (W,T)	4114.23	4155.51
9	6851.23 (W,T)	6851.23 (W,T)	6943.80	4786.81 (W,T)	4780.25	4786.22
10	7521.25 (A,V)	7600.24 (W,T)	7601.15	6712.19 (W,T)	6704.16	6712.26
11	7600.24 (W,T)	8886.37 (V)	N/A	6795.92 (V)	N/A	N/A
Mode	BC3X	BC3CM[49]	BC4P(CM)	BC4C		
1	1236.32 (W,T)	1234.96	587.26 (W,T)	766.03 (W,T)		
2	1255.14 (V)	1256.07	854.47 (V)	854.47 (V)		
3	2647.11 (W,T)	2644.53	1727.47 (W,T)	1529.71 (W,T)		
4	3476.69 (V)	3484.21	2619.02 (W,T)	2427.17 (W,T)		
5	3863.15 (W,T)	3875.28	2809.89 (V)	2809.89 (V)		
6	4340.04 (W,T)	4338.35	3327.86 (W,T)	3774.16 (W,T)		
7	6237.72 (W,T)	6235.75	4777.90 (W,T)	4631.11 (W,T)		
8	6818.88 (V)	6848.67	5875.11 (V)	5875.11 (V)		
9	8531.48 (W,T)	8532.25	6712.17 (W,T)	6206.37 (W,T)		
10	9658.38 (A)	N/A	8476.40 (W,T)	8093.33 (W,T)		
11	10435.5 (W,T)	10601.9	9053.58 (W,T)	9658.38 (A)		

X = P, CM, C

表 4.10 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1P)

Mode	P/P_{cr}				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	558.74 (A,V)	499.45 (A,V)	432.04 (A,V)	351.85 (A,V)	246.74 (A,V)
2	945.30 (W,T)	911.40 (W,T)	876.18 (W,T)	839.45 (W,T)	801.02 (W,T)
3	2009.60 (W,T)	1993.85 (W,T)	1977.98 (W,T)	1961.99 (W,T)	1945.86 (W,T)
4	2206.49 (A,V)	2149.77 (A,V)	2091.43 (A,V)	2031.34 (A,V)	1969.34 (A,V)
5	2300.16 (W,T)	2244.75 (W,T)	2187.90 (W,T)	2129.51 (W,T)	2069.43 (W,T)
6	3798.31 (W,T)	3722.90 (W,T)	3645.88 (W,T)	3567.16 (W,T)	3486.61 (W,T)
7	4807.37 (A,V)	4753.83 (A,V)	4699.48 (A,V)	4644.31 (A,V)	4588.27 (A,V)
8	5562.54 (W,T)	5471.02 (W,T)	5377.88 (W,T)	5283.05 (W,T)	5186.43 (W,T)
9	6860.48 (W,T)	6841.98 (W,T)	6823.43 (W,T)	6804.84 (W,T)	6786.20 (W,T)
10	7537.11 (A,V)	7505.24 (A,V)	7442.53 (W,T)	7335.43 (W,T)	7226.69 (W,T)
11	7652.06 (W,T)	7548.05 (W,T)	7472.74 (A,V)	7439.60 (A,V)	7405.79 (A,V)

$P_{cr} = 17900 N$

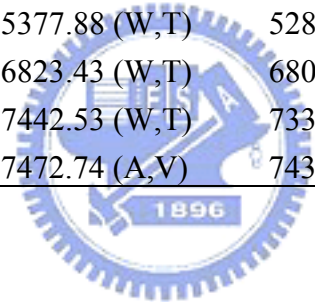


表 4.11 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1CM(C))

Mode	P/P_{cr}				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	560.71 (V)	501.22 (V)	433.56 (V)	353.09 (V)	247.61 (V)
2	945.30 (W,T)	911.40 (W,T)	876.18 (W,T)	839.45 (W,T)	801.02 (W,T)
3	2009.60 (W,T)	1993.85 (W,T)	1977.98 (W,T)	1961.99 (W,T)	1945.86 (W,T)
4	2240.04 (V)	2182.30 (V)	2122.92 (V)	2061.78 (V)	1998.72 (V)
5	2300.16 (W,T)	2244.75 (W,T)	2187.90 (W,T)	2129.51 (W,T)	2069.43 (W,T)
6	3798.31 (W,T)	3722.90 (W,T)	3645.88 (W,T)	3567.16 (W,T)	3486.61 (W,T)
7	5029.68 (V)	4971.24 (V)	4912.06 (V)	4852.10 (V)	4791.34 (V)
8	5562.54 (W,T)	5471.02 (W,T)	5377.88 (W,T)	5283.05 (W,T)	5186.43 (W,T)
9	6860.48 (W,T)	6841.98 (W,T)	6823.43 (W,T)	6804.84 (W,T)	6786.20 (W,T)
10	7652.06 (W,T)	7548.05 (W,T)	7442.53 (W,T)	7335.43 (W,T)	7226.69 (W,T)
11	8916.21 (V)	8856.42 (V)	8796.16 (V)	8735.43 (V)	8674.22 (V)

$P_{cr} = 17900 N$



表 4.12 例題 4.2.1 單對稱半圓形斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC2X)

Mode	P/P_{cr}				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	199.80 (V)	180.01 (V)	157.07 (V)	129.22 (V)	91.98 (V)
2	400.66 (W,T)	393.01 (W,T)	385.11 (W,T)	376.97 (W,T)	368.55 (W,T)
3	865.83 (W,T)	861.06 (W,T)	856.22 (W,T)	851.32 (W,T)	846.35 (W,T)
4	1250.63 (V)	1229.69 (V)	1208.34 (V)	1186.56 (V)	1164.35 (V)
5	1750.07 (W,T)	1739.67 (W,T)	1729.21 (W,T)	1718.70 (W,T)	1708.14 (W,T)
6	3043.63 (W,T)	3026.85 (W,T)	3009.95 (W,T)	2992.93 (W,T)	2975.80 (W,T)
7	3495.17 (V)	3477.23 (V)	3459.19 (V)	3441.05 (V)	3422.81 (V)
8	4135.81 (W,T)	4128.11 (W,T)	4120.34 (W,T)	4112.51 (W,T)	4104.63 (W,T)
9	4828.49 (W,T)	4807.69 (W,T)	4786.81 (W,T)	4765.86 (W,T)	4744.87 (W,T)
10	6763.06 (W,T)	6737.68 (W,T)	6712.19 (W,T)	6686.59 (W,T)	6660.89 (W,T)
11	6830.45 (V)	6813.21 (V)	6795.92 (V)	6778.58 (V)	6761.19 (V)

X = P, CM, C , $P_{cr} = 4475 N$

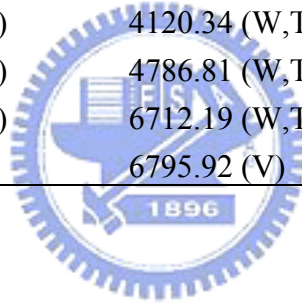
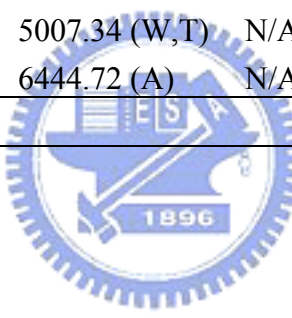


表 4.13 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s)($P = 2560 N$)

Mode	BC1P	BC1CM(C)	BC1CM[48]	BC2X	BC2CM[48]	BC3X	BC3CM[48]
1	412.75 (W,T)	412.75 (W,T)	412.93	148.27 (W,T)	148.28	933.25 (W,T)	933.81
2	581.49 (A,V)	586.53 (V)	N/A	202.88 (V)	N/A	1339.96 (V)	N/A
3	1644.49 (W,T)	1644.49 (W,T)	1647.77	613.87 (W,T)	616.44	2567.05 (W,T)	2573.09
4	1715.18 (W,T)	1715.18 (W,T)	1730.51	919.45 (W,T)	920.93	3685.18 (V)	N/A
5	2264.15 (A,V)	2357.38 (V)	N/A	1311.05 (V)	N/A	3879.65 (W,T)	3922.84
6	3689.13 (W,T)	3689.13 (W,T)	3705.89	2564.63 (W,T)	2574.79	5018.17 (W,T)	5043.39
7	4469.17 (A,V)	5284.28 (V)	N/A	3671.32 (V)	N/A	6444.72 (A)	N/A
8	6283.94 (A,V)	6444.72 (A)	N/A	3753.86 (W,T)	3863.47	7188.45 (V)	N/A
9	6534.79 (W,T)	6534.79 (W,T)	6587.17	5007.34 (W,T)	N/A	8264.82 (W,T)	8336.34
10	6685.42 (W,T)	6685.42 (W,T)	N/A	6444.72 (A)	N/A	10385.4 (W,T)	N/A
Mode	BC4P(CM)	BC4C					
1	152.87 (W,T)	405.09 (W,T)					
2	918.99 (W,T)	813.74 (W,T)					
3	921.20 (V)	921.20 (V)					
4	2544.66 (W,T)	2168.91 (W,T)					
5	2697.78 (W,T)	2985.00 (V)					
6	2985.00 (V)	3359.78 (W,T)					
7	5004.96 (W,T)	4668.73 (W,T)					
8	6200.04 (V)	6200.04 (V)					
9	6444.72 (A)	6444.72 (A)					
10	8208.66 (W,T)	7533.01 (W,T)					

X = P, CM, C

表 4.14 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1P)

Mode	P / P_{cr}				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	421.59 (W,T)	376.93 (W,T)	326.18 (W,T)	265.86 (W,T)	186.93 (W,T)
2	587.73 (A,V)	556.89 (A,V)	524.16 (A,V)	489.16 (A,V)	451.37 (A,V)
3	1653.48 (W,T)	1609.52 (W,T)	1564.30 (W,T)	1517.69 (W,T)	1469.57 (W,T)
4	1717.33 (W,T)	1706.91 (W,T)	1696.42 (W,T)	1685.88 (W,T)	1675.27 (W,T)
5	2270.23 (A,V)	2240.66 (A,V)	2210.59 (A,V)	2180.00 (A,V)	2148.88 (A,V)
6	3698.25 (W,T)	3653.95 (W,T)	3609.08 (W,T)	3563.61 (W,T)	3517.52 (W,T)
7	4473.19 (A,V)	4453.64 (A,V)	4433.75 (A,V)	4413.52 (A,V)	4392.93 (A,V)
8	6288.05 (A,V)	6268.15 (A,V)	6248.26 (A,V)	6228.39 (A,V)	6208.52 (A,V)
9	6544.06 (W,T)	6499.12 (W,T)	6453.82 (W,T)	6408.18 (W,T)	6362.18 (W,T)
10	6687.65 (W,T)	6676.87 (W,T)	6666.07 (W,T)	6655.25 (W,T)	6644.42 (W,T)

$P_{cr} = 61878 N$

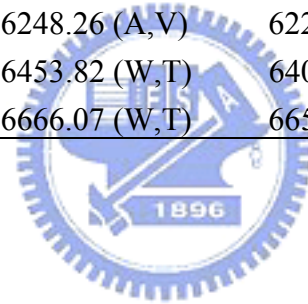


表 4.15 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC1CM(C))

Mode	P/P_{cr}				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	421.59 (W,T)	376.93 (W,T)	326.18 (W,T)	265.86 (W,T)	186.93 (W,T)
2	592.83 (V)	561.71 (V)	528.68 (V)	493.37 (V)	455.25 (V)
3	1653.48 (W,T)	1609.52 (W,T)	1564.30 (W,T)	1517.69 (W,T)	1469.57 (W,T)
4	1717.33 (W,T)	1706.91 (W,T)	1696.42 (W,T)	1685.88 (W,T)	1675.27 (W,T)
5	2363.83 (V)	2332.46 (V)	2300.59 (V)	2268.21 (V)	2235.28 (V)
6	3698.25 (W,T)	3653.95 (W,T)	3609.08 (W,T)	3563.61 (W,T)	3517.52 (W,T)
7	5291.02 (V)	5258.35 (V)	5225.40 (V)	5192.17 (V)	5158.66 (V)
8	6445.14 (A)	6443.07 (A)	6441.00 (A)	6408.18 (W,T)	6362.18 (W,T)
9	6544.06 (W,T)	6499.12 (W,T)	6453.82 (W,T)	6438.92 (A)	6436.84 (A)
10	6687.65 (W,T)	6676.87 (W,T)	6666.07 (W,T)	6655.25 (W,T)	6644.42 (W,T)

$P_{cr} = 61878 N$

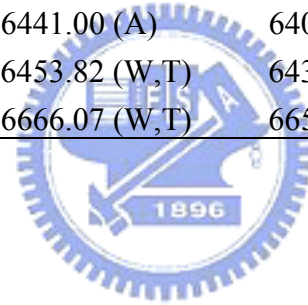


表 4.16 例題 4.2.2 單對稱槽型斷面梁之自然頻率(rad/s) (邊界條件 BC2X)

Mode	P/P_{cr}				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	159.38 (W,T)	143.78 (W,T)	125.65 (W,T)	103.58 (W,T)	74.00 (W,T)
2	211.31 (V)	199.57 (V)	186.88 (V)	173.02 (V)	157.67 (V)
3	616.68 (W,T)	612.80 (W,T)	608.89 (W,T)	604.94 (W,T)	600.96 (W,T)
4	932.51 (W,T)	914.47 (W,T)	896.01 (W,T)	877.13 (W,T)	857.79 (W,T)
5	1320.33 (V)	1307.52 (V)	1294.57 (V)	1281.45 (V)	1268.19 (V)
6	2575.91 (W,T)	2560.35 (W,T)	2544.69 (W,T)	2528.92 (W,T)	2513.06 (W,T)
7	3679.45 (V)	3668.25 (V)	3657.00 (V)	3645.72 (V)	3634.39 (V)
8	3757.01 (W,T)	3752.67 (W,T)	3748.33 (W,T)	3743.98 (W,T)	3739.63 (W,T)
9	5018.13 (W,T)	5003.25 (W,T)	4988.33 (W,T)	4973.36 (W,T)	4958.34 (W,T)
10	6445.14 (A)	6444.55 (A)	6443.96 (A)	6443.37 (A)	6442.78 (A)

$P_{cr} = 17636 N$

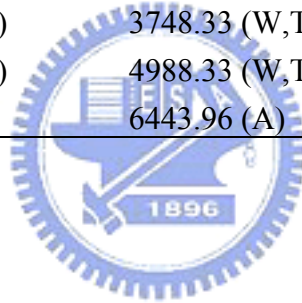


表 4.17 I 型斷面性質(例題 4.2.3)

Section geometry of I section:
 $d = 0.3m$, $b = 0.15m$, $t_f = 0.0107m$,
 $t_w = 0.0071m$

y_p (m)	0
z_p (m)	0
A (m^2)	5264.03×10^{-6}
I_y (m^4)	8.15214×10^{-5}
I_z (m^4)	6.02738×10^{-6}
α_y (m^5)	0
α_z (m^5)	0
α_{yz} (m^5)	0
α_{zy} (m^5)	0
K_I (m^6)	1.86144×10^{-6}
J (m^4)	1.57019×10^{-7}
J_y (m^5)	0
J_z (m^5)	0
J_ω (m^6)	0
I_ω (m^6)	1.26052×10^{-7}
$\alpha_{y\omega}$ (m^6)	0
$\alpha_{z\omega}$ (m^6)	0
$\alpha_{\omega yz}$ (m^6)	1.25937×10^{-7}
$\alpha_{\omega y}$ (m^7)	0
$\alpha_{\omega z}$ (m^7)	0
α_ω (m^8)	0

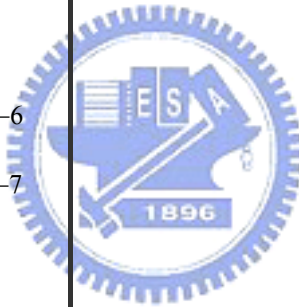


表 4.18 例題 4.2.3 I 型斷面梁之自然頻率(rad/s)

(a) 梁離散成 20 個元素

Mode	P/P_{cr}								
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	λ	1.0	1.2	1.4
1	161.81	144.67	125.19	102.02	71.70	0	16.25	102.70	142.81
2	529.93	509.61	488.43	466.26	442.96	418.98	419.59	442.34	462.38
3	1134.73	1113.41	1091.65	1069.42	1046.70	1024.04	1024.59	1046.41	1067.92
4	1975.99	1954.05	1931.83	1909.33	1886.55	1864.04	1864.55	1884.91	1905.45
5	2038.14 (A)	2037.18 (A)	2036.21 (A)	2035.24 (A)	2034.27 (A)	2033.33 (A)	2033.45	2038.73	2044.58
6	3050.11	3027.61	3004.91	2982.02	2958.93	2936.22	2936.72	2956.82	2977.29
7	4352.33	4329.24	4306.00	4282.61	4259.07	4235.98	4236.44	4255.35	4274.72
8	5877.22	5853.48	5829.62	5805.65	5781.55	5757.93	5758.36	5775.46	5792.95
9	6127.01 (A)	6124.10 (A)	6121.20 (A)	6118.29 (A)	6115.37 (A)	6112.53 (A)	6112.45	6109.45	6106.62
10	7618.96	7594.51	7569.97	7545.31	7520.56	7496.32	7496.73	7513.21	7530.19

$\lambda = P_{cr}^* / P_{cr}$, $P_{cr} = 1744.34 \text{ kN}$, $P_{cr}^* = 1735.60 \text{ kN}$

(b) 梁離散成 40 個元素

Mode	P/P_{cr}								
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	λ	1.0	1.2	1.4
1	161.81	144.67	125.19	102.02	71.70	0	16.25	102.71	142.82
2	529.93	509.61	488.42	466.25	442.96	418.97	419.57	441.82	461.42
3	1134.70	1113.38	1091.61	1069.39	1046.66	1024.01	1024.52	1044.97	1065.12
4	1975.80	1953.86	1931.64	1909.14	1886.35	1863.84	1864.28	1882.12	1900.10
5	2037.75 (A)	2036.78 (A)	2035.82 (A)	2034.85 (A)	2033.88 (A)	2032.93 (A)	2033.06	2038.42	2044.32
6	3049.39	3026.88	3004.18	2981.29	2958.19	2935.47	2935.88	2952.02	2968.38
7	4350.20	4327.10	4303.85	4280.46	4256.91	4233.80	4234.13	4274.31	4260.70
8	5871.91	5848.16	5824.29	5800.30	5776.18	5752.55	5752.78	5762.04	5771.34
9	6116.39 (A)	6113.49 (A)	6110.59 (A)	6117.69 (A)	6104.78 (A)	6101.93 (A)	6101.87	6099.07	6096.41
10	7607.33	7582.86	7558.29	7533.61	7508.83	7484.57	7484.73	7491.22	7497.70

$$\lambda = P_{cr}^* / P_{cr}, \quad P_{cr} = 1744.34 \text{ kN}, \quad P_{cr}^* = 1735.60 \text{ kN}$$

表 4.19 單對 T 型斷面性質(例題 4.2.4, 例題 4.2.5, 例題 4.3.7)

Section geometry of monosymmetric T cross section:	
$b = 0.1 \text{ m}$	
$t_f = 0.0085 \text{ m}, \quad t_w = 0.0056 \text{ m}$	
$h = 0.192 \text{ m}$	
$e \text{ (m)}$	0.000379313
$c \text{ (m)}$	0.0542593
$y_p \text{ (m)}$	0
$z_p \text{ (m)}$	0.05388
$A \text{ (m}^2\text{)}$	1925.2×10^{-6}
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	7.6839×10^{-6}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	7.11143×10^{-7}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	-3.55189×10^{-7}
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	3.83164×10^{-8}
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	2.90494×10^{-7}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	3.17103×10^{-8}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	8.54274×10^{-10}
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	0
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	0
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	3.86899×10^{-11}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	3.01604×10^{-11}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	-2.84975×10^{-12}
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	0
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	0

表 4.20 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁之自然頻率(rad/s)

(a) 邊界條件 BC1P

Mode	P / P_{cr}							
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	λ	1.1	1.2
1	190.81 (V,T)	170.67 (V,T)	147.79 (V,T)	120.64 (V,T)	85.23 (V,T)	0 (V,T)	59.89	31.01
2	401.87 (V,T)	392.68 (V,T)	383.28 (V,T)	356.62 (V,T)	313.09 (V,T)	262.64 (V,T)	254.53	179.02
3	463.22 (V,T)	430.65 (V,T)	395.38 (V,T)	373.64 (V,T)	363.74 (V,T)	353.61 (V,T)	334.88	365.38
4	729.54 (V,T)	683.16 (V,T)	633.37 (V,T)	579.30 (V,T)	519.60 (V,T)	452.37 (V,T)	541.83	604.77
5	798.98 (A,W)	794.45 (A,W)	789.89 (A,W)	785.29 (A,W)	740.52 (V,T)	657.41 (V,T)	786.69	769.56
6	1007.27 (V,T)	947.68 (V,T)	884.06 (V,T)	815.47 (V,T)	780.67 (A,W)	776.05 (A,W)	1077.59	1173.32
7	1303.76 (V,T)	1231.97 (V,T)	1155.70 (V,T)	1074.00 (V,T)	985.52 (V,T)	888.65 (V,T)	1309.00	1340.87
8	1336.60 (V,T)	1325.58 (V,T)	1314.48 (V,T)	1303.28 (V,T)	1260.02 (V,T)	1151.62 (V,T)	1390.85	1562.74
9	1623.85 (V,T)	1541.01 (V,T)	1453.43 (V,T)	1360.19 (V,T)	1291.98 (V,T)	1280.63 (V,T)	1428.61	1968.77
10	1971.33 (V,T)	1878.64 (V,T)	1781.09 (V,T)	1677.83 (V,T)	1567.75 (V,T)	1449.81 (V,T)	1816.08	2233.60

$\lambda = P_{cr}^* / P_{cr}$, $P_{cr}^* = 221.49 \text{ kN}$, $P_{cr} = 221.65 \text{ kN}$

表 4.21 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁之自然頻率(rad/s)

(b) 邊界條件 BC1CM

Mode	P / P_{cr}							
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	λ	1.1	1.2
1	190.81 (V,T)	170.67 (V,T)	147.79 (V,T)	120.64 (V,T)	85.23 (V,T)	0 (V,T)	58.66	22.75
2	401.87 (V,T)	392.68 (V,T)	383.28 (V,T)	356.62 (V,T)	313.09 (V,T)	262.64 (V,T)	254.63	177.20
3	463.22 (V,T)	430.65 (V,T)	395.38 (V,T)	373.64 (V,T)	363.74 (V,T)	353.61 (V,T)	333.13	359.08
4	729.54 (V,T)	683.16 (V,T)	633.37 (V,T)	579.30 (V,T)	519.60 (V,T)	452.37 (V,T)	542.22	606.95
5	804.87 (W)	800.30 (W)	795.70 (W)	791.08 (W)	740.52 (V,T)	657.41 (V,T)	786.44	768.38
6	1007.27 (V,T)	947.68 (V,T)	884.06 (V,T)	815.47 (V,T)	786.42 (W)	776.05 (W)	1077.87	1173.17
7	1303.76 (V,T)	1231.97 (V,T)	1155.70 (V,T)	1074.00 (V,T)	985.52 (V,T)	888.65 (V,T)	1309.03	1341.59
8	1336.60 (V,T)	1325.58 (V,T)	1314.48 (V,T)	1303.28 (V,T)	1260.02 (V,T)	1151.62 (V,T)	1405.63	1562.71
9	1623.85 (V,T)	1541.01 (V,T)	1453.43 (V,T)	1360.19 (V,T)	1291.98 (V,T)	1280.63 (V,T)	1428.53	1973.49
10	1971.33 (V,T)	1878.64 (V,T)	1781.09 (V,T)	1677.83 (V,T)	1567.75 (V,T)	1449.81 (V,T)	1817.59	2283.81

$\lambda = P_{cr}^* / P_{cr}$, $P_{cr}^* = 221.49 \text{ kN}$, $P_{cr} = 221.65 \text{ kN}$

表 4.22 例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁之自然頻率(rad/s)

Mode	P/P_{cr}							
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.1	1.15
1	78.42 (V,T)	71.21 (V,T)	62.72 (V,T)	52.18 (V,T)	37.68 (V,T)	0 (V,T)	25.19	11.36
2	173.56 (V,T)	169.33 (V,T)	164.85 (V,T)	160.07 (V,T)	154.96 (V,T)	149.48 (V,T)	53.83	35.52
3	287.48 (W)	285.25 (W)	283.01 (W)	280.74 (W)	278.44 (W)	276.13 (W)	259.31	245.50
4	351.24 (V,T)	342.69 (V,T)	333.99 (V,T)	325.16 (V,T)	316.19 (V,T)	307.10 (V,T)	383.23	369.16
5	582.34 (V,T)	567.83 (V,T)	552.89 (V,T)	537.49 (V,T)	521.58 (V,T)	505.13 (V,T)	662.16	596.54
6	809.52 (V,T)	801.12 (V,T)	791.84 (V,T)	781.28 (V,T)	768.94 (V,T)	754.39 (V,T)	797.25	774.90
7	891.15 (V,T)	873.48 (V,T)	856.08 (V,T)	839.27 (V,T)	823.49 (V,T)	809.08 (V,T)	1125.89	1074.78
8	1183.18 (V,T)	1159.47 (V,T)	1135.30 (V,T)	1110.65 (V,T)	1085.49 (V,T)	1059.83 (V,T)	1301.48	1281.73
9	1488.77 (V,T)	1460.33 (V,T)	1431.29 (V,T)	1401.61 (V,T)	1371.25 (V,T)	1340.17 (V,T)	1610.85	1647.35
10	1777.22 (W)	1774.73 (W)	1762.38 (V,T)	1728.72 (V,T)	1694.33 (V,T)	1659.17 (V,T)	1836.14	1766.26

$P_{cr} = 82.1393kN$



表 4.23 不對稱角型斷面性質(例題 4.2.6, 例題 4.3.10)

Section geometry of unsymmetric angle cross section: $b = 0.04775 \text{ m}$, $t_f = t_w = 0.0065 \text{ m}$, $h = 0.07275 \text{ m}$	
$e_1 \text{ (m)}$	4.68012×10^{-4}
$e_2 \text{ (m)}$	-1.09425×10^{-4}
$c_1 \text{ (m)}$	0.0219608
$c_2 \text{ (m)}$	0.00946084
$\theta \text{ (rad)}$	-0.421363
$y_p \text{ (m)}$	-0.0156986
$z_p \text{ (m)}$	-0.0175238
$A \text{ (m}^2\text{)}$	7.8325×10^{-4}
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	9.45108×10^{-8}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	5.30527×10^{-7}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	3.31688×10^{-10}
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	4.96304×10^{-9}
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	-1.34364×10^{-9}
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	3.81393×10^{-9}
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	2.89904×10^{-9}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	1.10308×10^{-8}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	-9.66507×10^{-11}
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	8.65839×10^{-11}
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	3.76161×10^{-14}
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	3.74227×10^{-12}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	2.78027×10^{-13}
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	1.34659×10^{-12}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	-2.51967×10^{-12}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	2.68212×10^{-14}
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	7.11156×10^{-14}
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	1.77158×10^{-17}

表 4.24 例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁之自然頻率(rad/s)

Mode	P/P_{cr}							
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.1	1.2
1	97.37	87.78	76.66	63.15	45.07	0	39.37	54.91
2	220.17	216.46	212.66	208.75	204.75	200.62	107.91	95.72
3	475.37	472.07	468.53	464.71	460.55	456.04	520.56	497.80
4	614.90	606.47	598.06	589.70	581.43	573.29	727.22	741.84
5	1093.78	1089.04	1084.27	1079.47	1074.63	1069.76	1239.51	1315.32
6	1453.22	1444.97	1436.67	1428.32	1419.93	1411.46	1512.39	1475.66
7	1946.80	1941.99	1937.13	1932.22	1927.25	1922.19	2357.31	2376.41
8	2163.23	2155.45	2147.64	2139.80	2131.93	2123.94	2772.40	2824.19
9	2517.67	2510.14	2502.61	2495.08	2487.54	2479.98	3729.79	4021.50
10	3180.99	3169.05	3157.07	3145.05	3132.98	3120.75	4000.94	4108.20

$P_{cr} = 22.791 \text{ kN}$

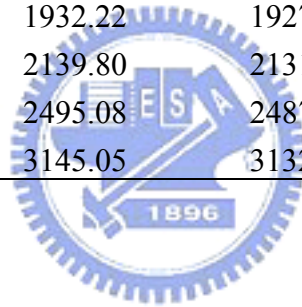


表 4.25 I 型斷面性質 (例題 4.3.4)

Section geometry of I section:	
$d = 0.56m$, $b = 0.3m$, $t_f = 0.03m$,	
$t_w = 0.012m$	
y_p (m)	0
z_p (m)	0
A (m^2)	0.024
I_y (m^4)	1.41428×10^{-3}
I_z (m^4)	1.35076×10^{-4}
α_y (m^5)	0
α_z (m^5)	0
α_{yz} (m^5)	0
α_{zy} (m^5)	0
K_I (m^6)	1.16417×10^{-4}
J (m^4)	5.70528×10^{-6}
J_y (m^5)	0
J_z (m^5)	0
J_ω (m^6)	0
I_ω (m^6)	9.49229×10^{-6}
$\alpha_{y\omega}$ (m^6)	0
$\alpha_{z\omega}$ (m^6)	0
$\alpha_{\omega yz}$ (m^6)	9.47204×10^{-6}
$\alpha_{\omega y}$ (m^7)	0
$\alpha_{\omega z}$ (m^7)	0
α_ω (m^8)	0

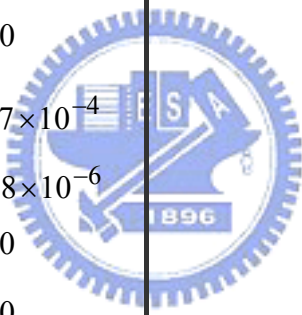


表 4.26 不對稱 Z 型斷面性質(例題 4.3.5)

Section geometry of unsymmetric Z-section: $b = 0.08573 \text{ m}$, $t_f = 0.0127 \text{ m}$, $h = 0.14288 \text{ m}$, $t_w = 0.0127 \text{ m}$	
$\theta \text{ (rad)}$	0.491925
$y_p \text{ (m)}$	0
$z_p \text{ (m)}$	0
$A \text{ (m}^2\text{)}$	0.00399212
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	1.7803×10^{-5}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	1.78584×10^{-6}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	0
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	1.45275×10^{-7}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	2.1463×10^{-7}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	0
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	-1.79253×10^{-10}
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	1.62015×10^{-8}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	-2.47448×10^{-8}
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	-9.82441×10^{-10}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	1.11326×10^{-8}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	0
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	0
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	-2.62597×10^{-11}

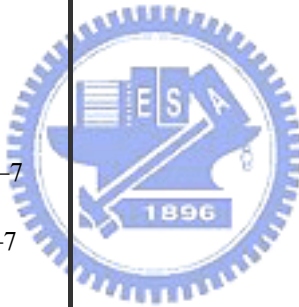


表 4.27 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁在靜態負載下的自然頻率 (rad/s)

Mode	$P(kN)$			
	0	40	80	100
1	28.4427 (V,W)	21.4576	10.5668	11.8546
2	89.7564 (V,W)	85.1058	37.2891	17.0184
3	113.751 (V,W)	107.445	99.6806	94.4964
4	174.075 (T)	178.361	242.291	119.579
5	255.872 (V,W)	249.692	244.323	236.843



表 4.28 單對稱槽型斷面性質(例題 4.3.6)

Section geometry of C15 × 50 section:	
$b = 0.0943864 \text{ m}, \quad t_f = 0.01651 \text{ m},$	
$h = 0.381 \text{ m}, \quad t_w = 0.0181864 \text{ m}$	
$e \text{ (m)}$	2.70790×10^{-2}
$c \text{ (m)}$	1.45057×10^{-2}
$y_p \text{ (m)}$	-0.0415847
$z_p \text{ (m)}$	0
$A \text{ (m}^2\text{)}$	1.00457×10^{-2}
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	1.96993×10^{-4}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	7.29278×10^{-6}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	3.06288×10^{-7}
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	2.48355×10^{-6}
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	0
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	7.66835×10^{-6}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	1.04709×10^{-6}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	2.17715×10^{-8}
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	0
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	1.93943×10^{-7}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	1.93341×10^{-7}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	0
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	6.59048×10^{-9}
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	0

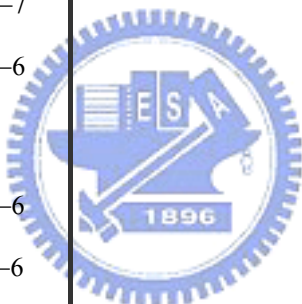


表 4.29 例題 4.3.6 懸臂單對稱槽型斷面直角構架的自然頻率 (rad/s)

Case (a)

Mode	P (kN)					
	0	1	5	10	12	15
1	1.45621	1.47249	1.48045	1.31778	1.15402	0.491323
2	9.20958	9.13123	8.76590	8.17417	7.88427	7.28736
3	22.2510	22.2503	22.2459	22.2345	22.2248	22.1635
4	52.5174	52.2156	50.5793	47.0820	46.5246	44.9420
5	57.5470	57.7289	58.2994	58.5087	58.3236	55.4011
6	65.0776	65.3708	66.4897	67.5574	67.8381	69.6189
7	82.2878	82.2339	81.8563	81.1439	80.8703	80.8436
8	118.023	117.977	118.055	118.727	119.163	120.915
9	177.969	177.650	176.082	173.626	172.531	170.942
10	185.870	186.187	187.408	188.662	189.019	188.988
Mode	16	17	18			
1	0.831530	1.09398	1.21430			
2	5.88692	5.51565	5.37414			
3	21.1809	19.8542	18.7423			
4	35.6047	30.9774	28.3863			
5	51.9954	52.3634	52.4062			
6	73.9207	74.4223	74.8334			
7	98.0495	104.221	105.576			
8	149.242	159.972	163.399			
9	173.981	176.965	177.013			
10	187.678	195.528	203.647			

表 4.30 例題 4.3.6 懸臂單對稱槽型斷面直角構架的自然頻率(rad/s)

Case (b)

Mode	P (kN)					
	0	1	5	10	12	15
1	1.64353	1.66314	1.68882	1.57324	1.45706	1.13438
2	9.25952	9.17767	8.82407	8.31819	8.09329	7.72492
3	22.2699	22.2691	22.2649	22.2575	22.2530	22.2425
4	54.8147	54.5103	53.1059	50.9363	49.9507	48.4105
5	58.3804	58.5215	58.9344	59.1509	59.1260	58.7841
6	68.6792	69.0721	70.4862	71.7157	71.9739	72.1636
7	82.9717	82.8285	82.2607	81.6969	81.5854	81.5956
8	149.486	149.519	149.735	150.204	150.455	150.933
9	182.405	182.129	180.892	179.068	178.265	177.013
10	200.090	200.403	201.557	202.747	203.128	203.551
Mode	16	17	18			
1	0.943630	0.608897	0.805160			
2	7.58738	7.40579	6.26222			
3	22.2386	22.2613	23.4605			
4	47.9411	47.6328	38.8879			
5	58.3917	57.1399	55.9675			
6	72.3126	73.0793	76.5056			
7	81.6455	81.8062	94.7494			
8	151.174	151.811	159.534			
9	176.610	176.331	186.422			
10	203.621	203.534	203.529			

表 4.31 例題 4.3.7 懸臂單對稱 T 型斷面梁在靜態負荷作用下的自然頻率
(rad/s) ($Q=0$)

Mode	$P(kN)$			
	0	1	2	3
1	21.3660 (V,T)	21.6560	21.3603	16.0155
2	71.9937 (U,W)	66.8494	52.5967	33.0243
3	77.7351 (V,T)	71.9789	71.9652	71.9525
4	127.173 (V,T)	126.485	124.996	121.833
5	229.972 (V,T)	213.954	195.104	171.775



表 4.32 單對稱槽型斷面性質(例題 4.3.8)

Section geometry of monosymmetric channel cross section: $b = 0.095 \text{ m}$, $t_f = 0.016 \text{ m}$, $h = 0.284 \text{ m}$, $t_w = 0.01 \text{ m}$

$e \text{ (m)}$	0.0361532
$c \text{ (m)}$	0.0244898
$y_p \text{ (m)}$	-0.060643
$z_p \text{ (m)}$	0
$A \text{ (m}^2\text{)}$	0.00588
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	8.0452×10^{-5}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	5.62288×10^{-6}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	1.51412×10^{-7}
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	9.44509×10^{-7}
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	0
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	2.72916×10^{-6}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	3.5408×10^{-7}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	0
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	1.07362×10^{-8}
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	0
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	7.96053×10^{-8}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	7.89924×10^{-8}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	0
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	1.68193×10^{-9}
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	0

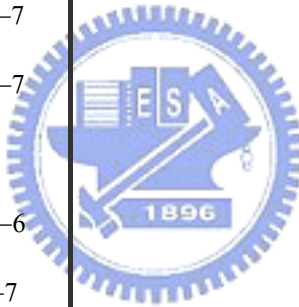


表 4.33 例題 4.3.8 懸臂單對稱槽型斷面梁在靜態負荷作用下的自然頻率
(rad/s)

Case (a)

Mode	$P(kN)$			
	0	5	10	15
1	6.96476(U,V)	6.56686	3.63310	5.78588
2	24.3409(W,T)	23.1363	12.5719	7.84152
3	42.5668(W,T)	37.9482	49.8057	44.7099
4	43.6403(U,V)	48.3398	53.0315	52.3435
5	106.433(W,T)	103.993	102.671	95.3690

Case (b)

Mode	$P(kN)$			
	0	5	10	15
1	6.96476	6.51492	5.00976	5.83283
2	24.3409	22.3251	9.71661	7.73444
3	42.5668	36.0113	47.5799	44.5667
4	43.6403	47.1110	57.2560	53.5454
5	106.433	103.195	103.469	92.5789

Case (c)

Mode	$P(kN)$			
	0	5	10	15
1	6.96476	6.61987	4.72911	5.32015
2	24.3409	24.1046	20.2155	8.19636
3	42.5668	38.5140	36.1997	47.0310
4	43.6403	49.8040	55.8930	52.2762
5	106.433	105.543	101.068	102.402

表 4.34 不對稱槽型斷面性質(例題 4.3.9)

Section geometry of unsymmetric channel cross section: $b_1 = 0.02 \text{ m}$, $b_2 = 0.04 \text{ m}$, $h = 0.1 \text{ m}$, $t_1 = t_2 = t_w = 0.005 \text{ m}$	
$e_1 \text{ (m)}$	0.00676229
$e_2 \text{ (m)}$	0.0263382
$c_1 \text{ (m)}$	0.00625
$c_2 \text{ (m)}$	0.05625
$\theta \text{ (rad)}$	-0.111609
$y_p \text{ (m)}$	0.0158648
$z_p \text{ (m)}$	-0.024725
$A \text{ (m}^2\text{)}$	0.0008
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	1.14935×10^{-6}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	7.64828×10^{-8}
$\alpha_y \text{ (m}^5\text{)}$	7.47572×10^{-9}
$\alpha_z \text{ (m}^5\text{)}$	-8.42751×10^{-10}
$\alpha_{yz} \text{ (m}^5\text{)}$	-5.10444×10^{-9}
$\alpha_{zy} \text{ (m}^5\text{)}$	-1.56225×10^{-9}
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	9.38577×10^{-9}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	6.66667×10^{-9}
$J_y \text{ (m}^5\text{)}$	-8.24167×10^{-11}
$J_z \text{ (m}^5\text{)}$	-5.28827×10^{-11}
$J_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	2.70603×10^{-13}
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	7.33479×10^{-11}
$\alpha_{y\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	-3.2635×10^{-11}
$\alpha_{z\omega} \text{ (m}^6\text{)}$	-2.17541×10^{-12}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	7.80139×10^{-11}
$\alpha_{\omega y} \text{ (m}^7\text{)}$	2.37345×10^{-12}
$\alpha_{\omega z} \text{ (m}^7\text{)}$	-6.97728×10^{-13}
$\alpha_\omega \text{ (m}^8\text{)}$	-3.04493×10^{-14}

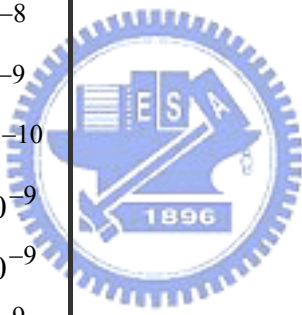


表 4.35 例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁在靜態負荷作用下的自然頻率
(rad/s)

Mode	$P(kN)$		
	0	3 ,Case (a)	3 ,Case (b)
1	44.1741	38.1007	34.9335
2	154.165	168.444	166.713
3	223.879	214.750	193.212
4	276.776	298.474	296.372
5	588.244	632.271	626.527



表 4.36 例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁在靜態負荷作用下的自然頻率
(rad/s)

Mode	$P(kN)$				
	0	10	15	20	25
1	97.3704	74.7235	59.3423	38.5038	47.0313
2	220.173	217.197	216.324	197.979	104.937
3	475.371	461.932	456.792	491.039	522.283
4	614.900	598.618	590.192	585.705	751.432
5	1093.78	1092.41	1097.89	1133.36	1358.08



表 4.37 不對稱 Z 型斷面性質(例題 4.3.11, 例題 4.3.12)

Section geometry of unsymmetric Z-section: $b = 0.2\text{ m}$, $t_f = 0.01\text{ m}$, $h = 0.3\text{ m}$, $t_w = 0.01\text{ m}$	
θ (rad)	0.556332
y_p (m)	0
z_p (m)	0
A (m^2)	0.007
I_y (m^4)	1.49844×10^{-4}
I_z (m^4)	1.60473×10^{-5}
α_y (m^5)	0
α_z (m^5)	0
α_{yz} (m^5)	0
α_{zy} (m^5)	0
K_I (m^6)	6.01451×10^{-6}
J (m^4)	2.33333×10^{-7}
J_y (m^5)	0
J_z (m^5)	0
J_ω (m^6)	-1.0×10^{-9}
I_ω (m^6)	6.86346×10^{-7}
$\alpha_{y\omega}$ (m^6)	-1.09945×10^{-6}
$\alpha_{z\omega}$ (m^6)	-2.81166×10^{-8}
$\alpha_{\omega yz}$ (m^6)	4.63573×10^{-7}
$\alpha_{\omega y}$ (m^7)	0
$\alpha_{\omega z}$ (m^7)	0
α_ω (m^8)	-4.97293×10^{-9}

表 4.38 例題 4.3.11 懸臂 Z 型斷面梁在靜態負荷作用下的自然頻率 (rad/s)

Mode	$P(kN)$			
	0	200	400	800
1	96.0703 (V)	85.5011	73.0091	34.0450
2	154.248 (T)	152.389	150.957	149.502
3	292.130 (W)	288.889	285.558	278.501
4	599.948 (V)	588.929	577.769	555.166
5	834.244 (T)	836.121	838.781	846.474



表 4.39 例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁在靜態負荷作用下的自然頻率 (rad/s)

(a) $P_C = 0$

Mode	$P(kN)$			
	0	200	400	600
1	96.0703	90.9402	42.5993	89.4516
2	154.248	143.809	121.260	166.111
3	292.130	292.202	292.385	299.380
4	599.948	597.039	587.843	709.267
5	834.244	835.770	836.570	792.112

(b) $P_C = 200 kN$

Mode	$P(kN)$			
	0	200	400	600
1	85.5011	78.7587	45.1760	80.6737
2	152.389	141.383	133.777	163.936
3	288.889	288.966	289.656	365.108
4	588.929	586.364	592.553	706.423
5	836.121	838.553	883.979	1031.34

(c) $P_C = 400 kN$

Mode	$P(kN)$			
	0	200	400	600
1	73.0091	63.7931	56.0935	76.3928
2	150.957	139.934	158.164	155.487
3	285.558	285.620	304.243	394.570
4	577.769	575.830	623.394	712.923
5	838.781	843.418	952.780	1035.80

(d) $P_C = 800 kN$

Mode	$P(kN)$			
	0	200	400	600
1	34.0450	31.2404	57.8280	71.8680
2	149.502	158.085	137.844	135.491
3	278.501	302.972	391.345	423.084
4	555.166	582.070	636.274	653.242
5	846.474	949.795	1036.45	979.457

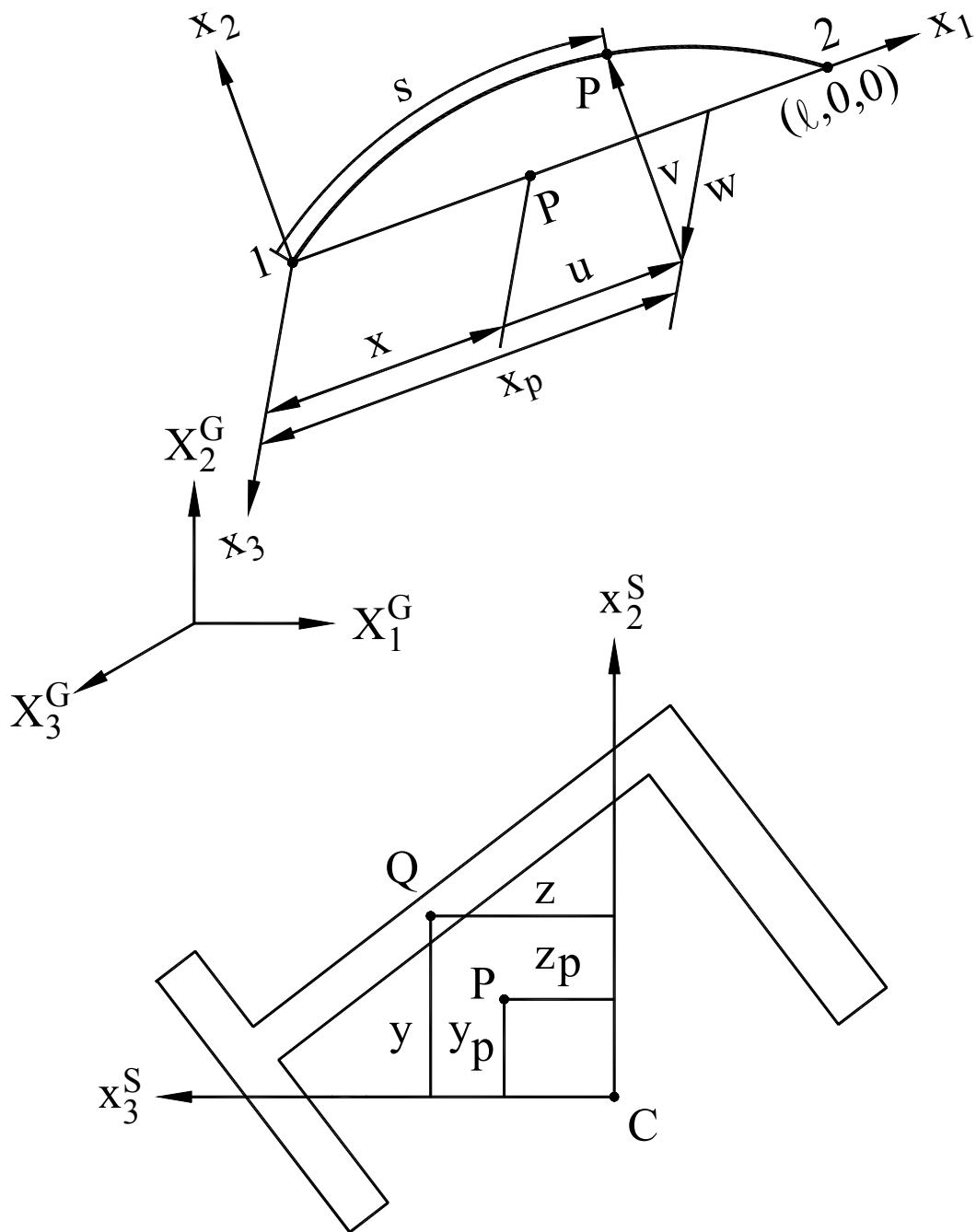


圖 2.1 元素座標與元素截面座標

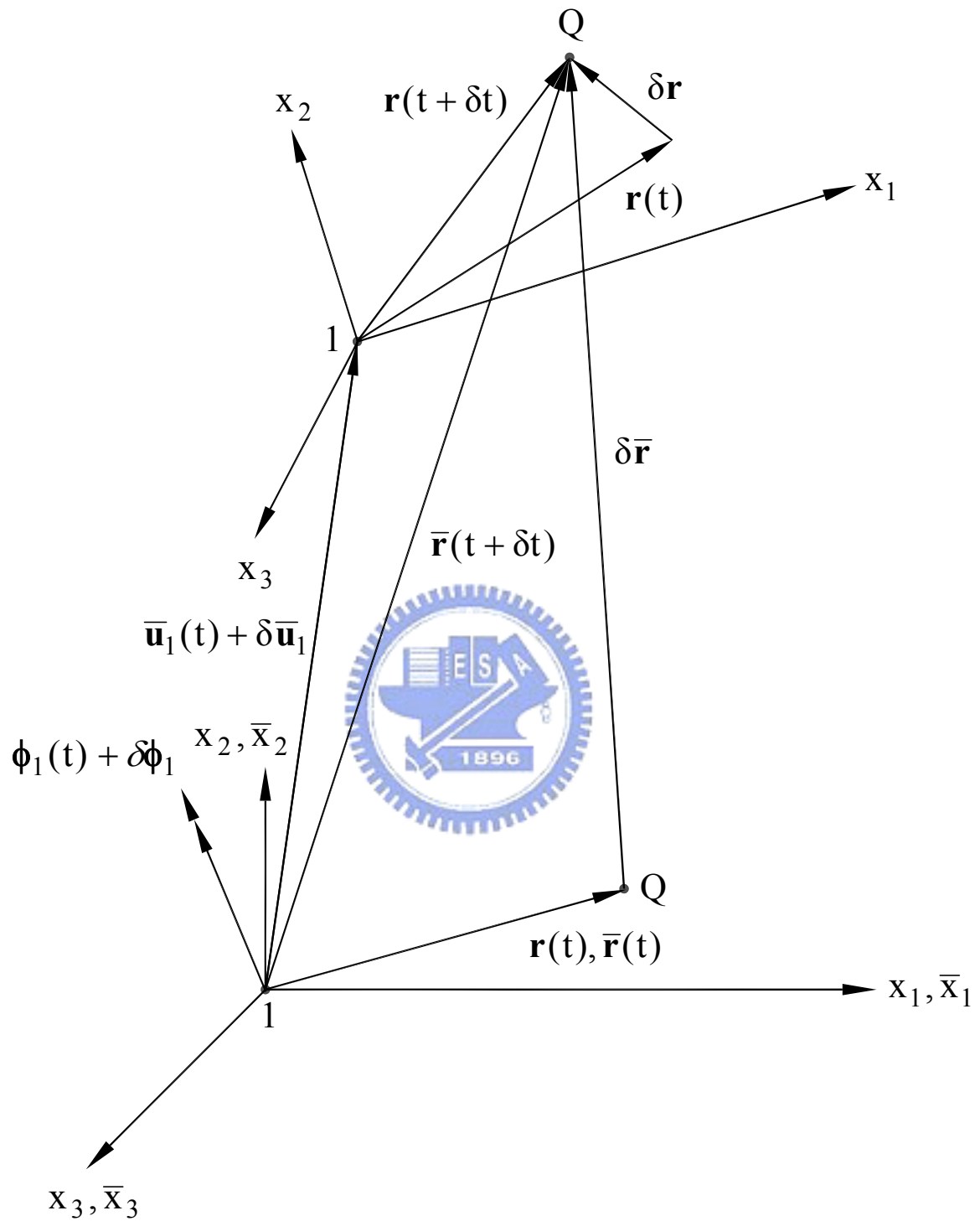


圖 2.2 固定元素座標與移動元素座標

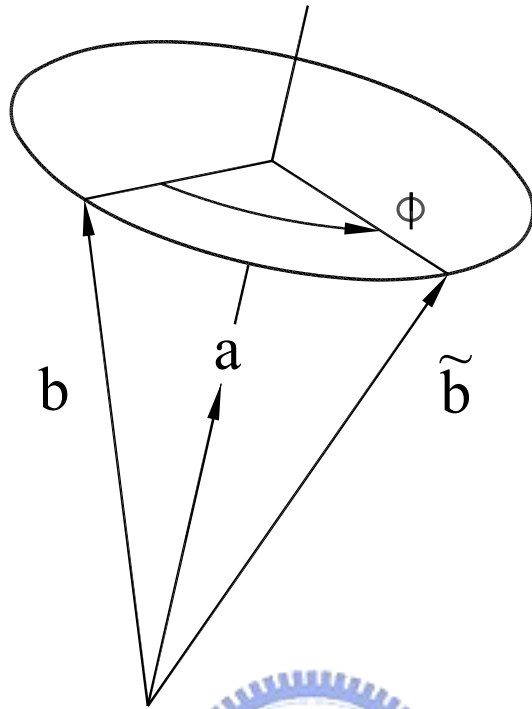


圖 2.3 旋轉向量

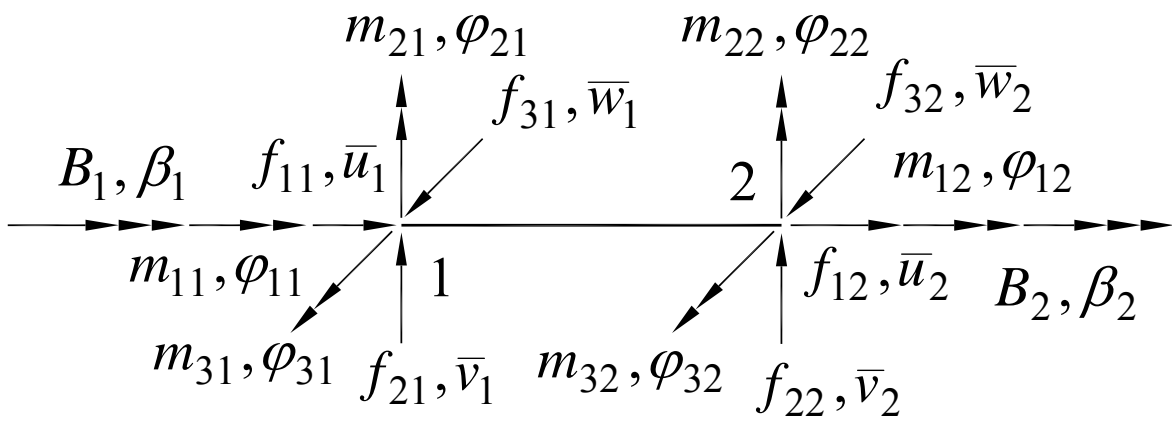


圖 2.4 元素節點參數與節點力

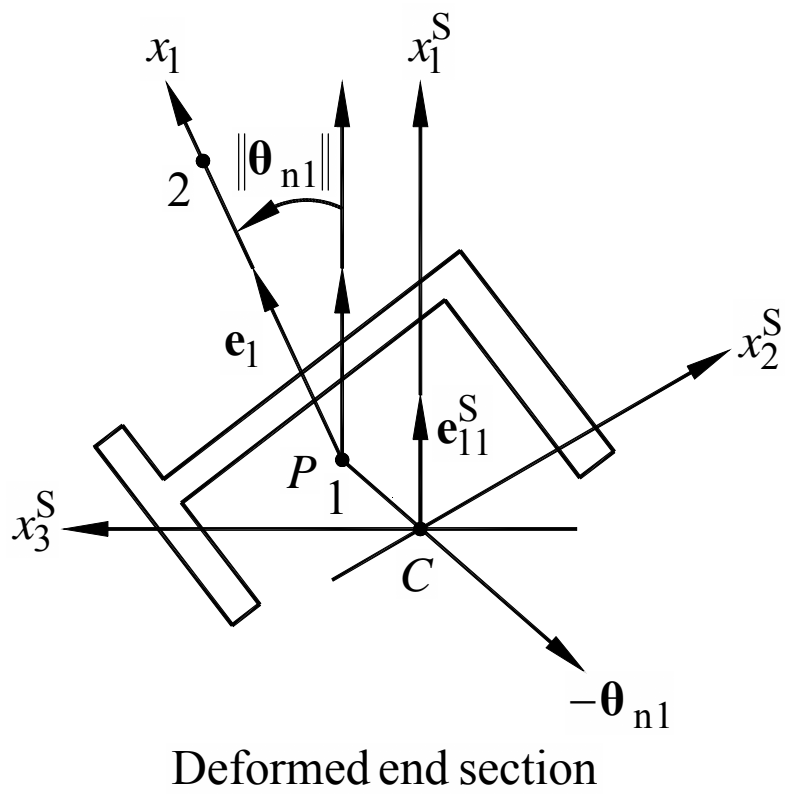


圖 2.5 決定 x_2 軸與 x_3 軸之第一步驟

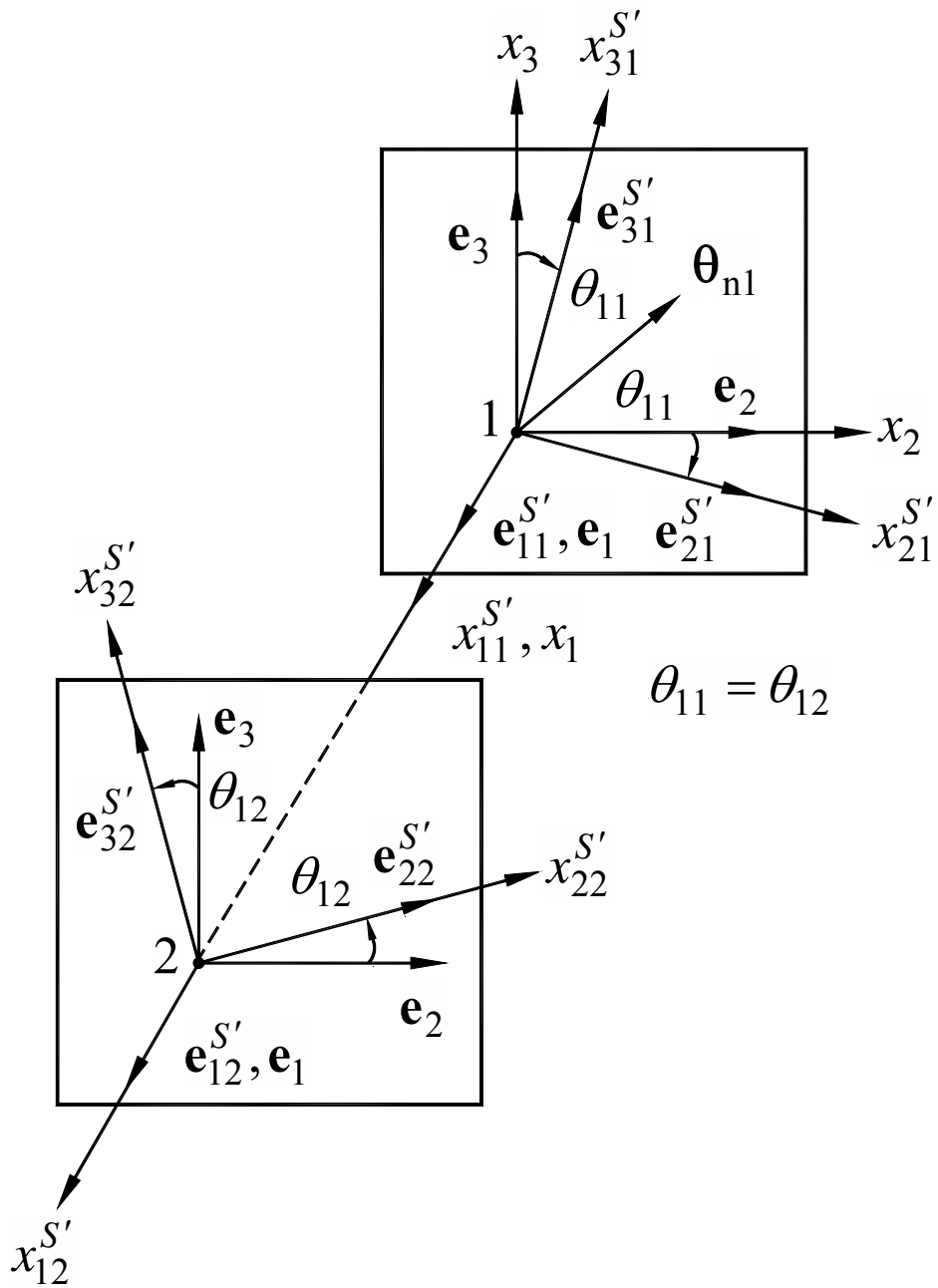


圖 2.6 決定 x_2 軸與 x_3 軸之第二步驟

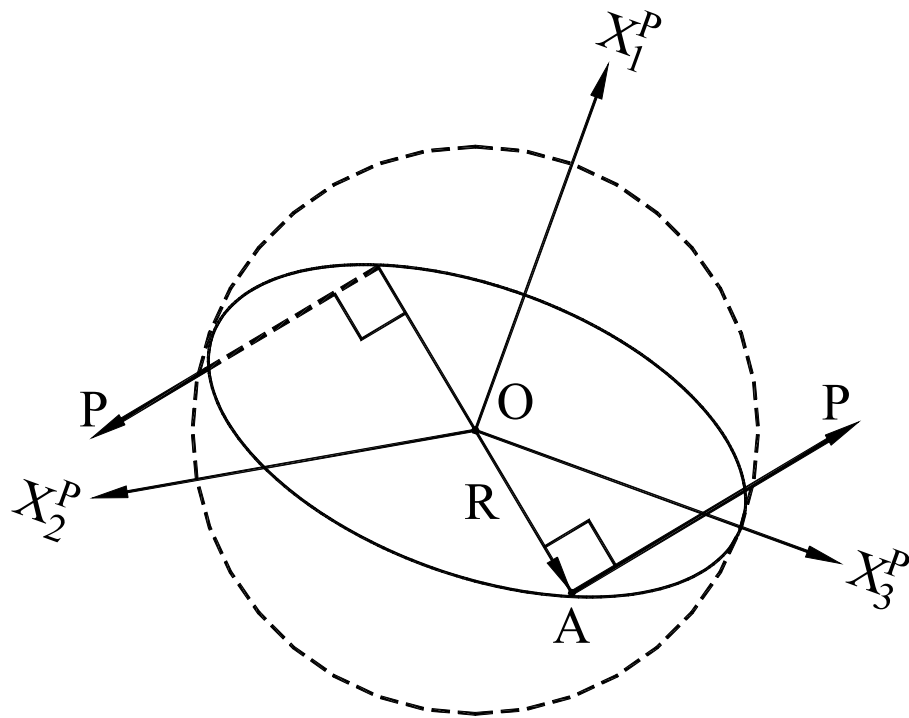


圖 2.7 圓盤受力偶作用機制圖

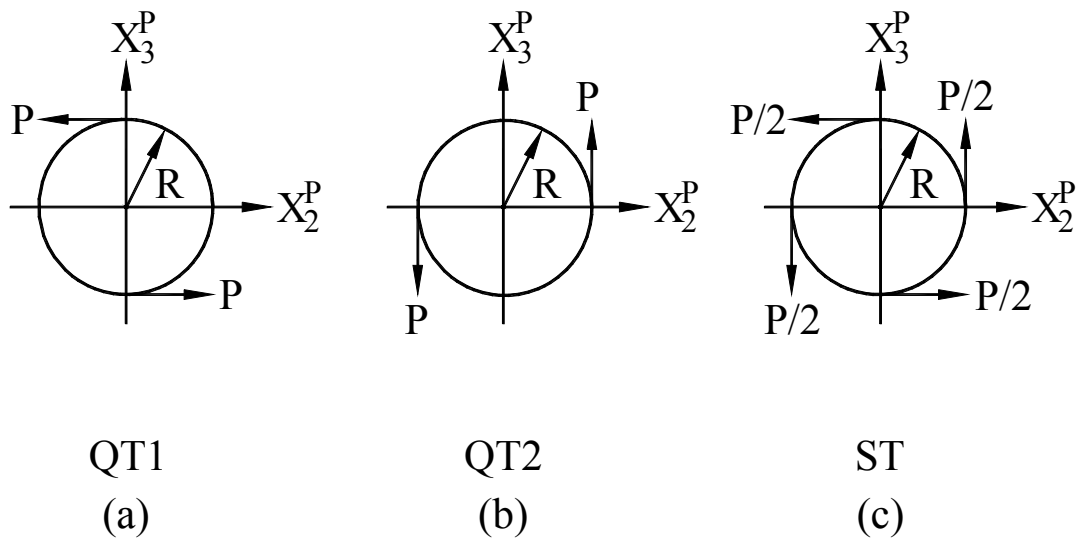


圖 2.8 圓盤受力形態之 QT/ST 力矩示意圖

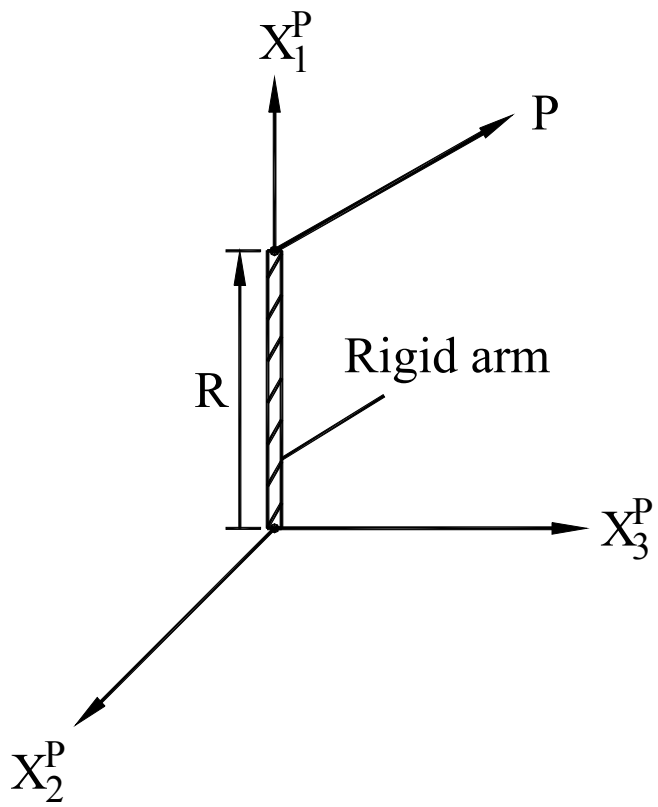


圖 2.9 剛性桿受力作用機制圖

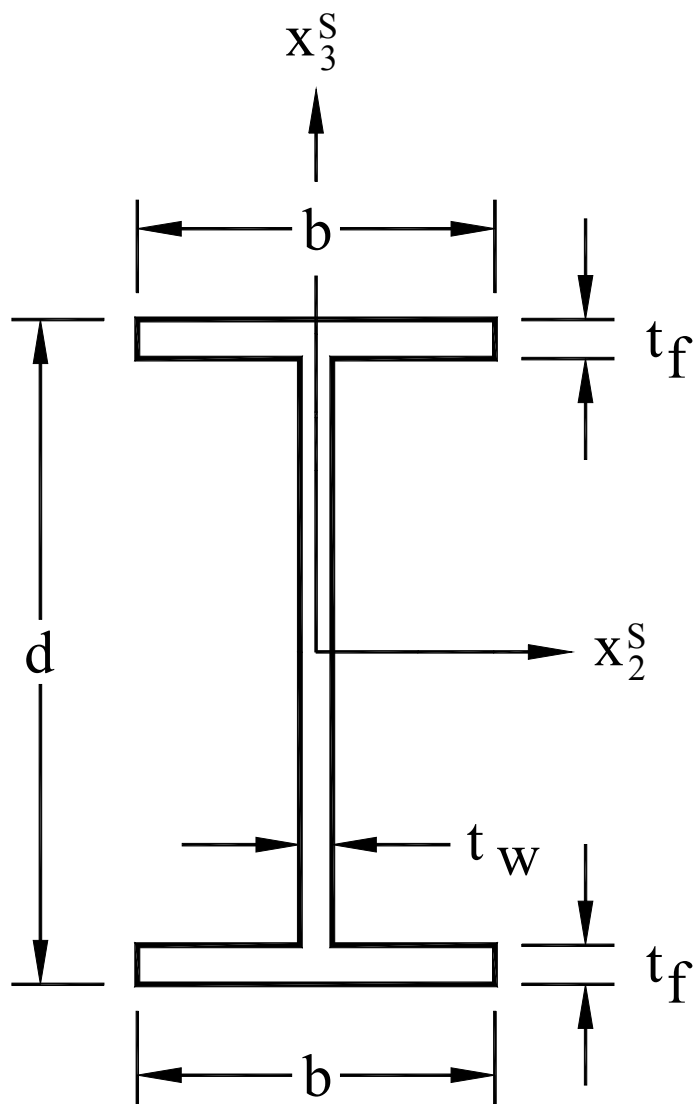


圖 4.1 雙對稱 I 型斷面幾何圖

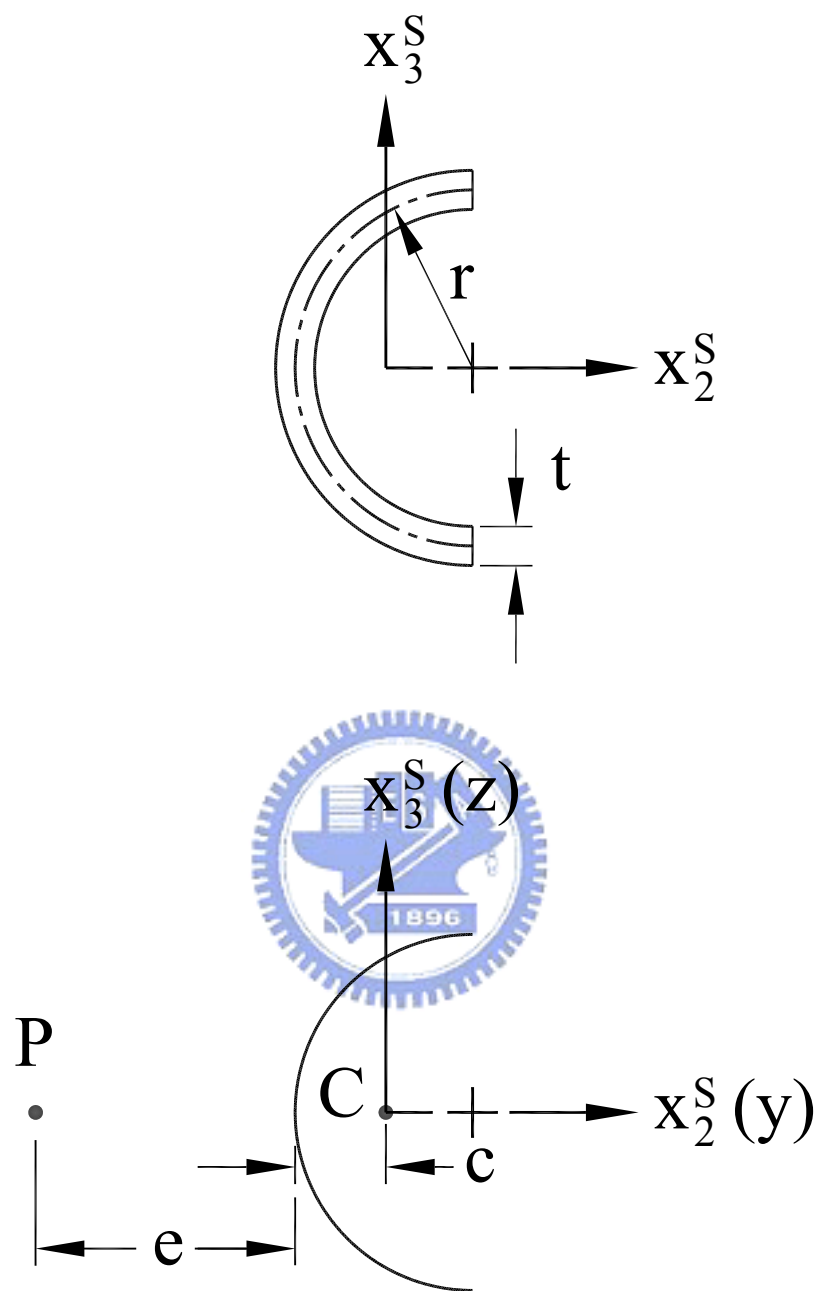


圖 4.2 單對稱半圓型斷面幾何圖

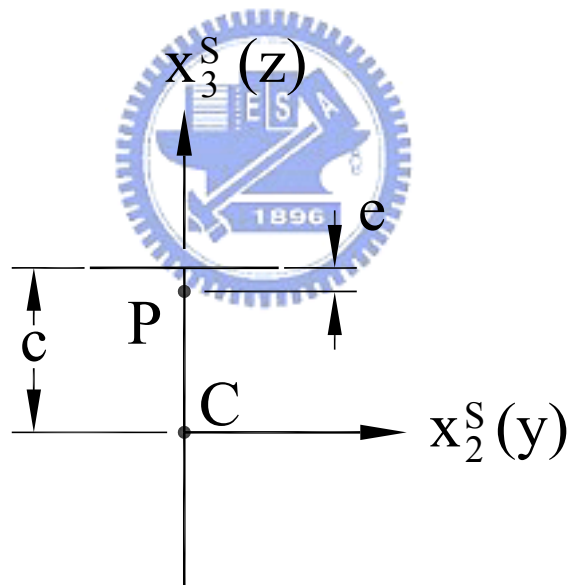
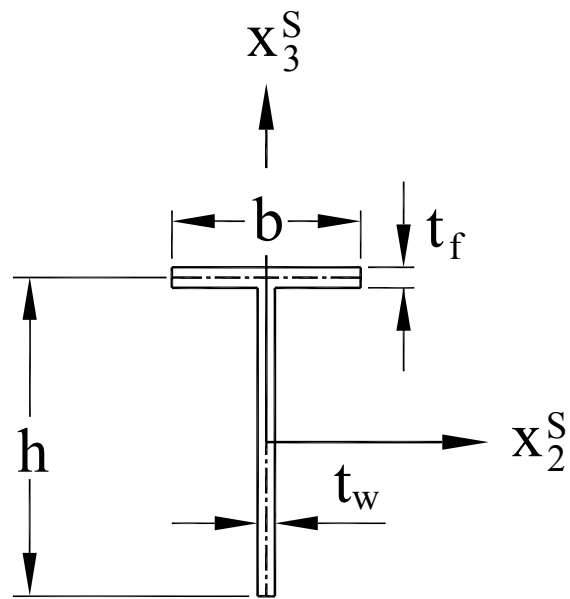


圖 4.3 單對稱 T 型斷面幾何圖

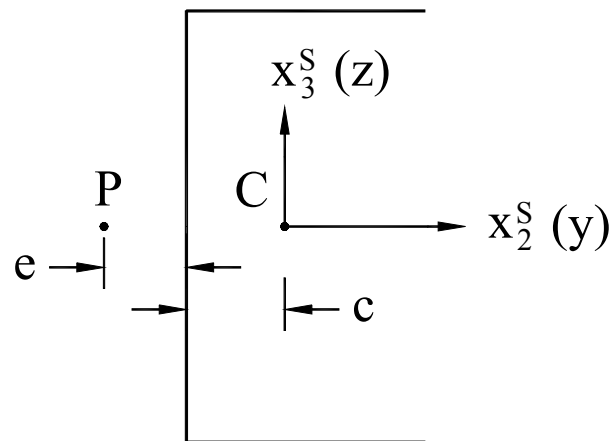
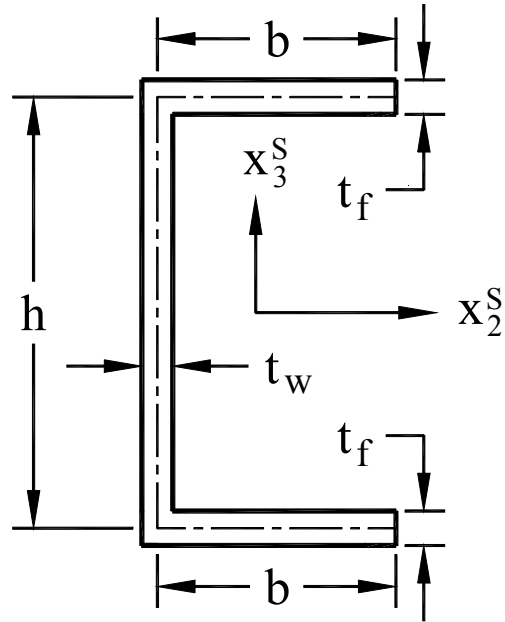


圖 4.4 單對稱槽型斷面幾何圖

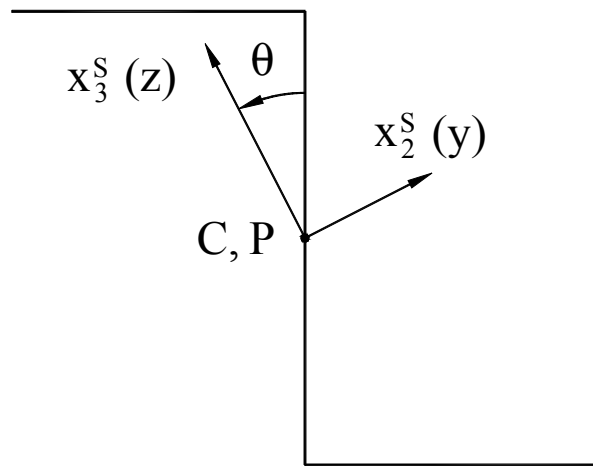
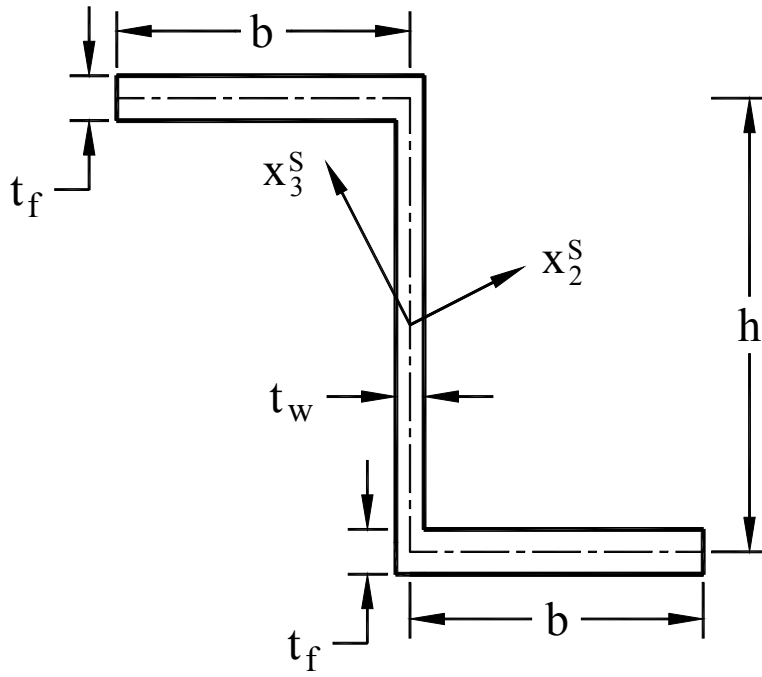


圖 4.5 不對稱 Z 型斷面幾何圖

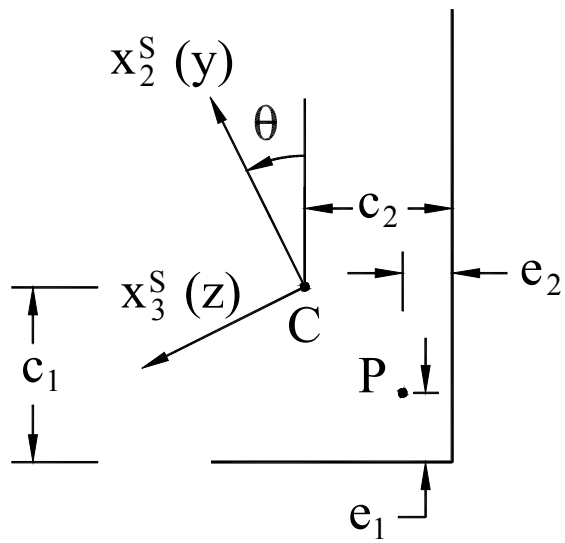
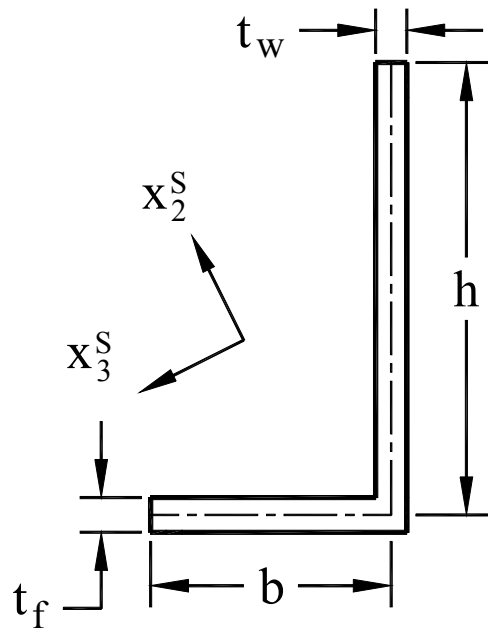


圖 4.6 不對稱角型斷面幾何圖

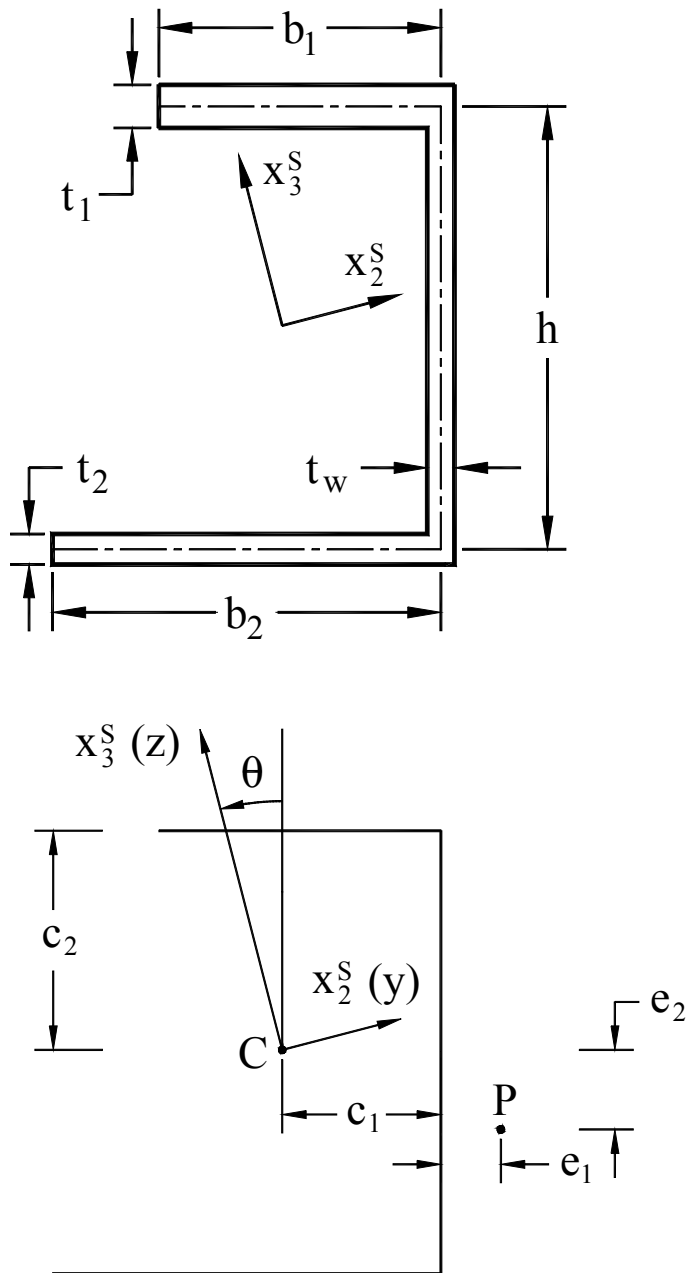


圖 4.7 不對稱槽型斷面幾何圖

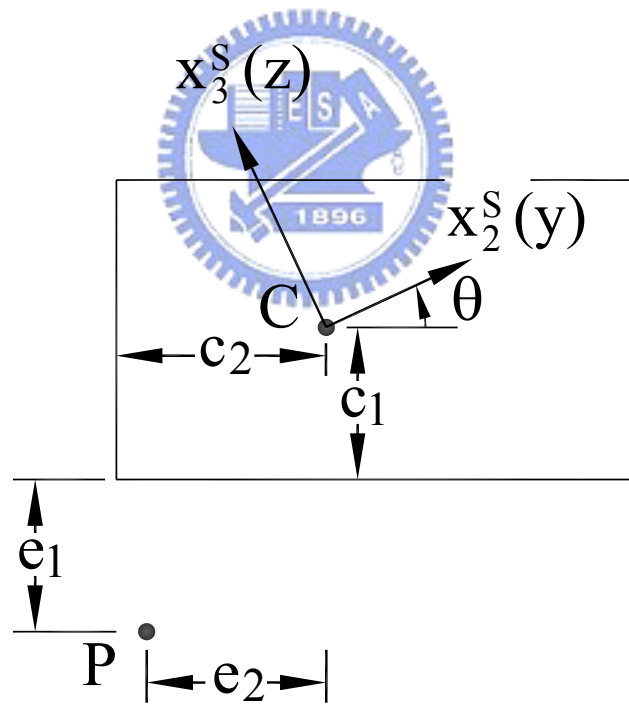
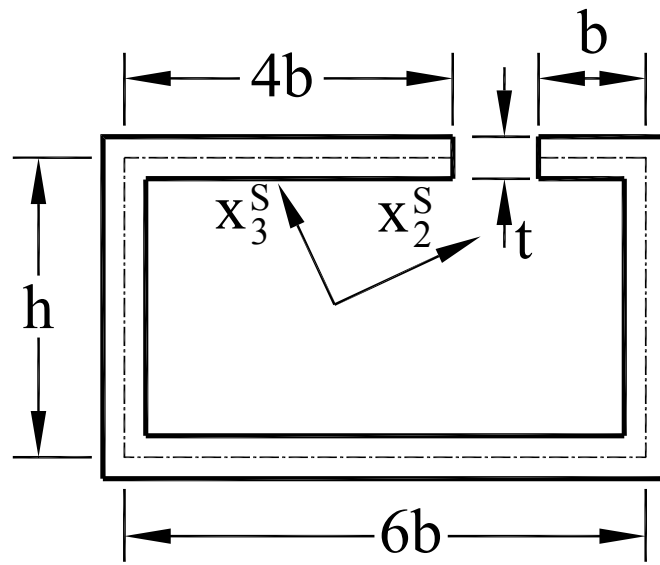


圖 4.8 不對稱斷面 A 幾何圖

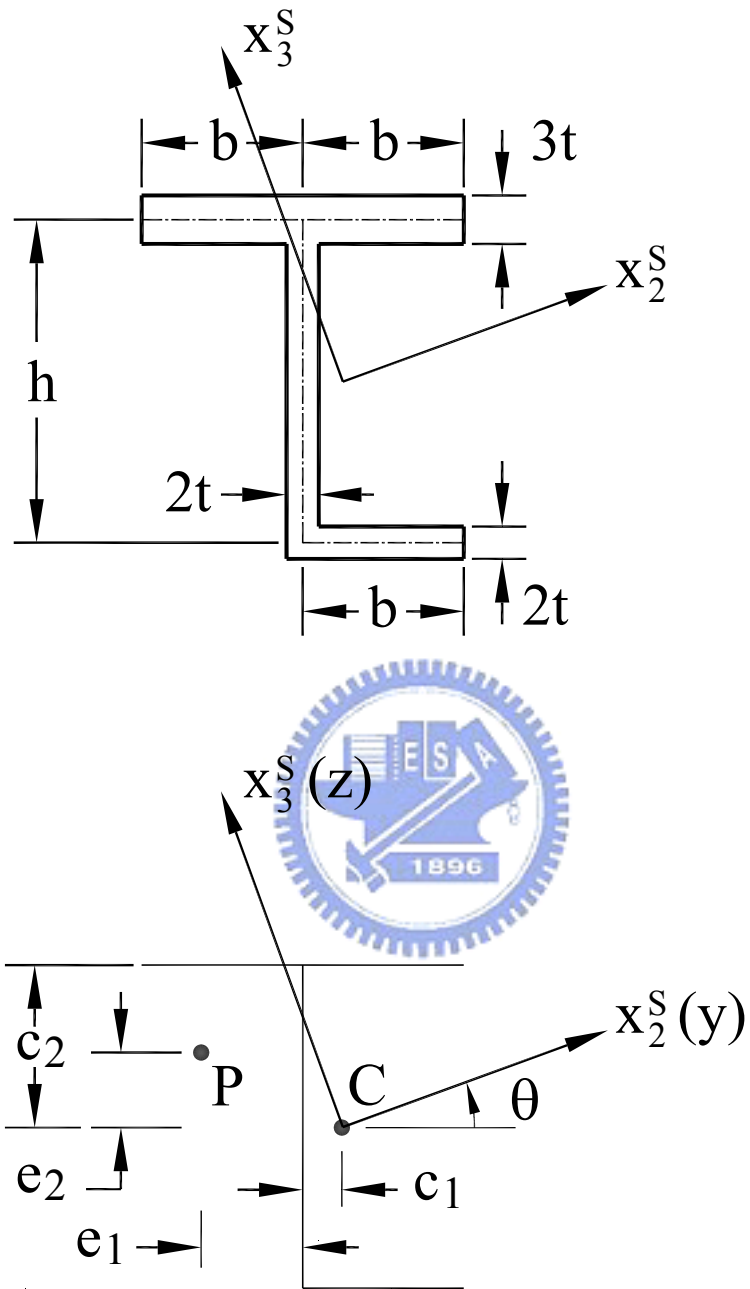


圖 4.9 不對稱斷面 B 幾何圖

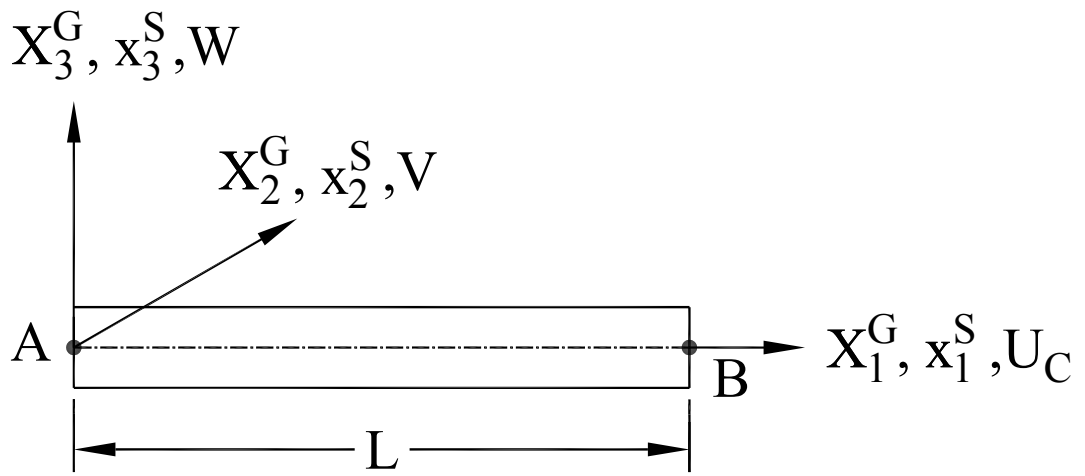


圖 4.10a 薄壁梁的示意圖及座標系統

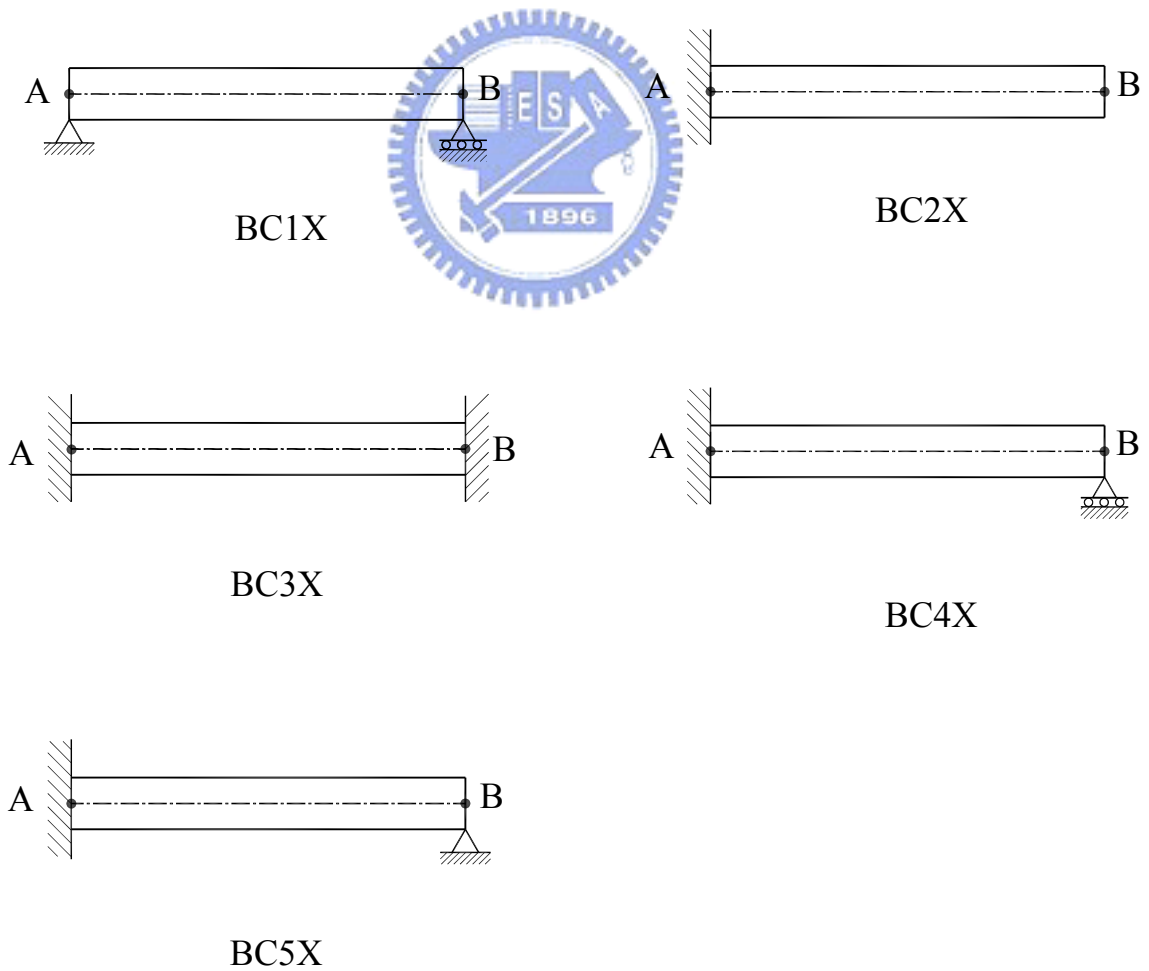


圖 4.10b 薄壁梁 A、B 兩端的邊界條件

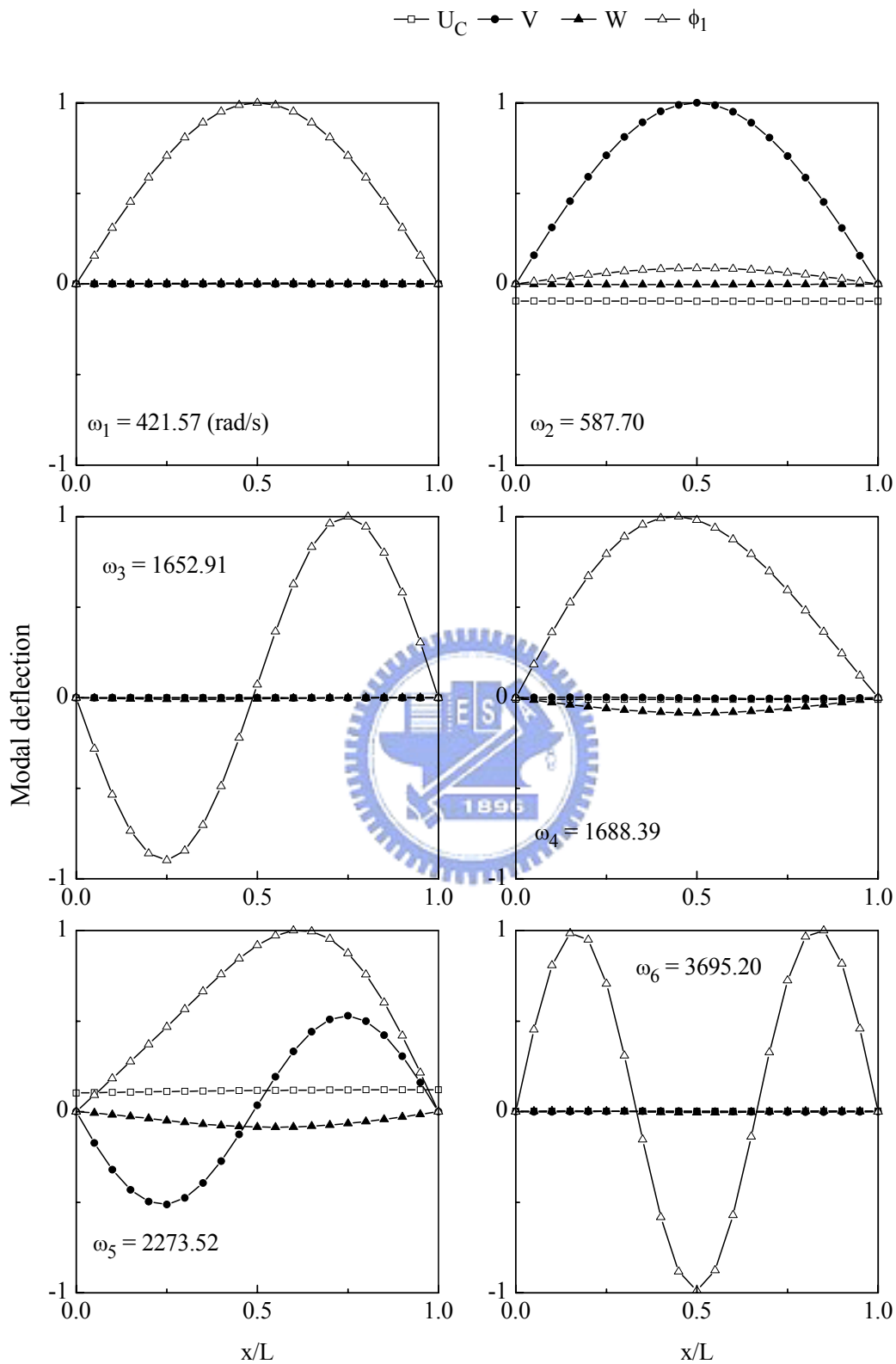


圖 4.11 例題 4.1.1 單對稱槽型斷面梁(邊界 BC1RM)之振動模態圖

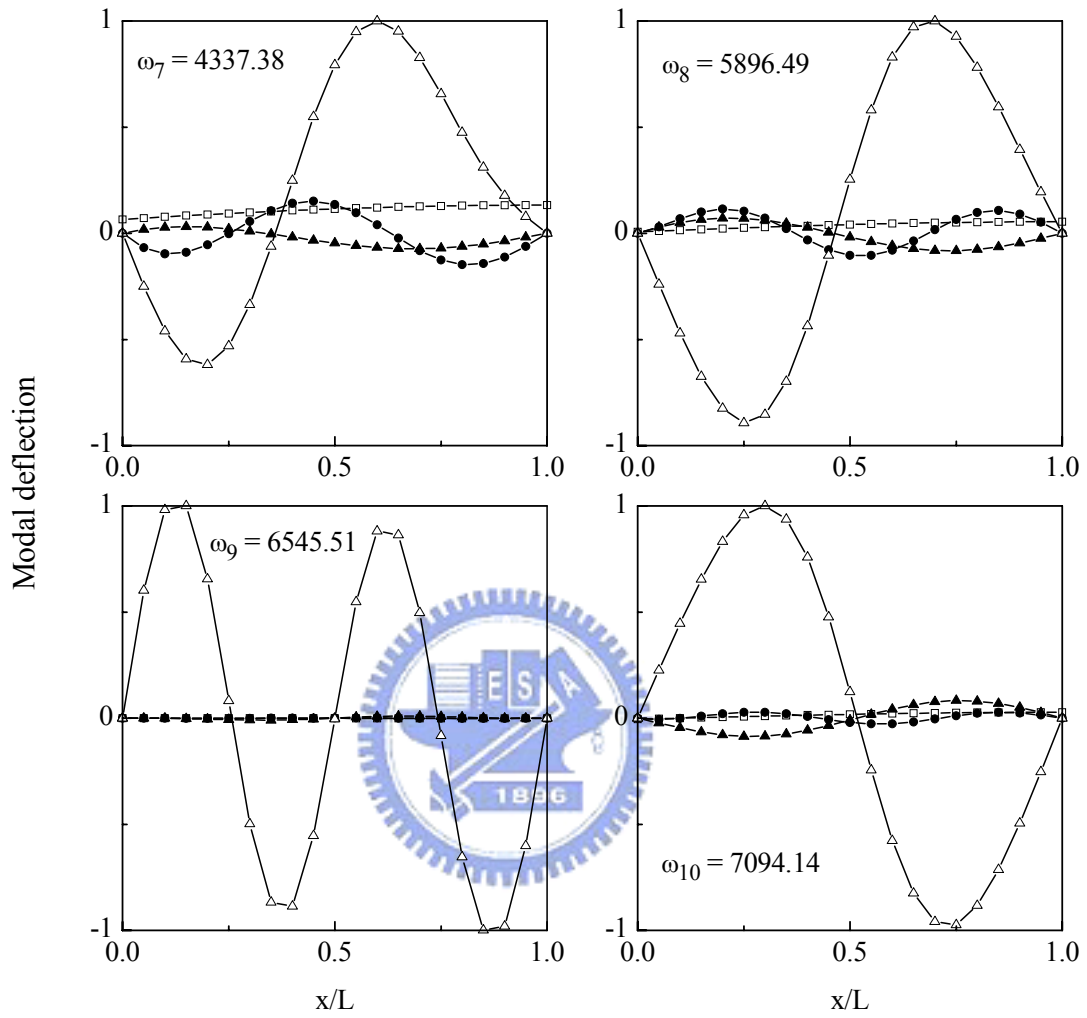


圖 4.11 例題 4.1.1 單對稱槽型斷面梁(邊界 BC1RM)之振動模態圖(續)

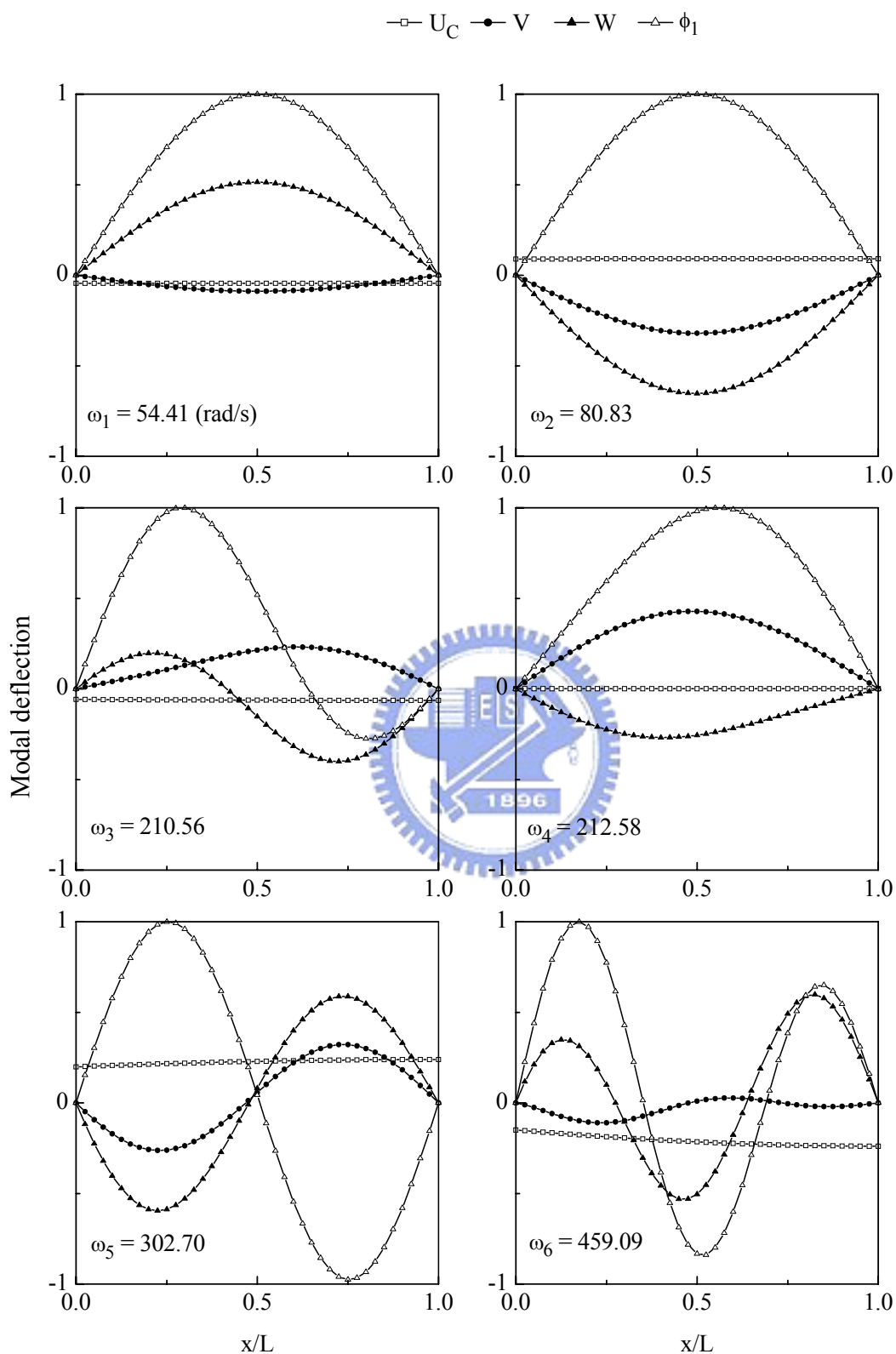


圖 4.12 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A(邊界 BC1P)之振動模態圖

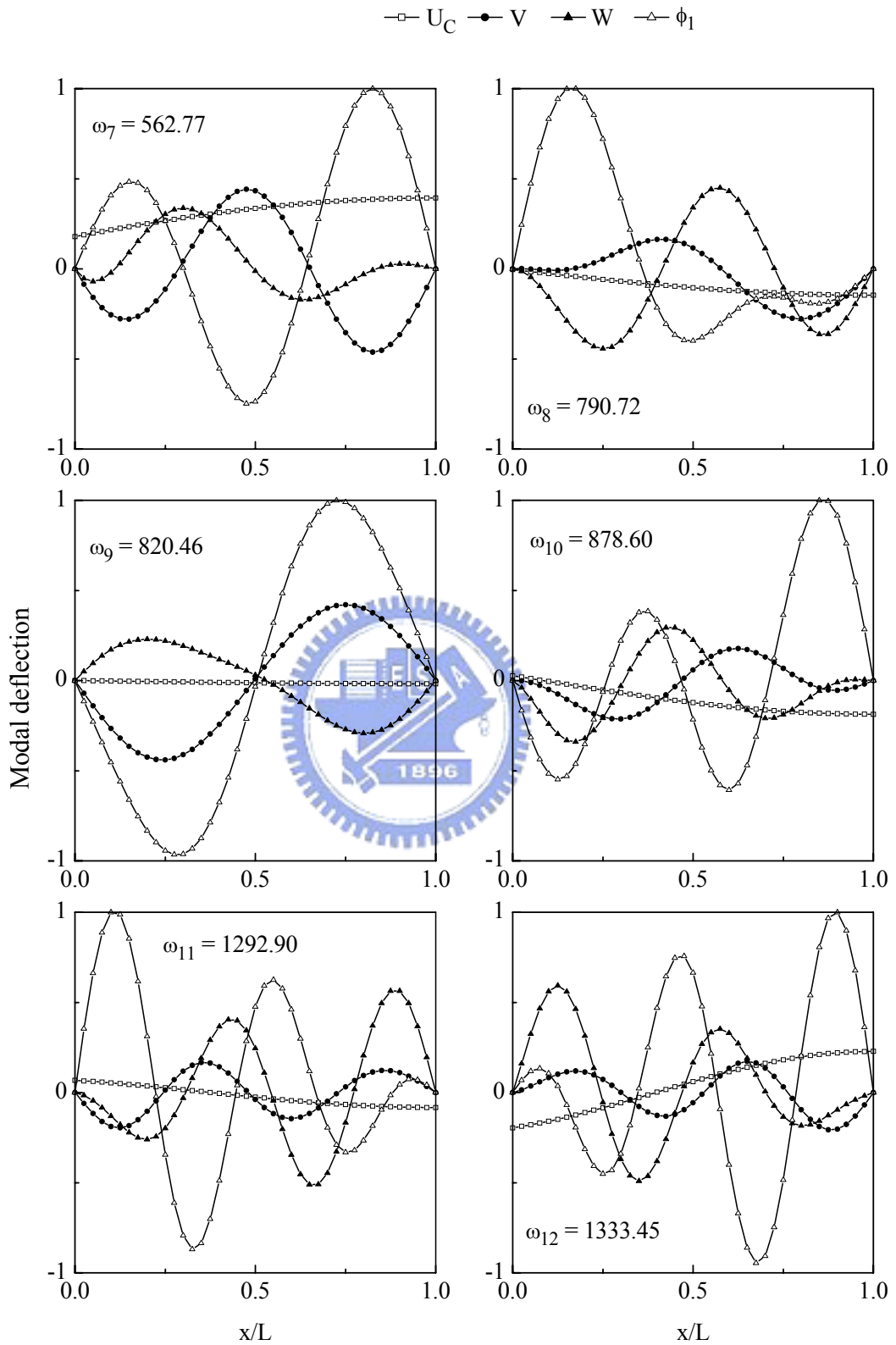


圖 4.12 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A(邊界 BC1P)之振動模態圖(續)

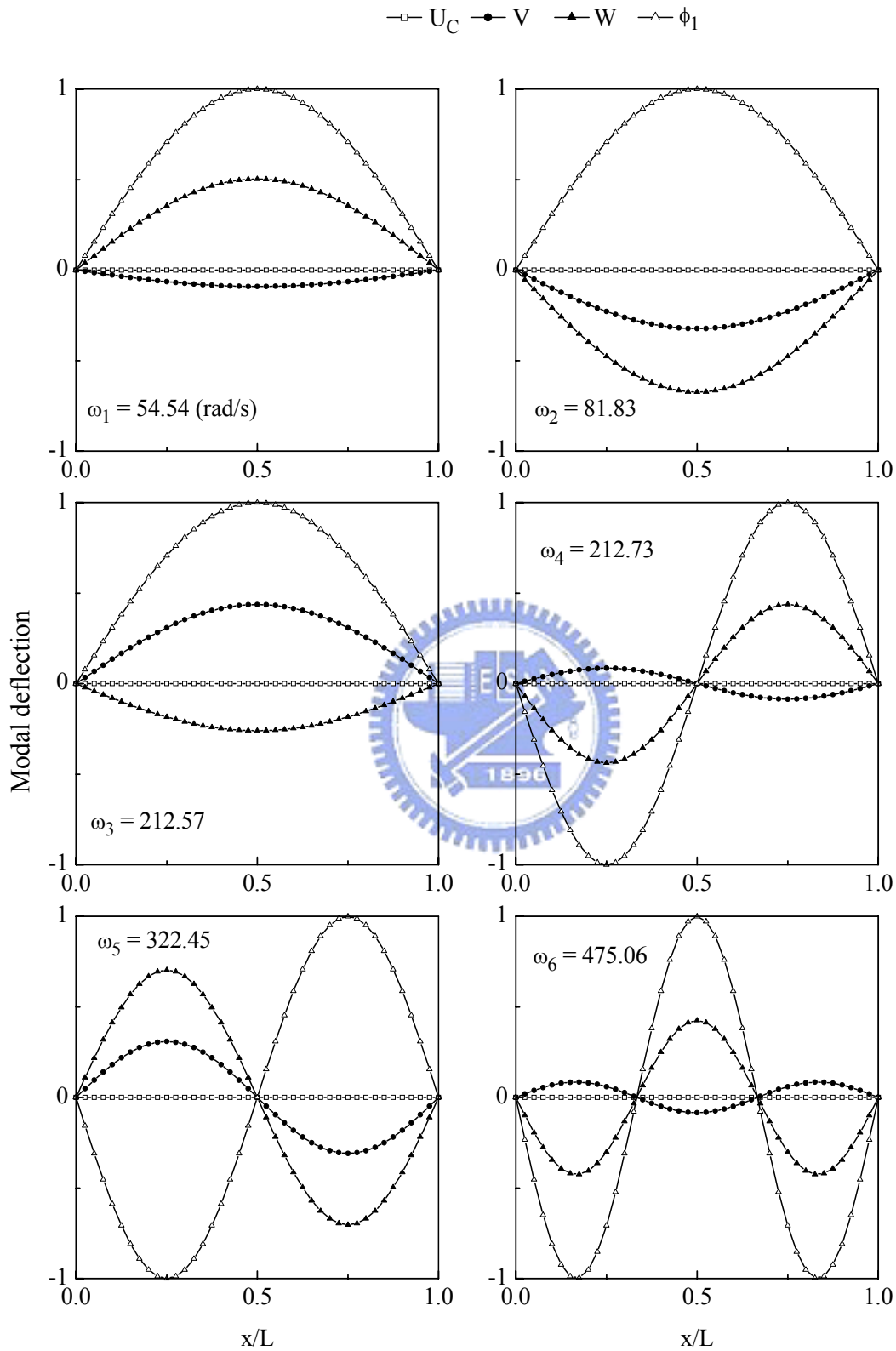


圖 4.13 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A(邊界 BC1CM)之振動模態圖

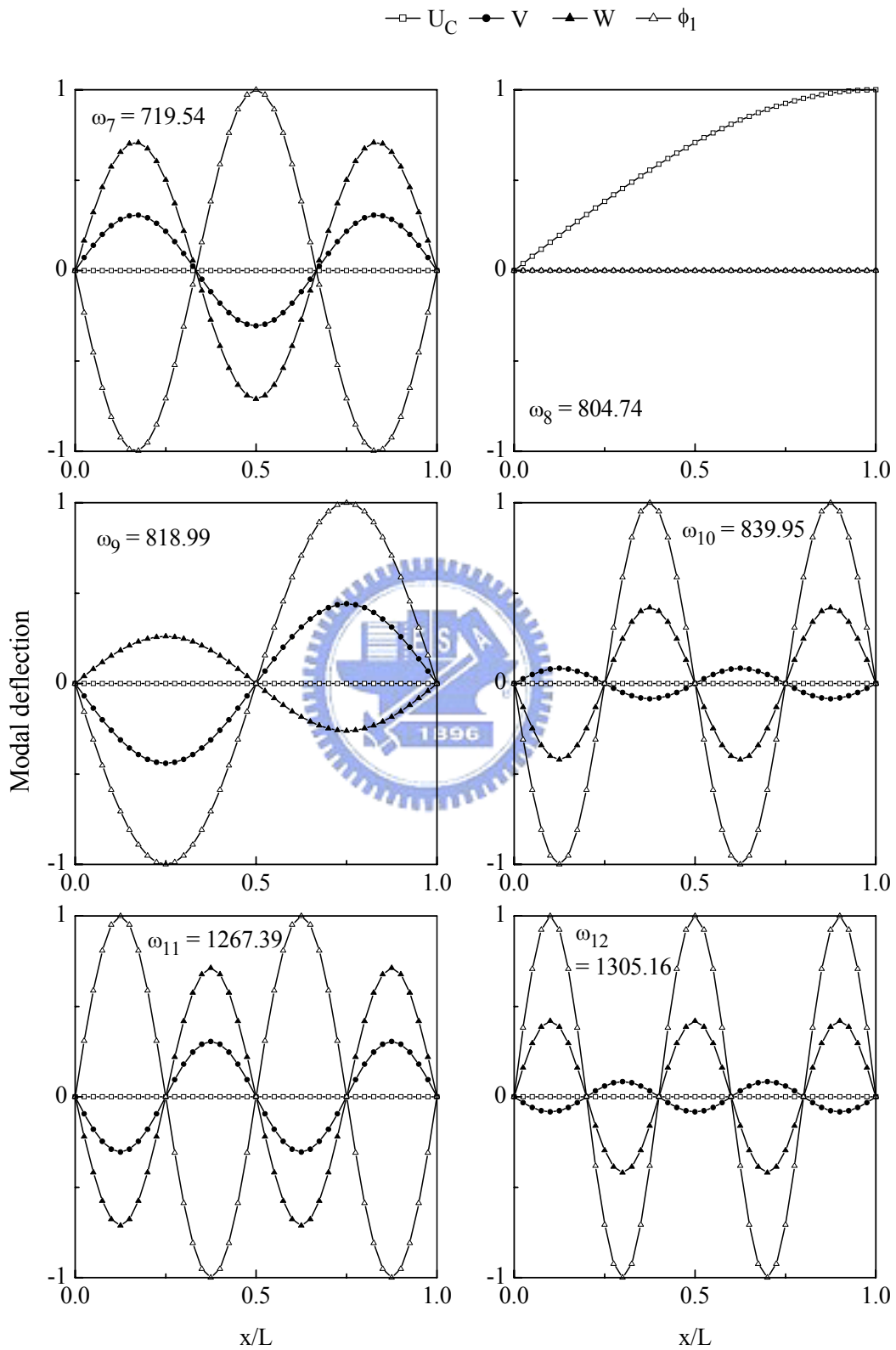


圖 4.13 例題 4.1.3 不對稱斷面梁 A(邊界 BC1CM)之振動模態圖(續)

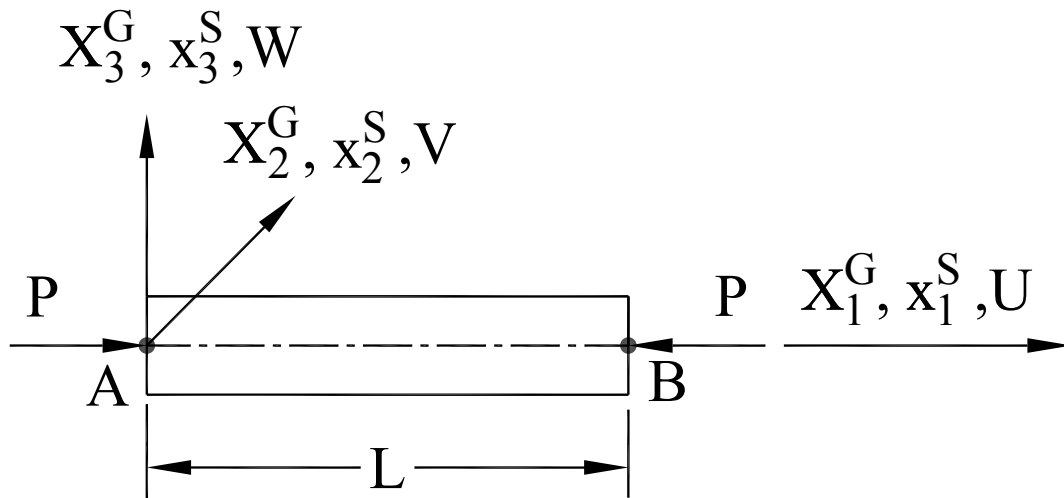


圖 4.14a 薄壁梁受軸力作用的示意圖及座標系統

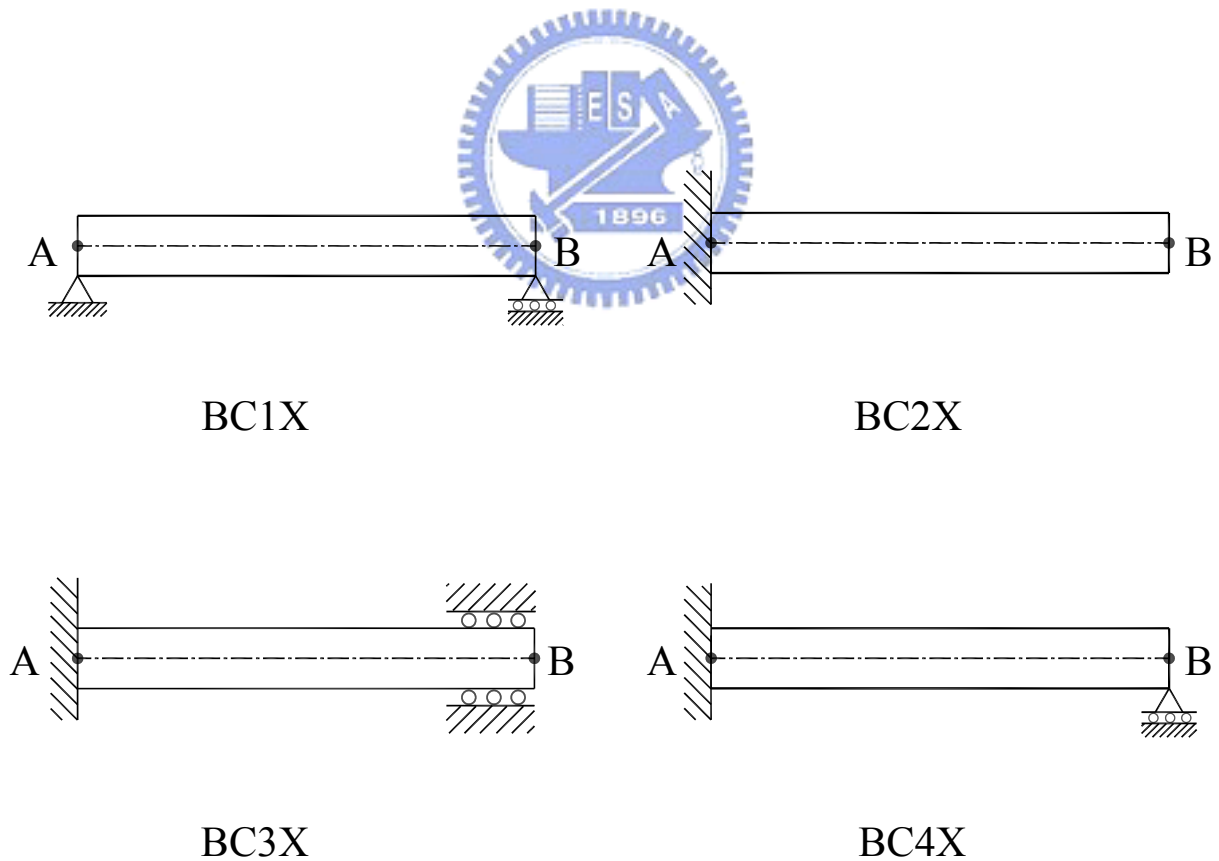
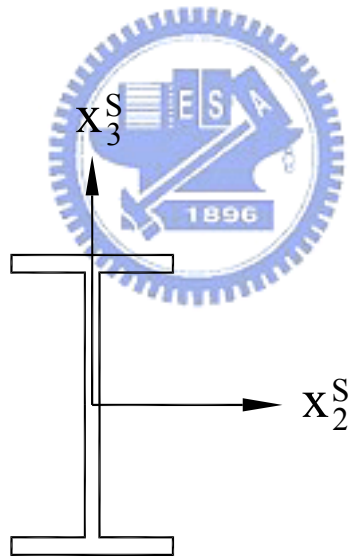
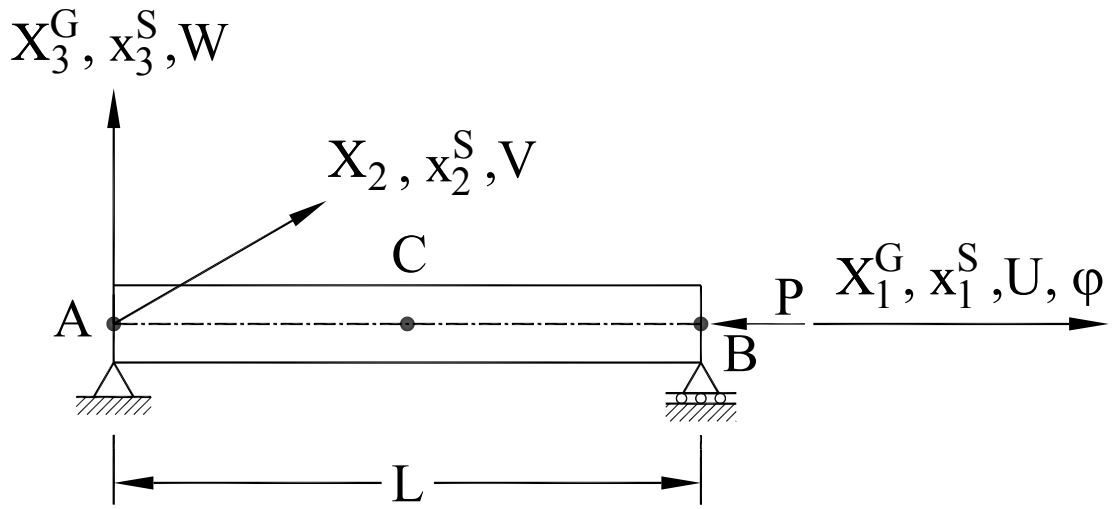


圖 4.14b 薄壁梁受軸力作用在 A、B 兩端的邊界條件



End cross section

圖 4.15 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁承受一軸向負載之結構圖

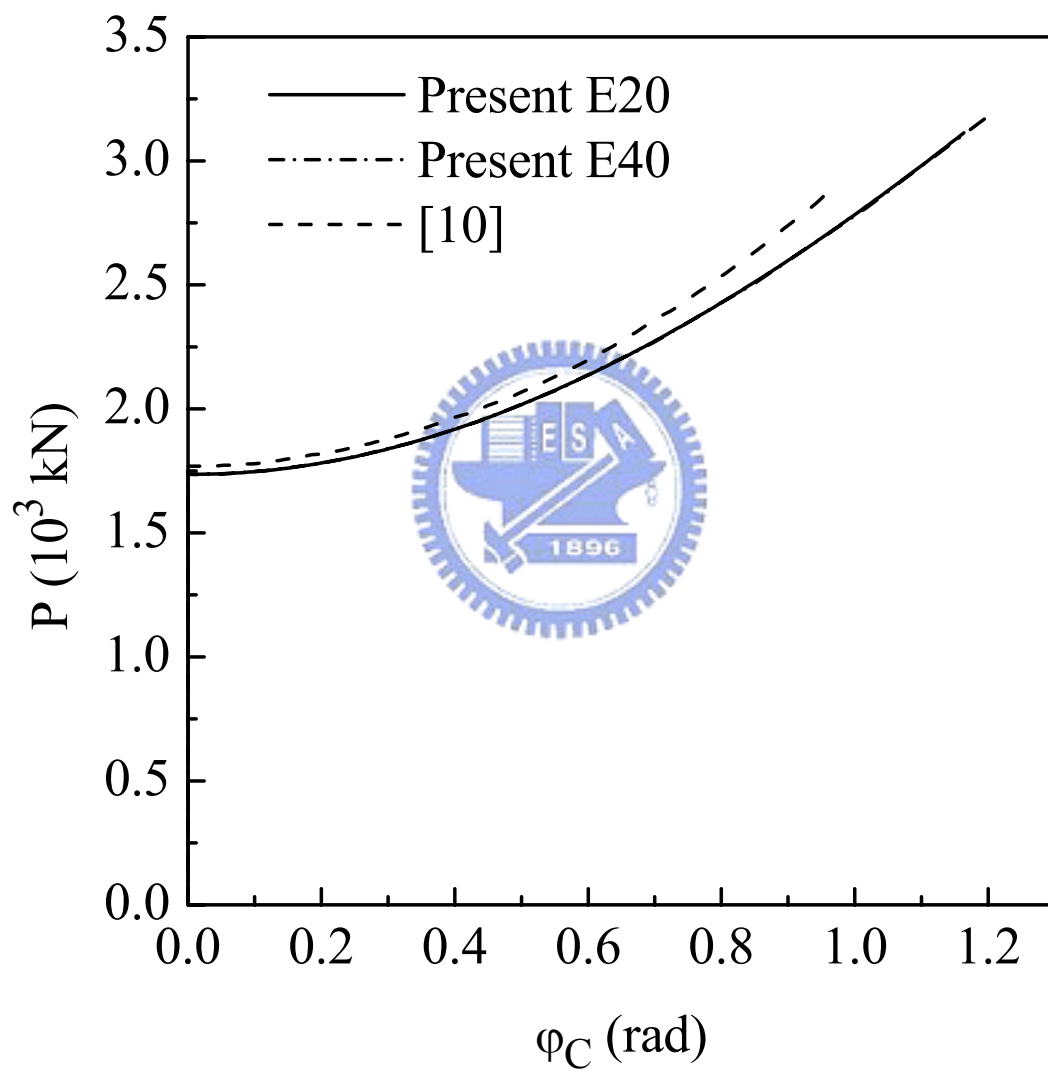


圖 4.16 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁在中心點 C 的負荷—扭轉角曲線圖

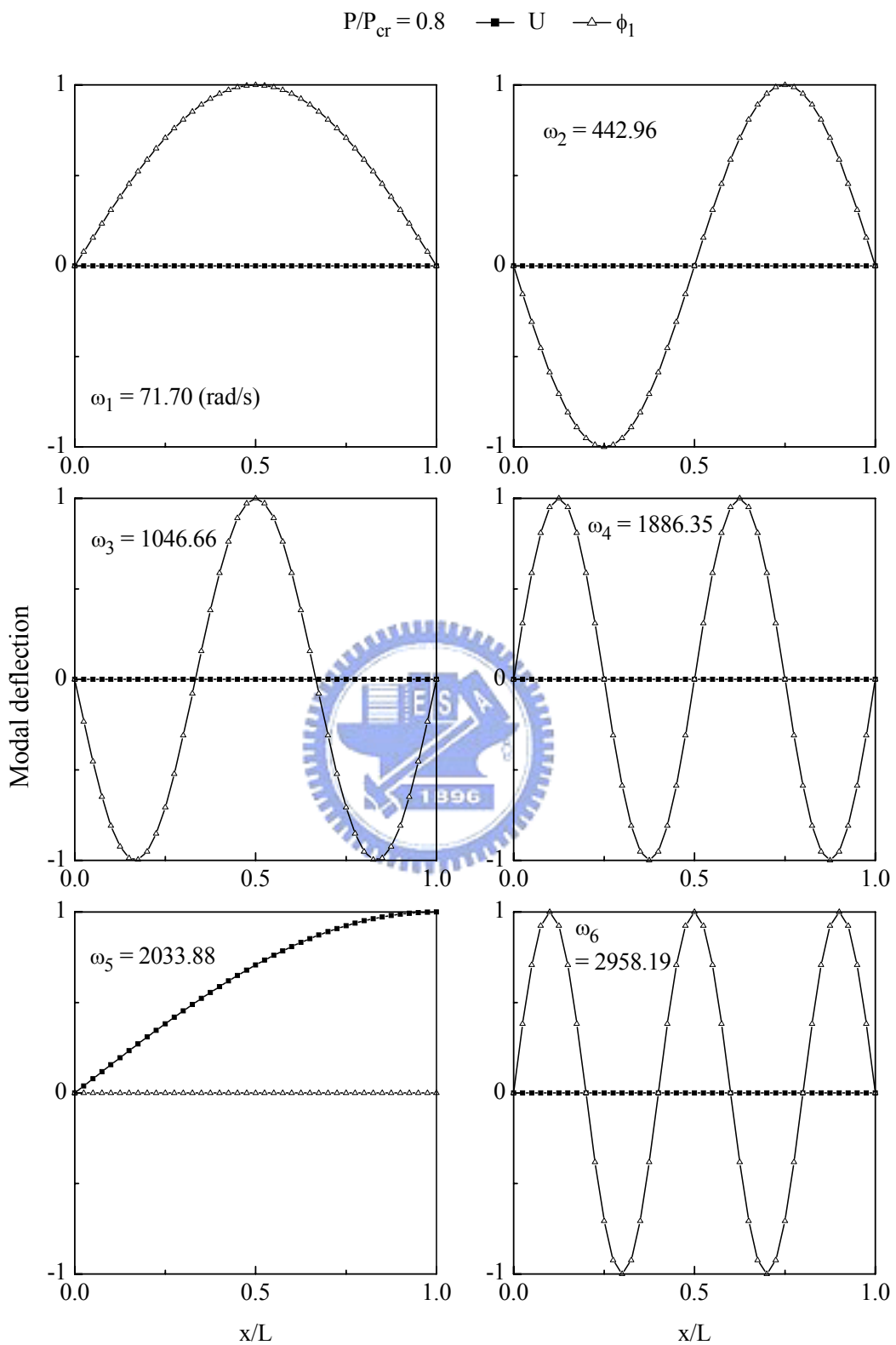


圖 4.17 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸力($P/P_{cr} = 0.8$)之振動模態圖

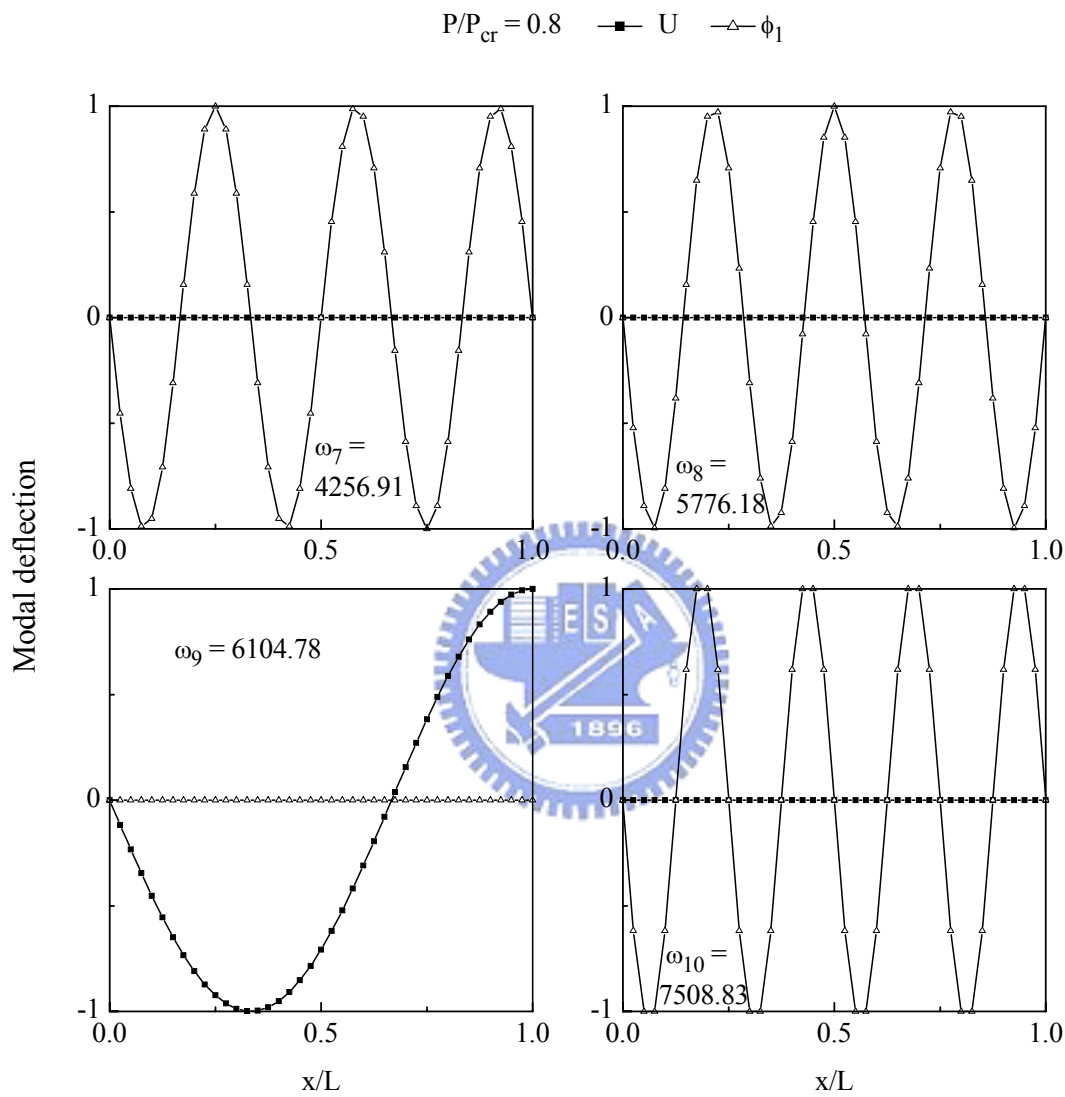


圖 4.17 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸力($P/P_{cr} = 0.8$)之振動模態圖(續)

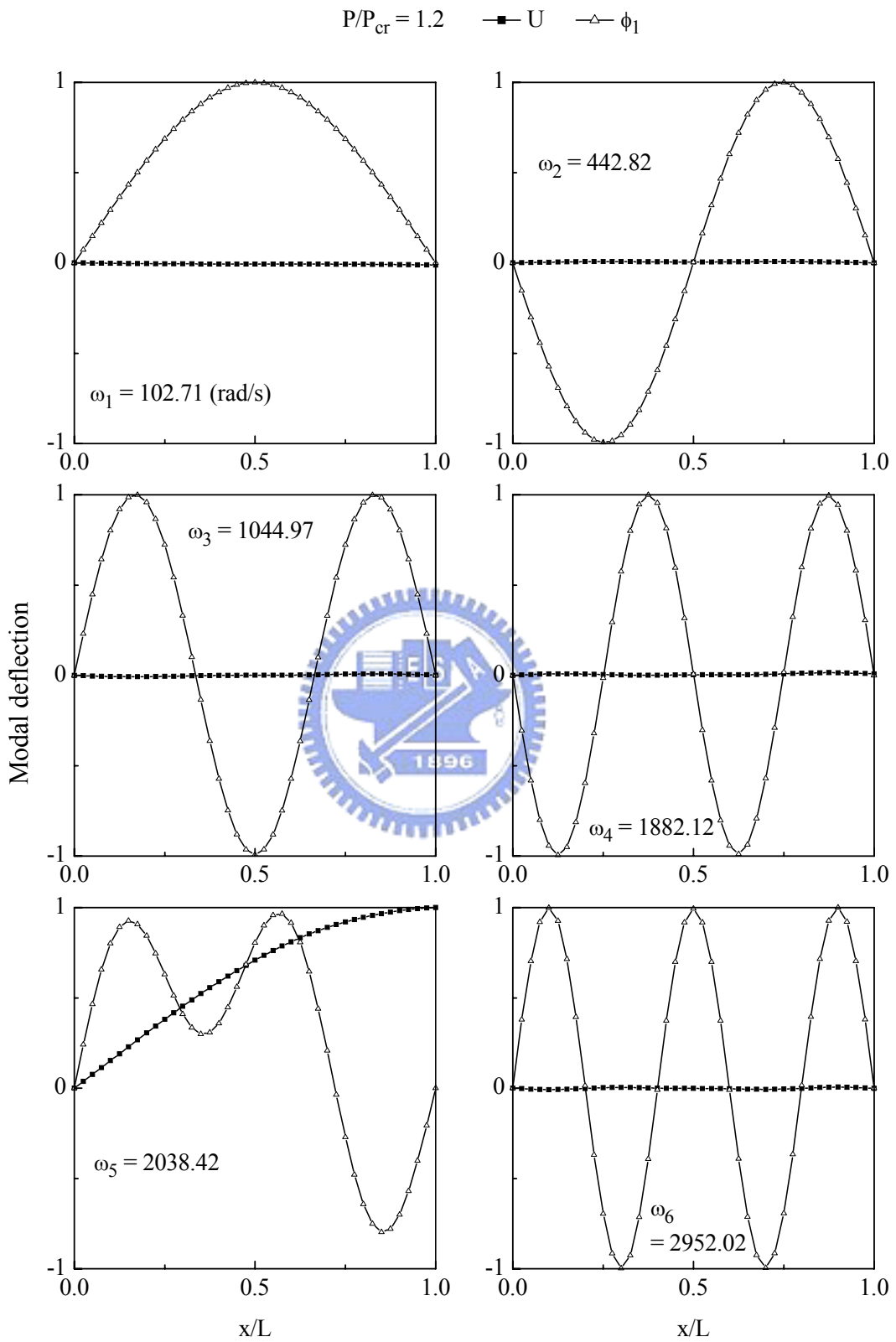


圖 4.18 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸力($P/P_{cr} = 1.2$)之振動模態圖

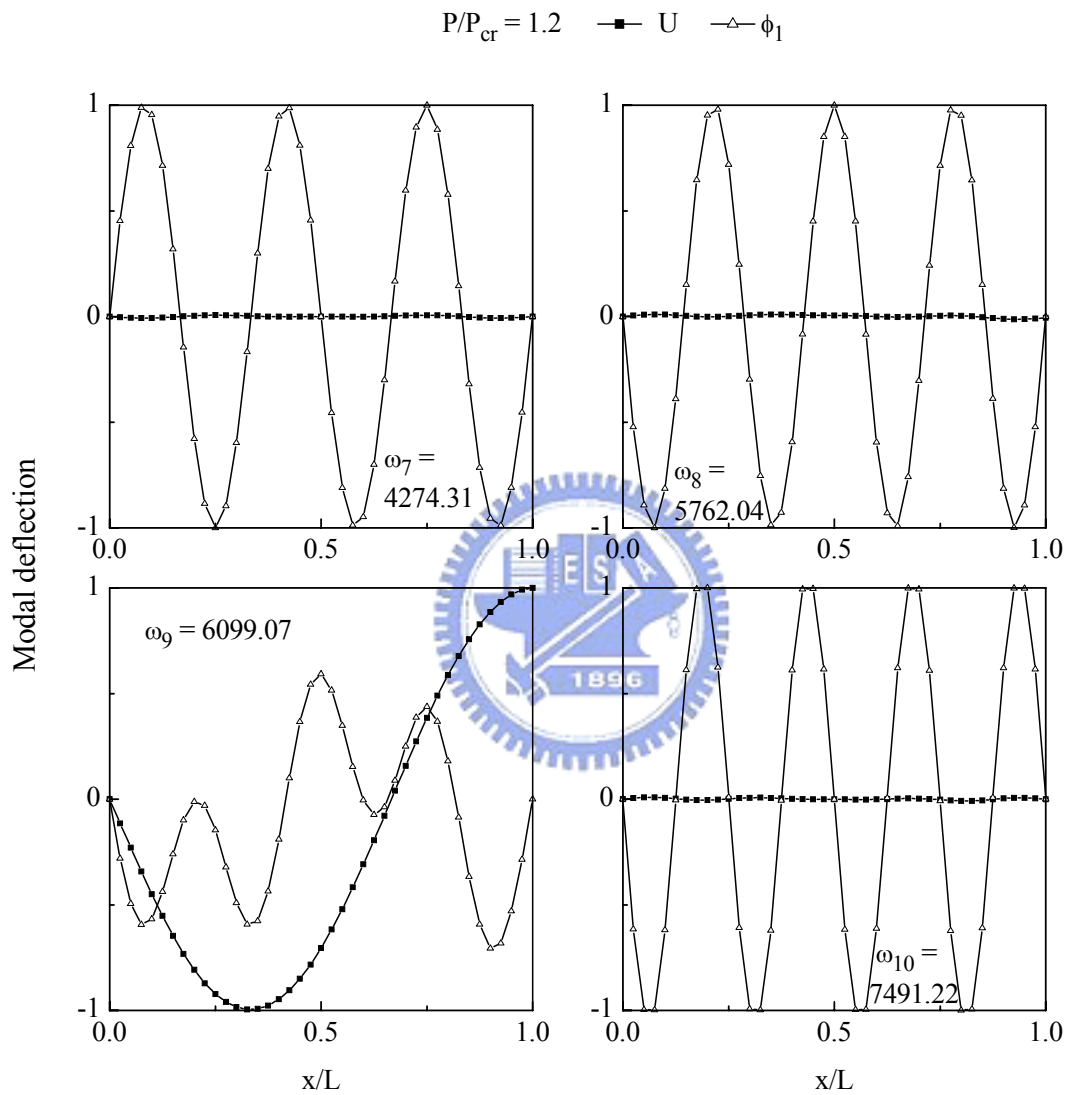


圖 4.18 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸力($P/P_{cr} = 1.2$)之振動模態圖(續)

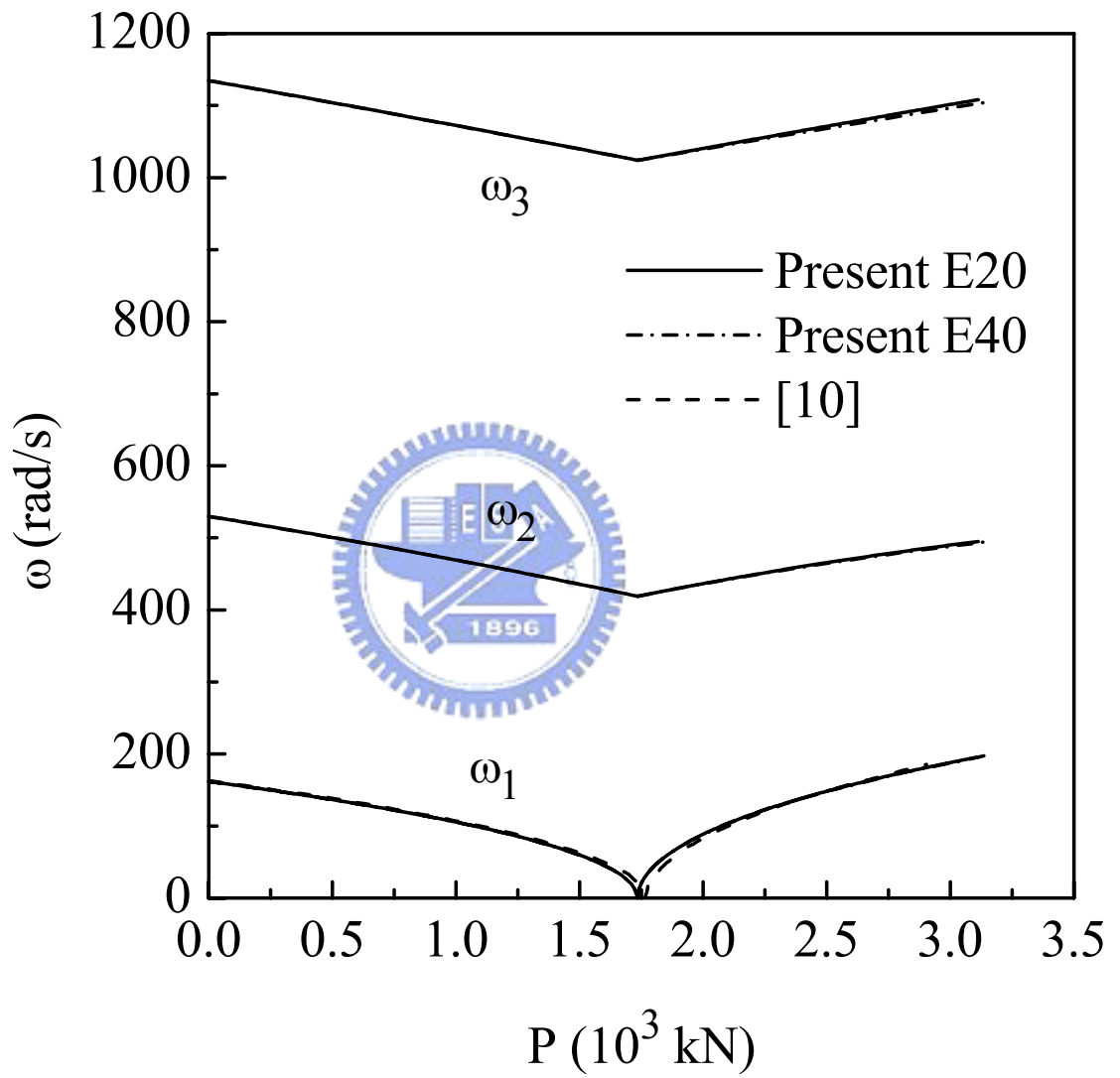
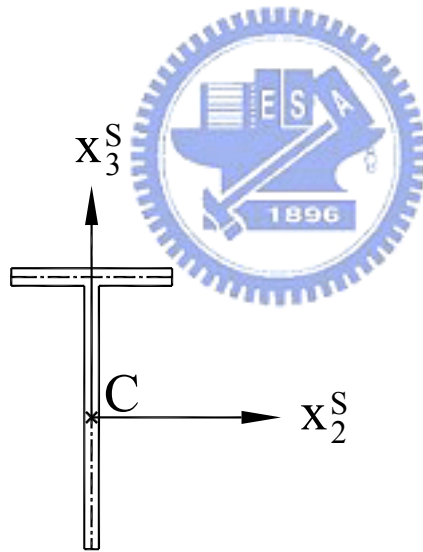
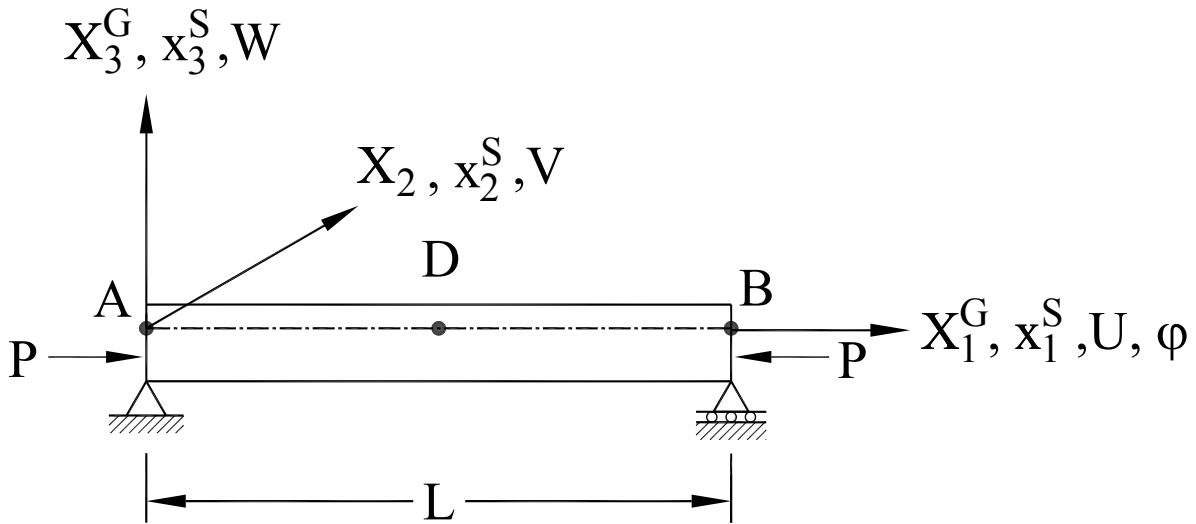


圖 4.19 例題 4.2.3 I 型斷面簡支梁受軸向負載的自然頻率—軸力曲線圖



End cross section
 × Loading point

圖 4.20 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁承受一軸向負載之結構圖

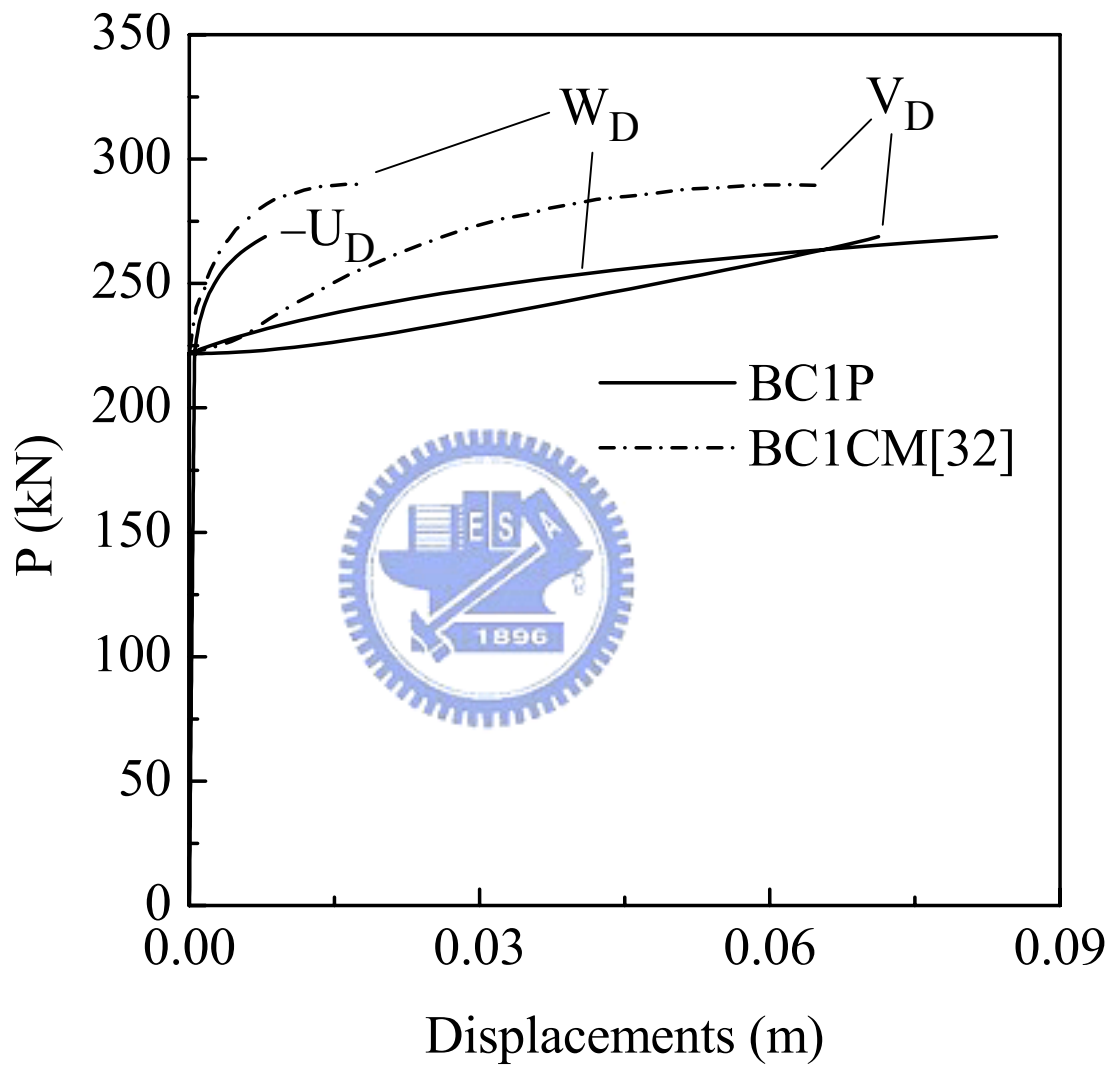


圖 4.21 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁在中心點 D 的負荷—位移曲線圖

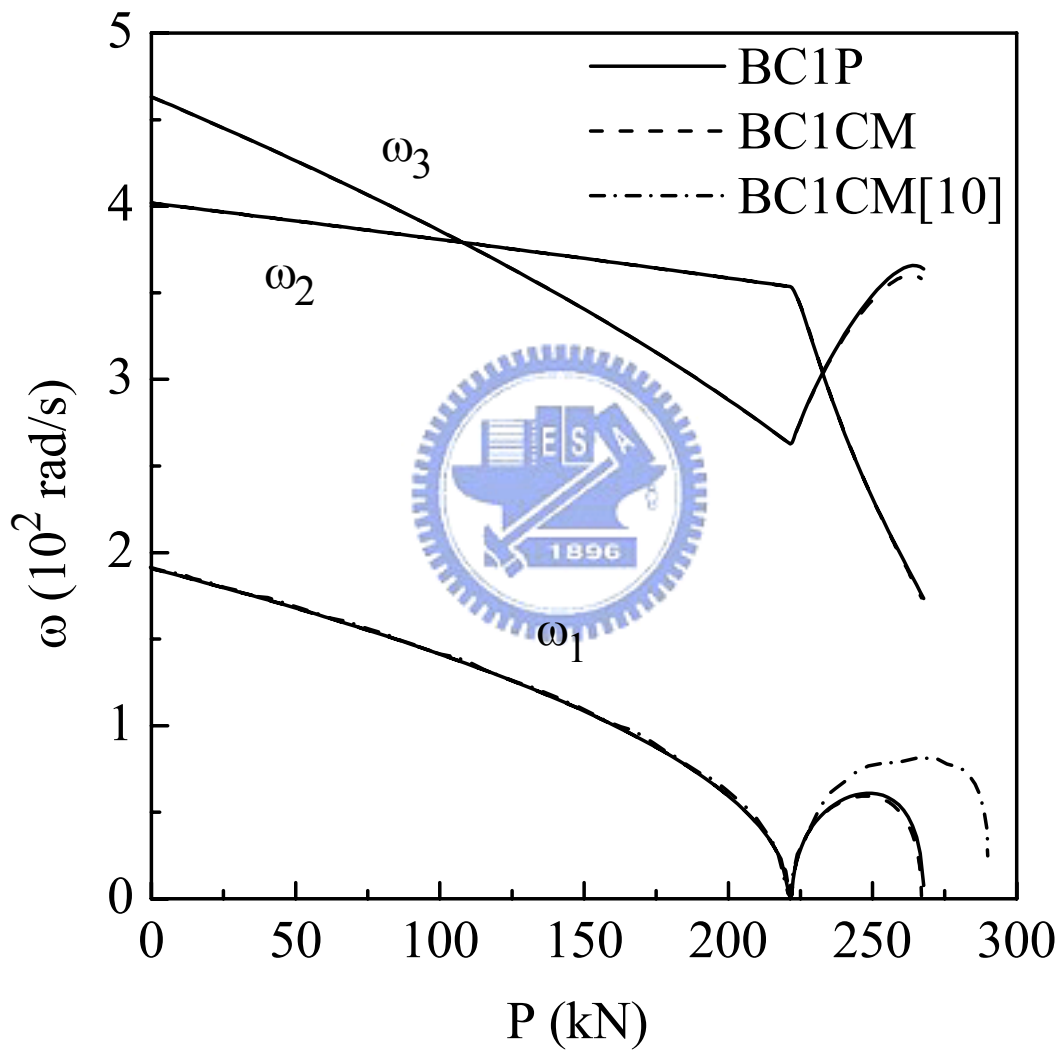
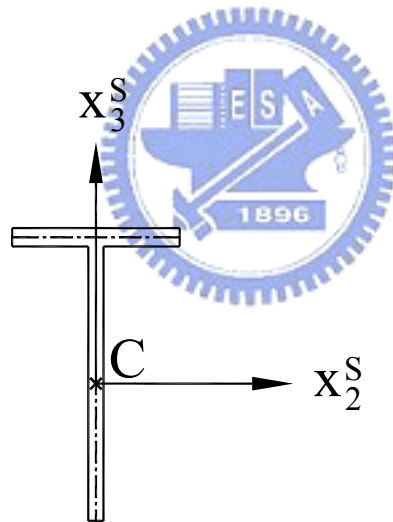
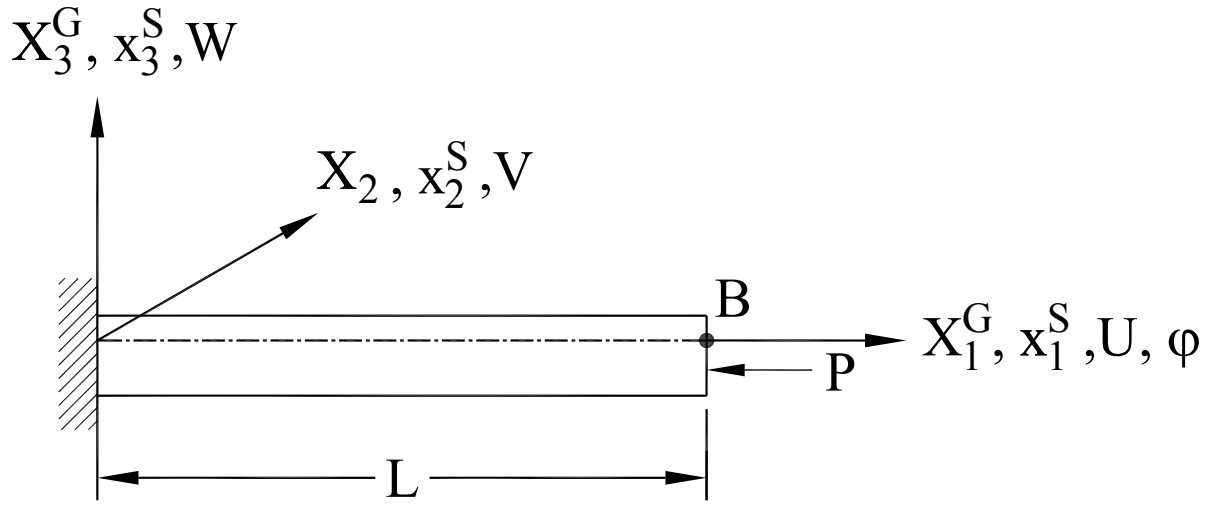


圖 4.22 例題 4.2.4 T 型斷面簡支梁的頻率—負荷曲線圖



End cross section
 × Loading point

圖 4.23 例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁自由端承受一軸向負載之結構圖

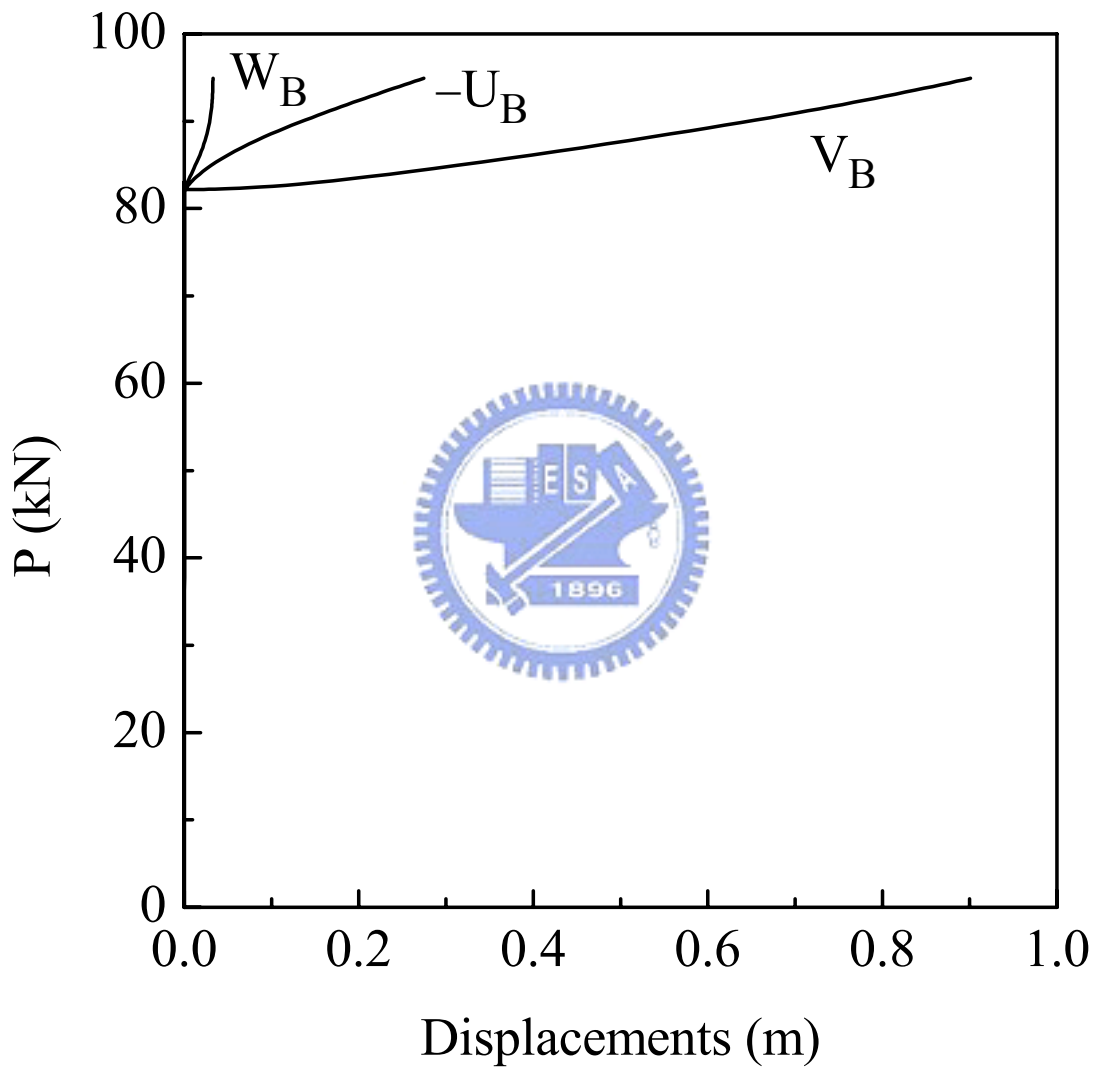


圖 4.24 例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁的負荷—位移曲線圖

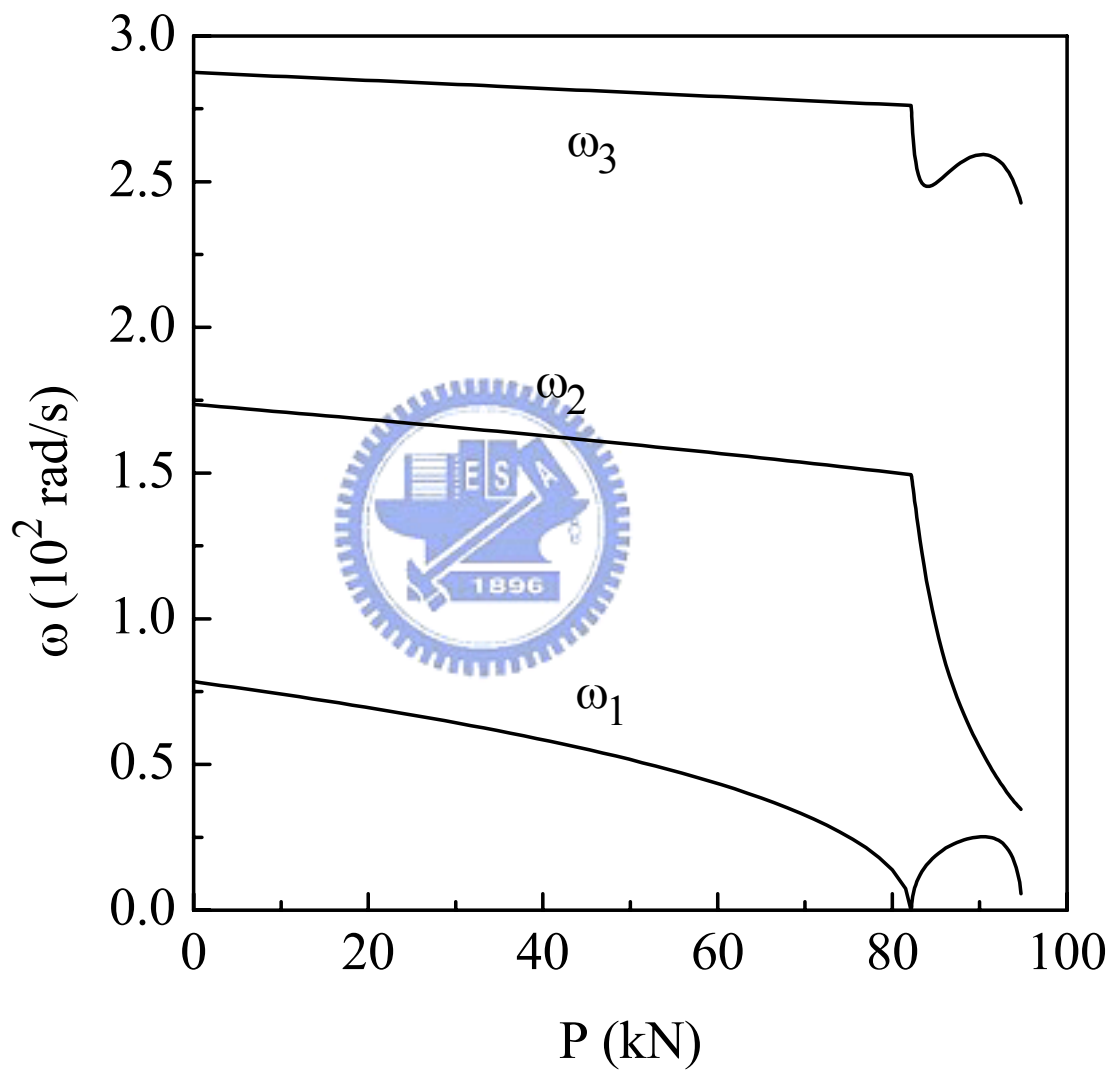
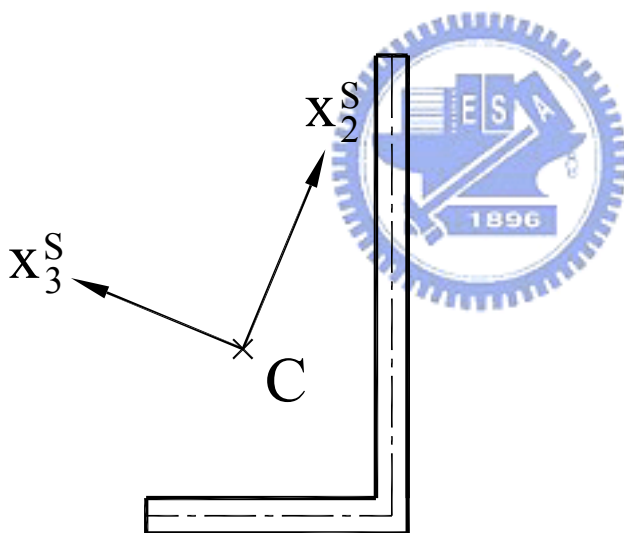
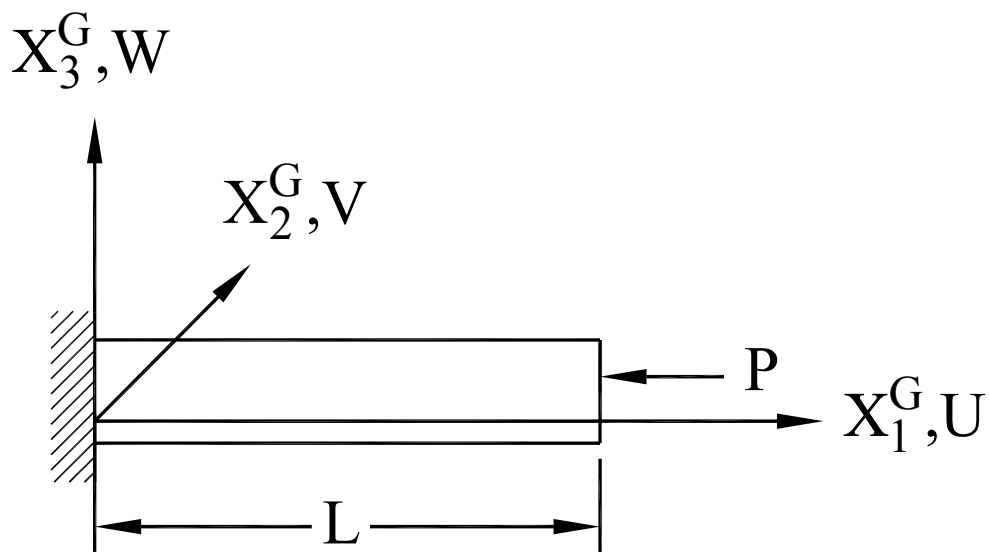


圖 4.25 例題 4.2.5 T 型斷面懸臂梁的頻率—負荷曲線圖



End cross section

× Loading point

圖 4.26 例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁自由端承受一軸向負載之結構圖

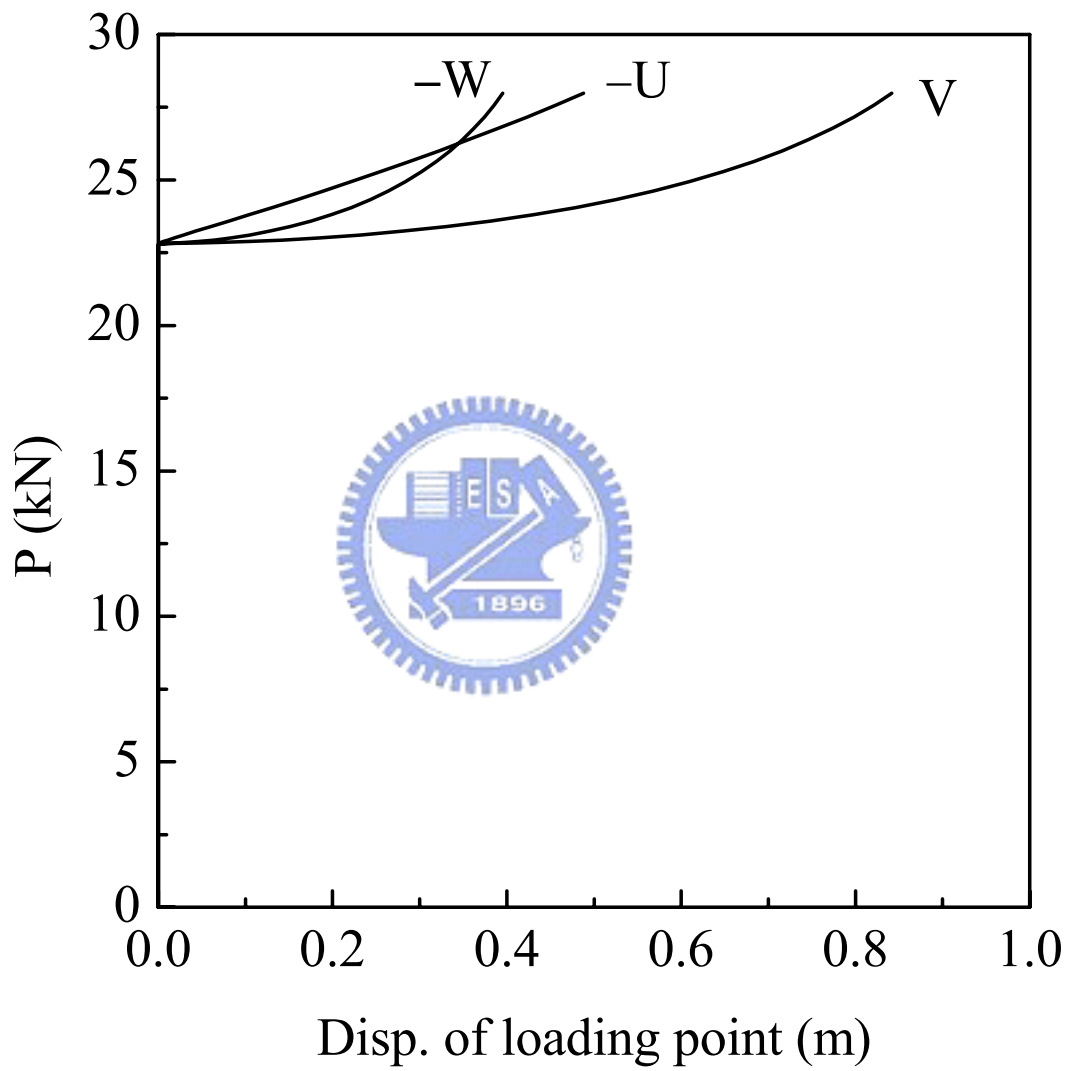


圖 4.27 例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁的負荷—位移曲線圖

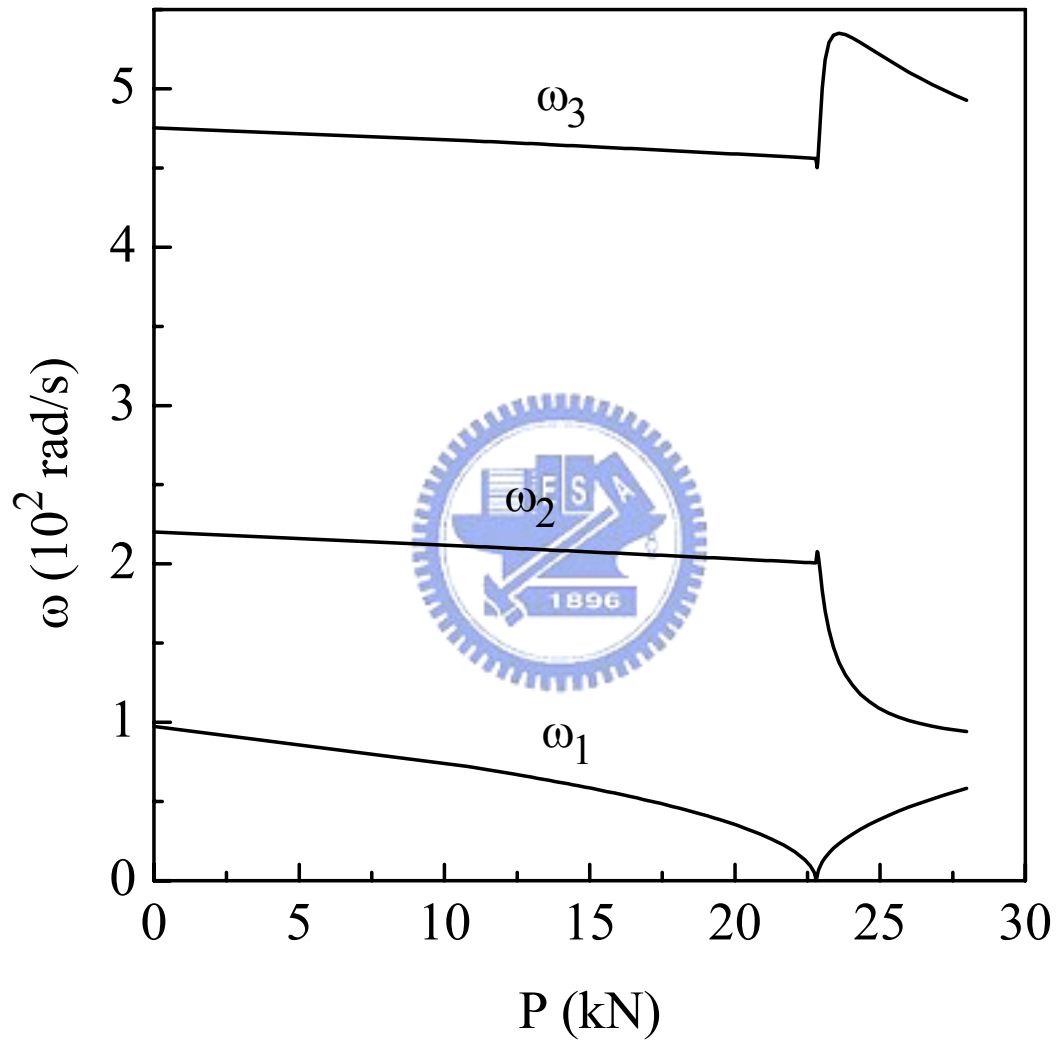


圖 4.28 例題 4.2.6 L 型斷面懸臂梁的頻率—負荷曲線圖

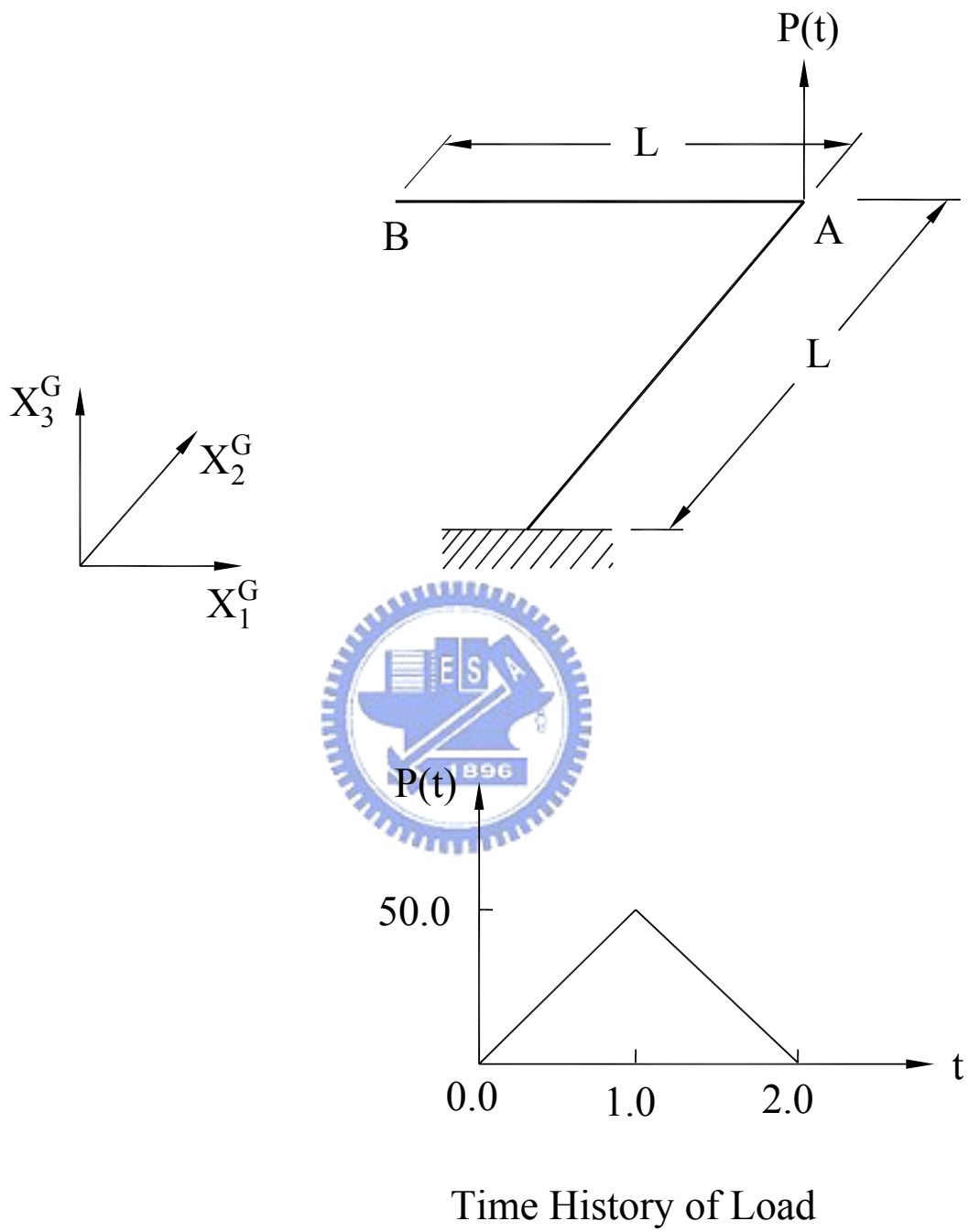


圖 4.29 例題 4.3.1 懸臂直角構架之幾何及受力圖

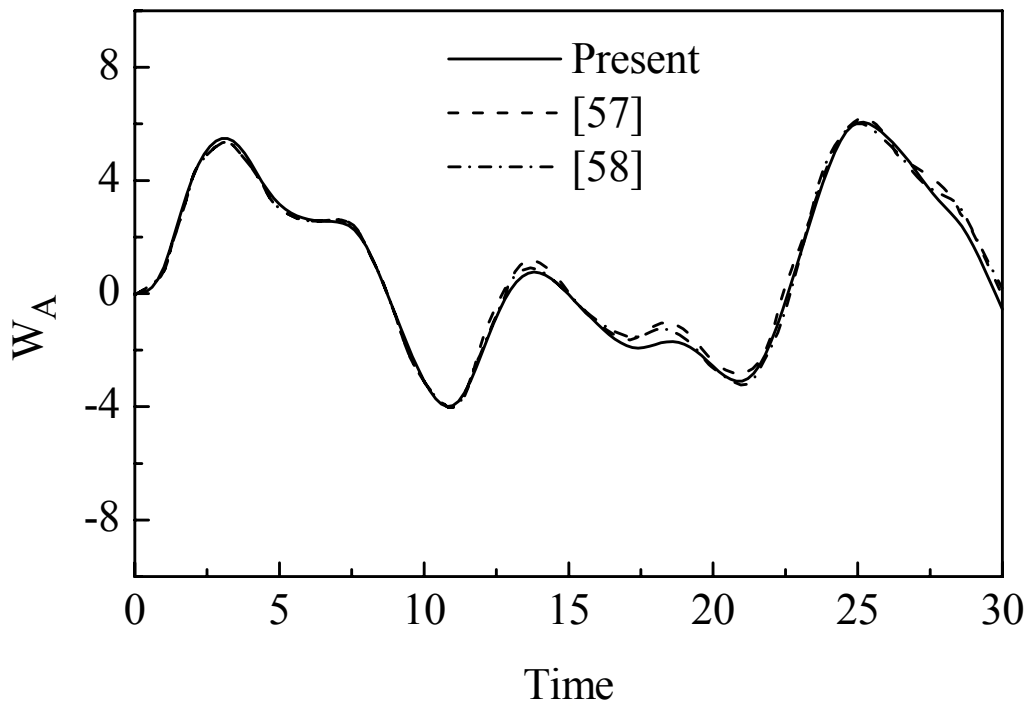


圖 4.30 例題 4.3.1 懸臂直角構架 A 點在 X_3^G 方向之位移

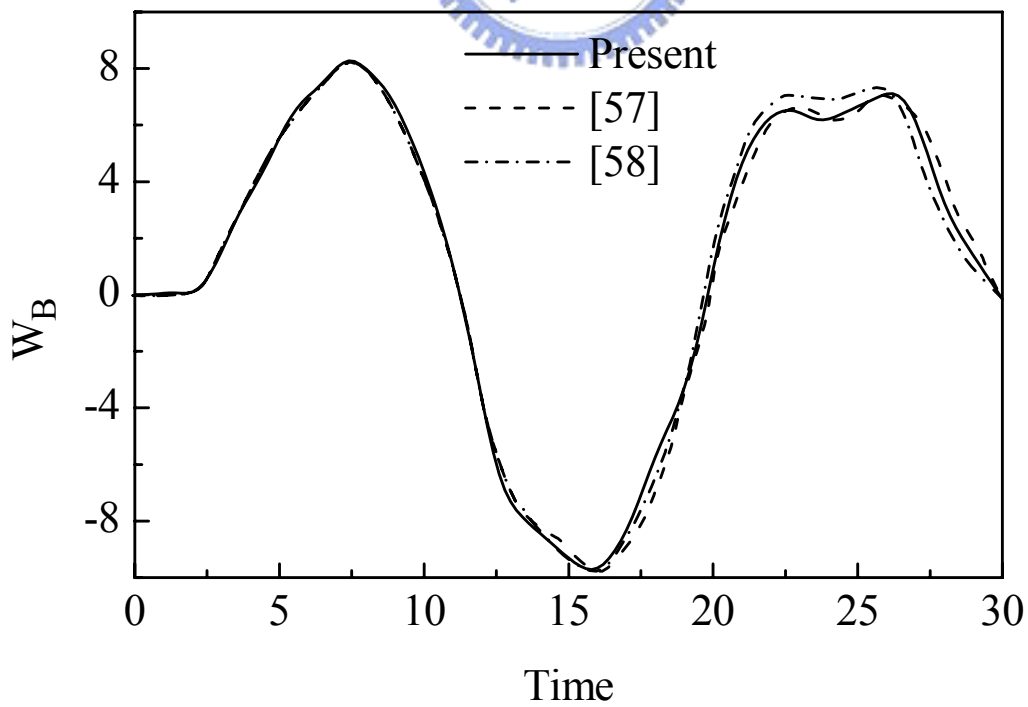
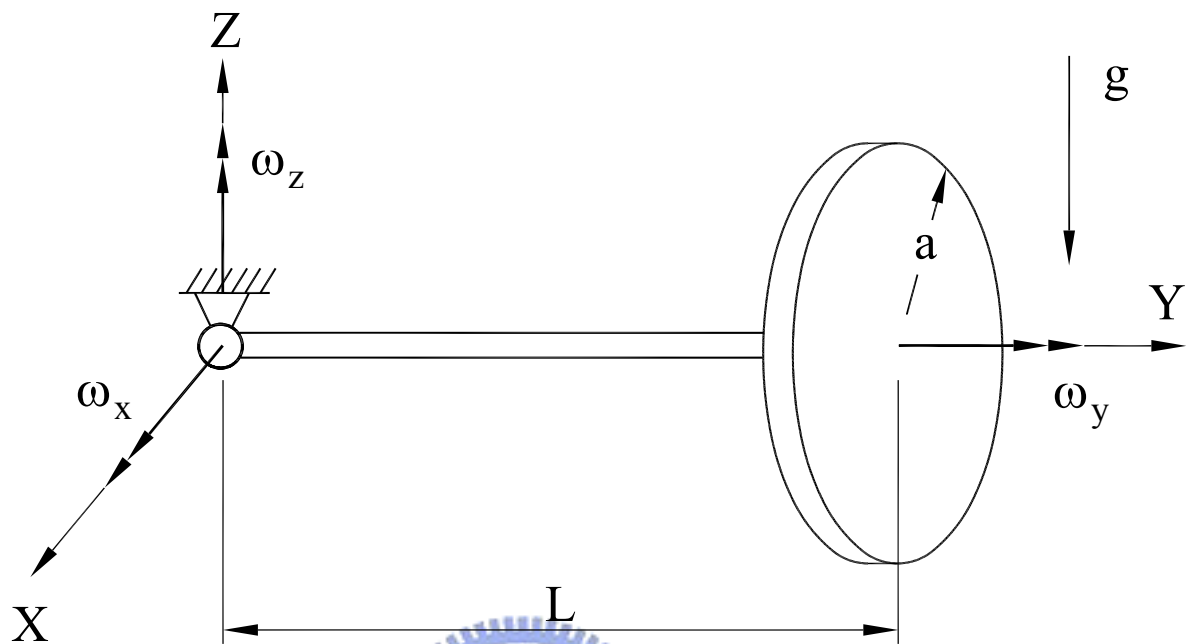


圖 4.31 例題 4.3.1 懸臂直角構架自由端 B 點 X_3^G 方向之位移

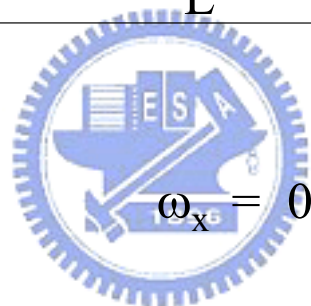


$$M = 15$$

$$a = 0.25$$

$$L = 1$$

$$g = 9.81$$



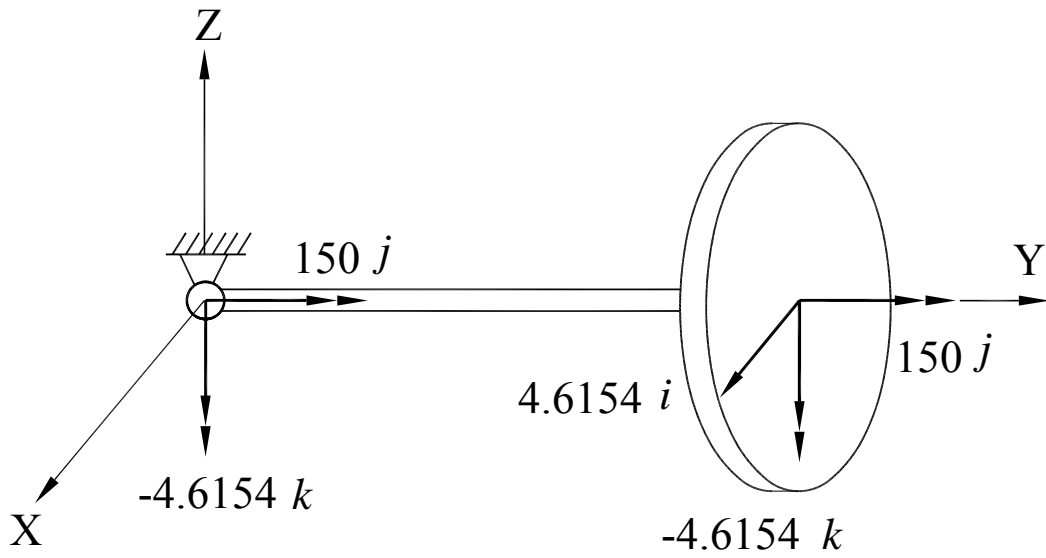
$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = \omega_0$$

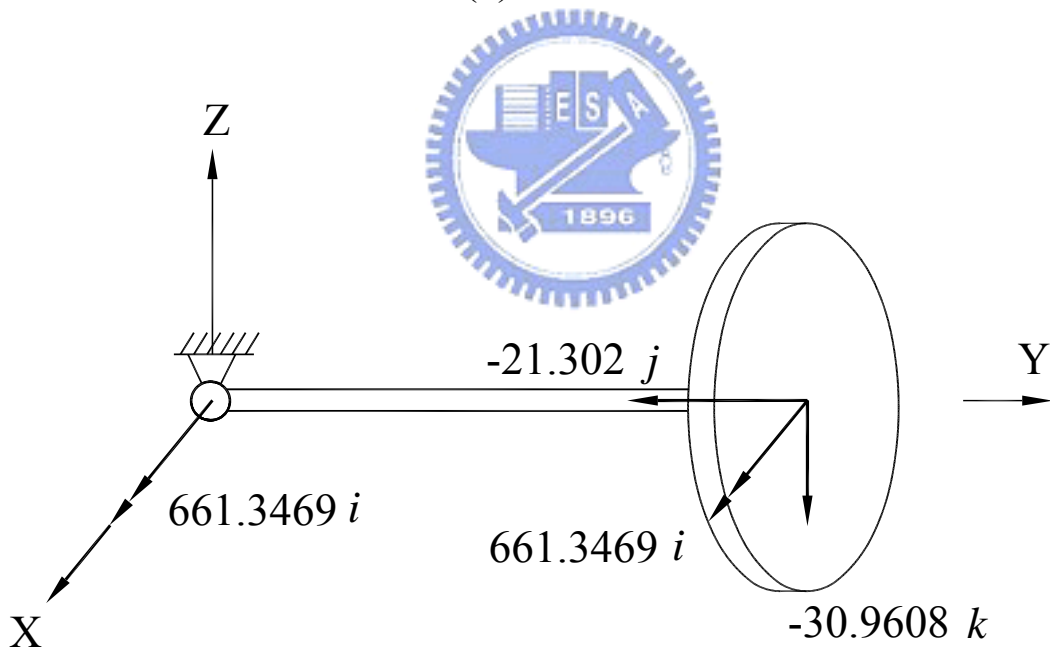
$$\omega_z = \frac{-2a^2}{a^2 + 4L} \omega_0$$

$$\omega_0 = 150$$

圖 4.32 例題 4.3.2 旋轉圓盤之幾何及受力圖



(a)



(b)

圖 4.33 例題 4.3.2 旋轉圓盤之初始速度、加速度

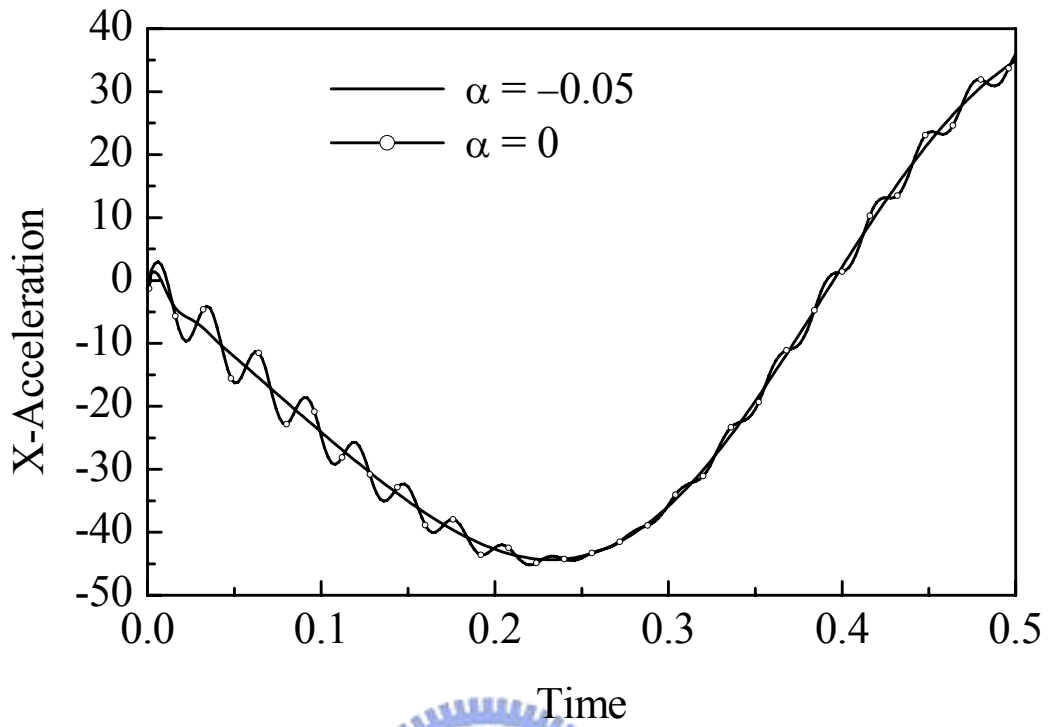


圖 4.34 例題 4.3.2 旋轉圓盤之中心在 X 方向的加速度

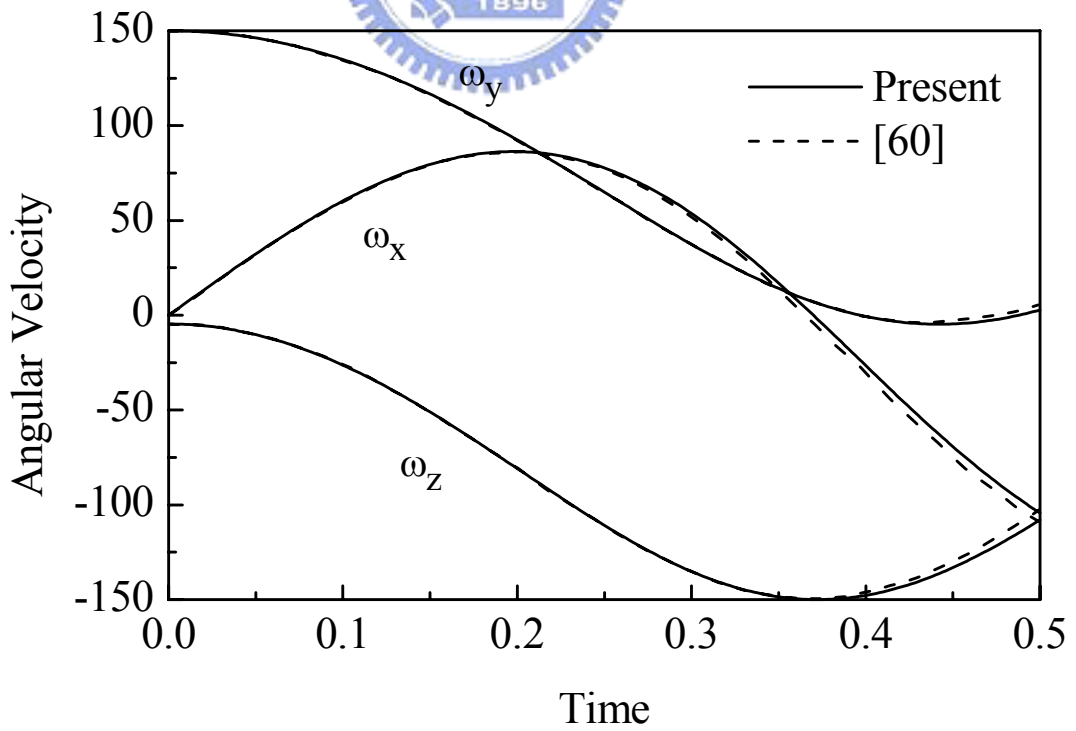


圖 4.35 例題 4.3.2 旋轉圓盤之角速度變化過程

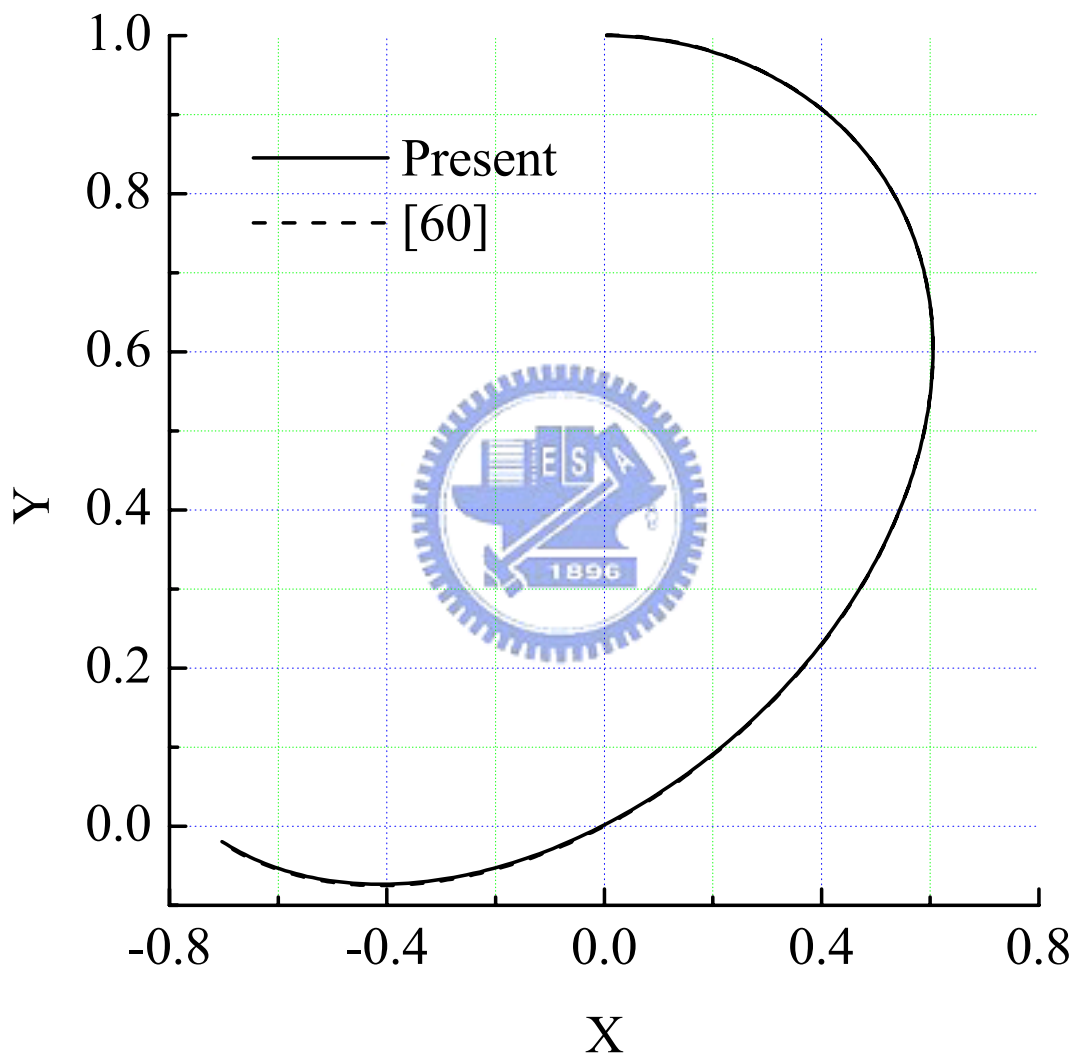


圖 4.36 例題 4.3.2 旋轉圓盤中心在 XY 平面的運動軌跡

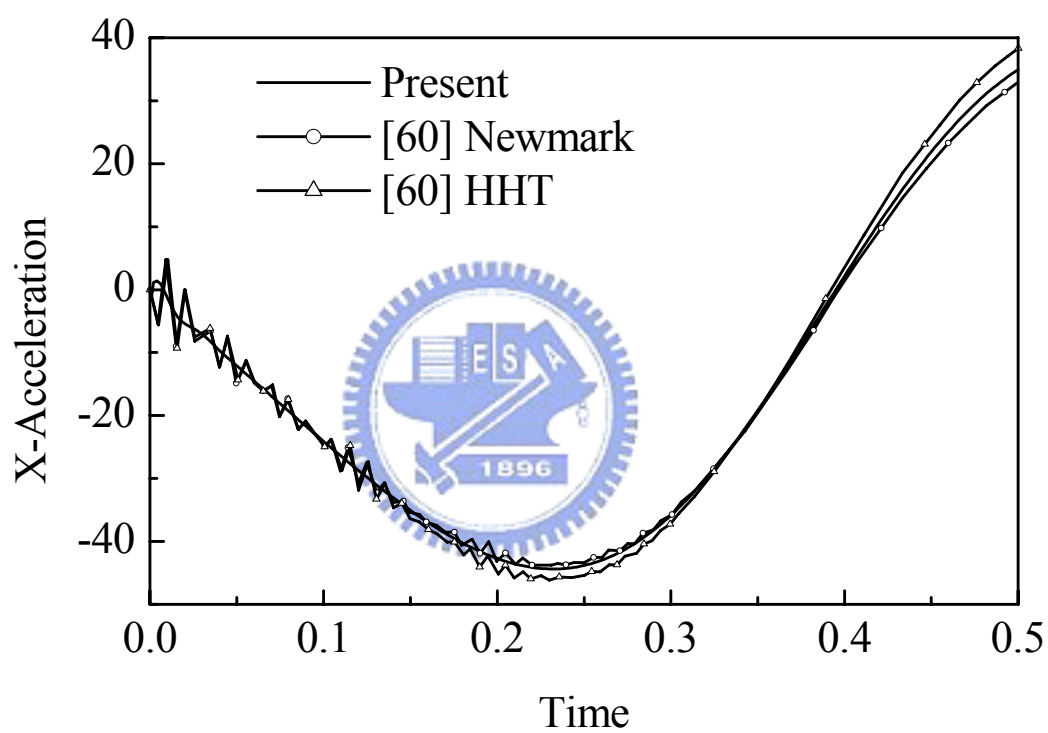
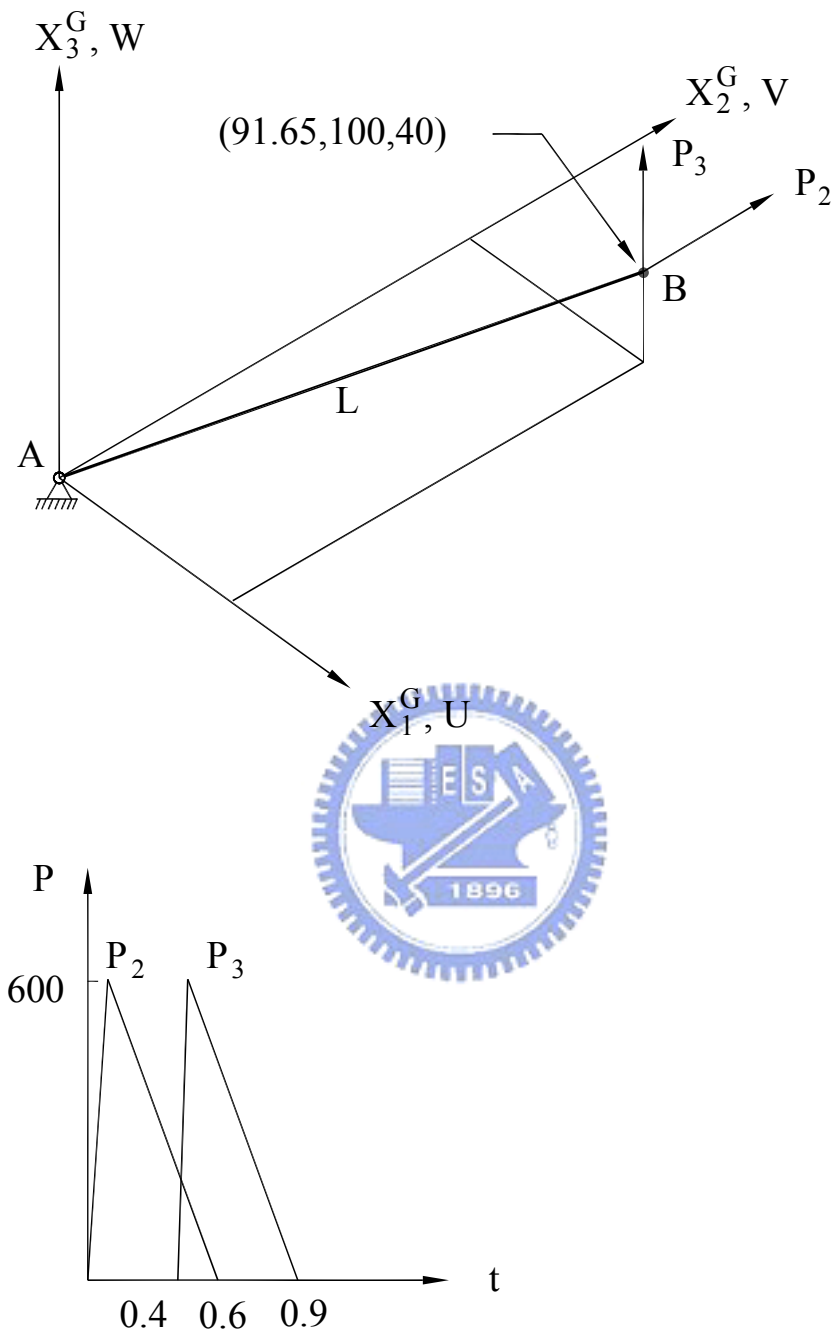


圖 4.37 例題 4.3.2 旋轉圓盤中心在 X 方向的加速度



Time History of Impact Loads

圖 4.38 例題 4.3.3 球窩接頭之空間桿之幾何及受力圖

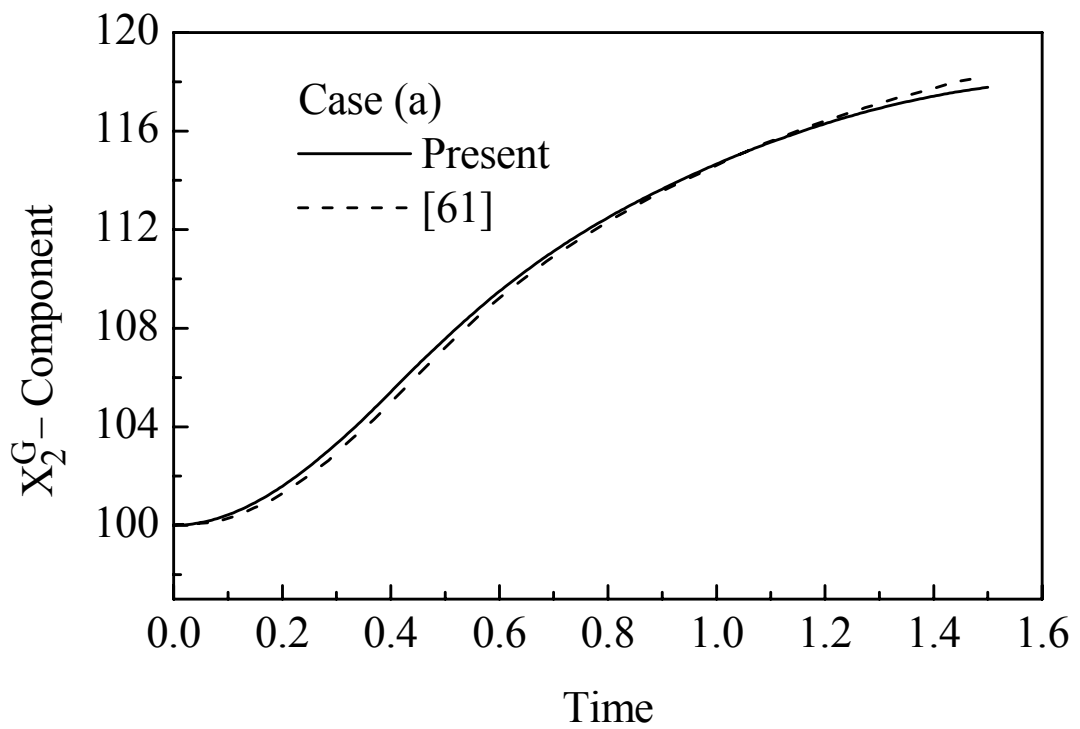


圖 4.39 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_2^G 方向的分量(Case (a))

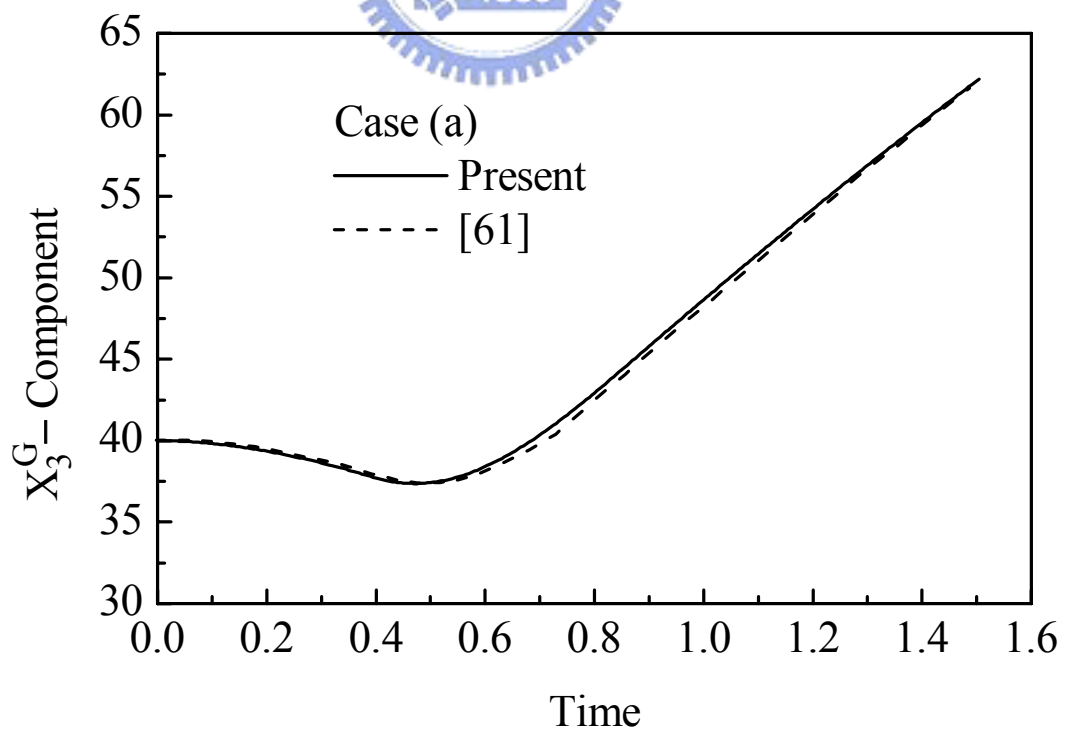


圖 4.40 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_3^G 方向的分量(Case (a))

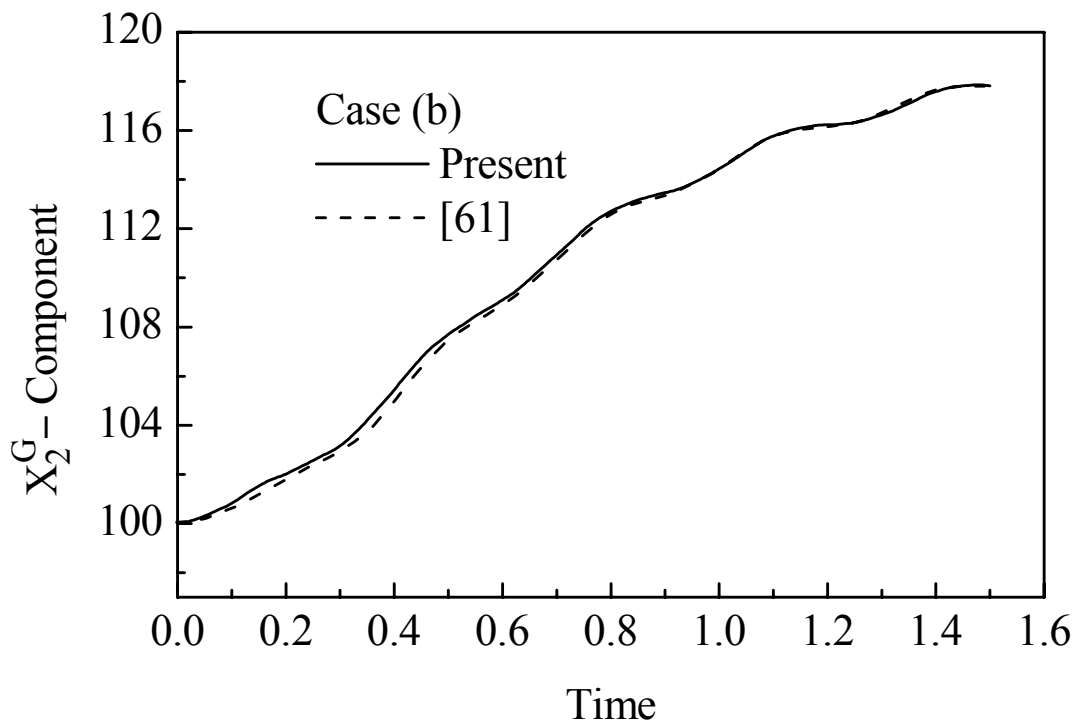


圖 4.41 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_2^G 方向的分量(Case (b))

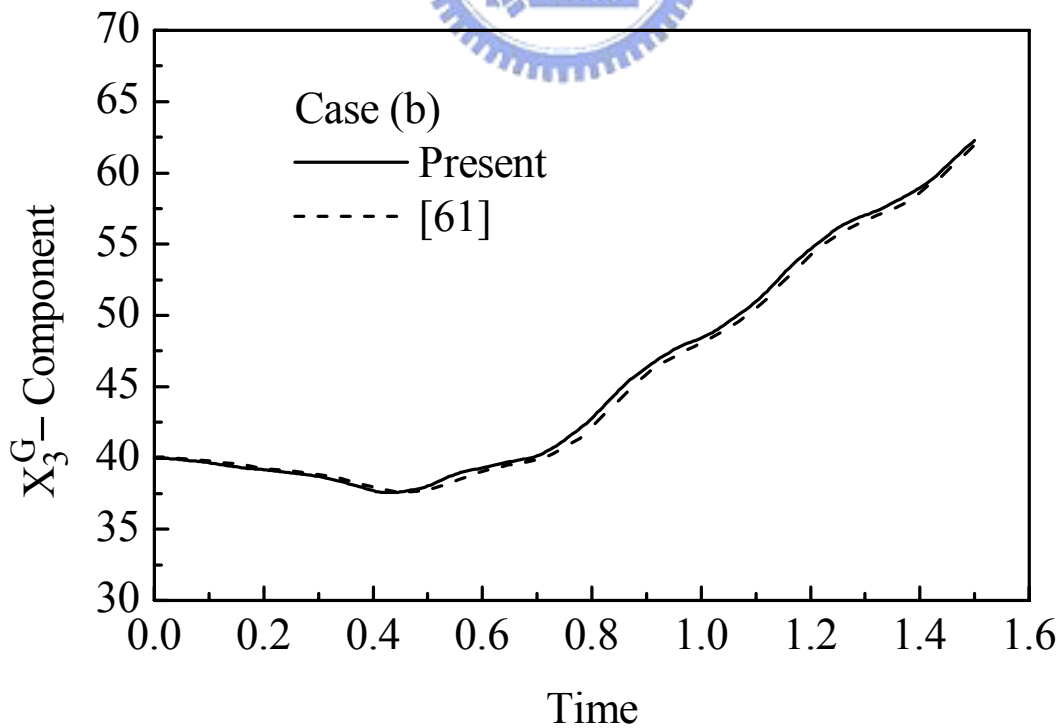
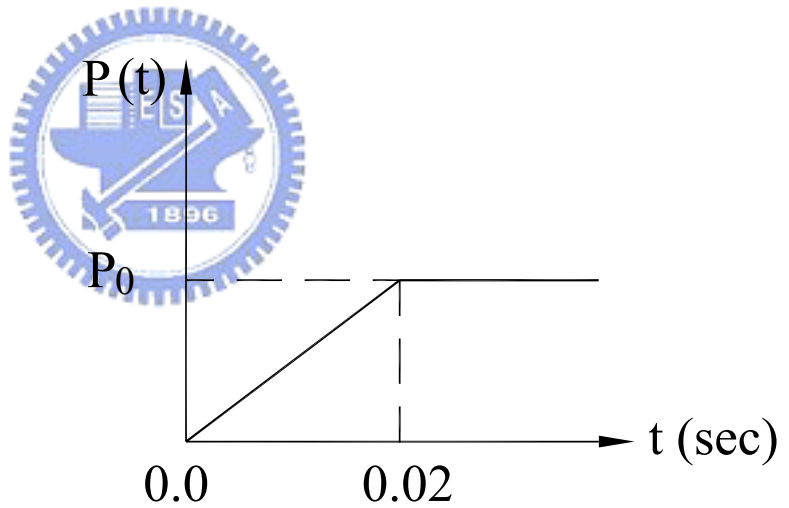
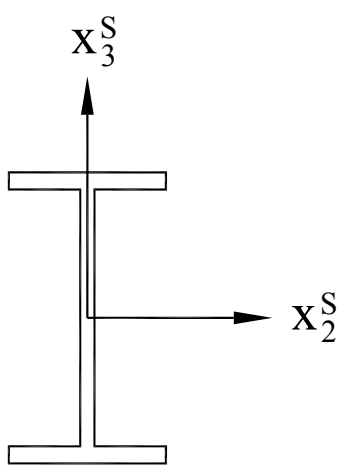
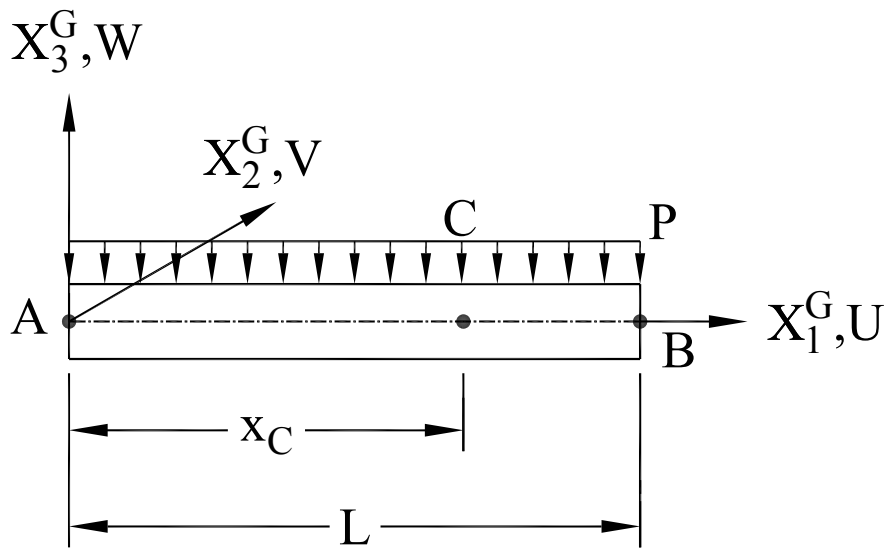


圖 4.42 例題 4.3.3 之自由端之位置向量在 X_3^G 方向的分量(Case (b))



End cross section

Time History of Load

圖 4.43 例題 4.3.4 I 型斷面梁之幾何及受力圖

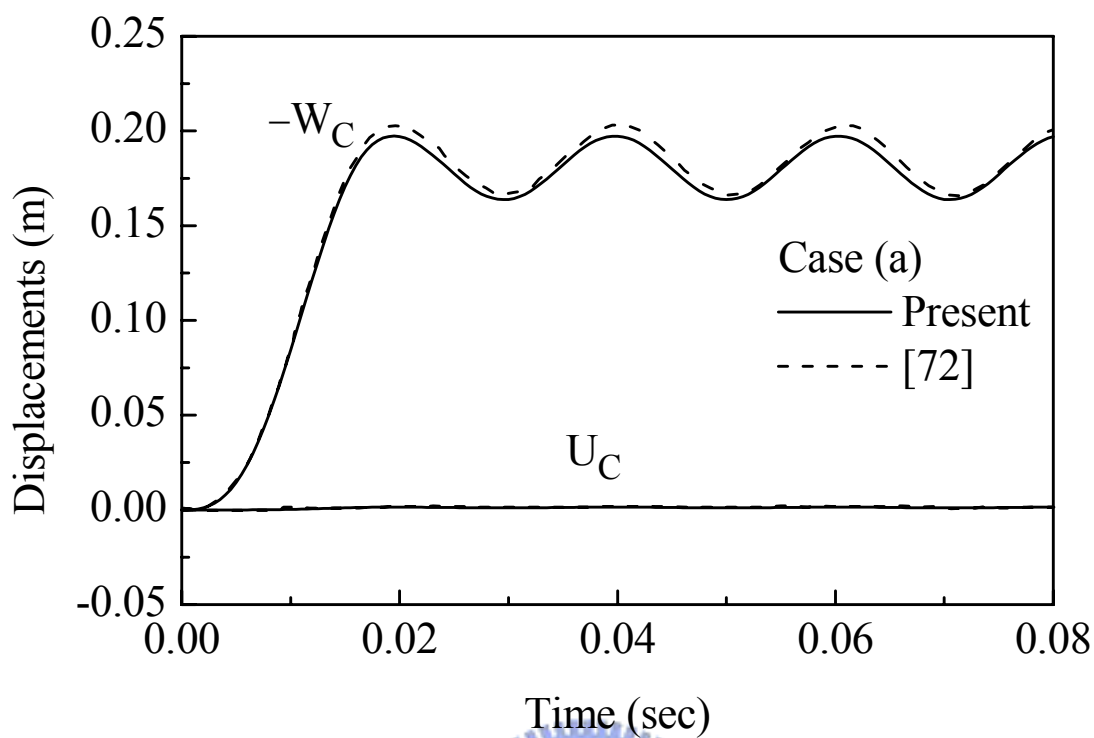


圖 4.44 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (a))

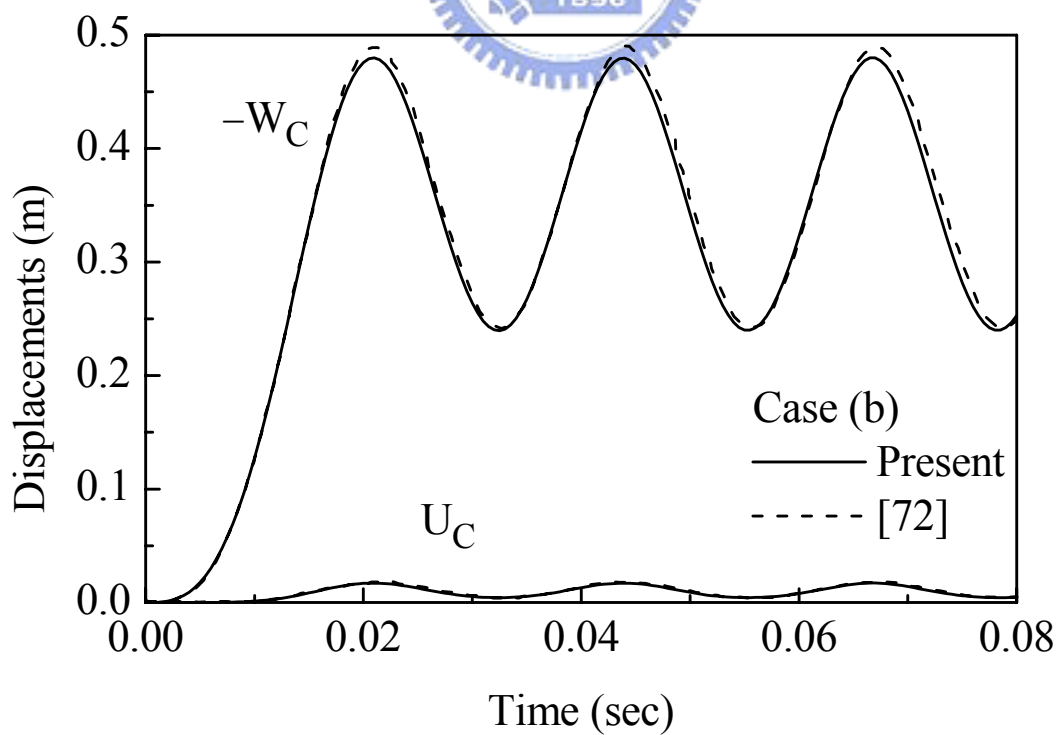


圖 4.45 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (b))

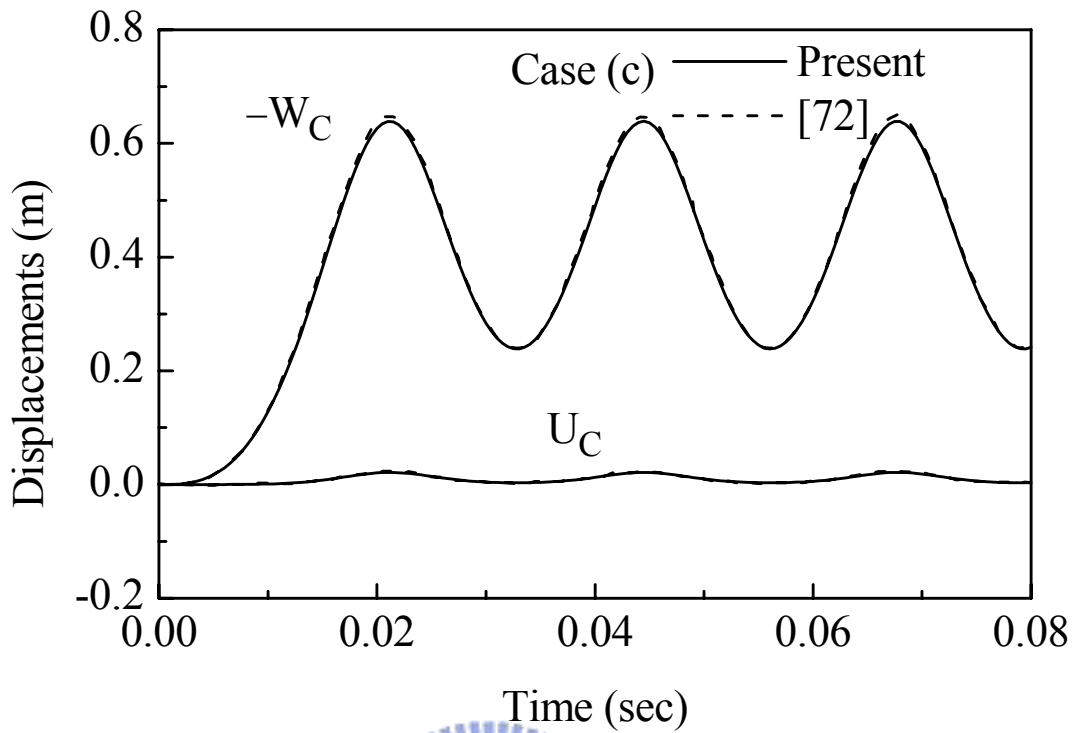


圖 4.46 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (c))

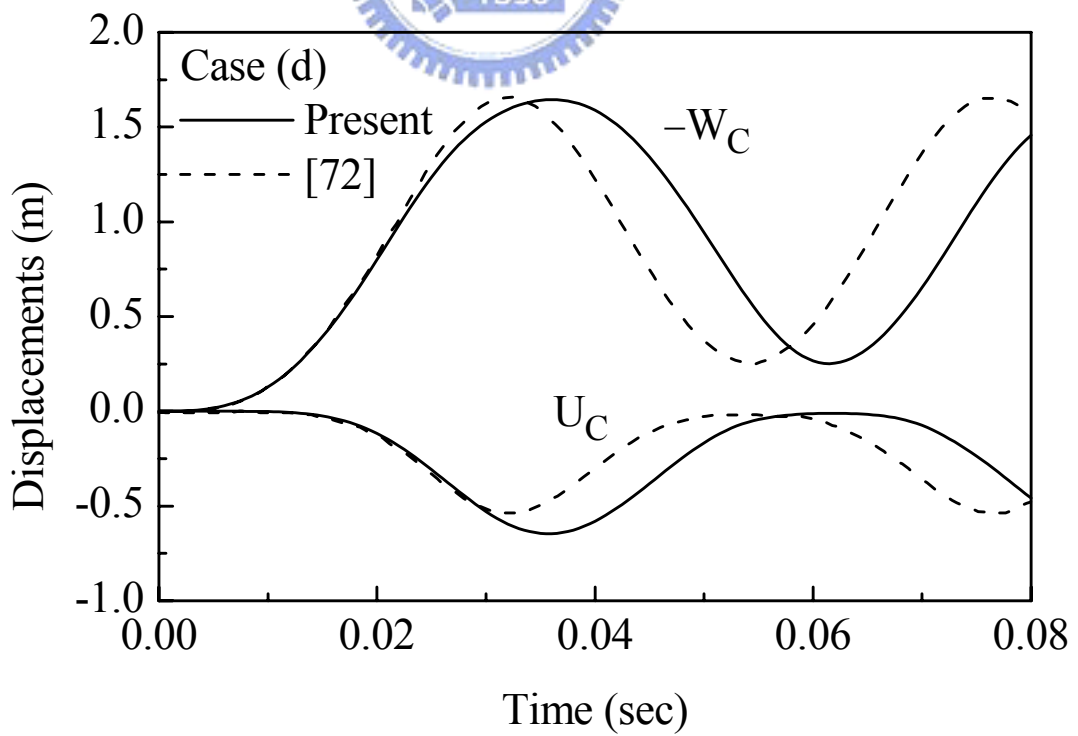


圖 4.47 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (d))

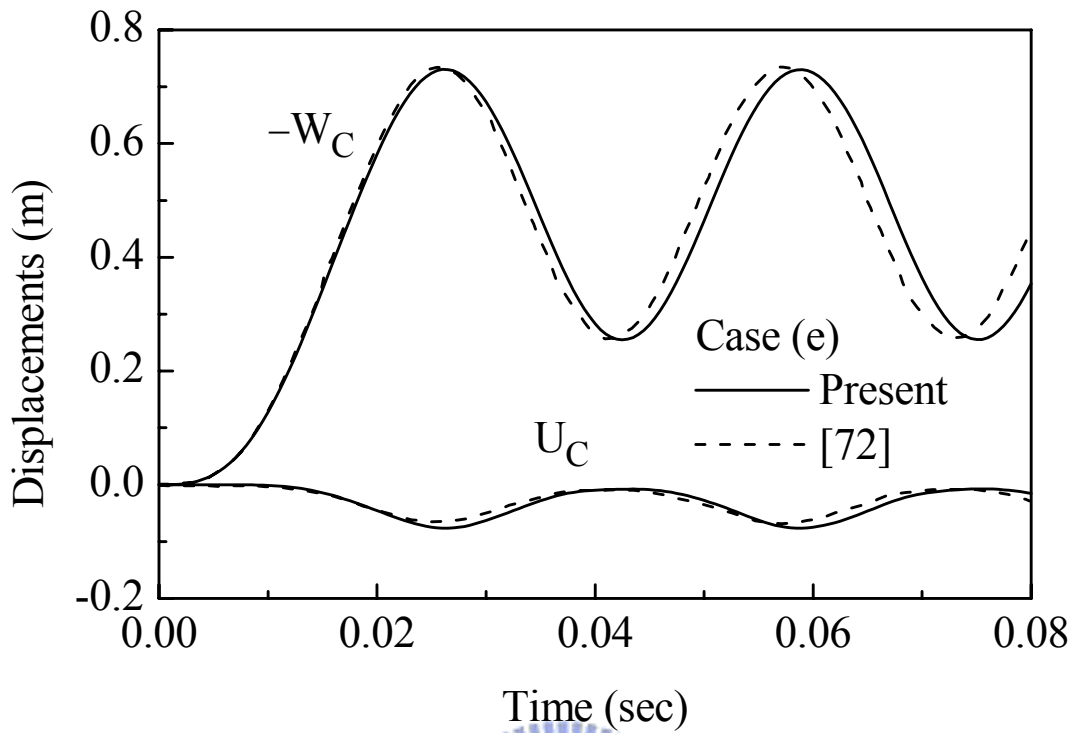


圖 4.48 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (e))

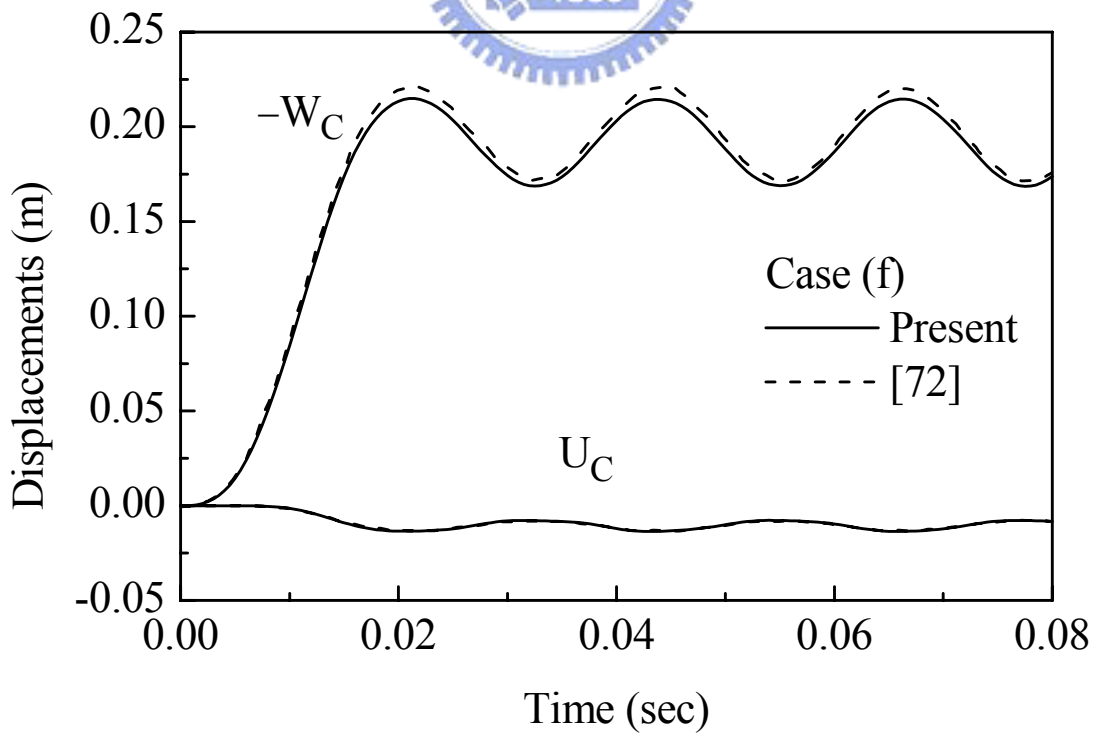


圖 4.49 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (f))

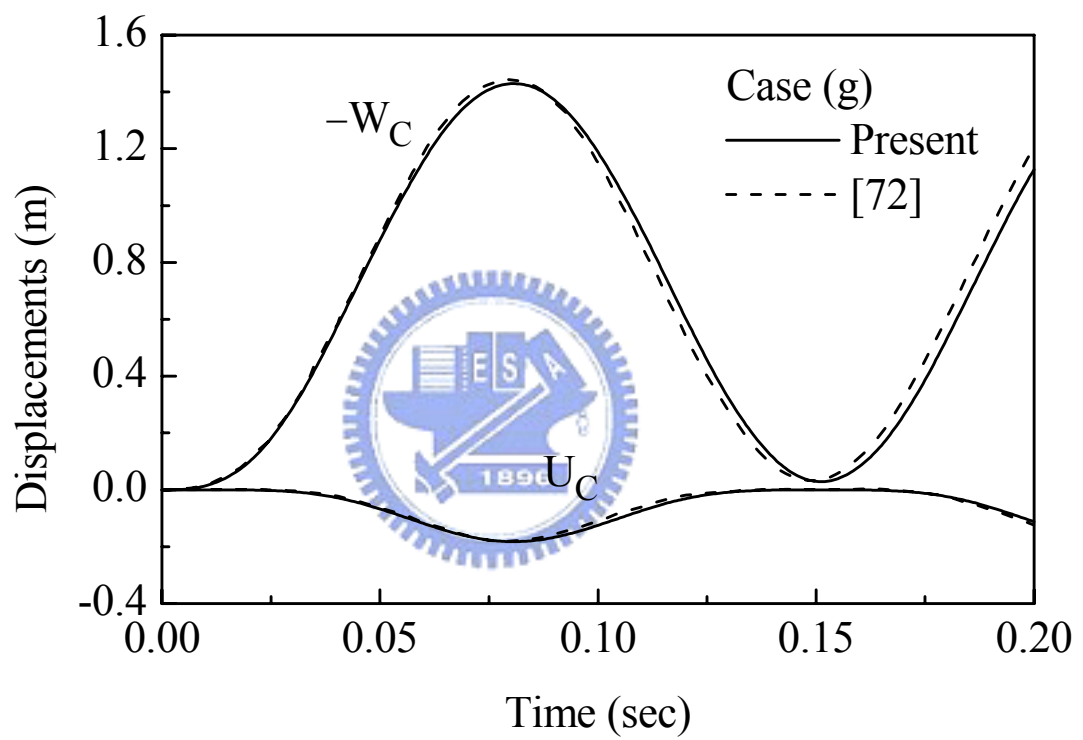
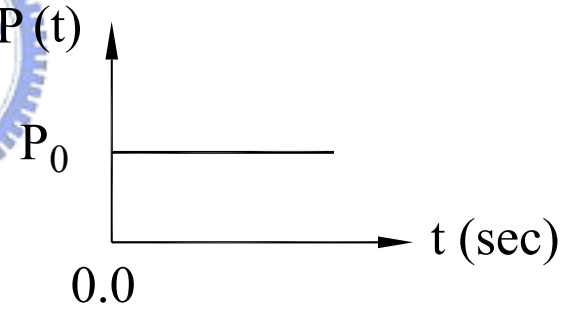
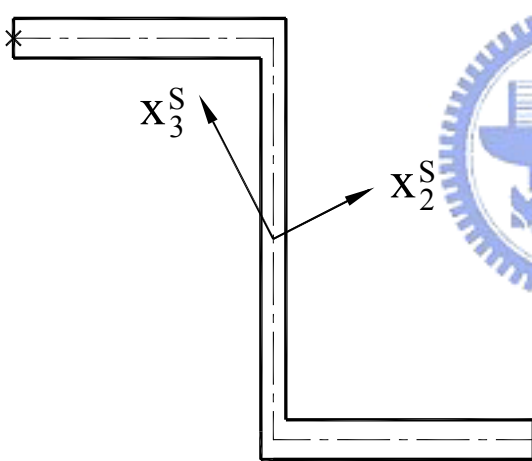
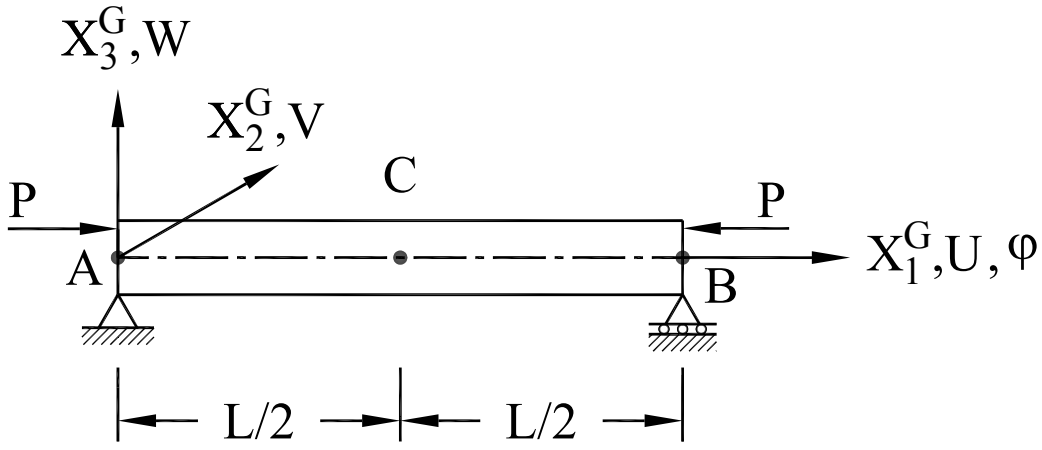


圖 4.50 例題 4.3.4 之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (g))



End cross section

Time History of Load

× Loading point

圖 4.51 例題 4.3.5 Z 型斷面梁之幾何及受力圖

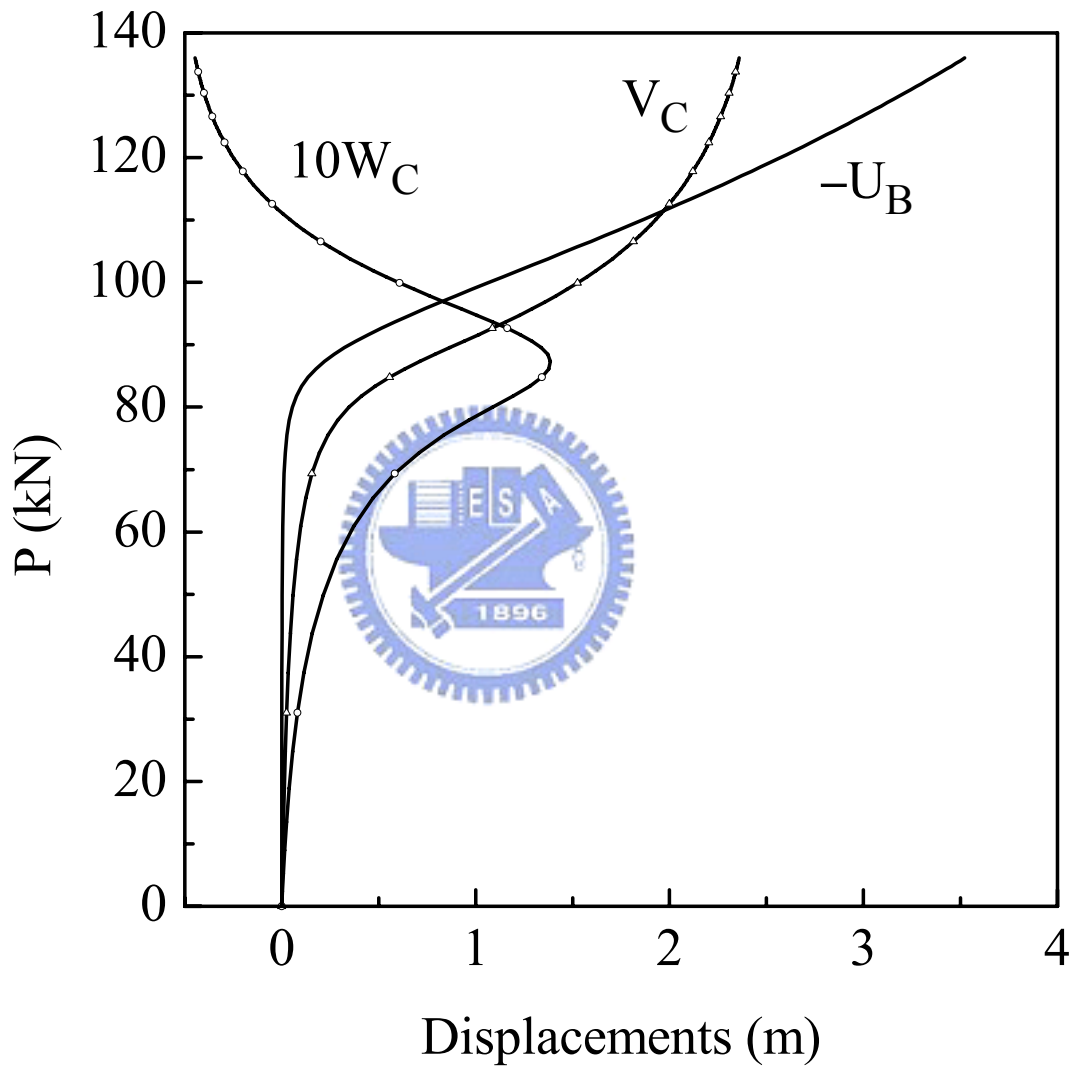


圖 4.52 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖

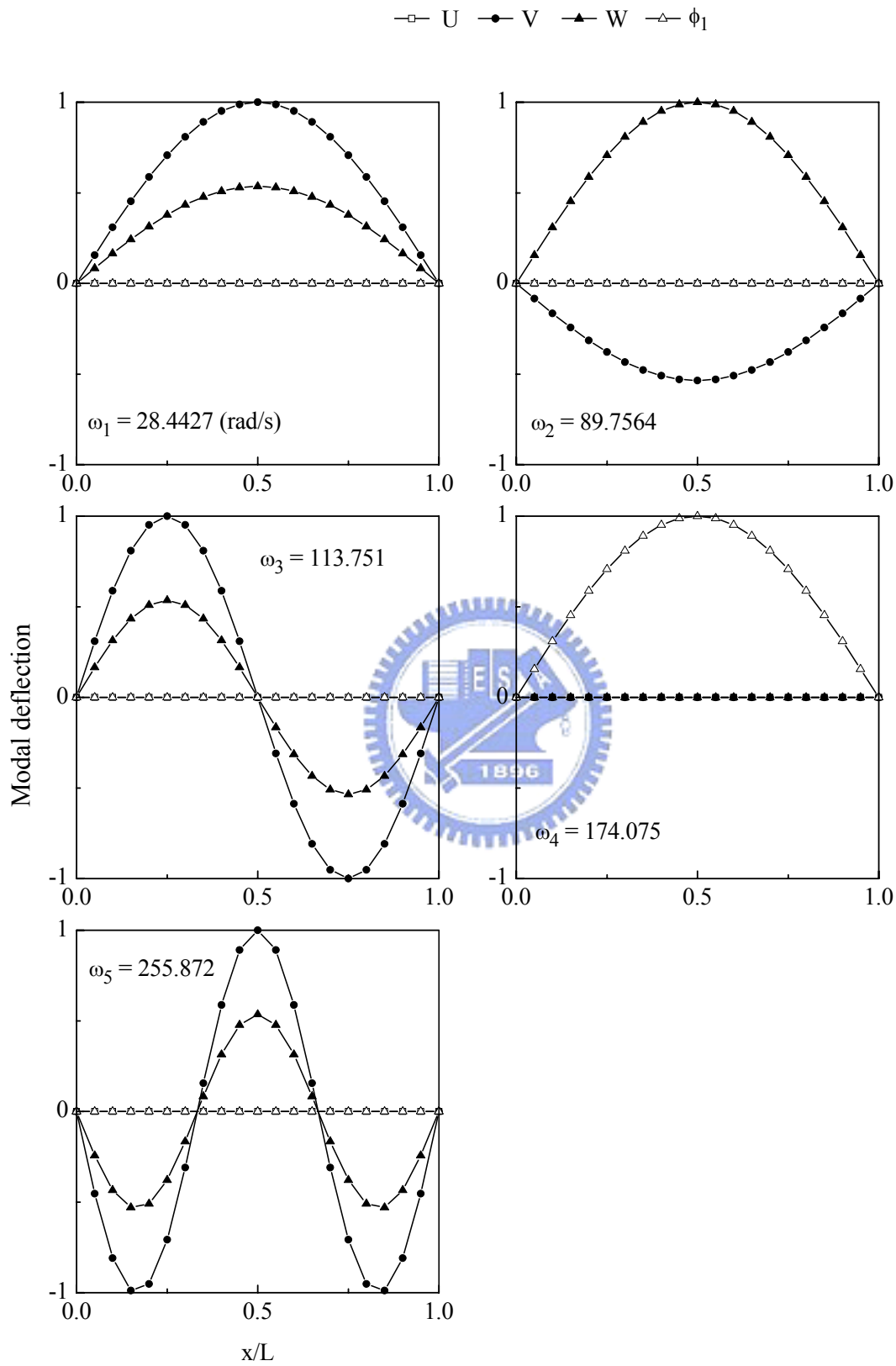


圖 4.53 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P=0$)

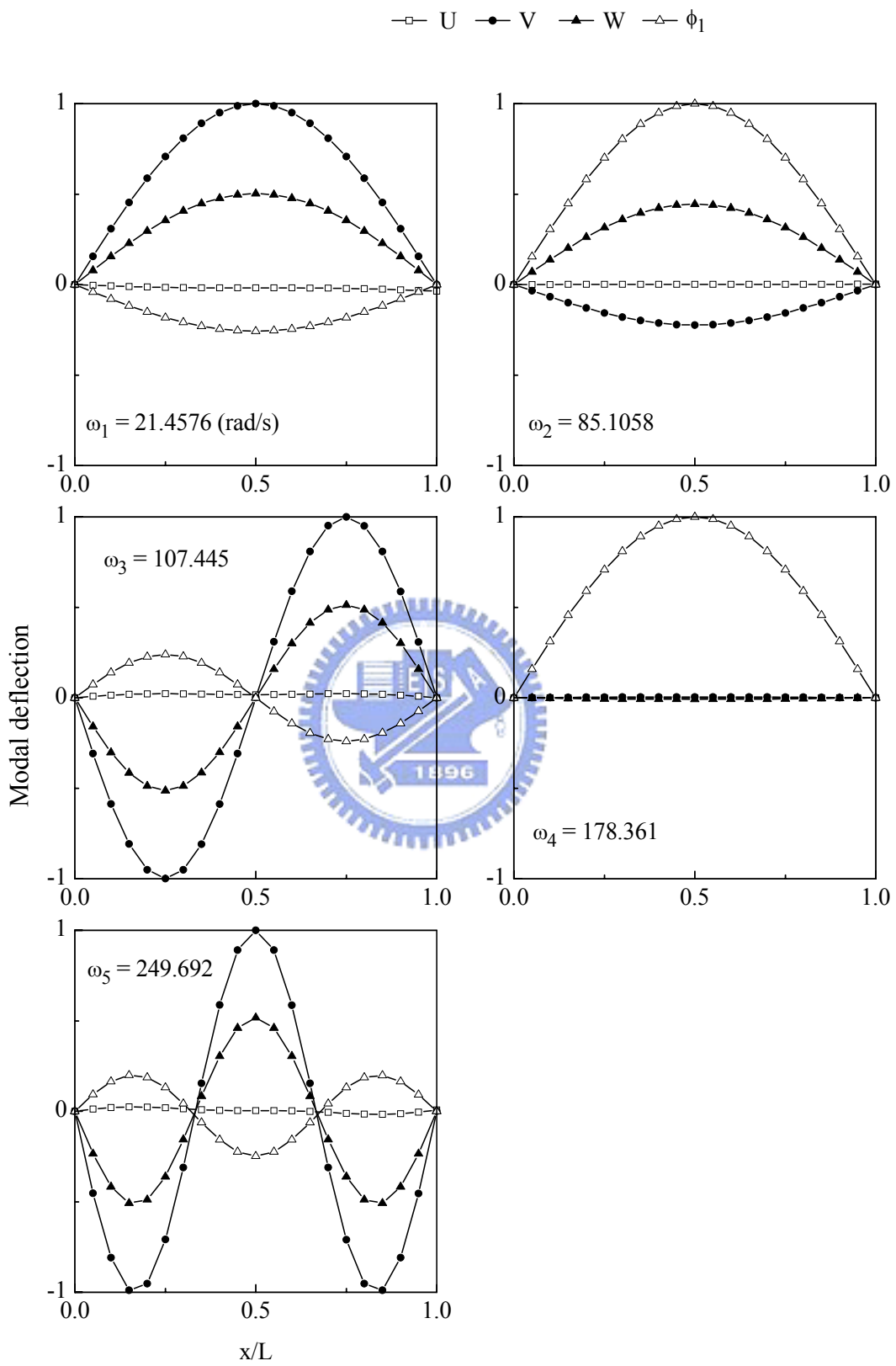


圖 4.54 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P = 40 \text{ kN}$)

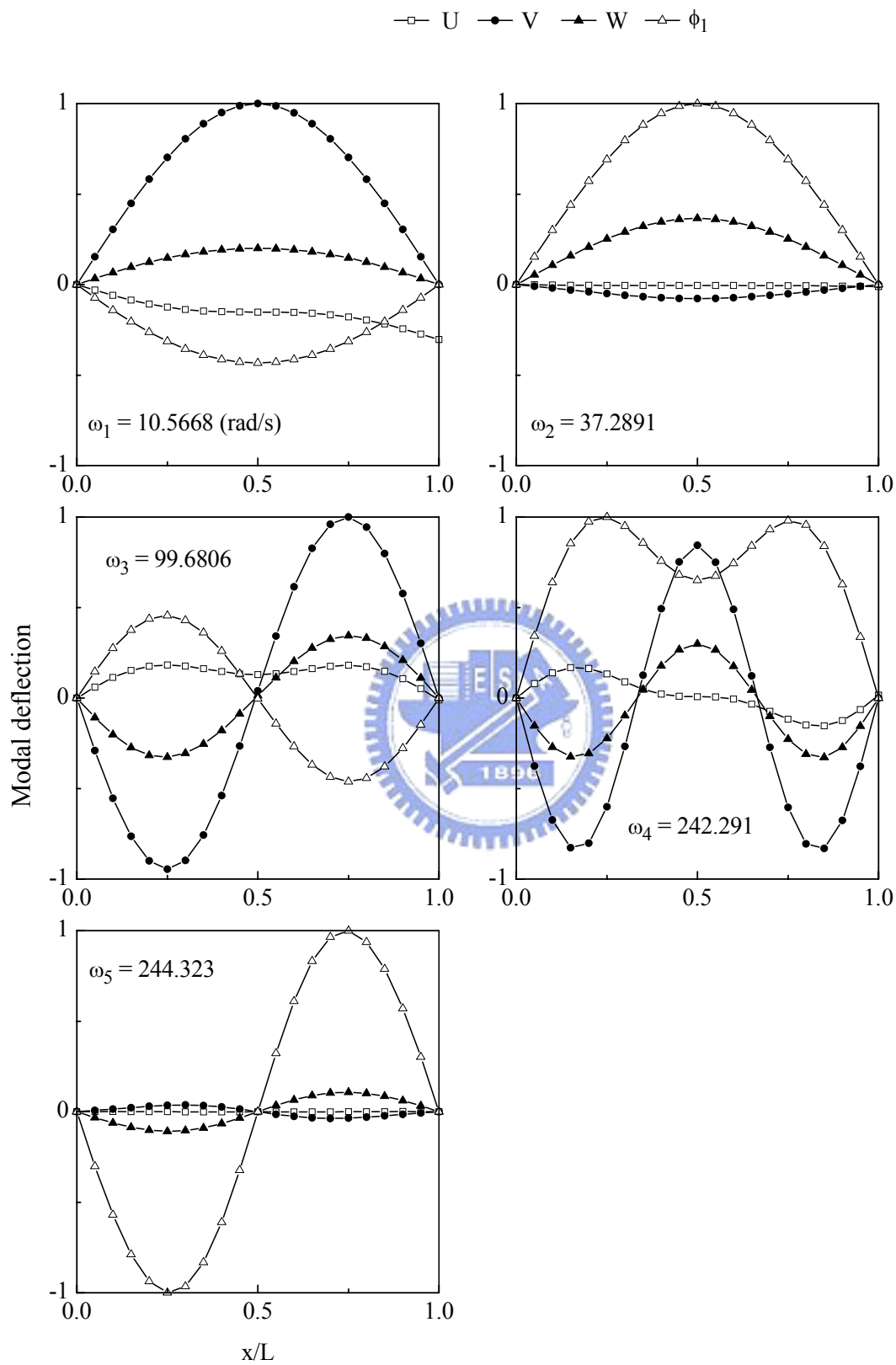


圖 4.55 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P = 80 \text{ kN}$)

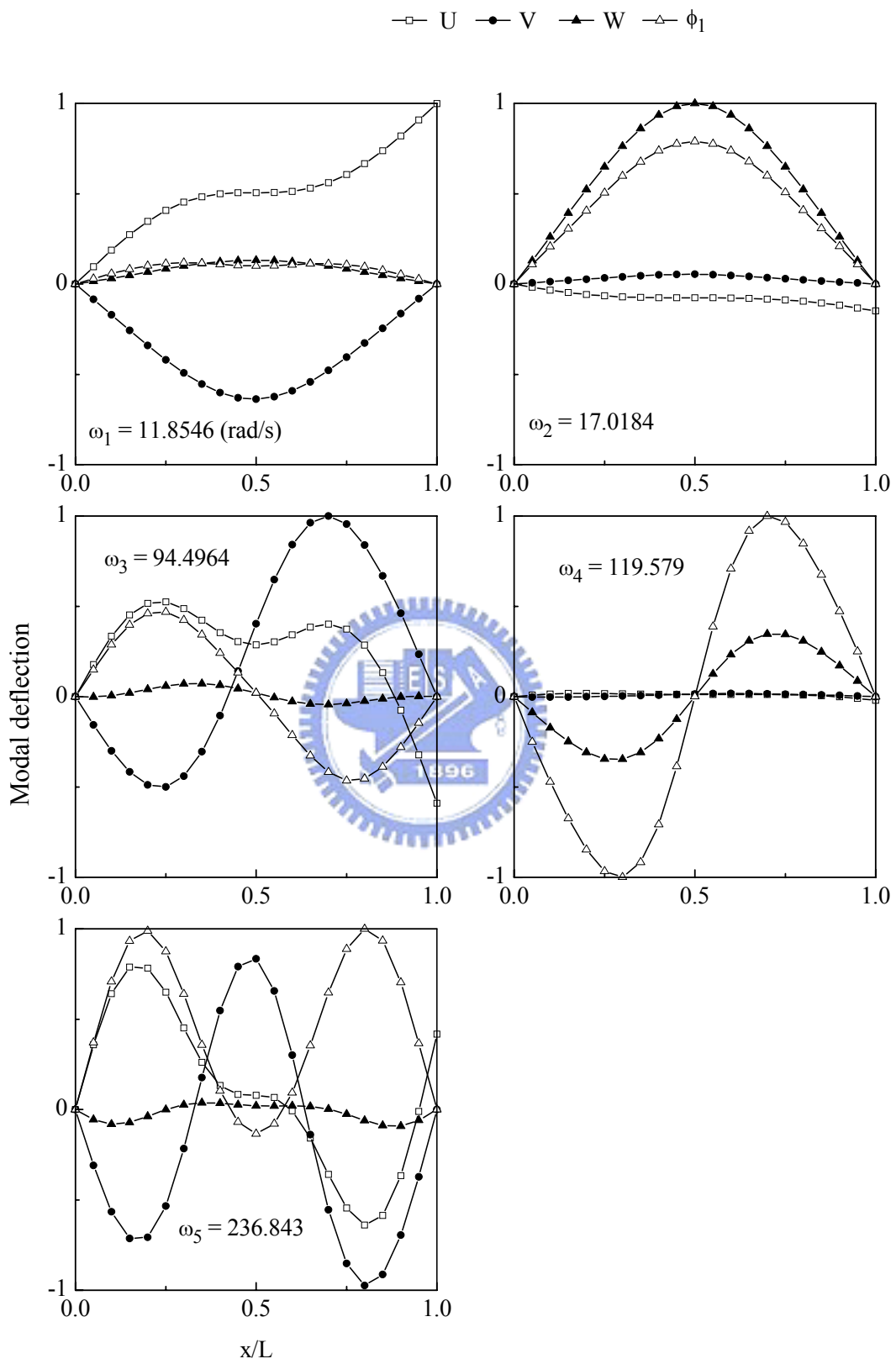


圖 4.56 例題 4.3.5 簡支 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P = 100 \text{ kN}$)

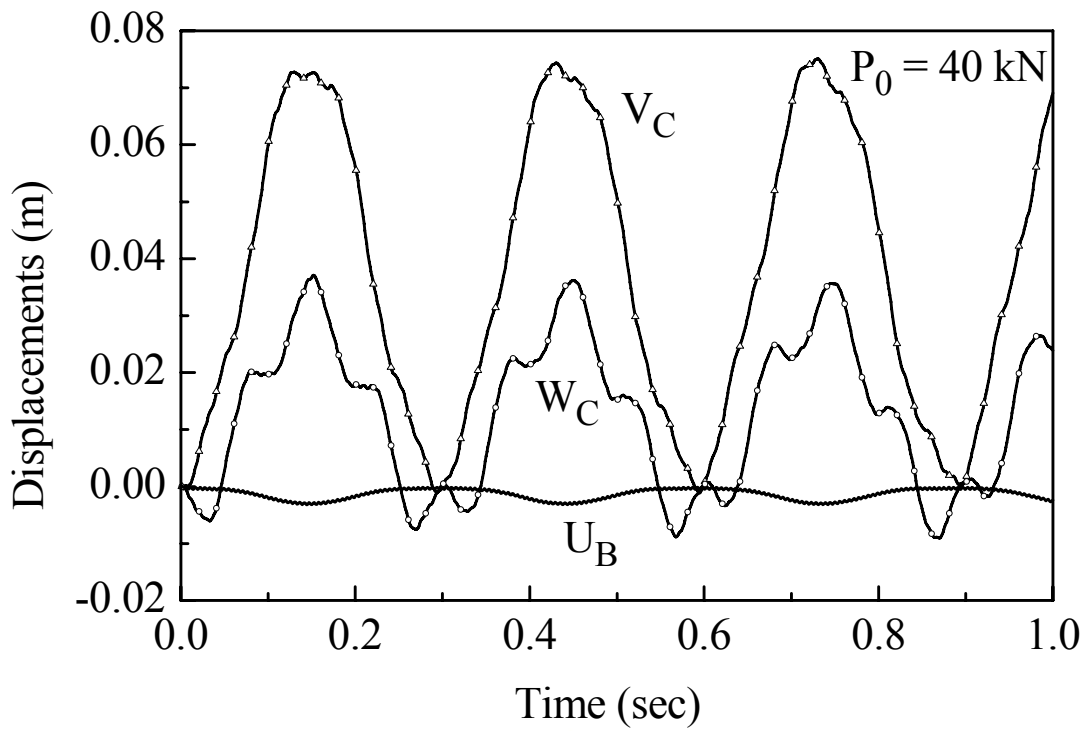


圖 4.57 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 ($P_0 = 40 \text{ kN}$)

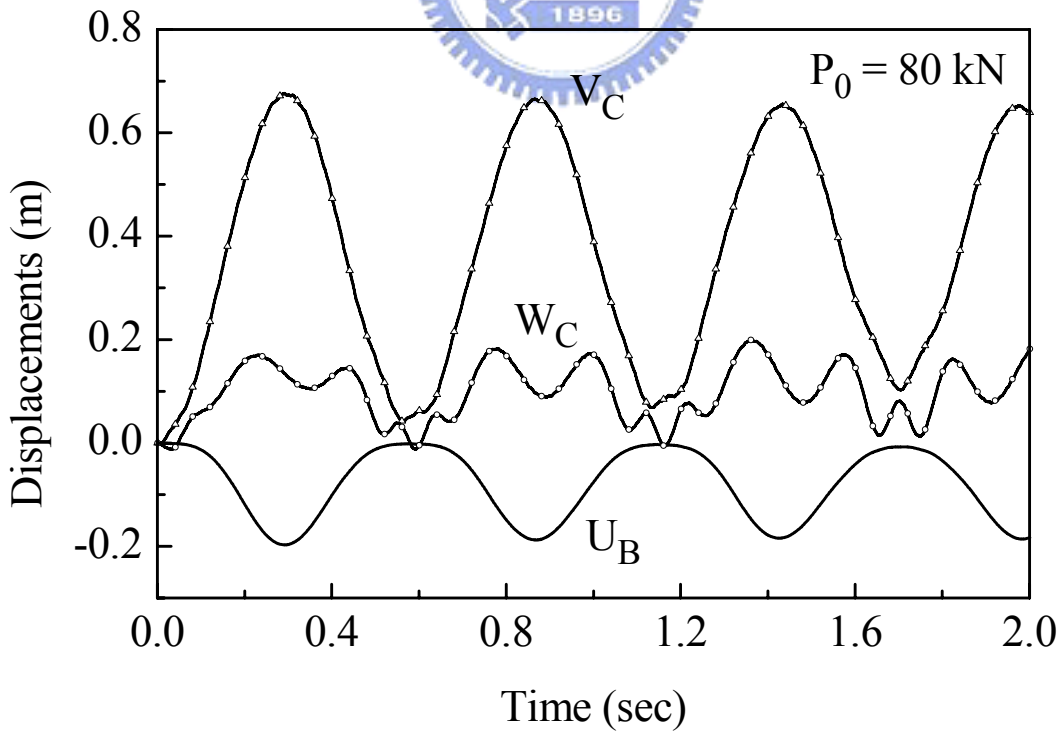


圖 4.58 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 ($P_0 = 80 \text{ kN}$)

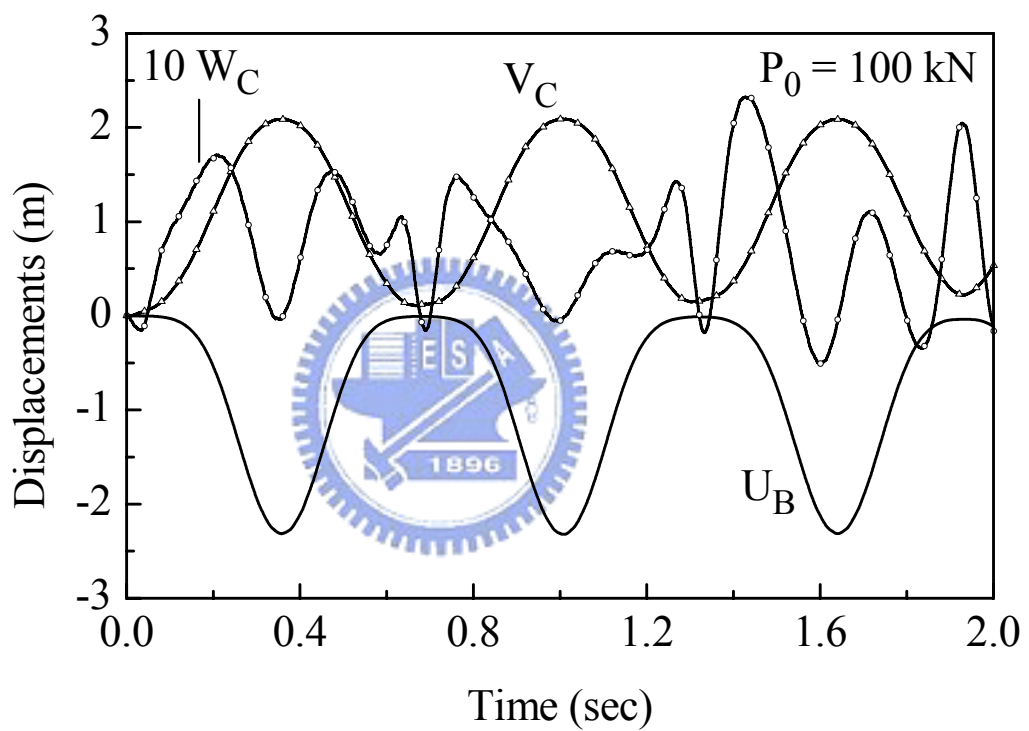
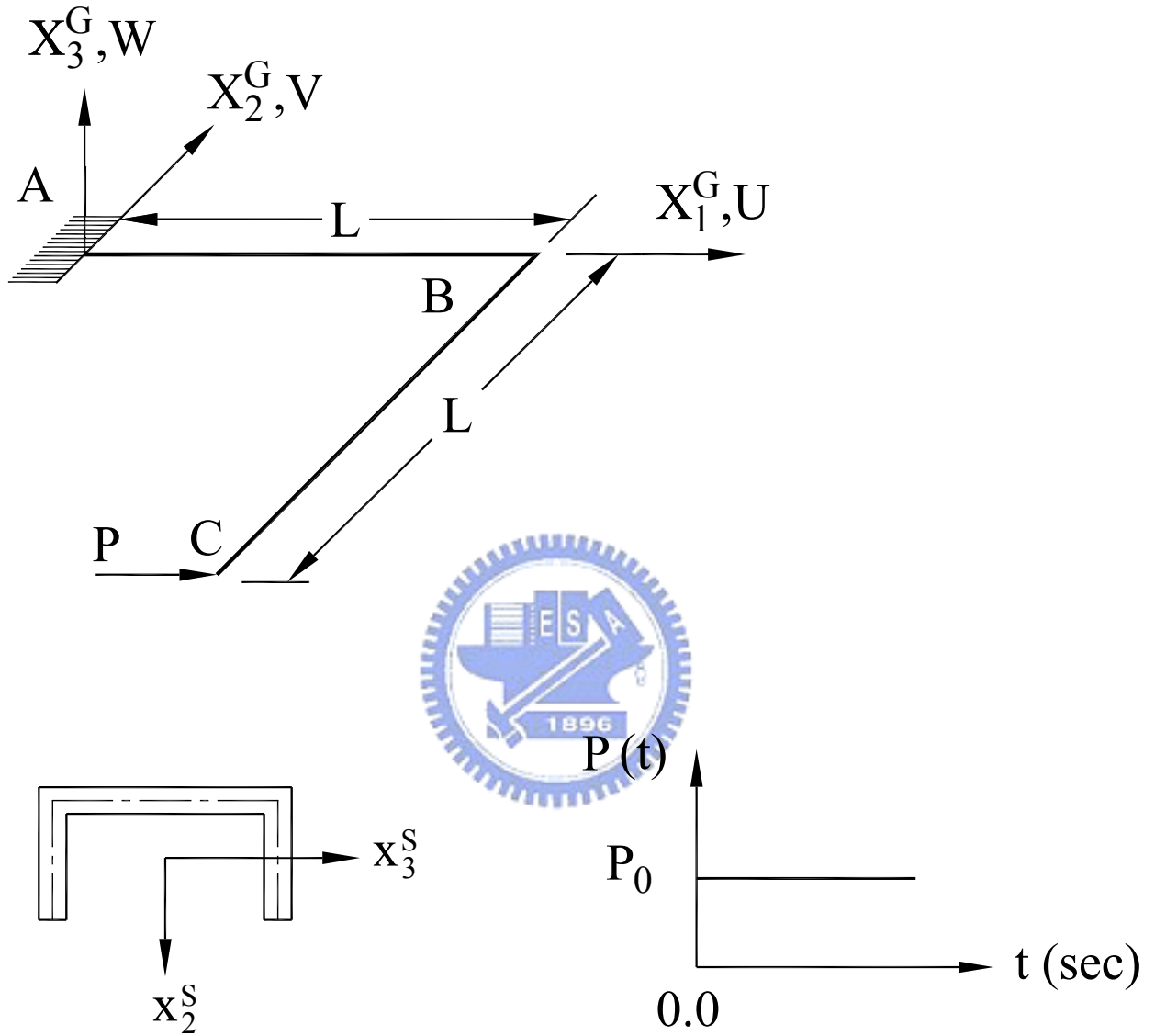


圖 4.59 例題 4.3.5 Z 型斷面梁端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 ($P_0 = 100 \text{ kN}$)



End cross section

Time History of Load

圖 4.60 例題 4.3.6 槽型直角構架之幾何及受力圖

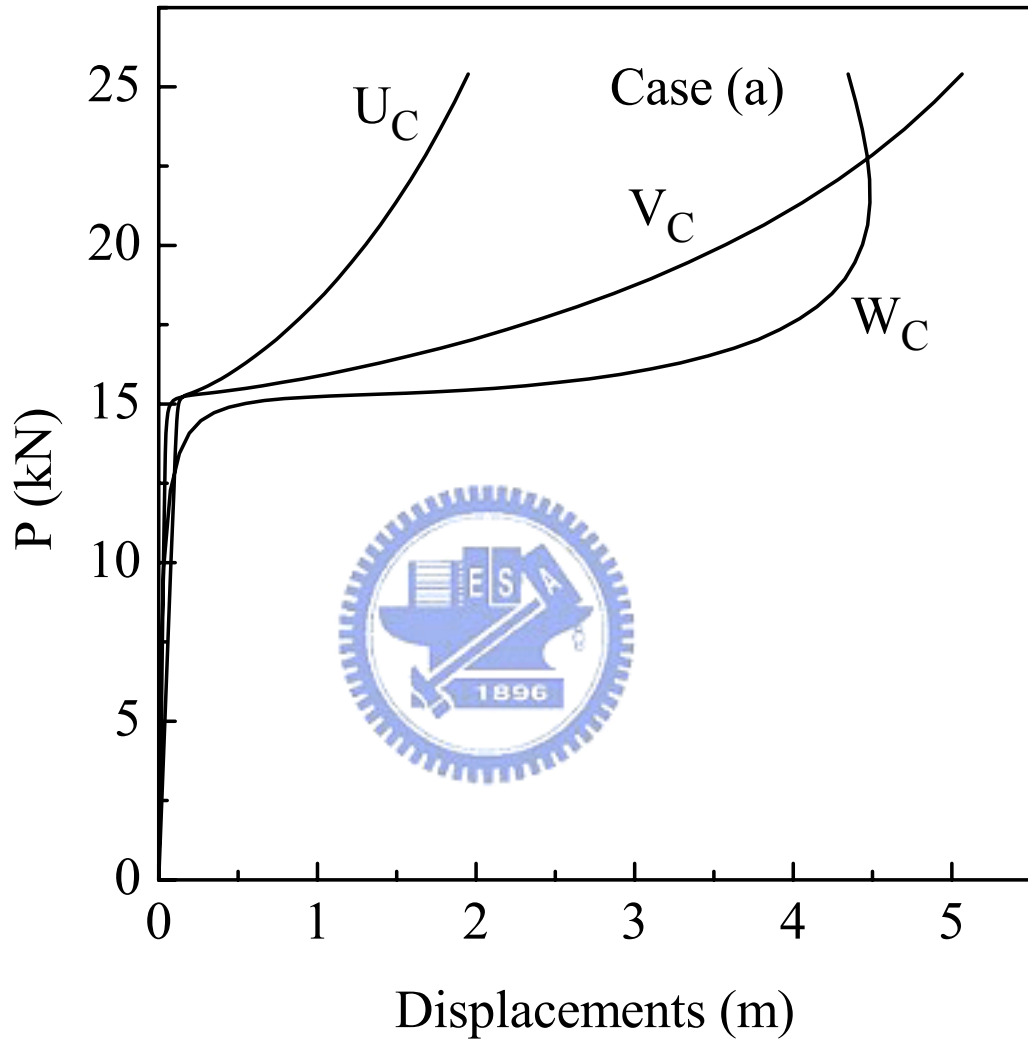


圖 4.61 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖(Case (a))

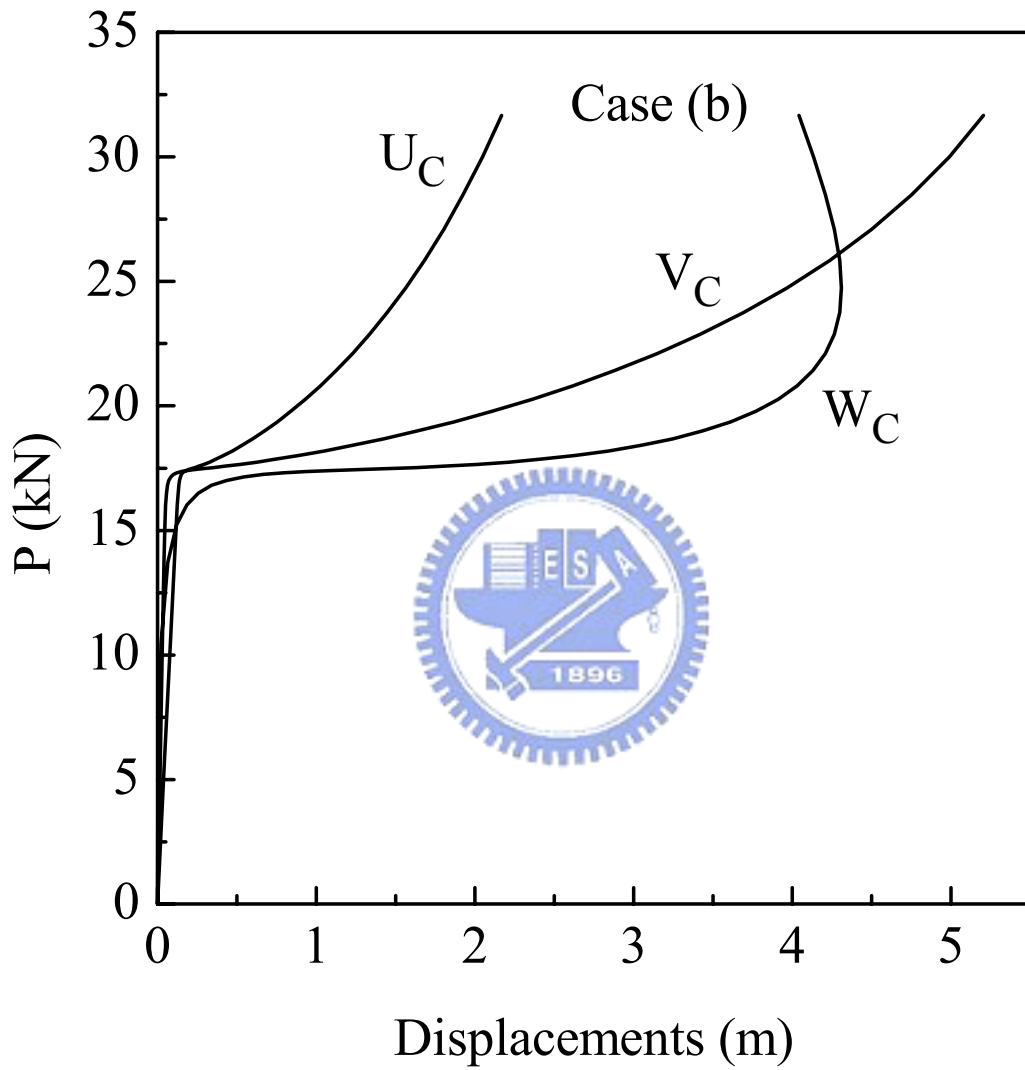


圖 4.62 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖(Case (b))

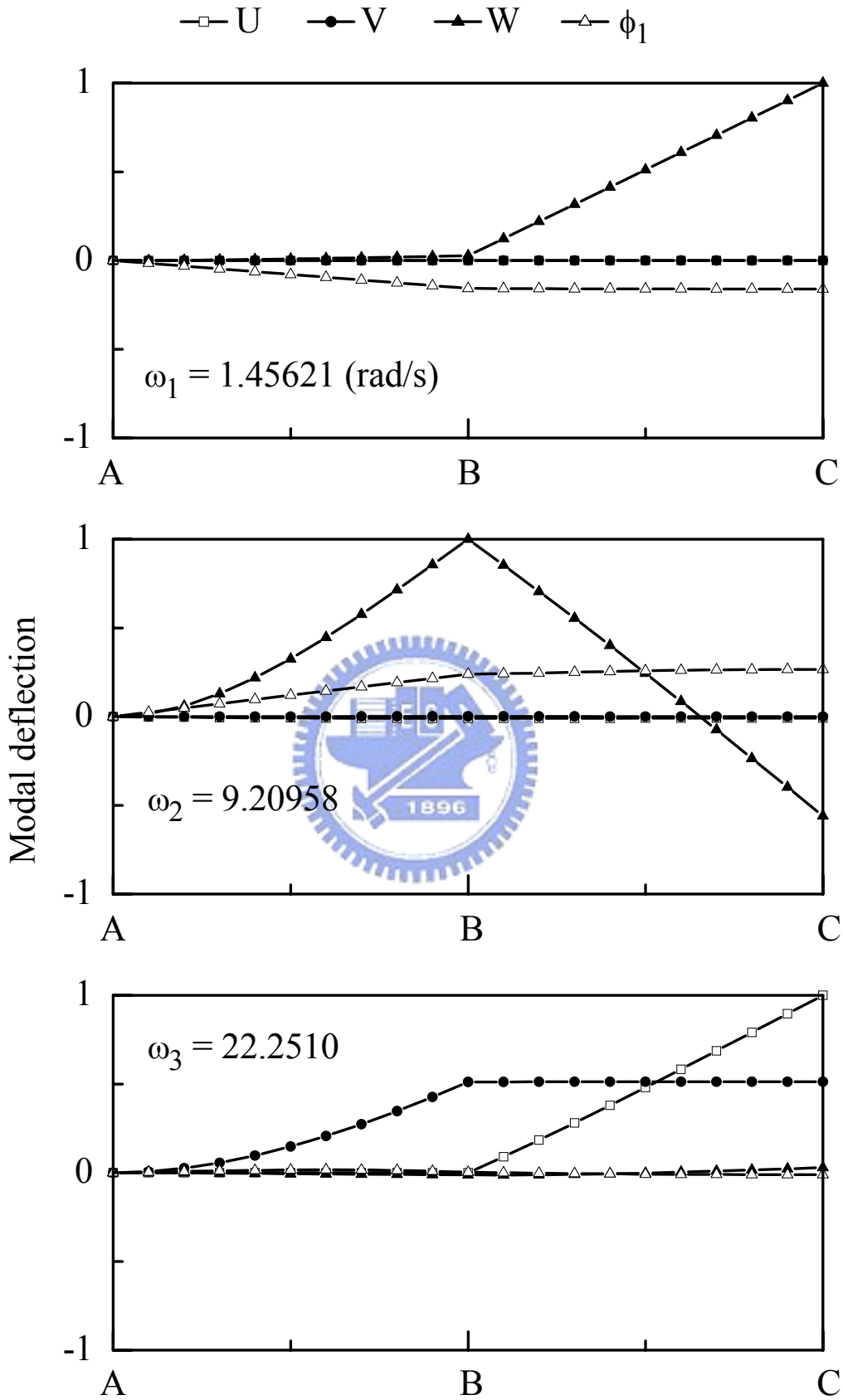


圖 4.63 例題 4.3.6 懸臂槽型斷面直角構架之振動模態圖(Case (a)、 $P=0$)

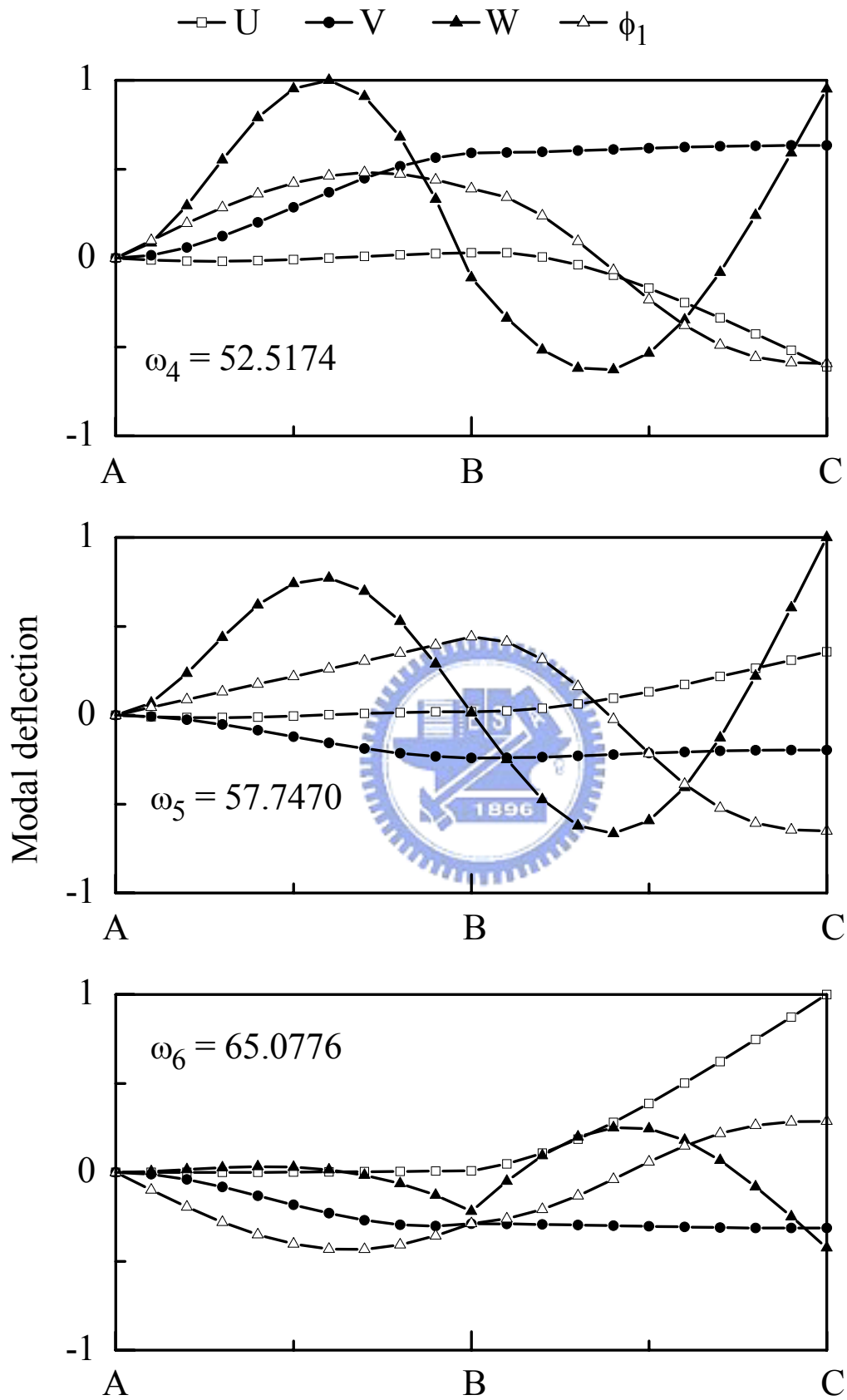


圖 4.63 例題 4.3.6 懸臂槽型斷面直角構架之振動模態圖(Case (a)、 $P=0$)(續)

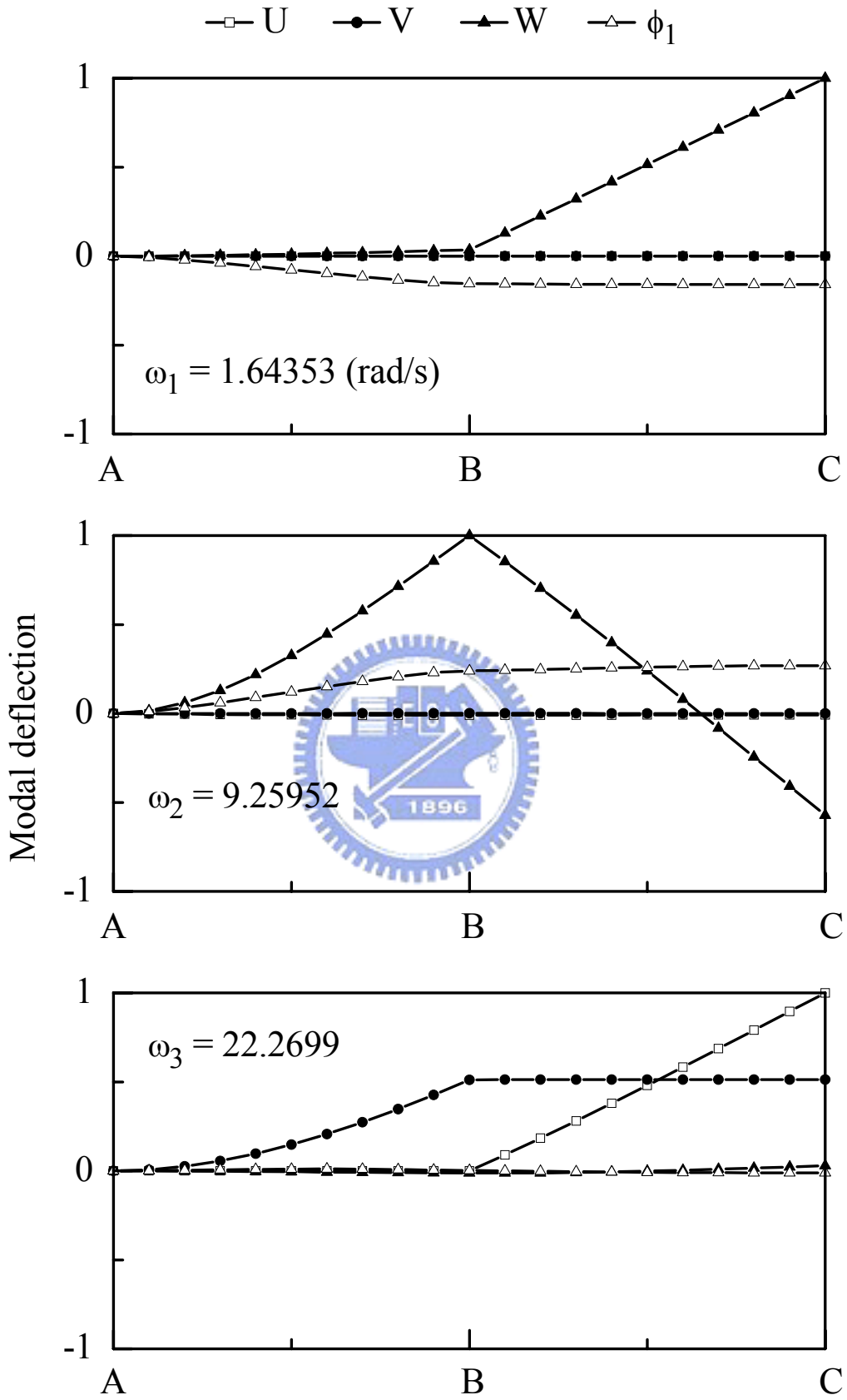


圖 4.64 例題 4.3.6 懸臂槽型斷面直角構架之振動模態圖(Case (b)、 $P=0$)

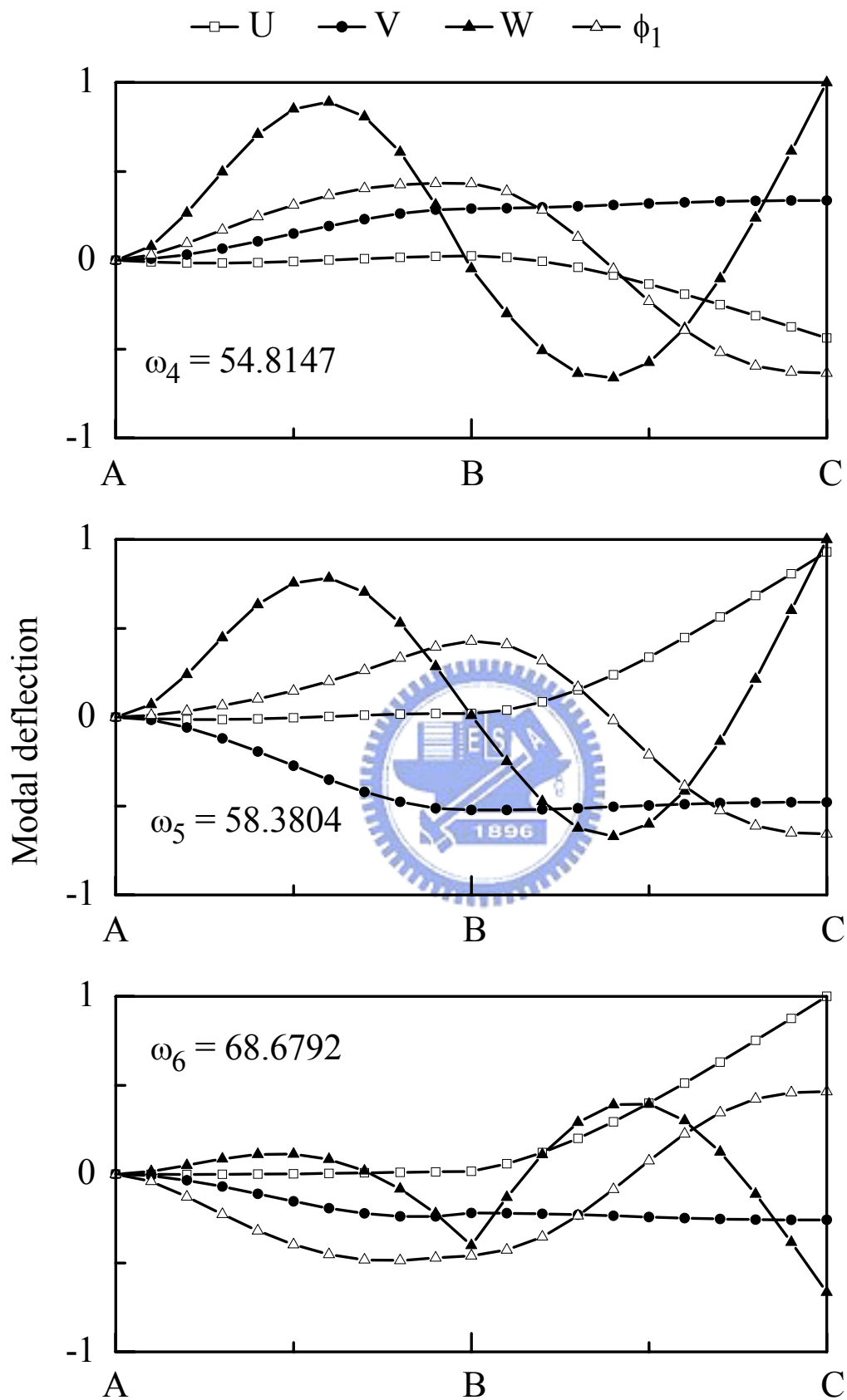


圖 4.64 例題 4.3.6 懸臂槽型斷面直角構架之振動模態圖(Case (b)、 $P=0$)(續)

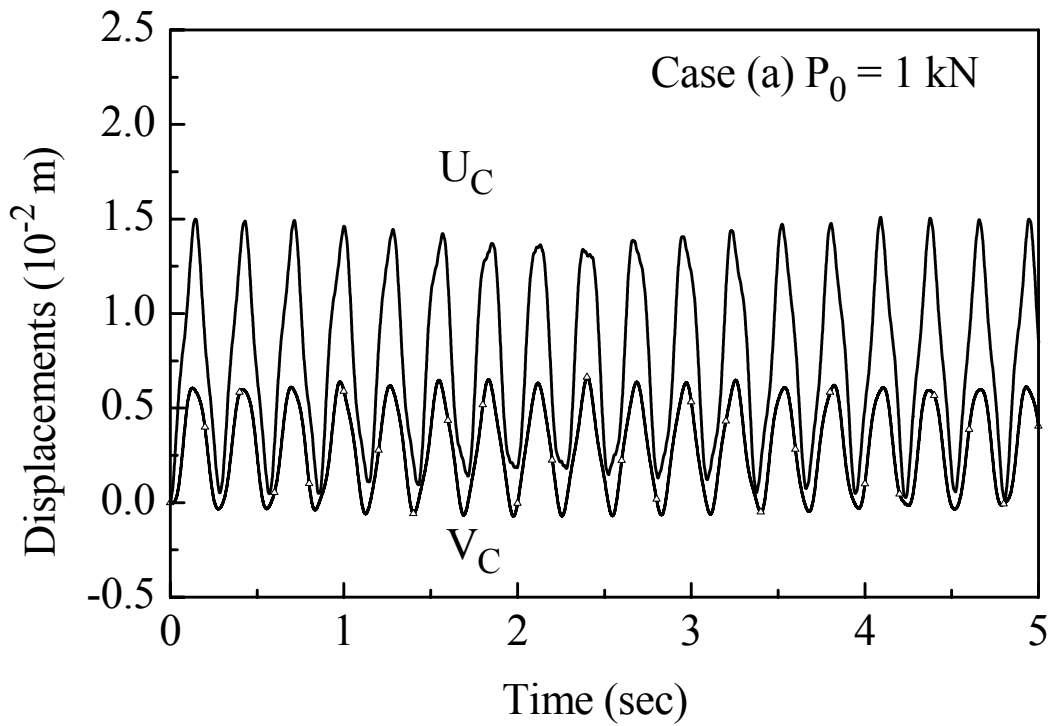


圖 4.65 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 1$ kN)

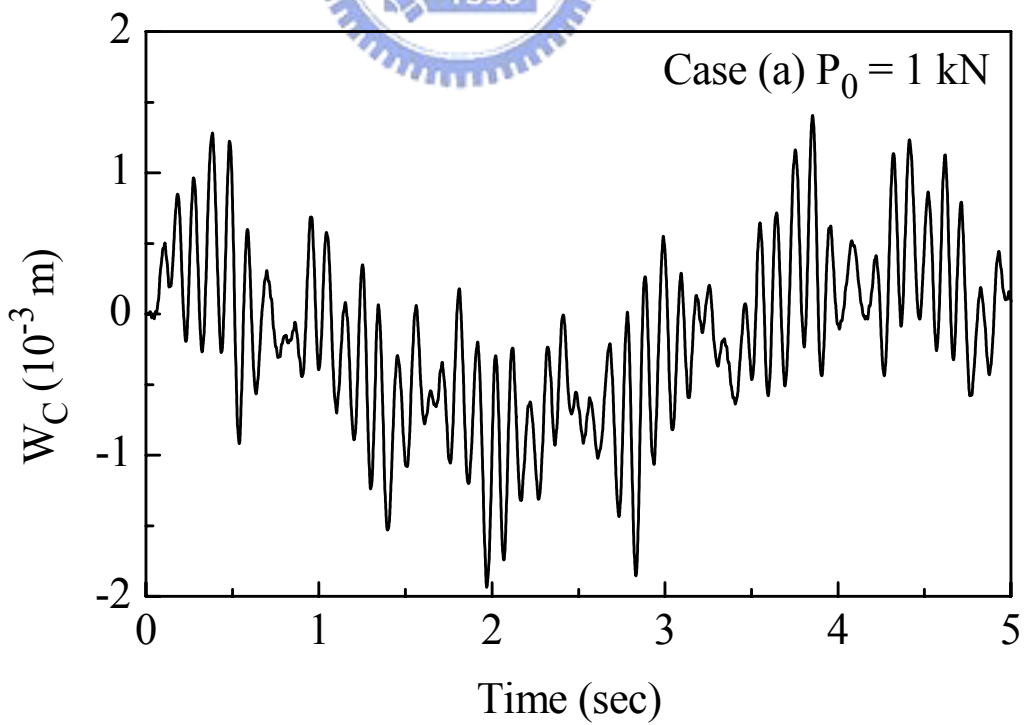


圖 4.66 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 1$ kN)

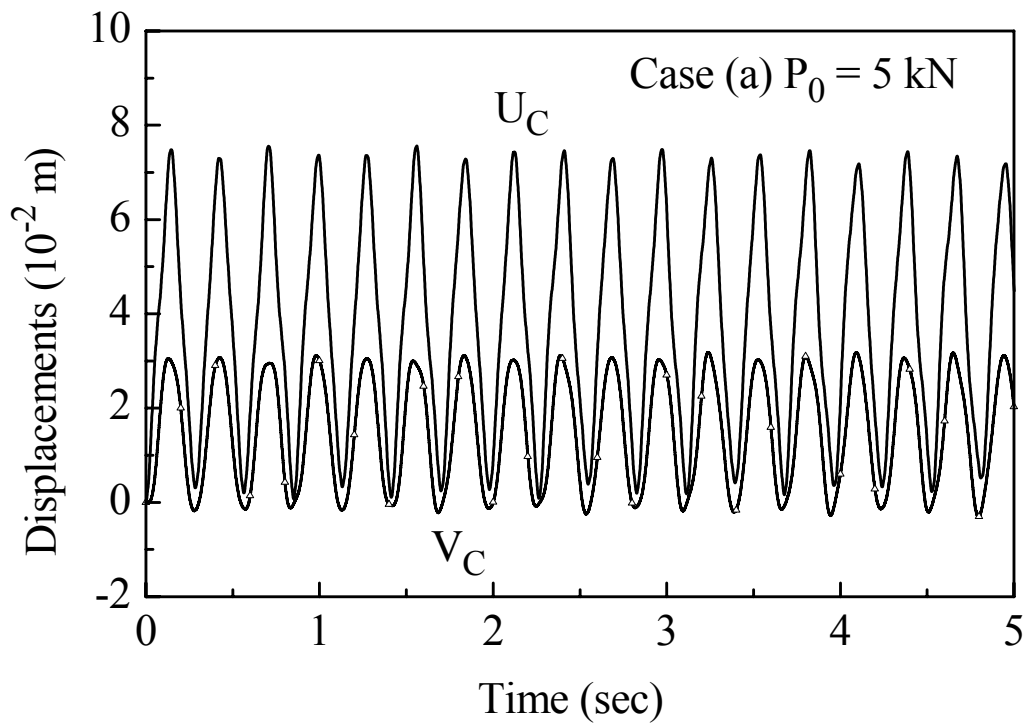


圖 4.67 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$)

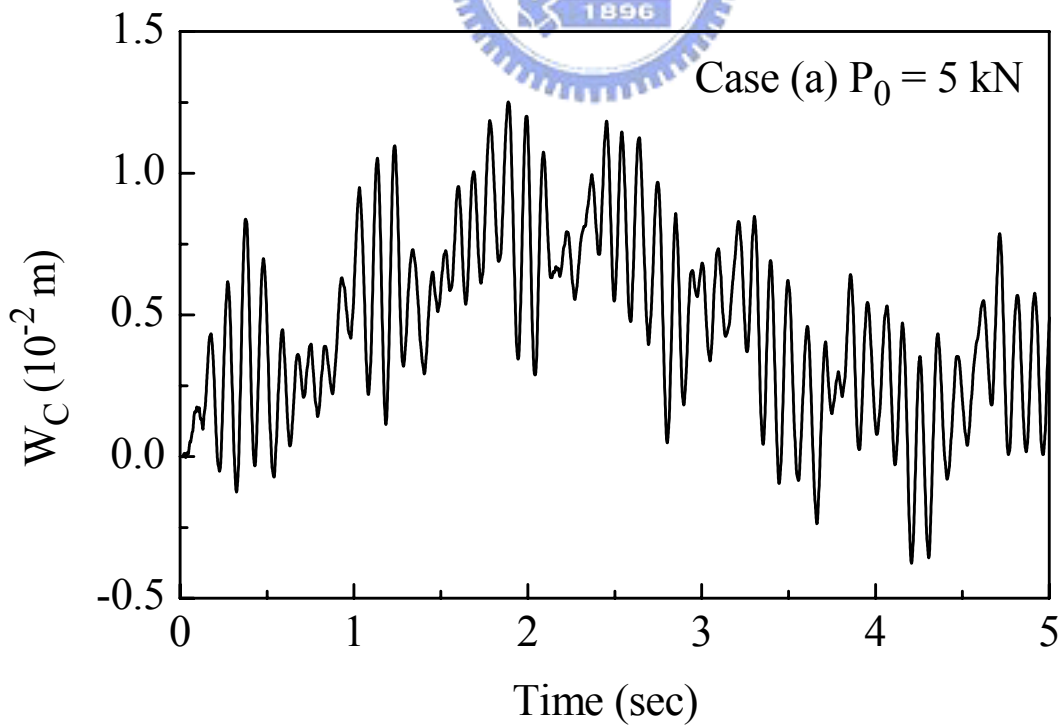


圖 4.68 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$)

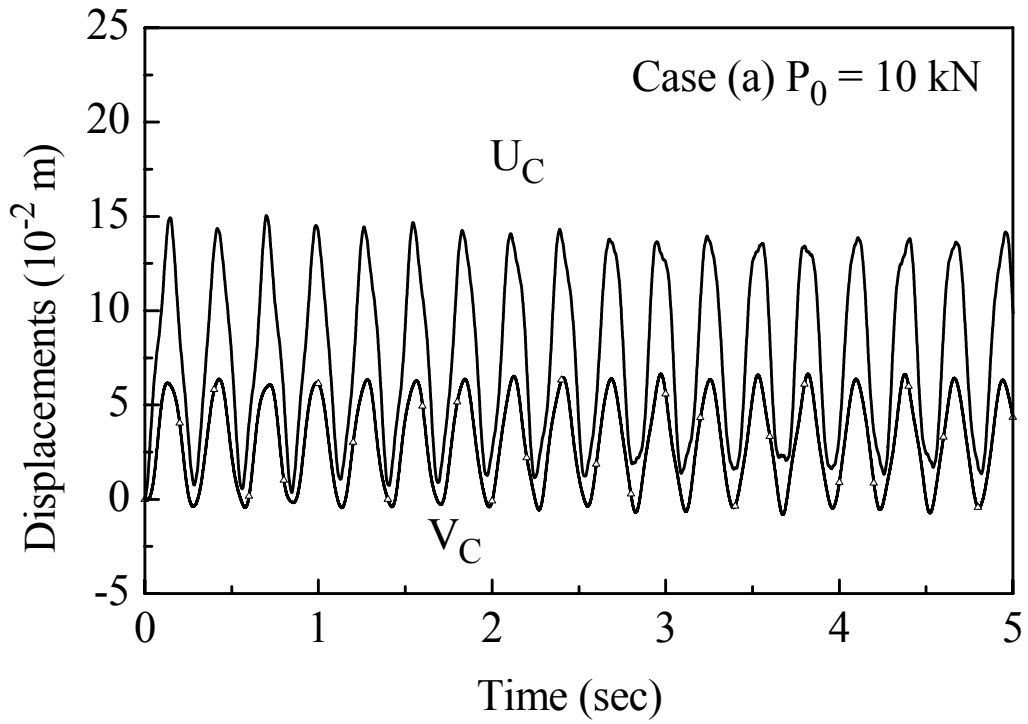


圖 4.69 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$)

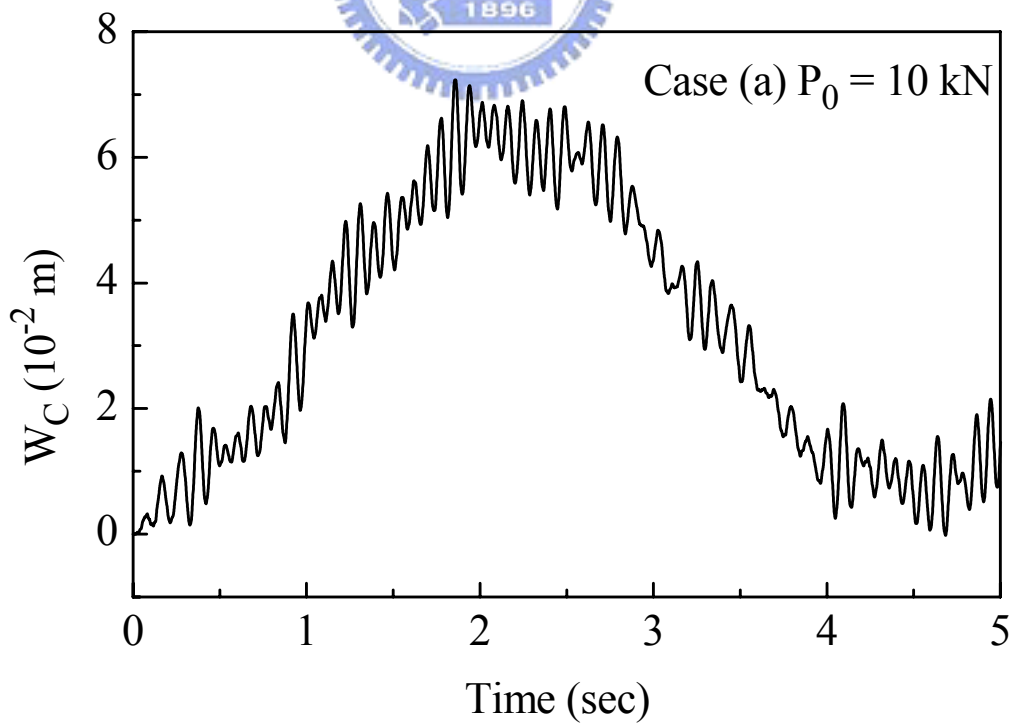


圖 4.70 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$)

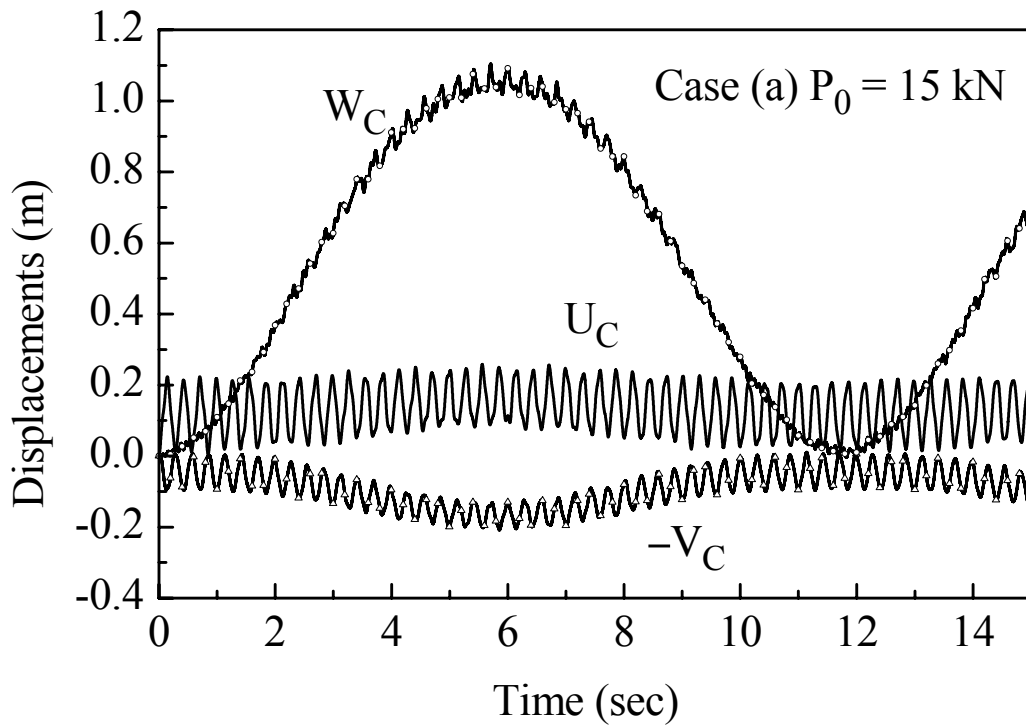


圖 4.71 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 15 \text{ kN}$)

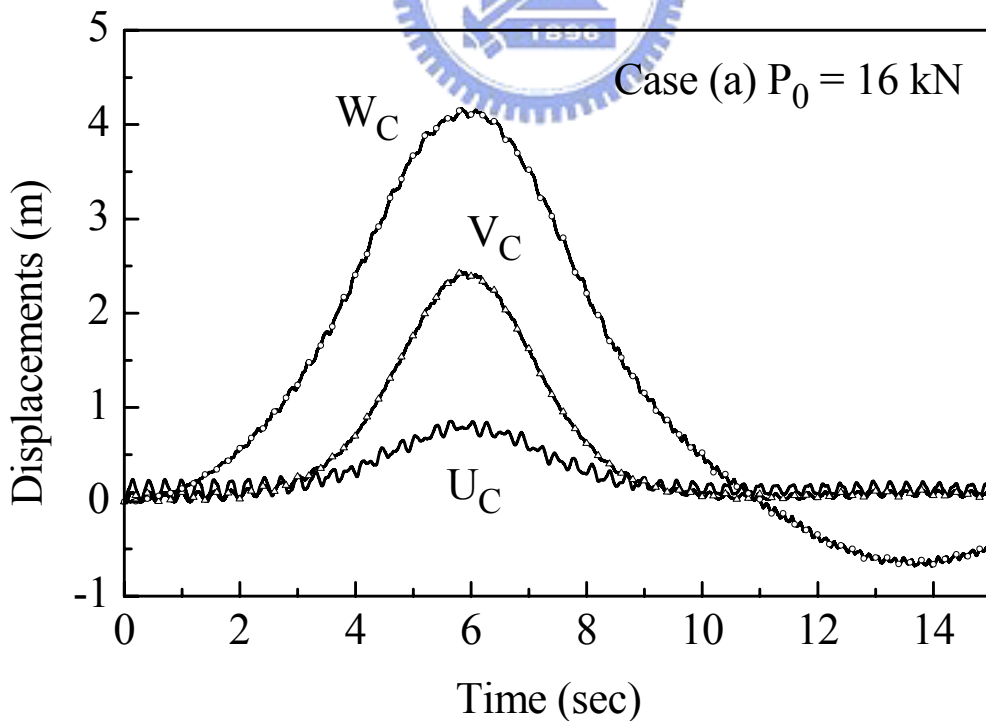


圖 4.72 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 16 \text{ kN}$)

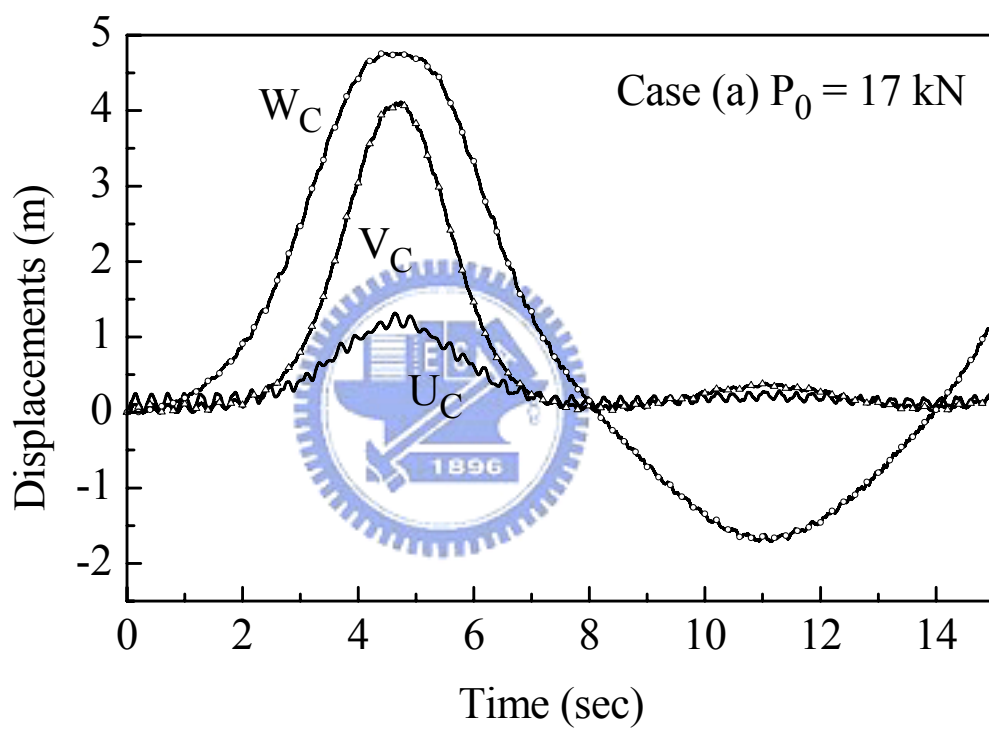


圖 4.73 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 17 \text{ kN}$)

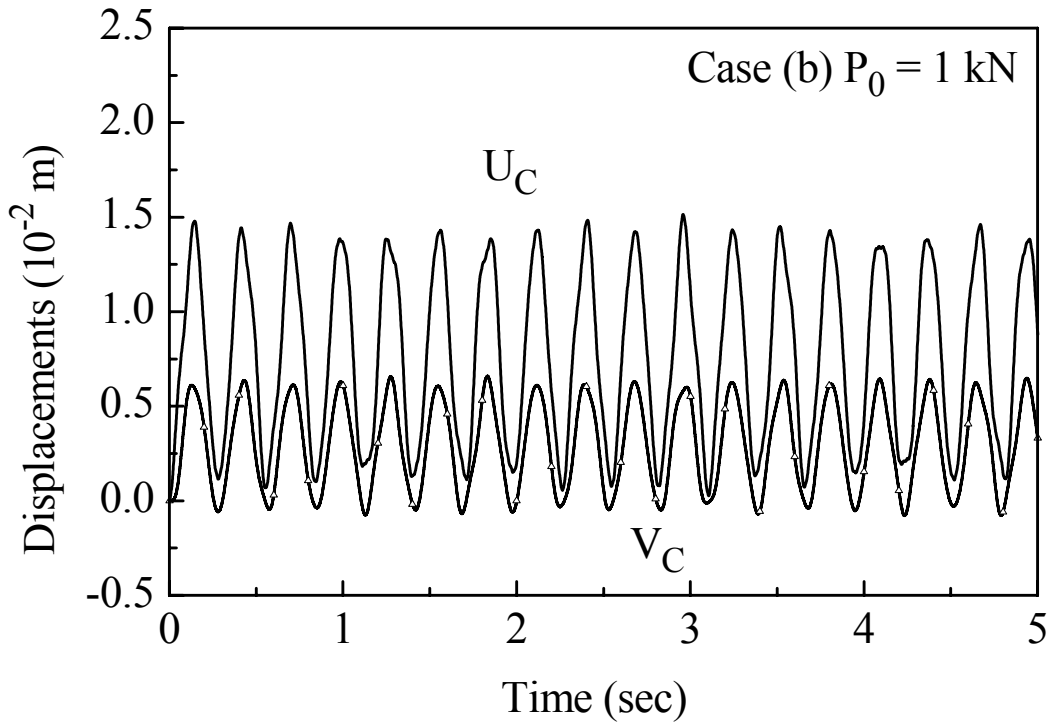


圖 4.74 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 1 \text{ kN}$)

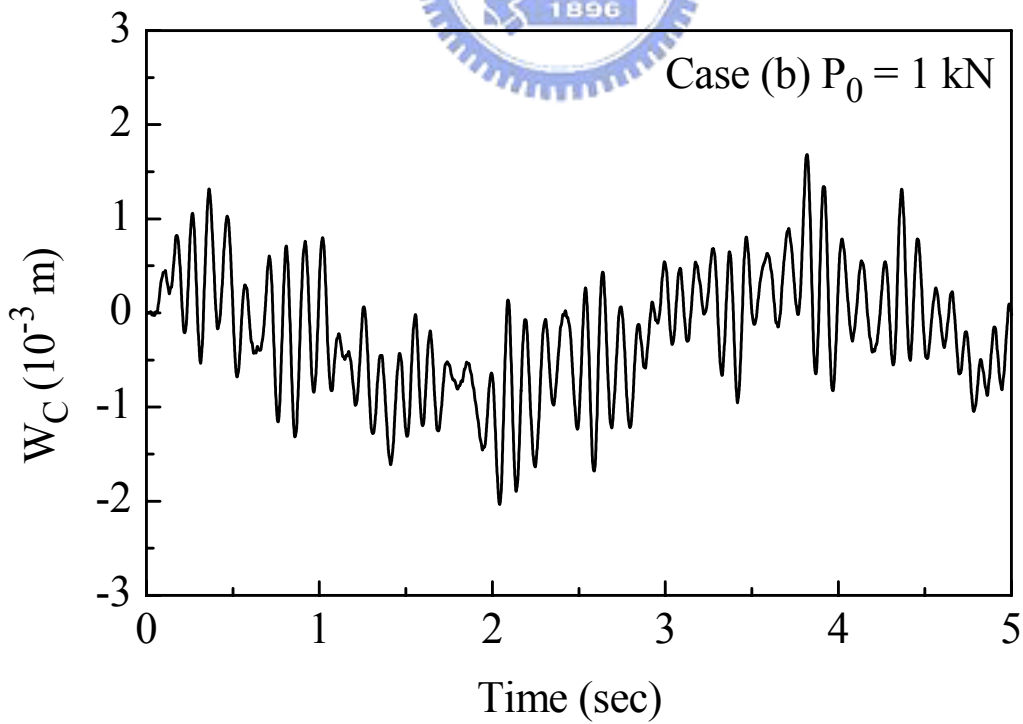


圖 4.75 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 1 \text{ kN}$)

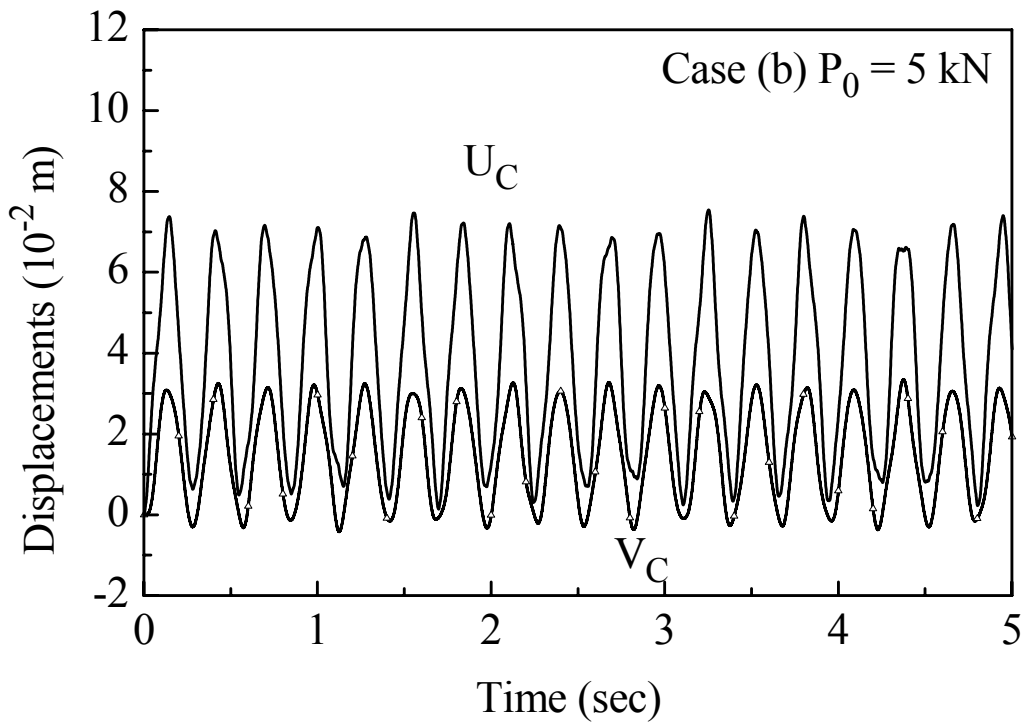


圖 4.76 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$)

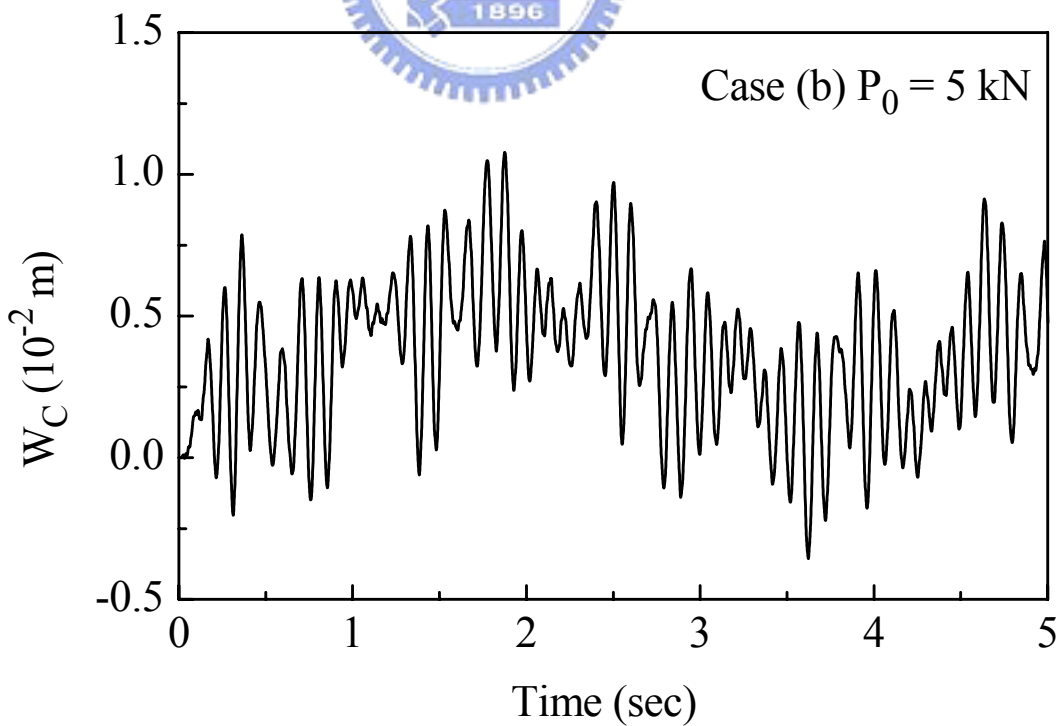


圖 4.77 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$)

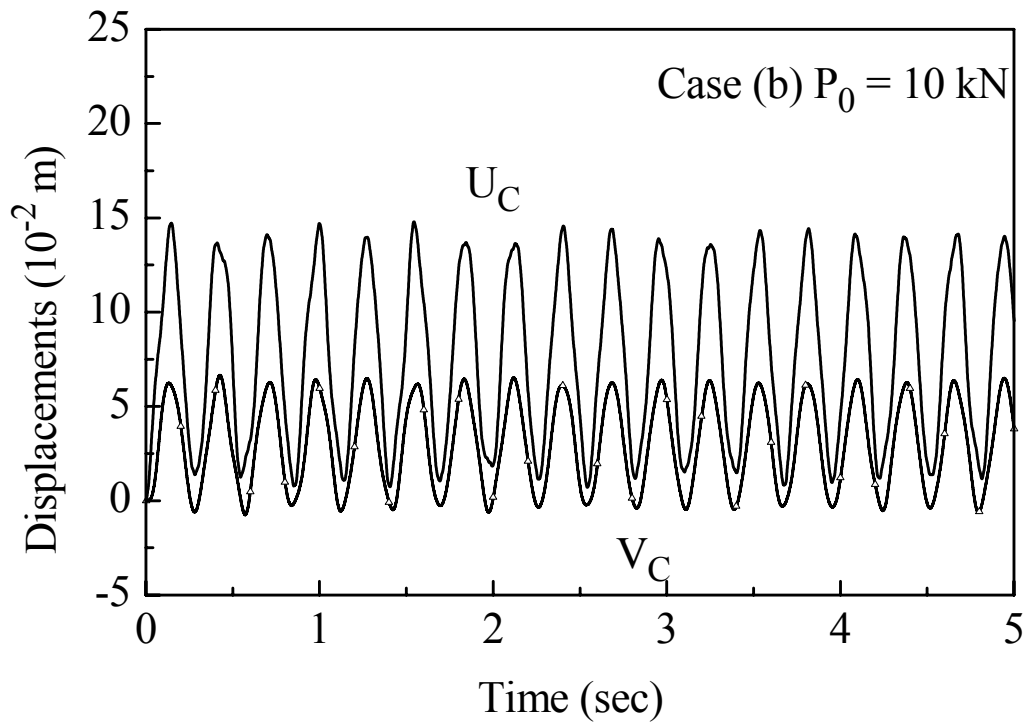


圖 4.78 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$)

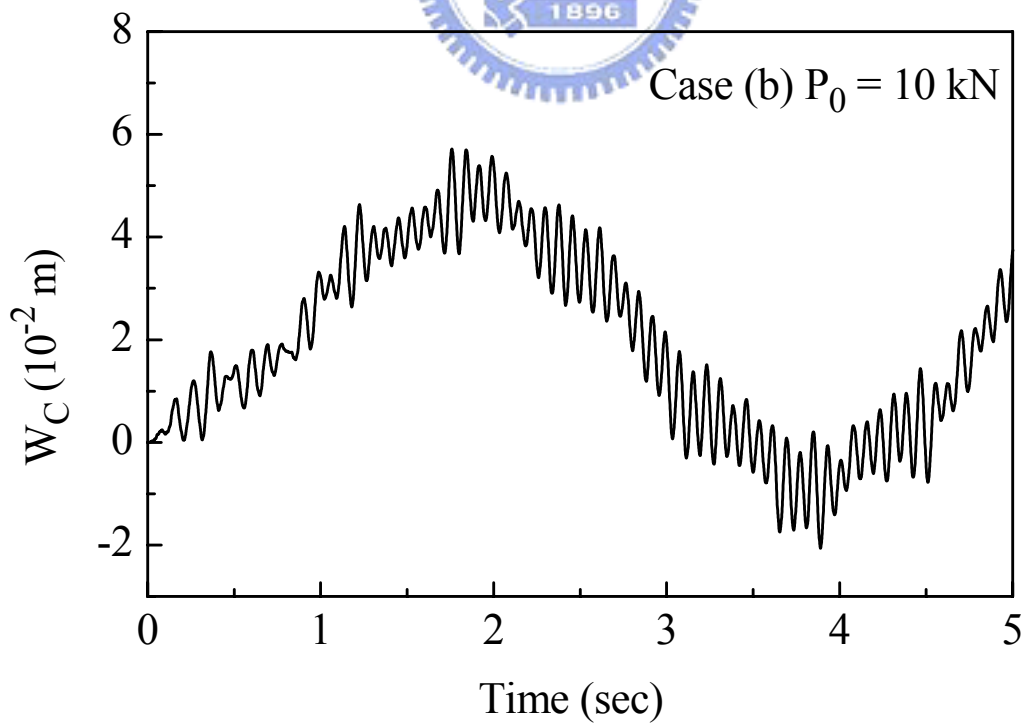


圖 4.79 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$)

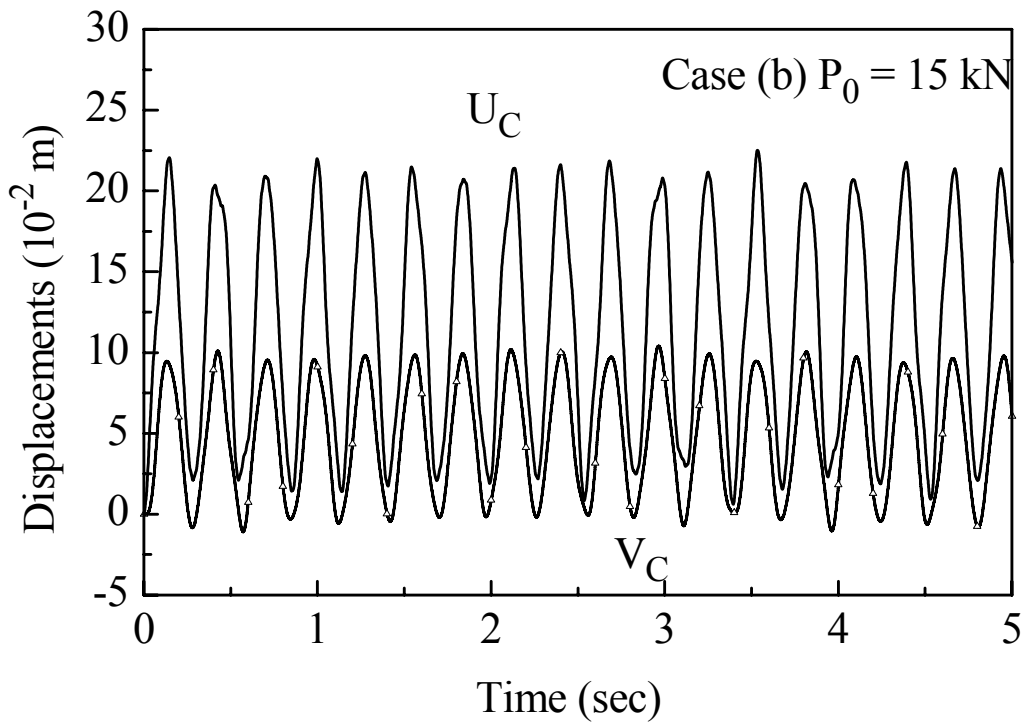


圖 4.80 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 15 \text{ kN}$)

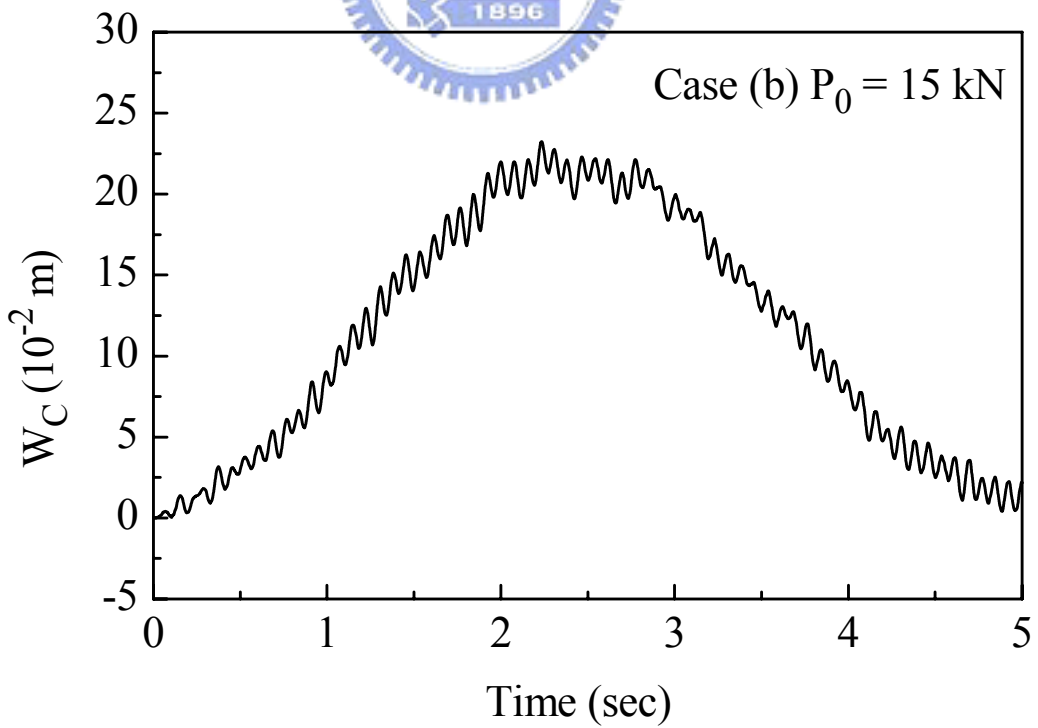


圖 4.81 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 15 \text{ kN}$)

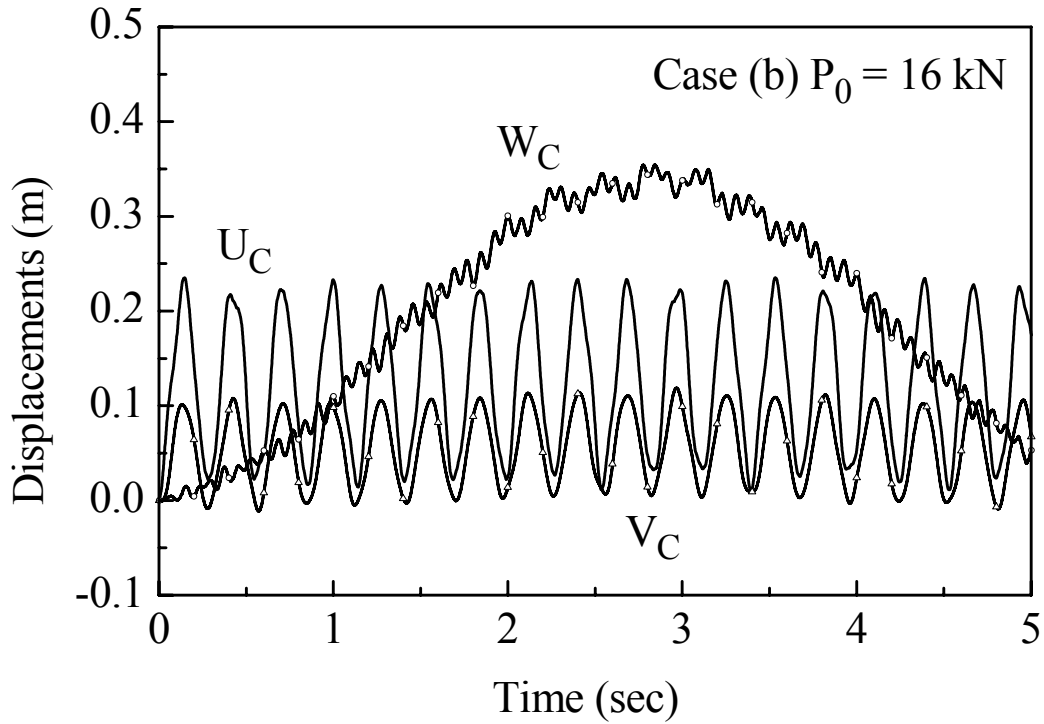


圖 4.82 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 16 \text{ kN}$)

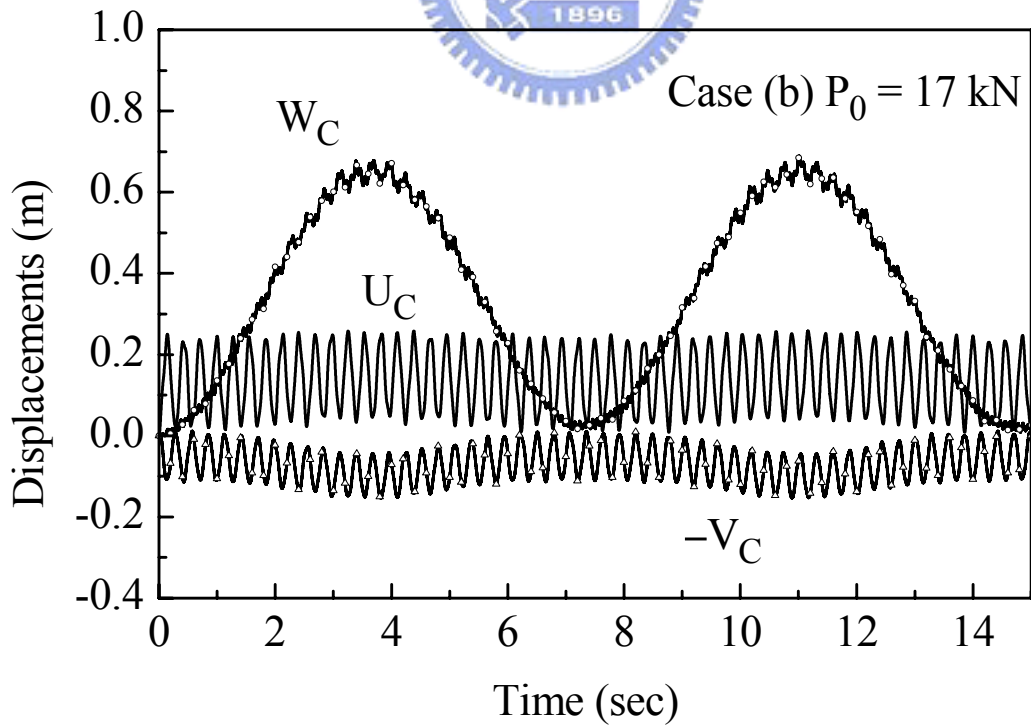


圖 4.83 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 17 \text{ kN}$)

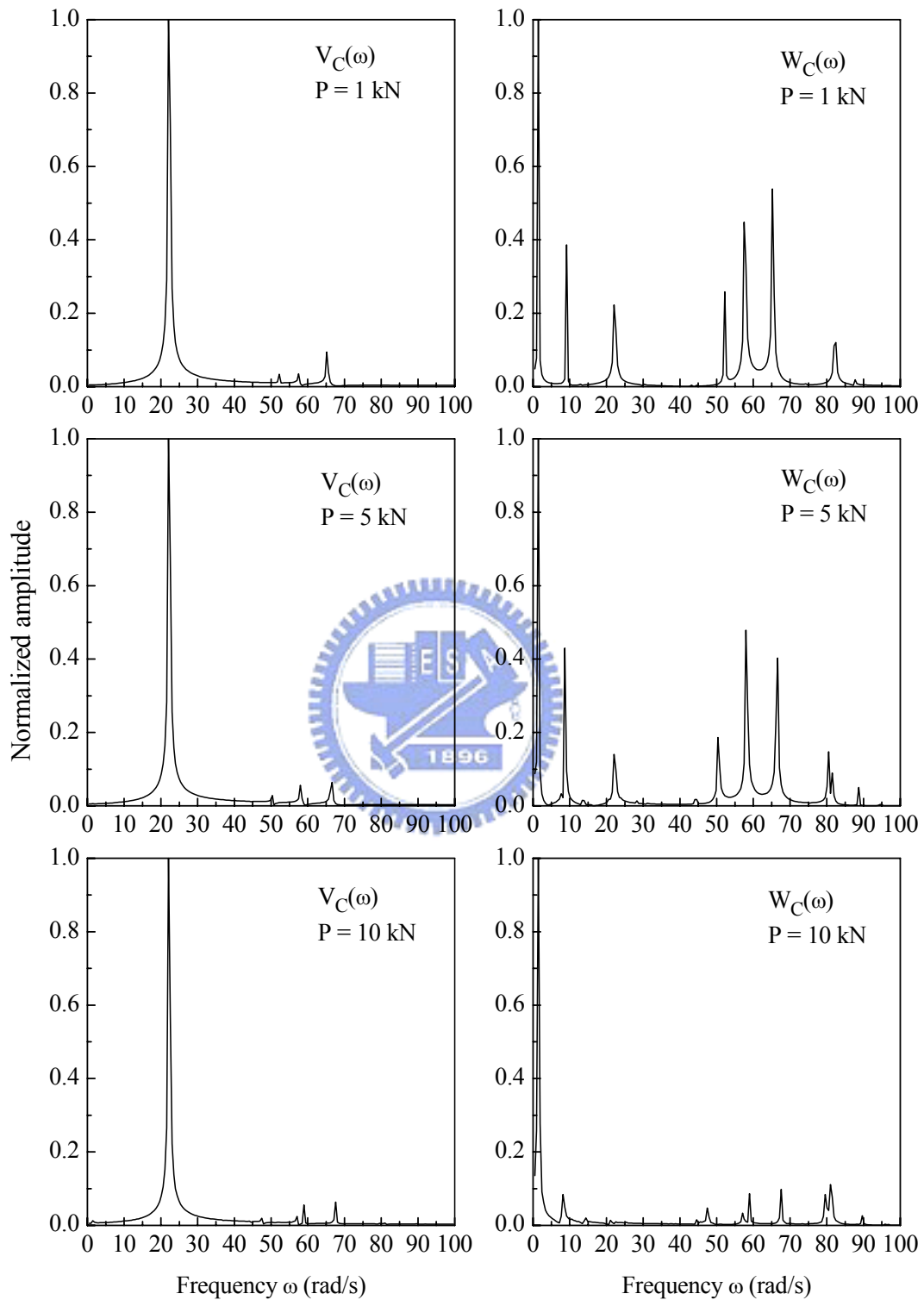


圖 4.84 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_2^G 、 X_3^G 方向之位移之頻譜圖(Case (a))

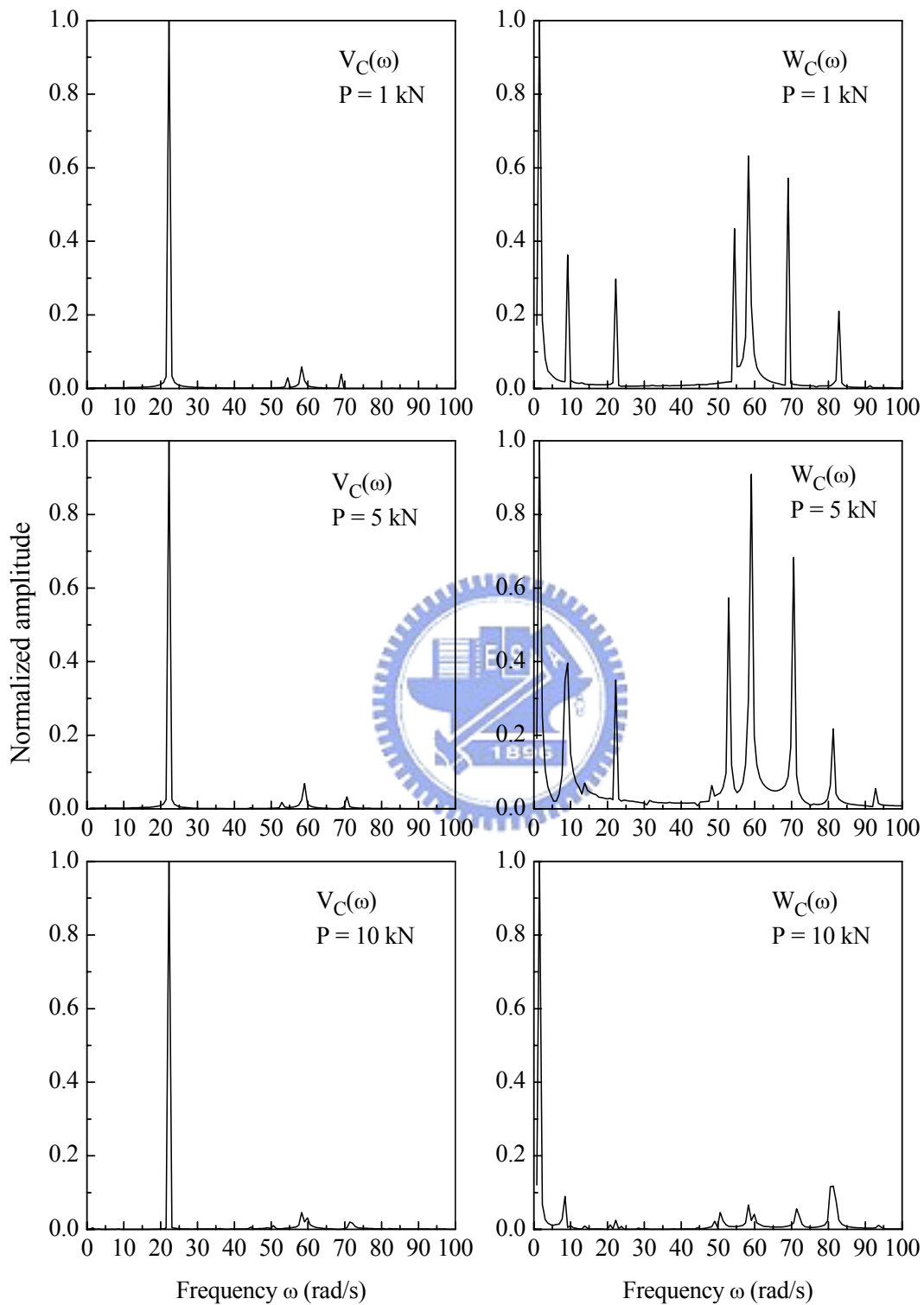
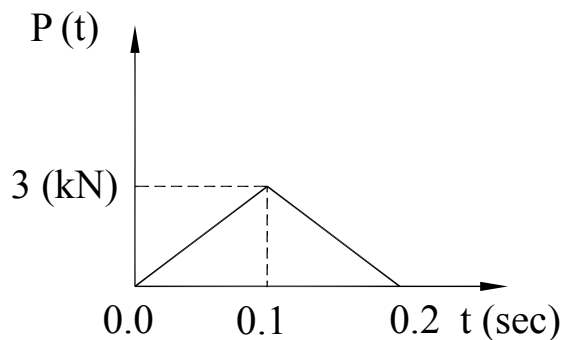
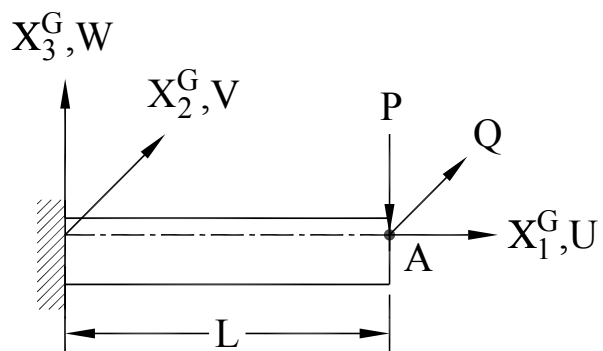
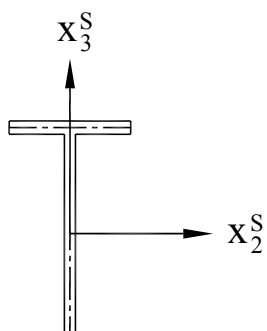


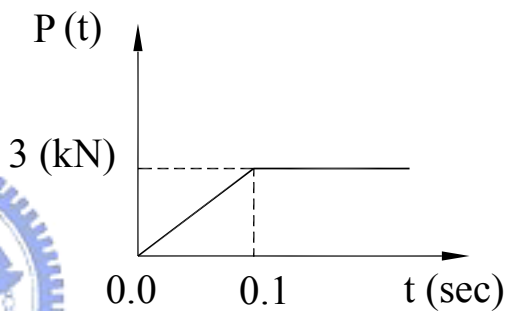
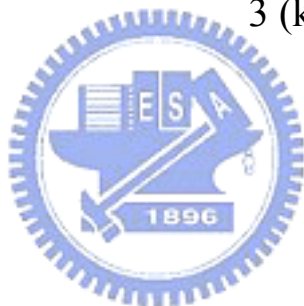
圖 4.85 例題 4.3.6 自由端 C 點在 X_2^G 、 X_3^G 方向之位移之頻譜圖(Case (b))



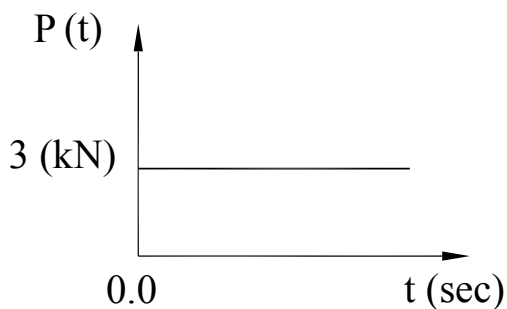
Case (a)



End cross section



Case (b)



Case (c)

Time History of Load

圖 4.86 例題 4.3.7 懸臂 T 型斷面梁之幾何及受力圖

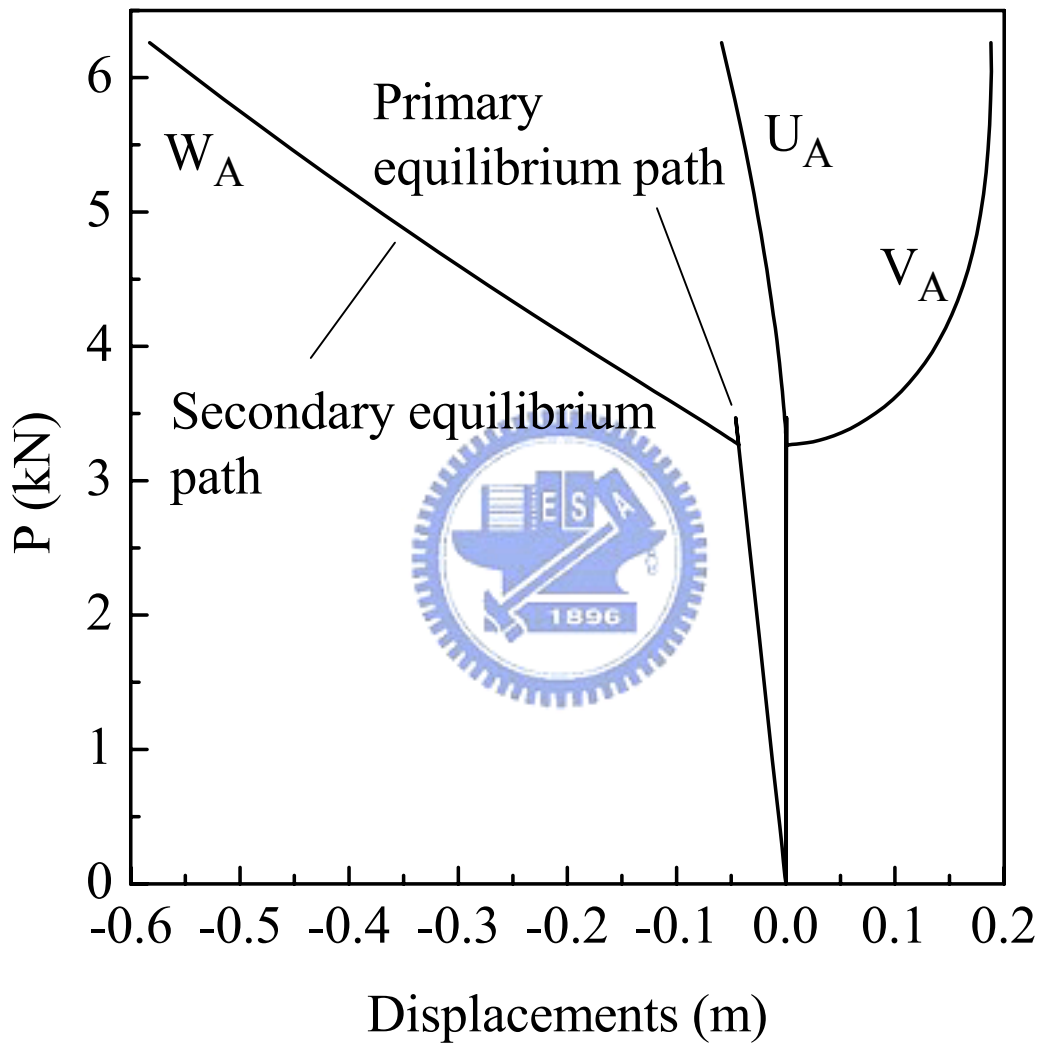


圖 4.87 例題 4.3.7 懸臂 T 型斷面梁之自由端 A 點在 $Q=0$ 之靜態負荷一位移曲線圖

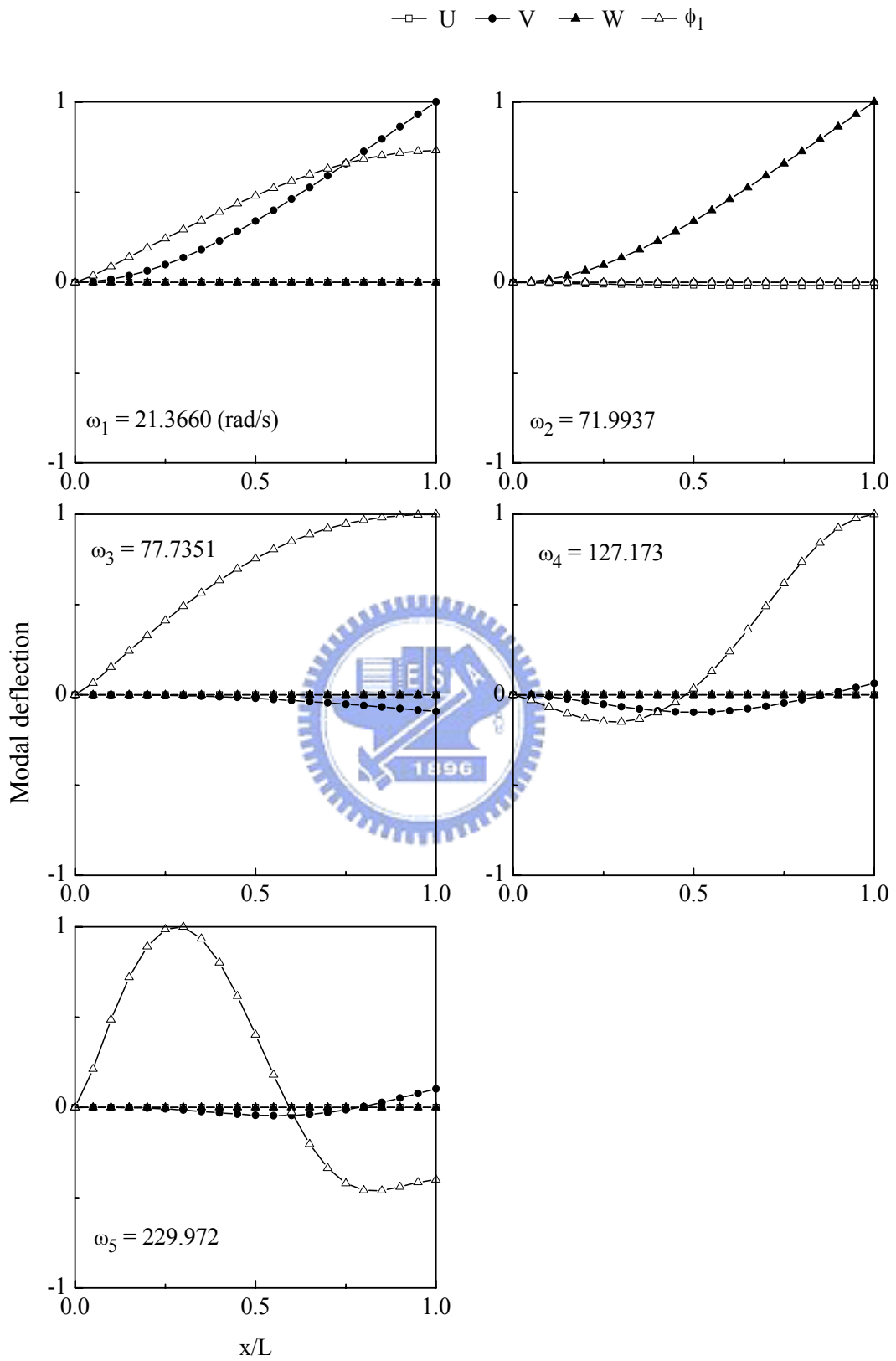


圖 4.88 例題 4.3.7 懸臂 T 型斷面梁之振動模態圖($P=0$ 、 $Q=0$)

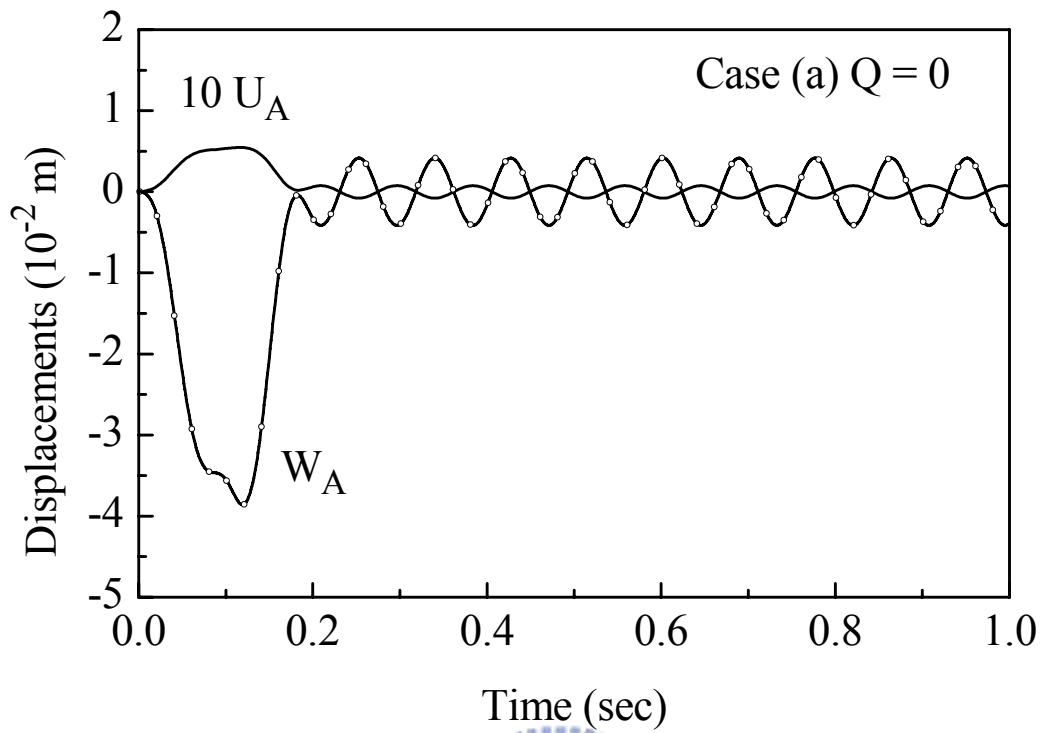


圖 4.89 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $Q = 0$)

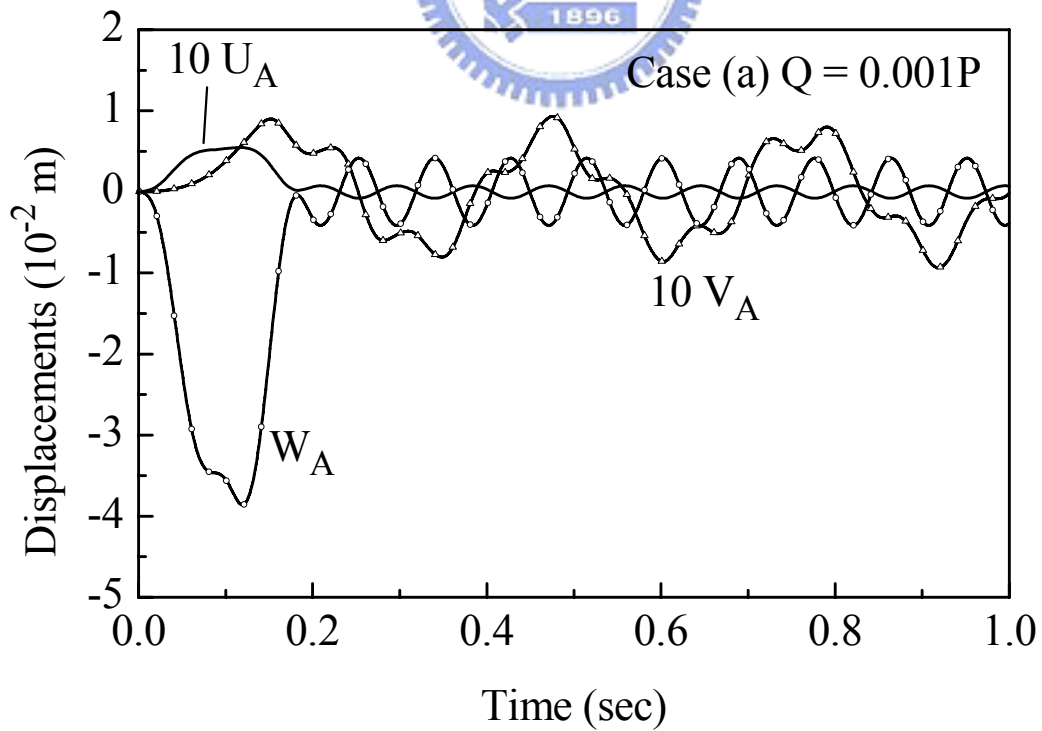


圖 4.90 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $Q = 0.001P$)

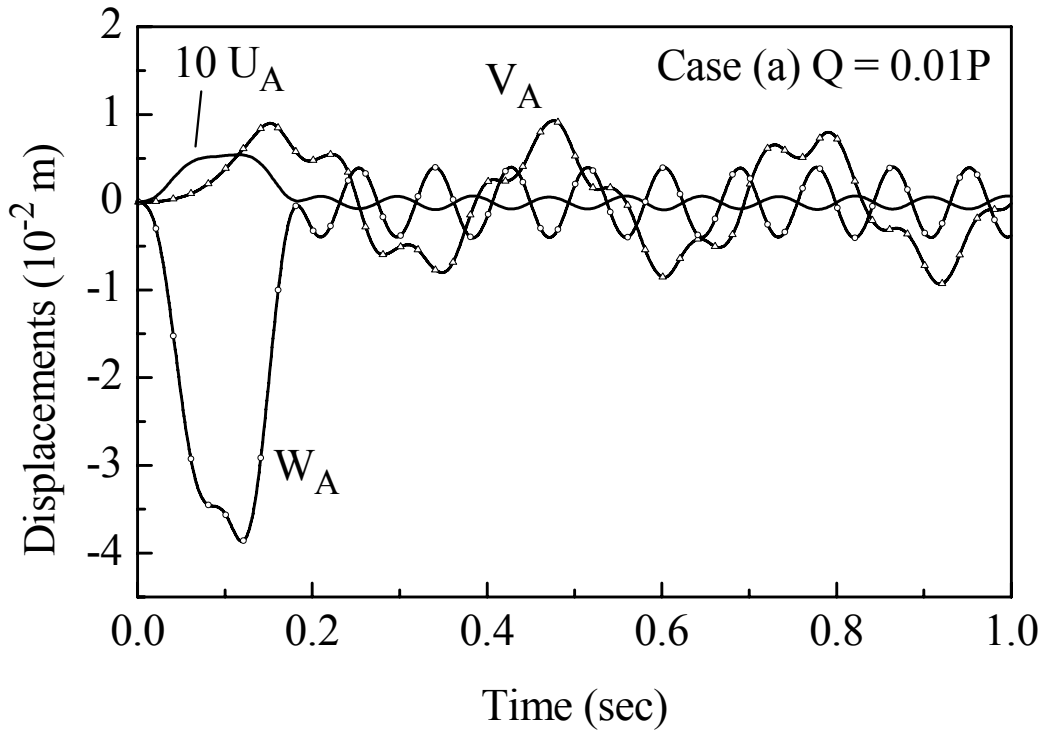


圖 4.91 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $Q = 0.01P$)

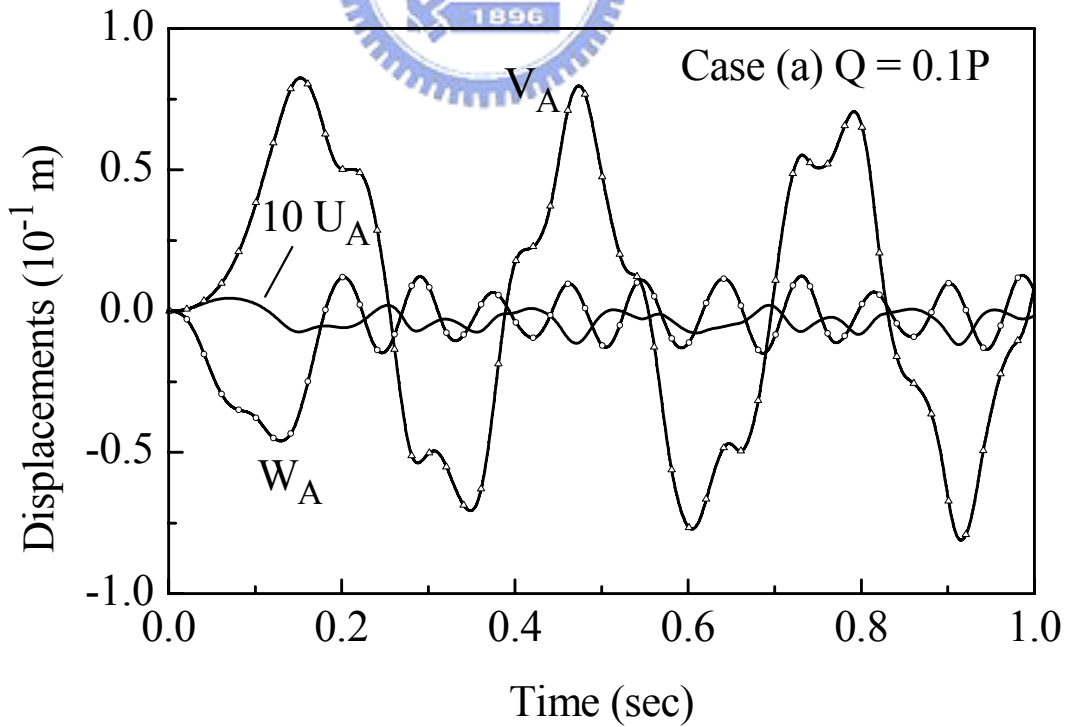


圖 4.92 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $Q = 0.1P$)

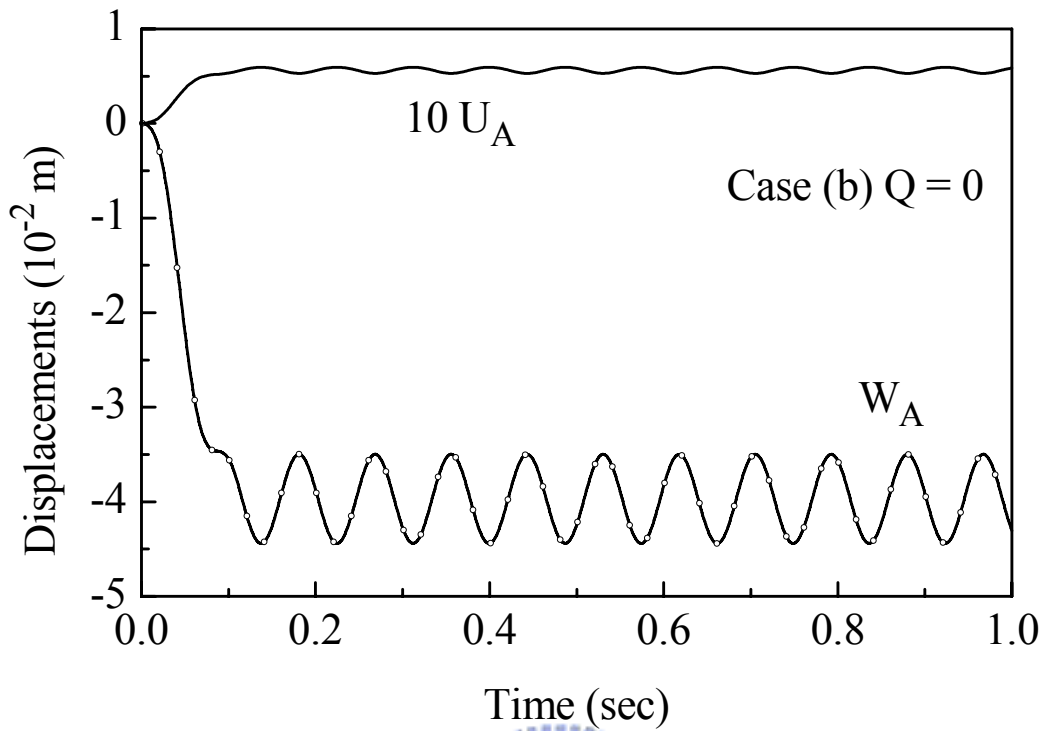


圖 4.93 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $Q = 0$)

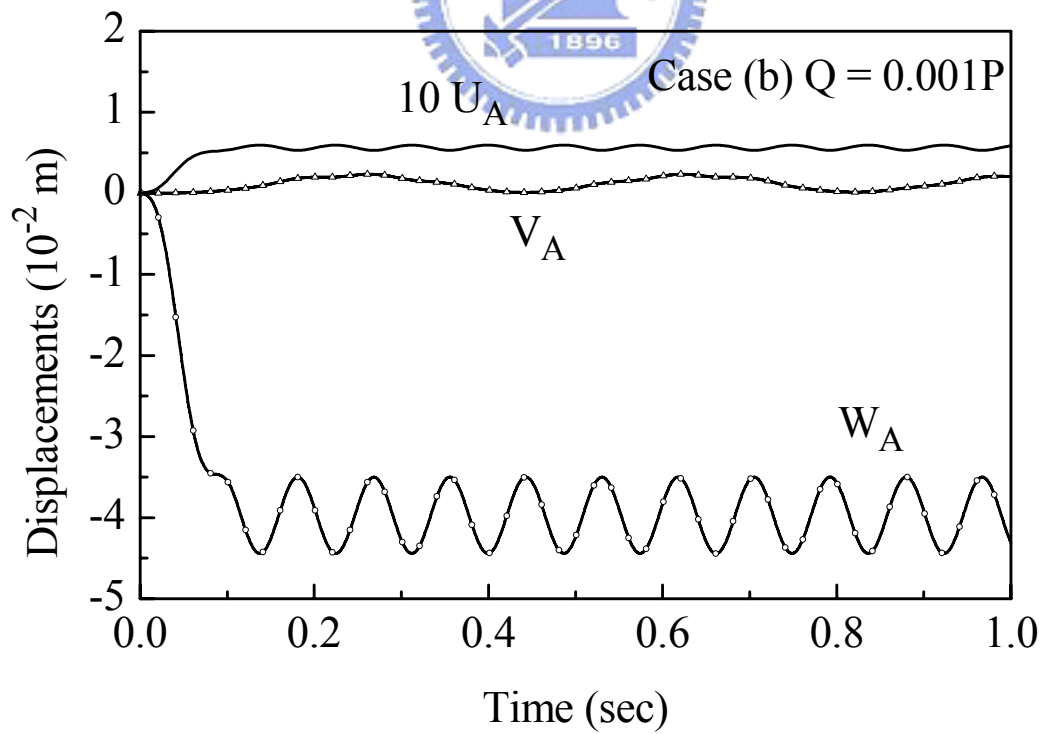


圖 4.94 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $Q = 0.001P$)

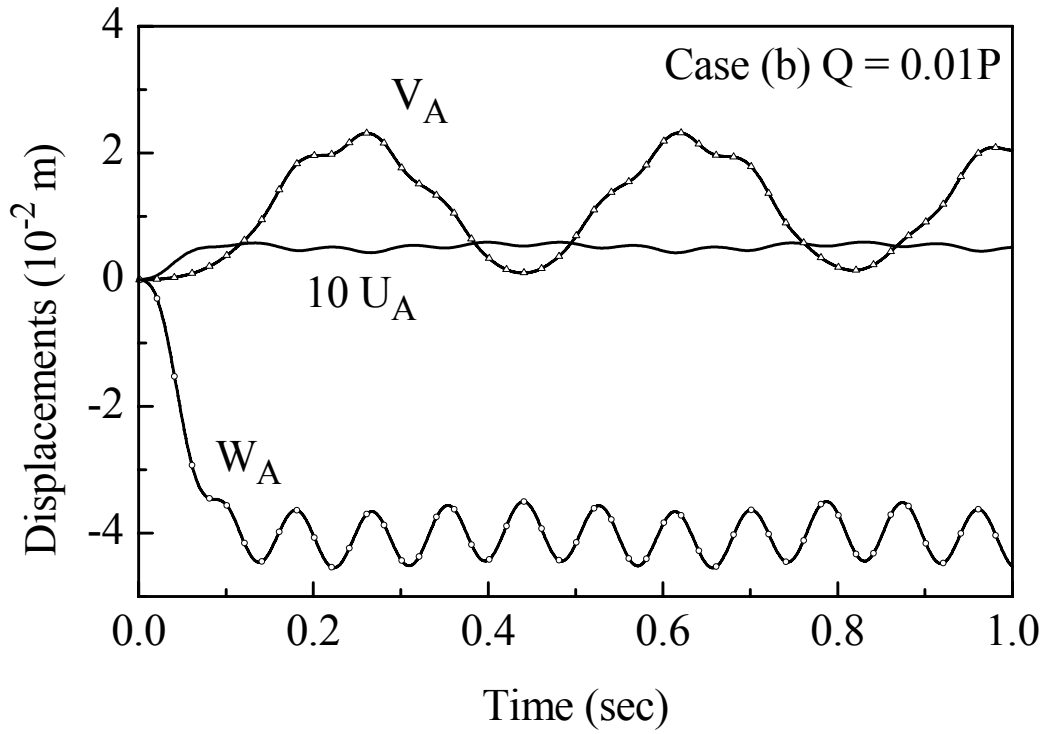


圖 4.95 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $Q = 0.01P$)

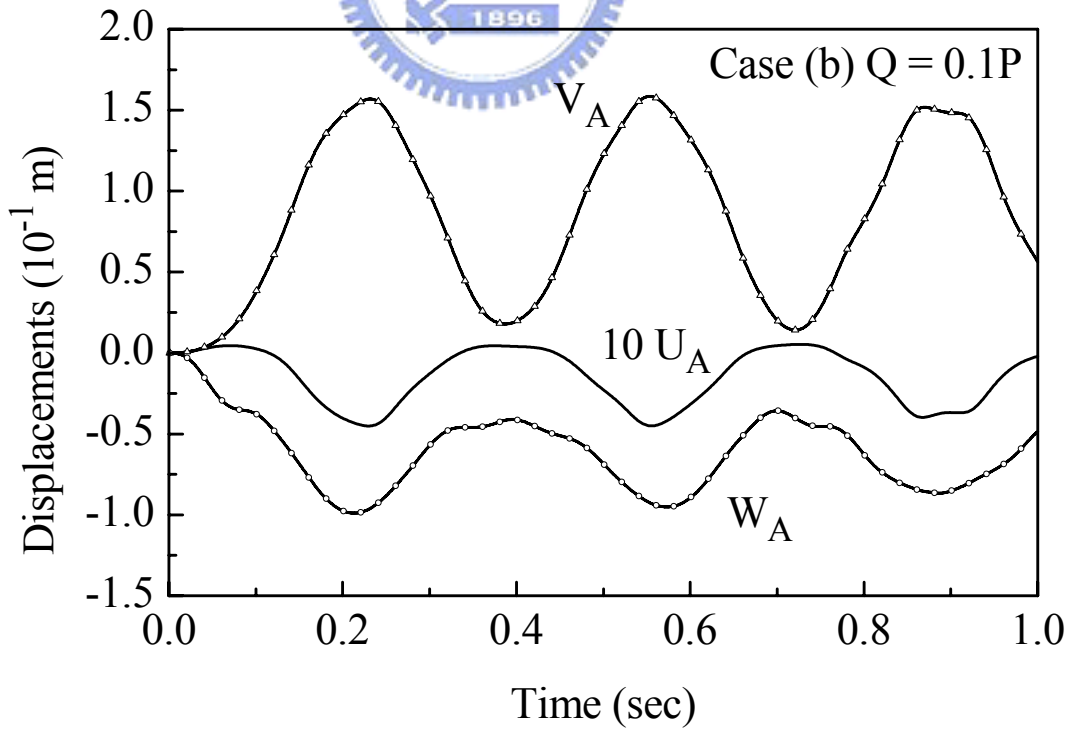


圖 4.96 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $Q = 0.1P$)

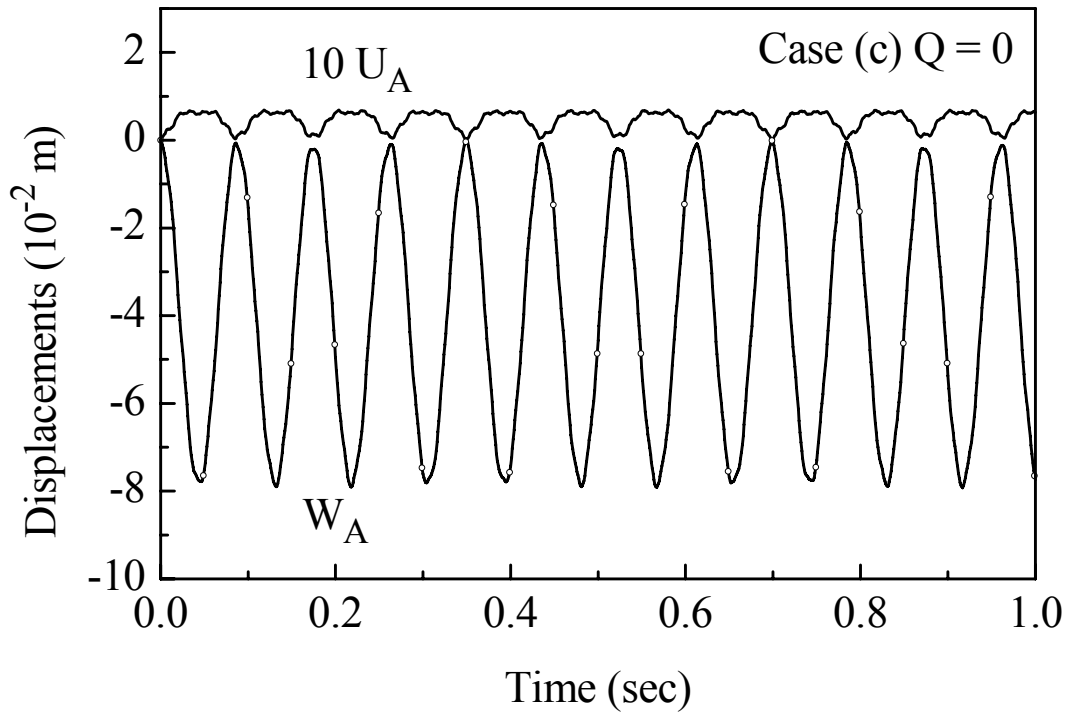


圖 4.97 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (c)、 $Q = 0$)

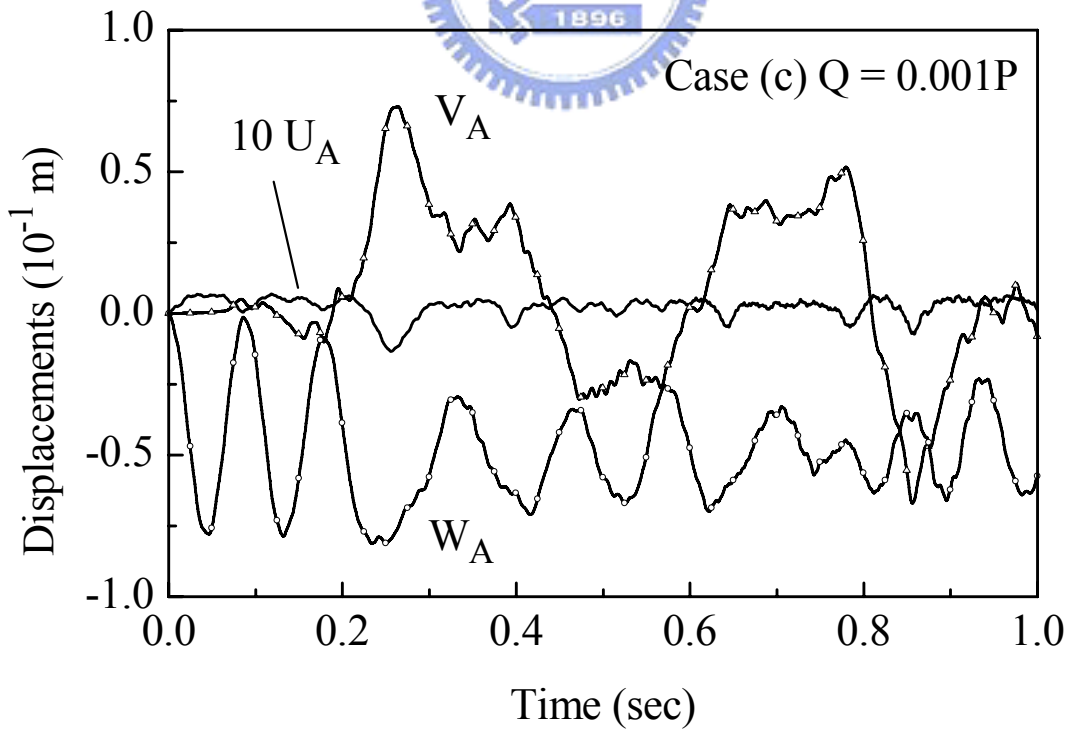


圖 4.98 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (c)、 $Q = 0.001P$)

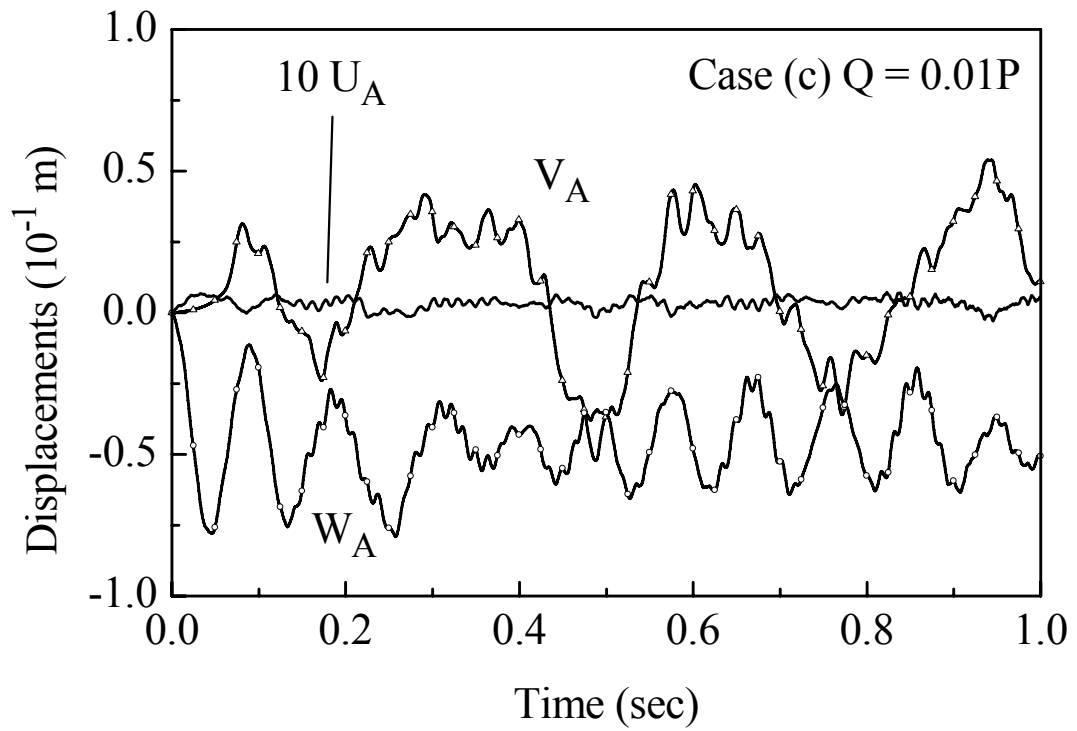


圖 4.99 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (c)、 $Q = 0.01P$)

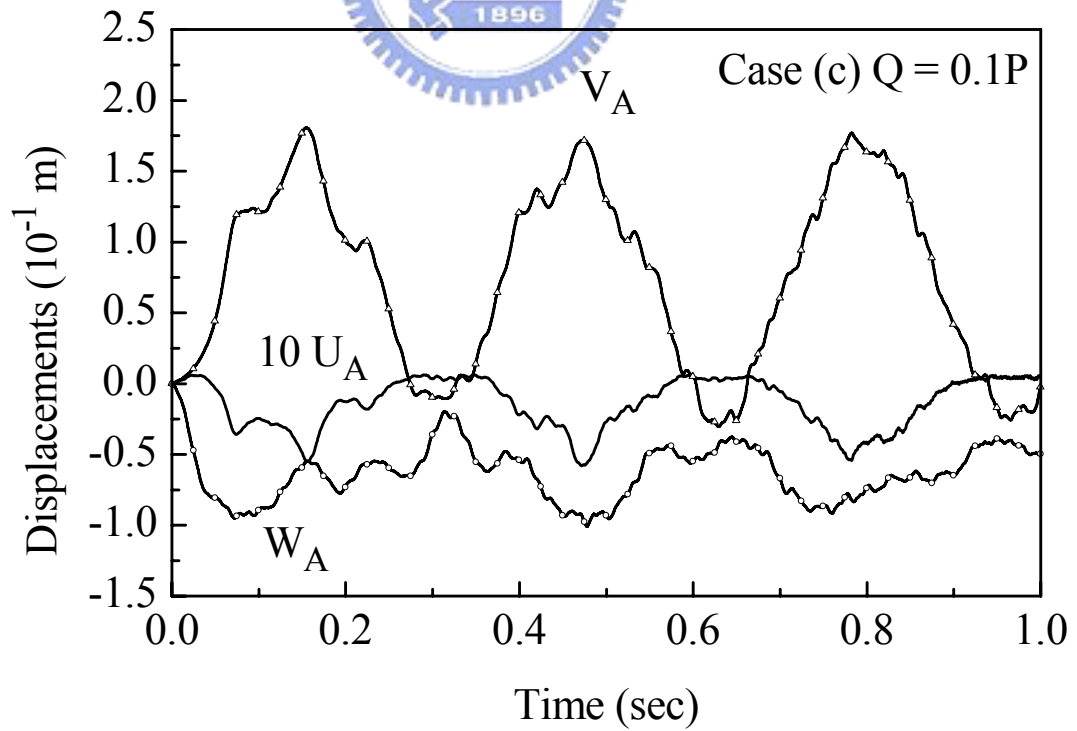
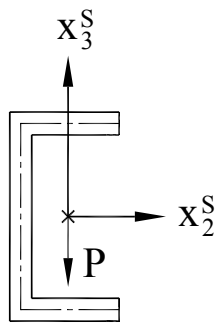
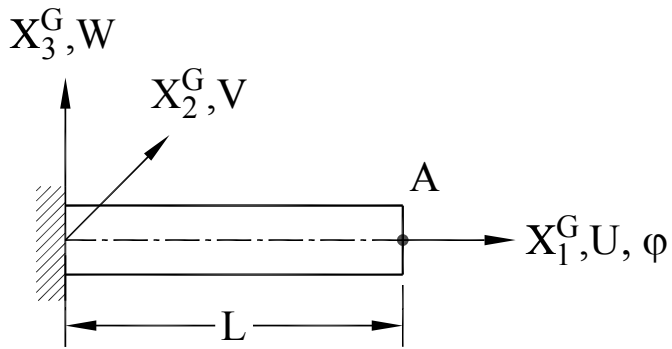
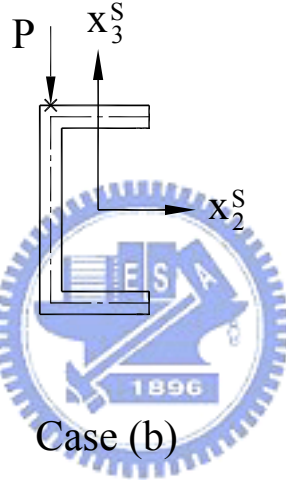


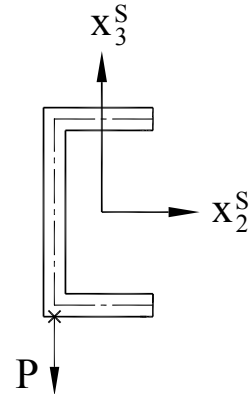
圖 4.100 例題 4.3.7 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移(Case (c)、 $Q = 0.1P$)



Case (a)

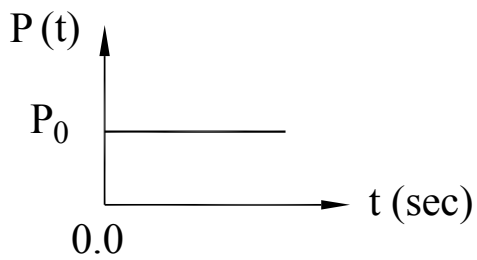


Case (b)



Case (c)

End cross section
 × Loading point



Time History of Load

圖 4.101 例題 4.3.8 懸臂單對稱槽型斷面梁之幾何及受力圖

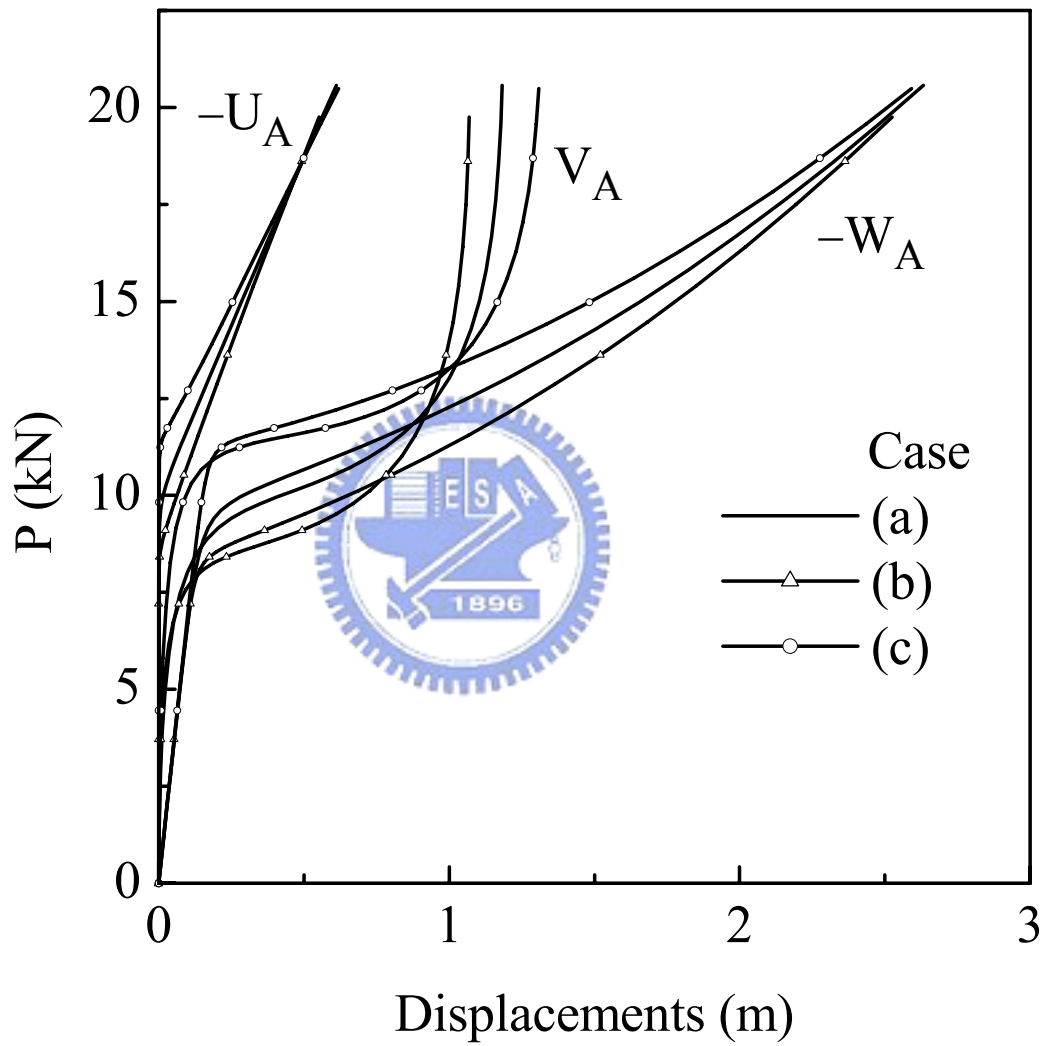


圖 4.102 例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖

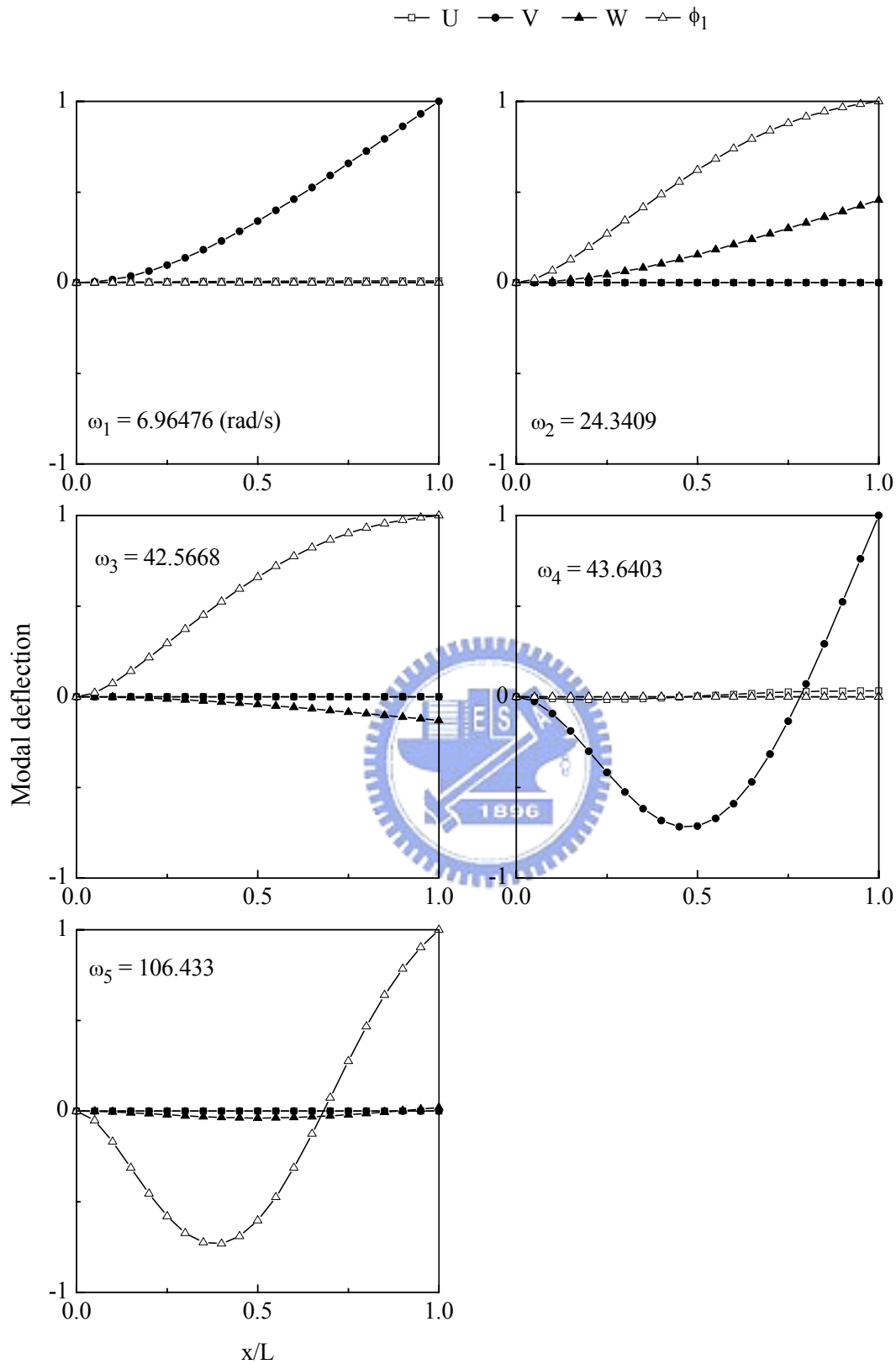


圖 4.103 例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖($P=0$)

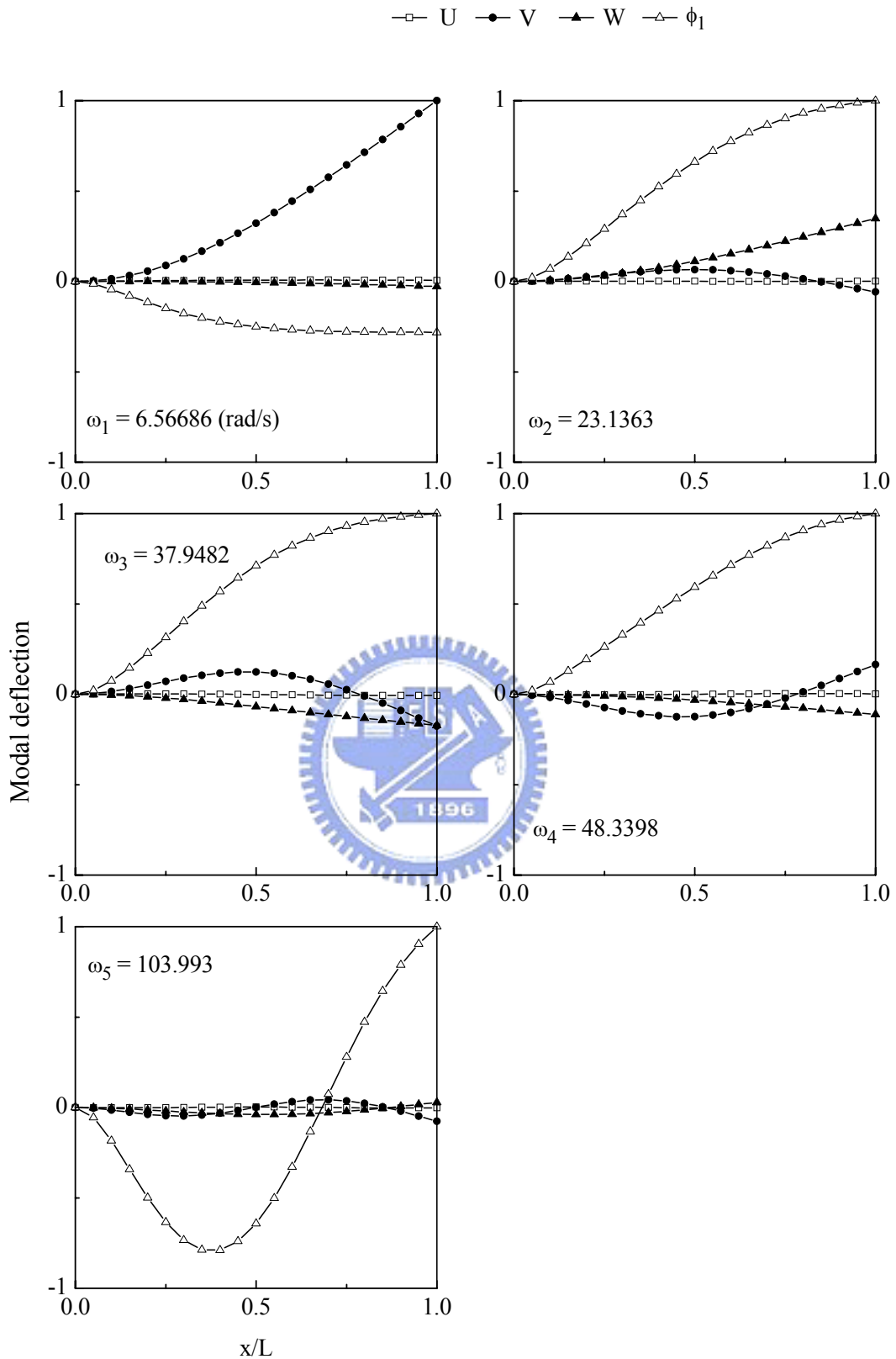


圖 4.104 例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖(Case (a)、 $P = 5 \text{ kN}$)

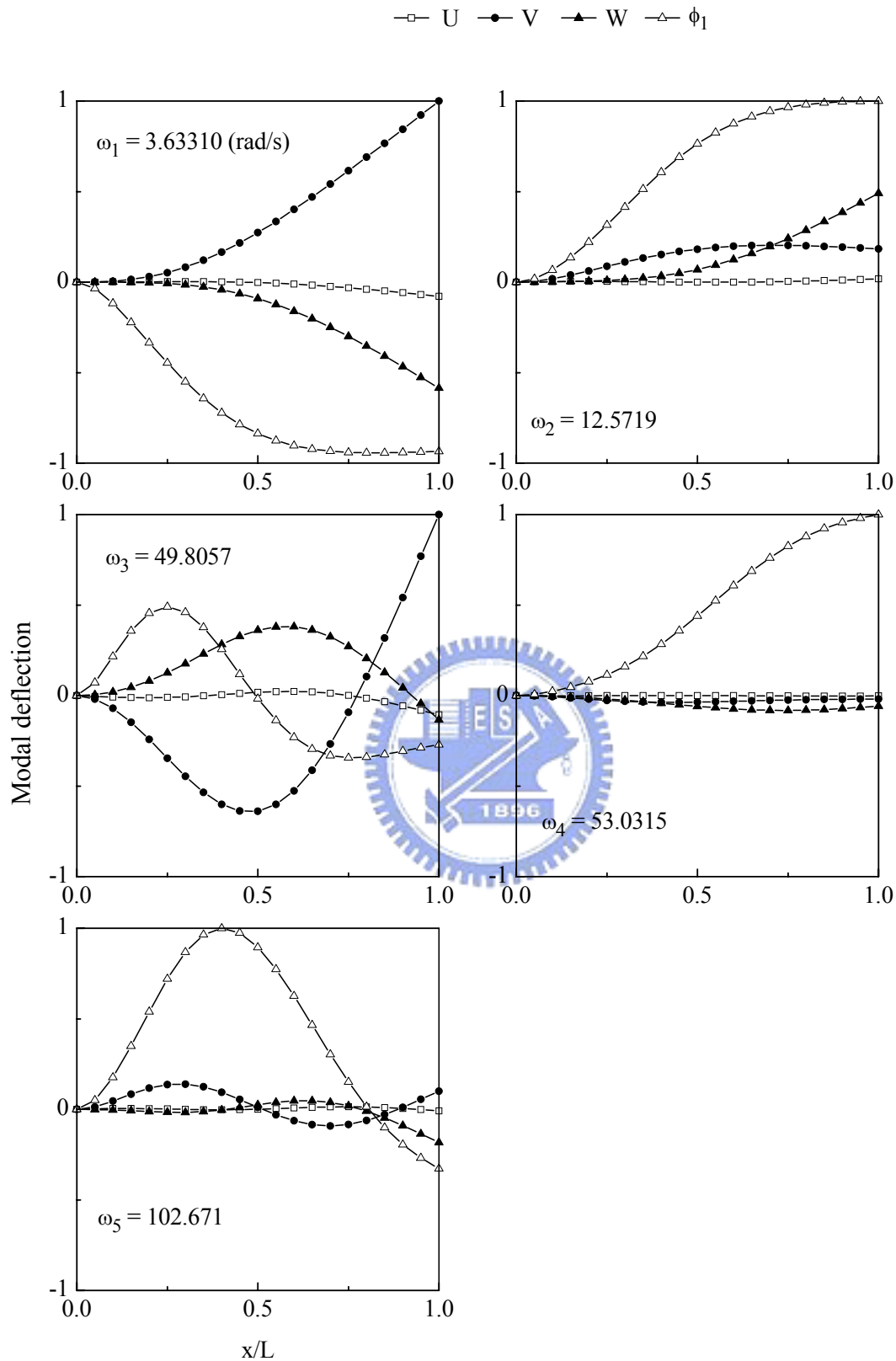


圖 4.105 例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖(Case (a)、 $P = 10 \text{ kN}$)

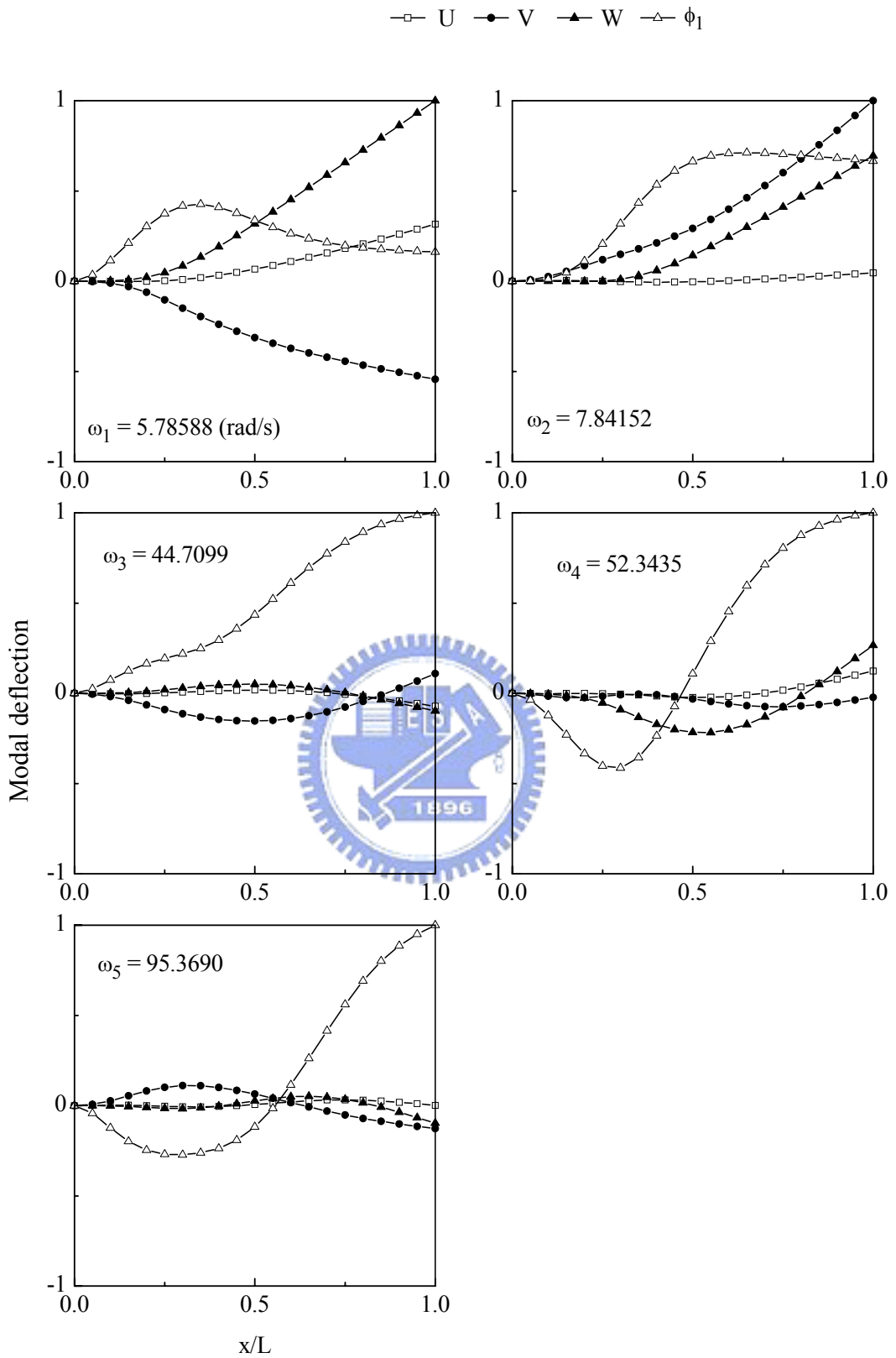


圖 4.106 例題 4.3.8 單對稱槽型斷面懸臂梁之振動模態圖(Case (a)、 $P=15\text{ kN}$)

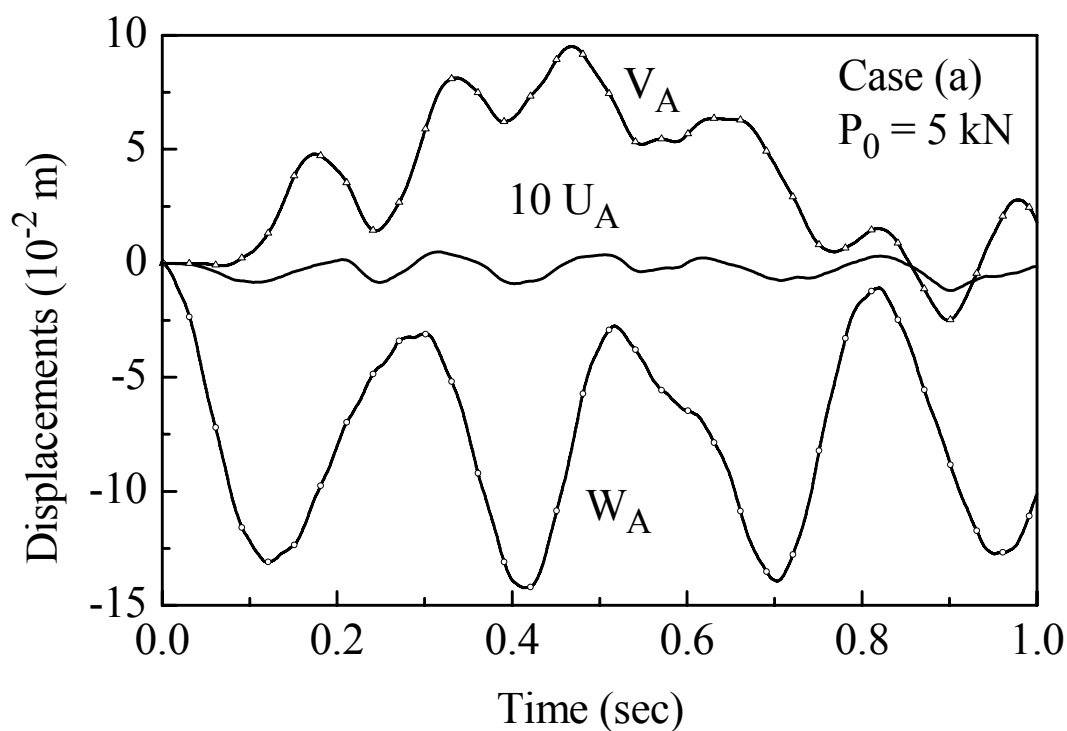


圖 4.107 例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$)

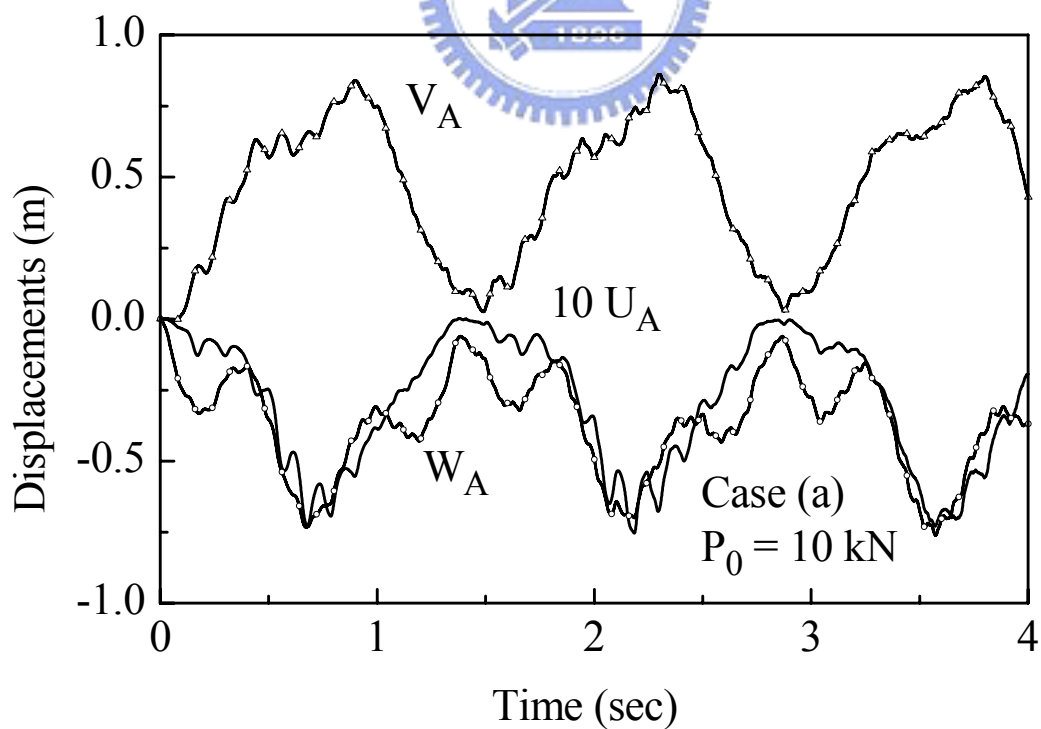


圖 4.108 例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (a)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$)

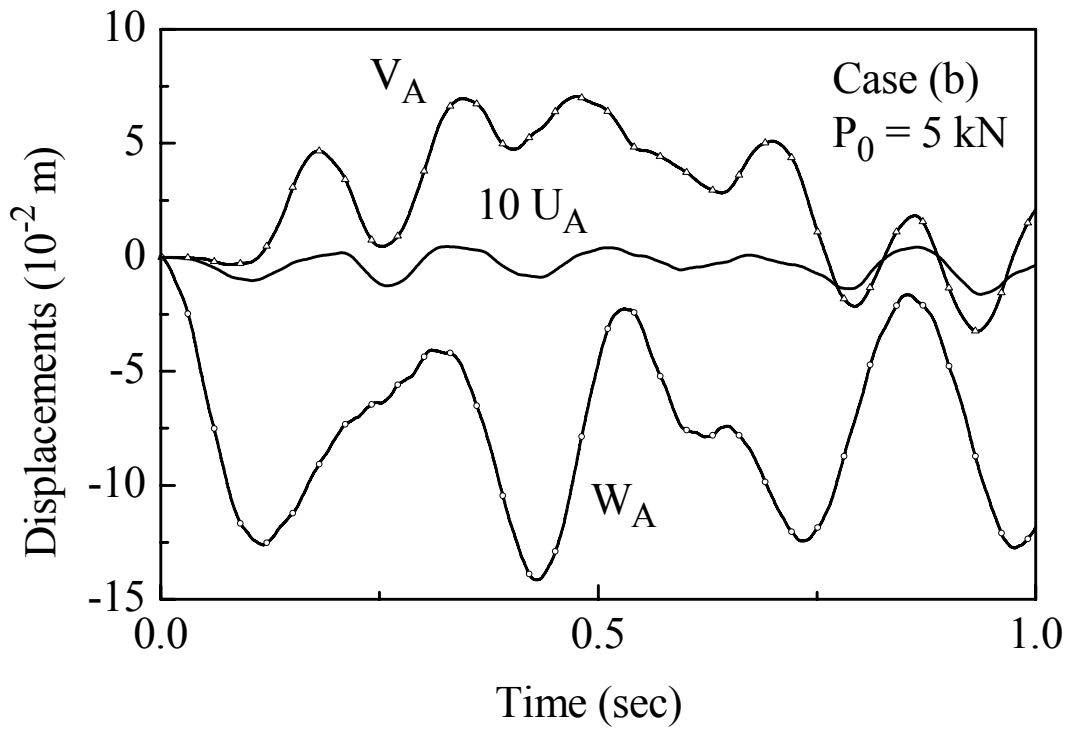


圖 4.109 例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$)

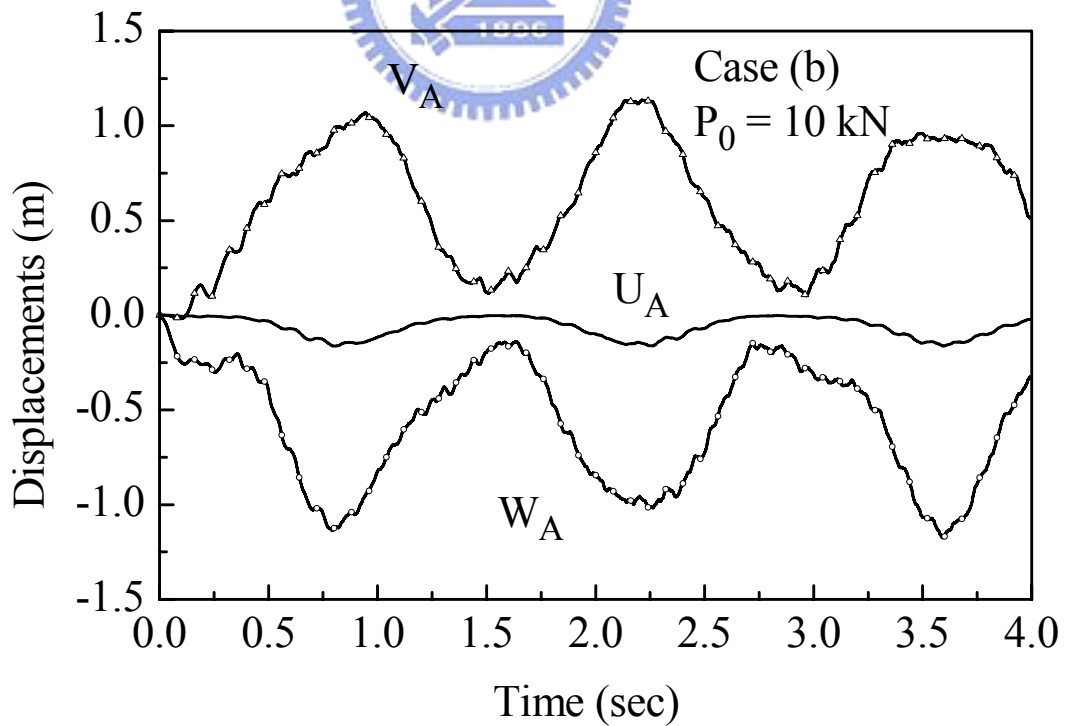


圖 4.110 例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (b)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$)

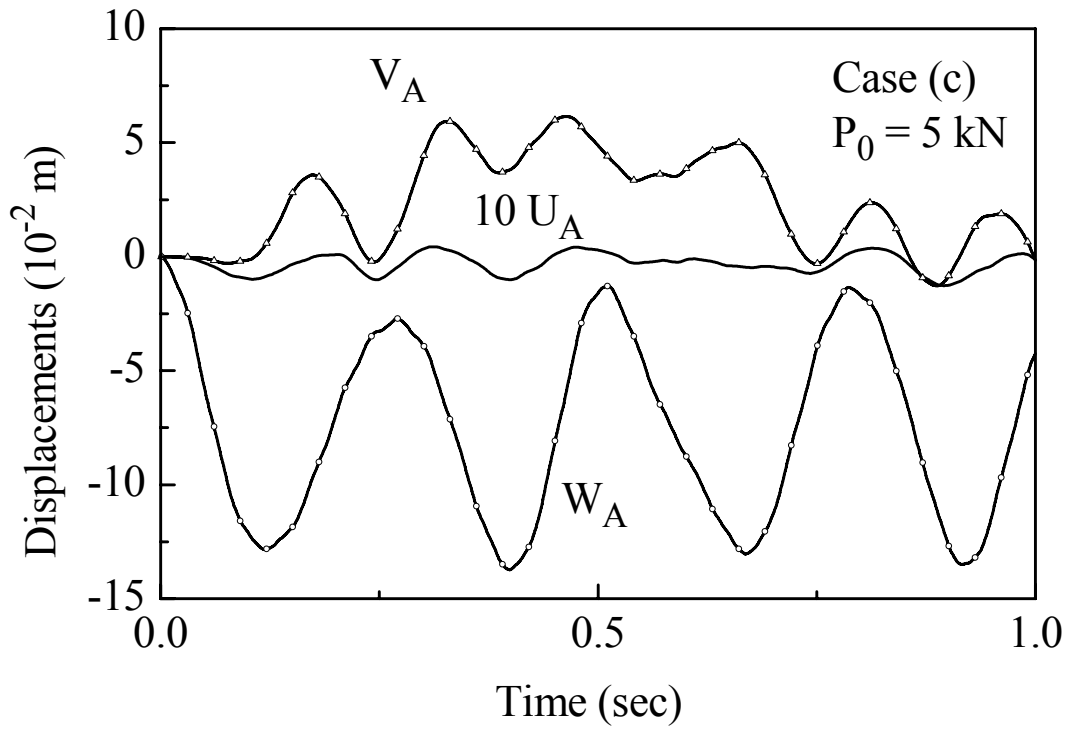


圖 4.111 例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (c)、 $P_0 = 5 \text{ kN}$)

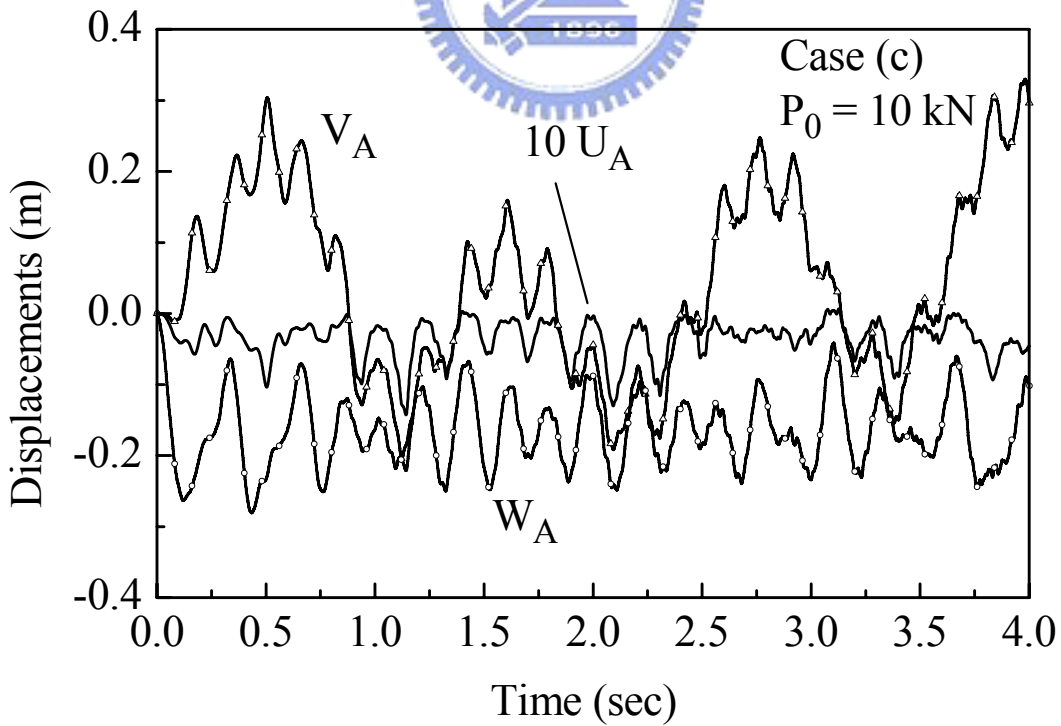
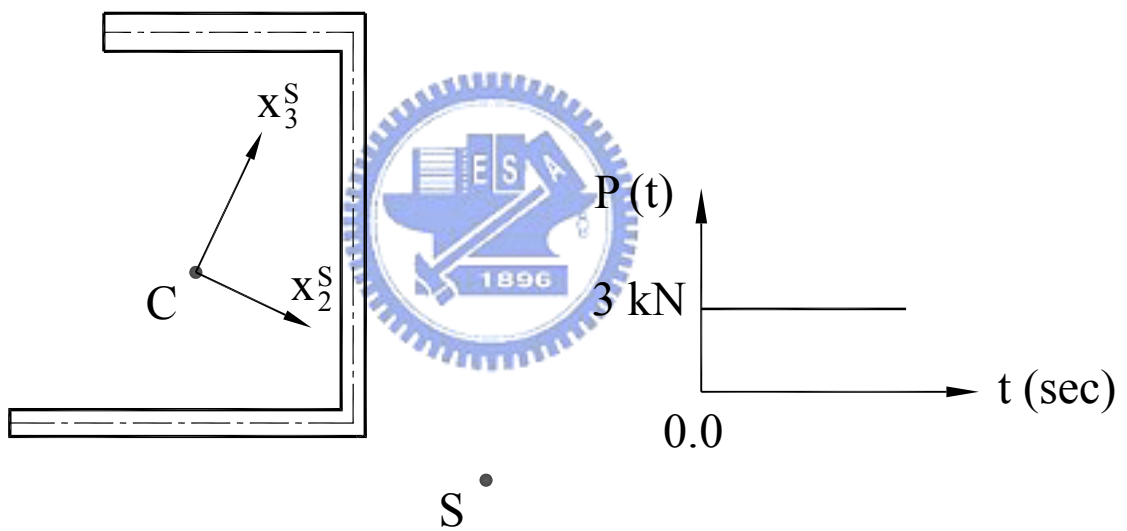
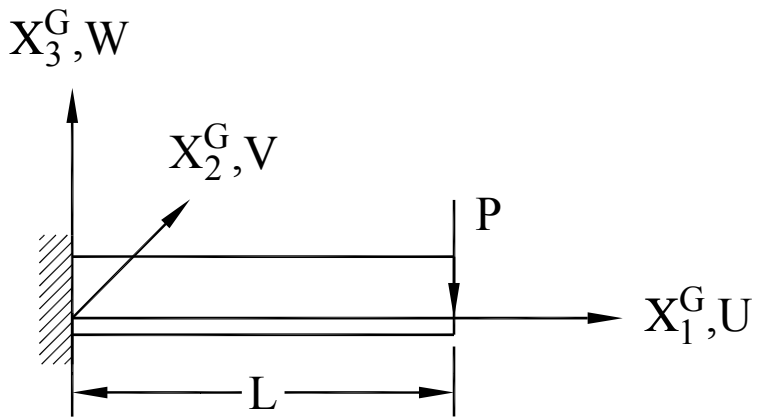


圖 4.112 例題 4.3.8 自由端 A 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (c)、 $P_0 = 10 \text{ kN}$)



End cross section

C : Centroid

S : Shear center

Time History of Load

圖 4.113 例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型梁之幾何及受力圖

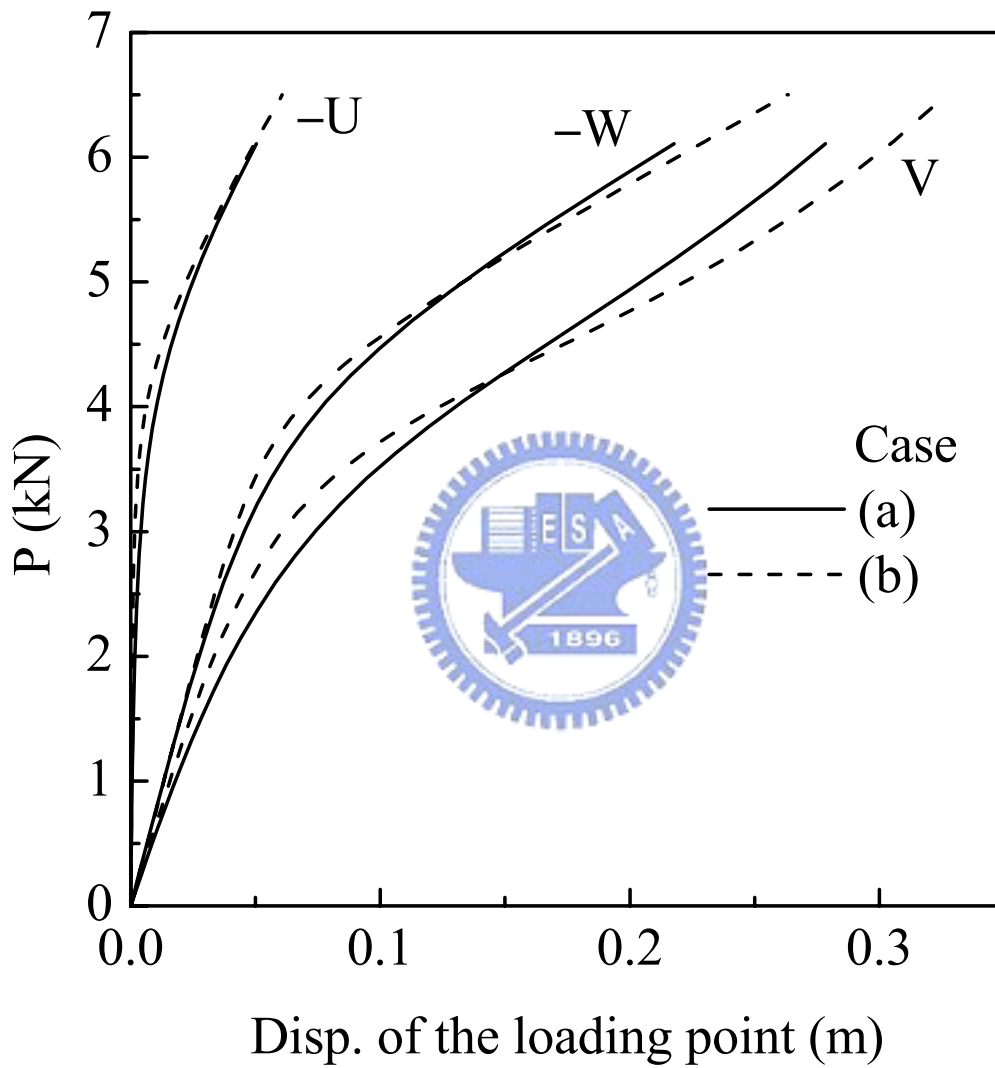


圖 4.114 例題 4.3.9 梁自由端在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖(Case (a):負荷作用在斷面剪心位置, Case (b):負荷作用在斷面形心位置)

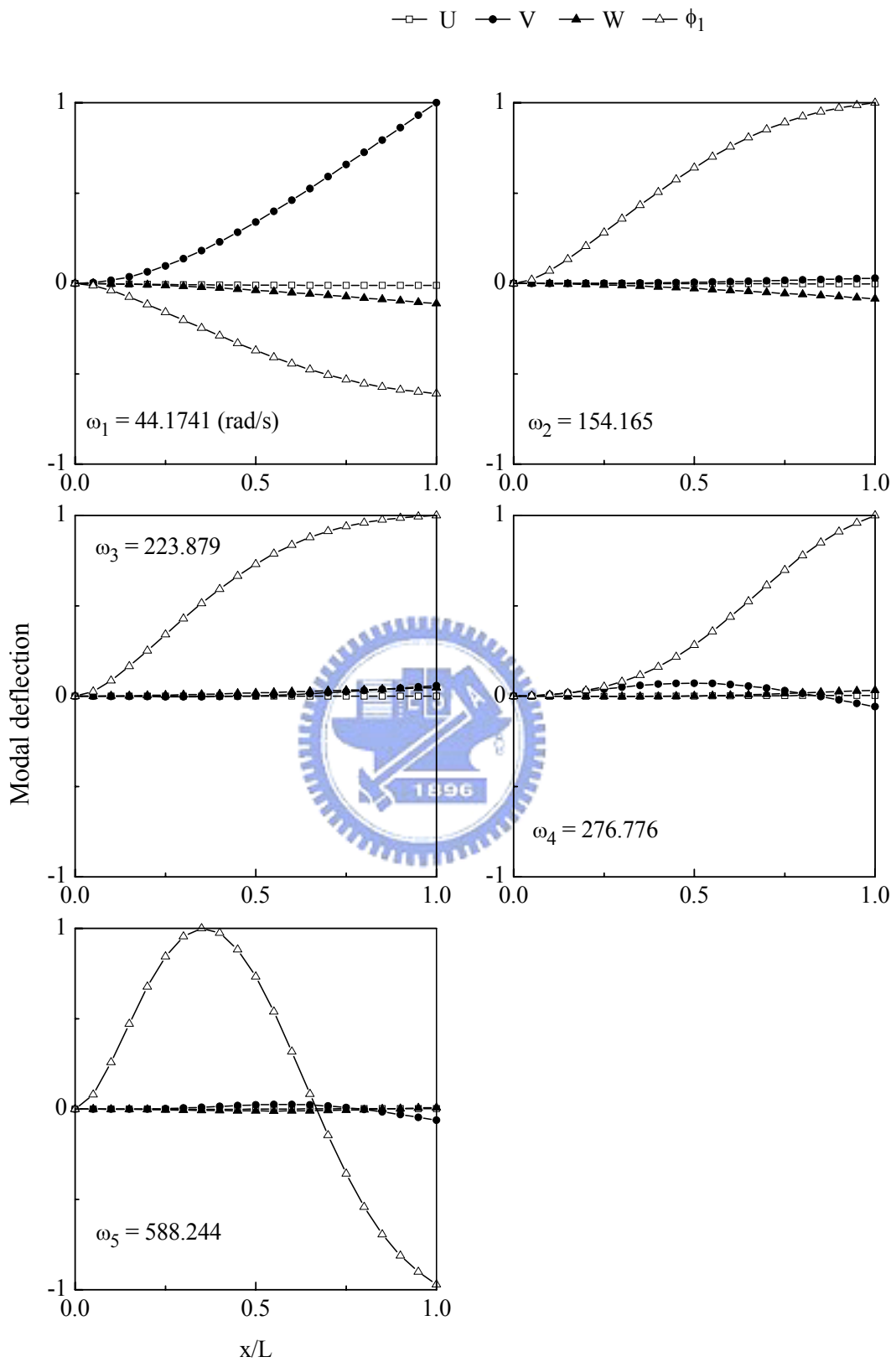


圖 4.115 例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁之振動模態圖($P=0$)

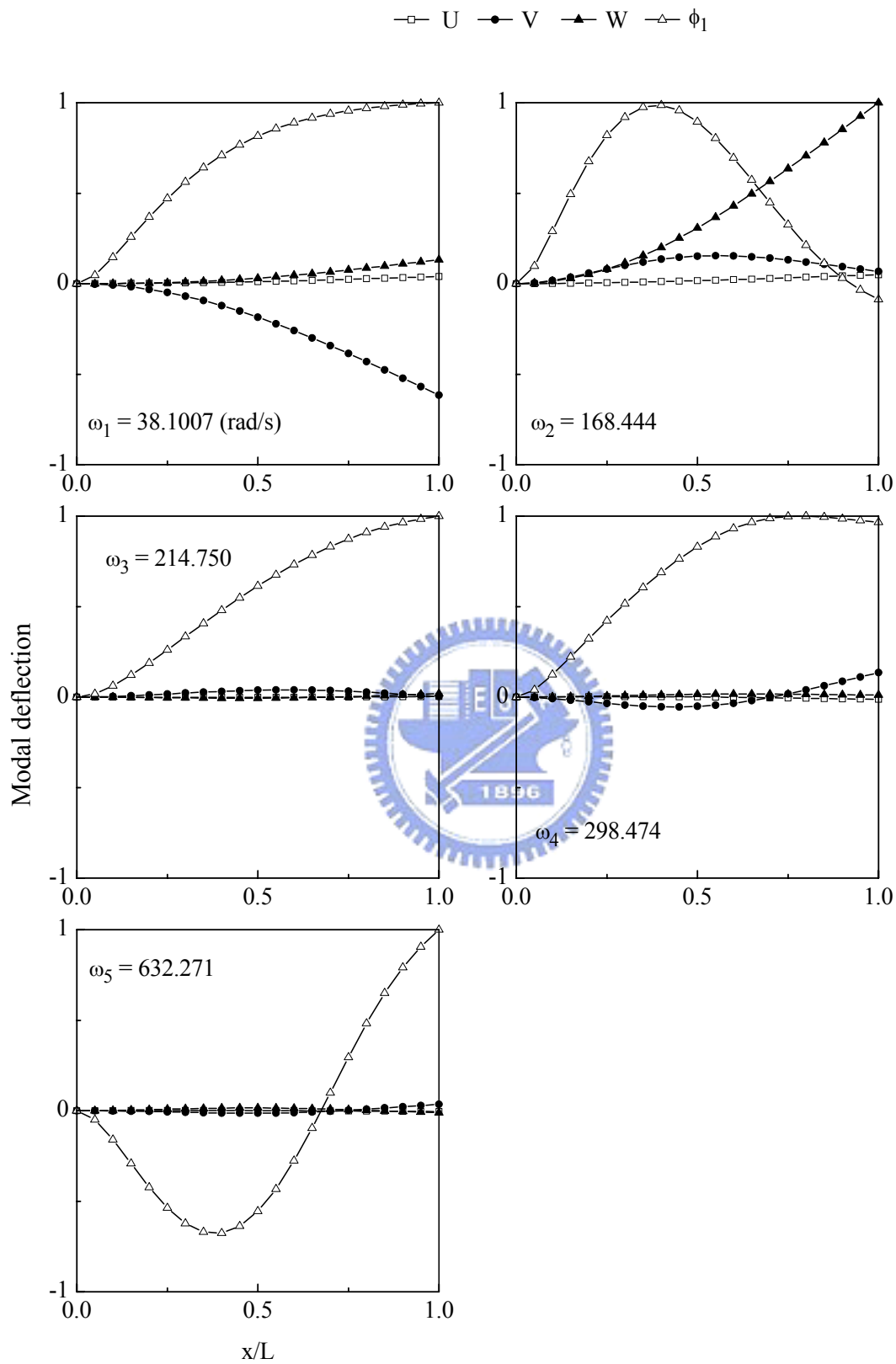


圖 4.116 例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁之振動模態圖(Case (a)、 $P = 3 \text{ kN}$)

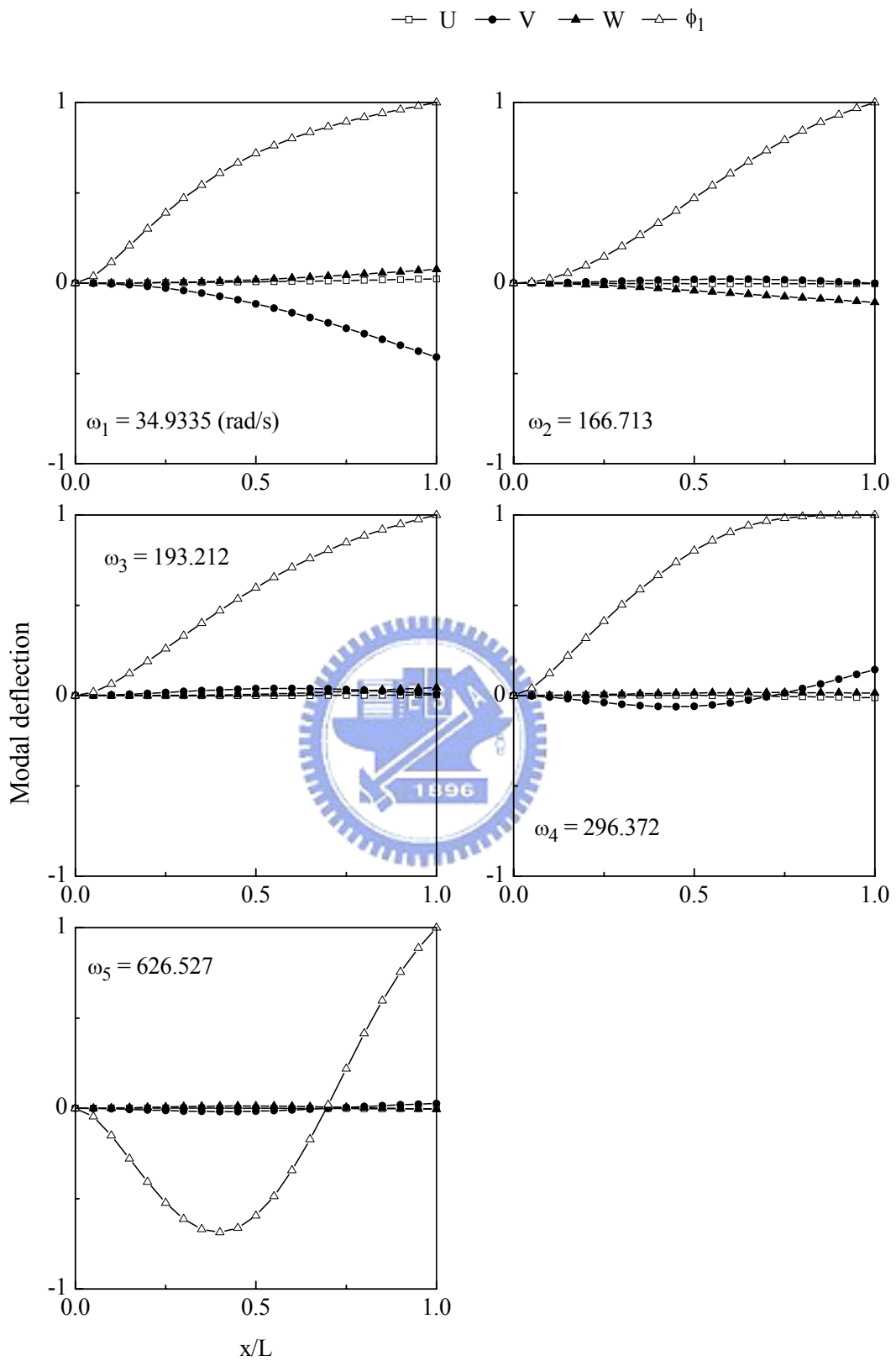


圖 4.117 例題 4.3.9 懸臂不對稱槽型斷面梁之振動模態圖(Case (b)、 $P = 3 \text{ kN}$)

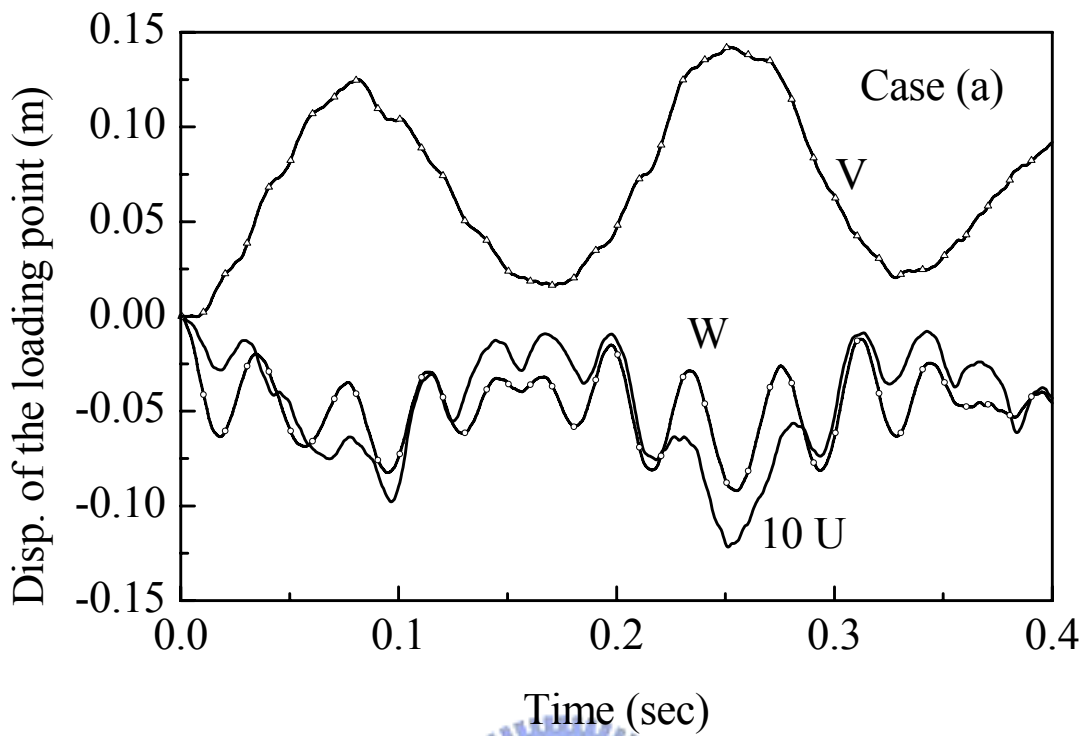


圖 4.118 例題 4.3.9 自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (a))

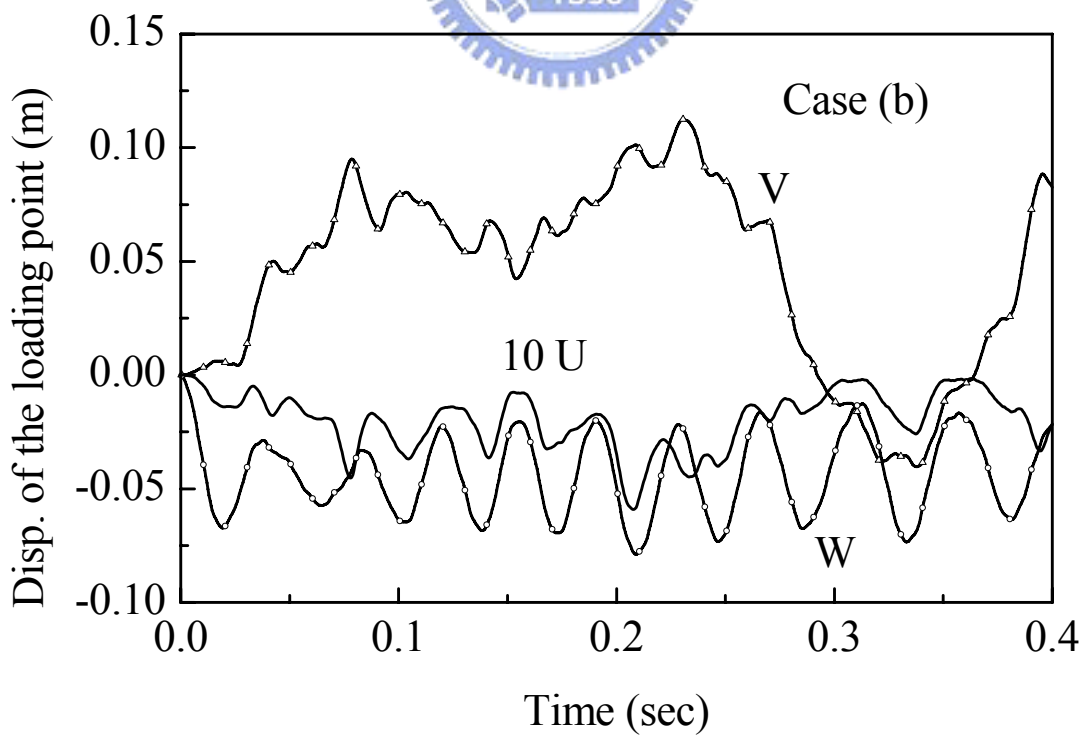
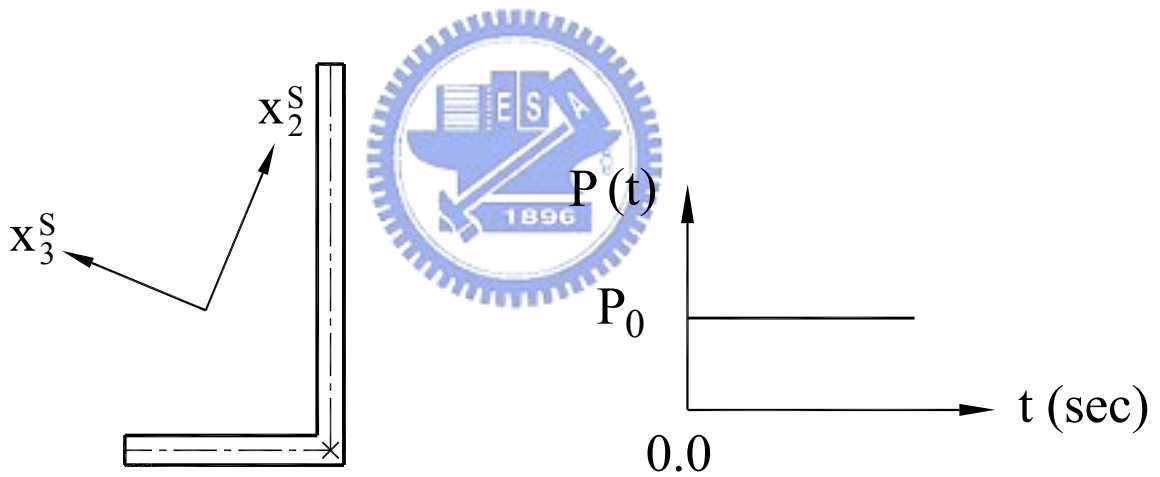
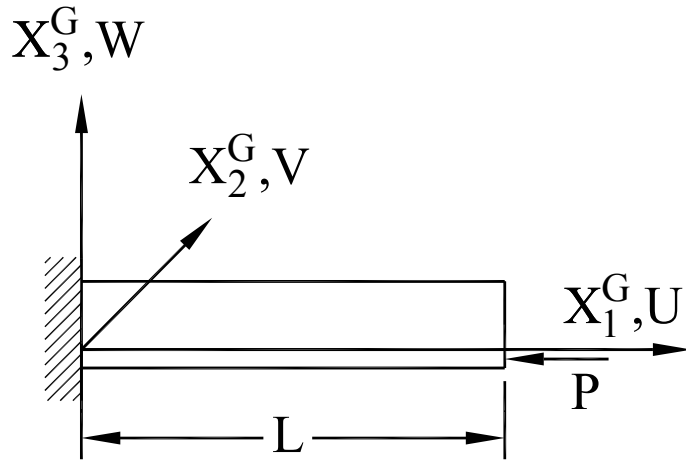


圖 4.119 例題 4.3.9 自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移(Case (b))



End cross section
 × Loading point

Time History of Load

圖 4.120 例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之幾何及受力圖

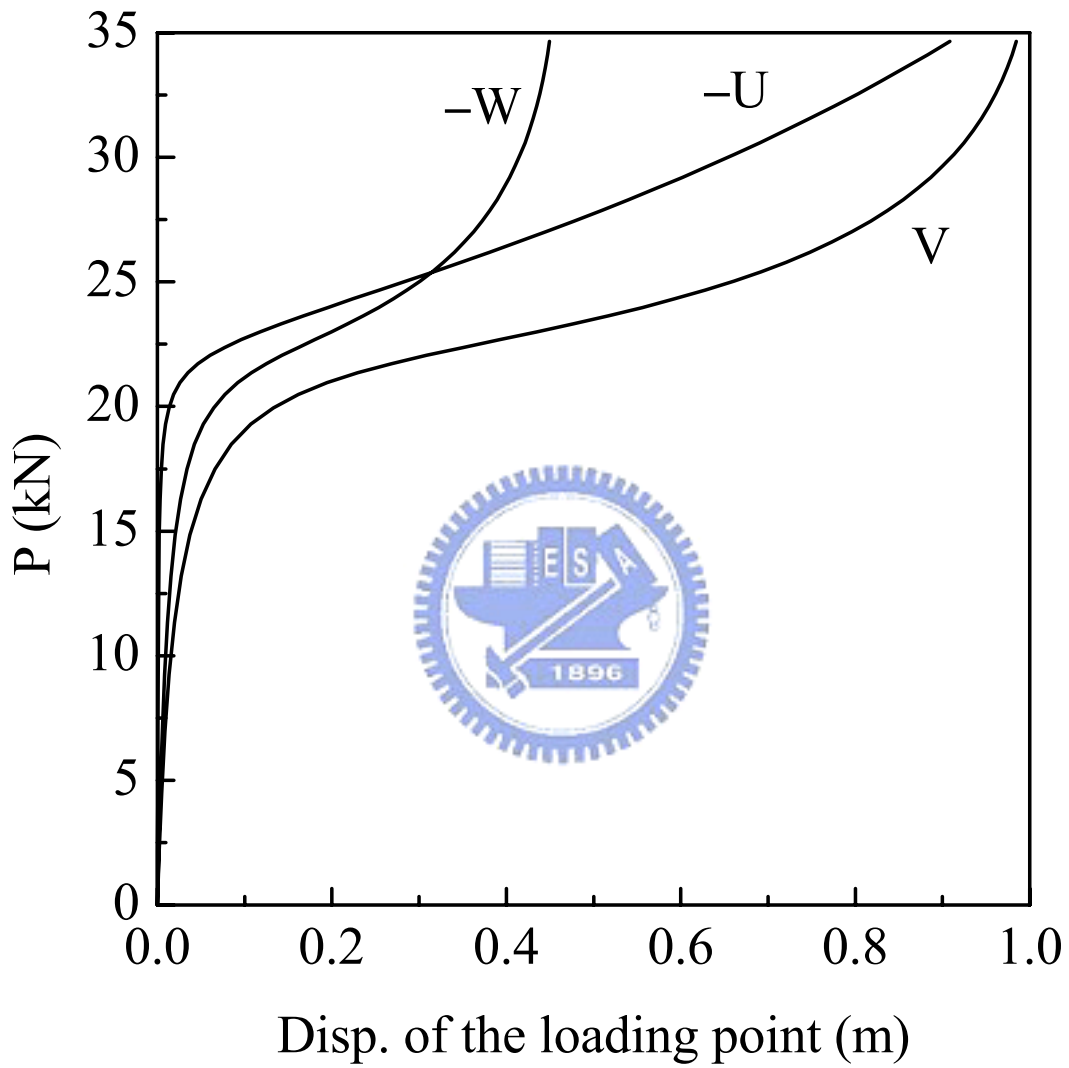


圖 4.121 例題 4.3.10 梁自由端在 X_1^G 、 X_2^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖

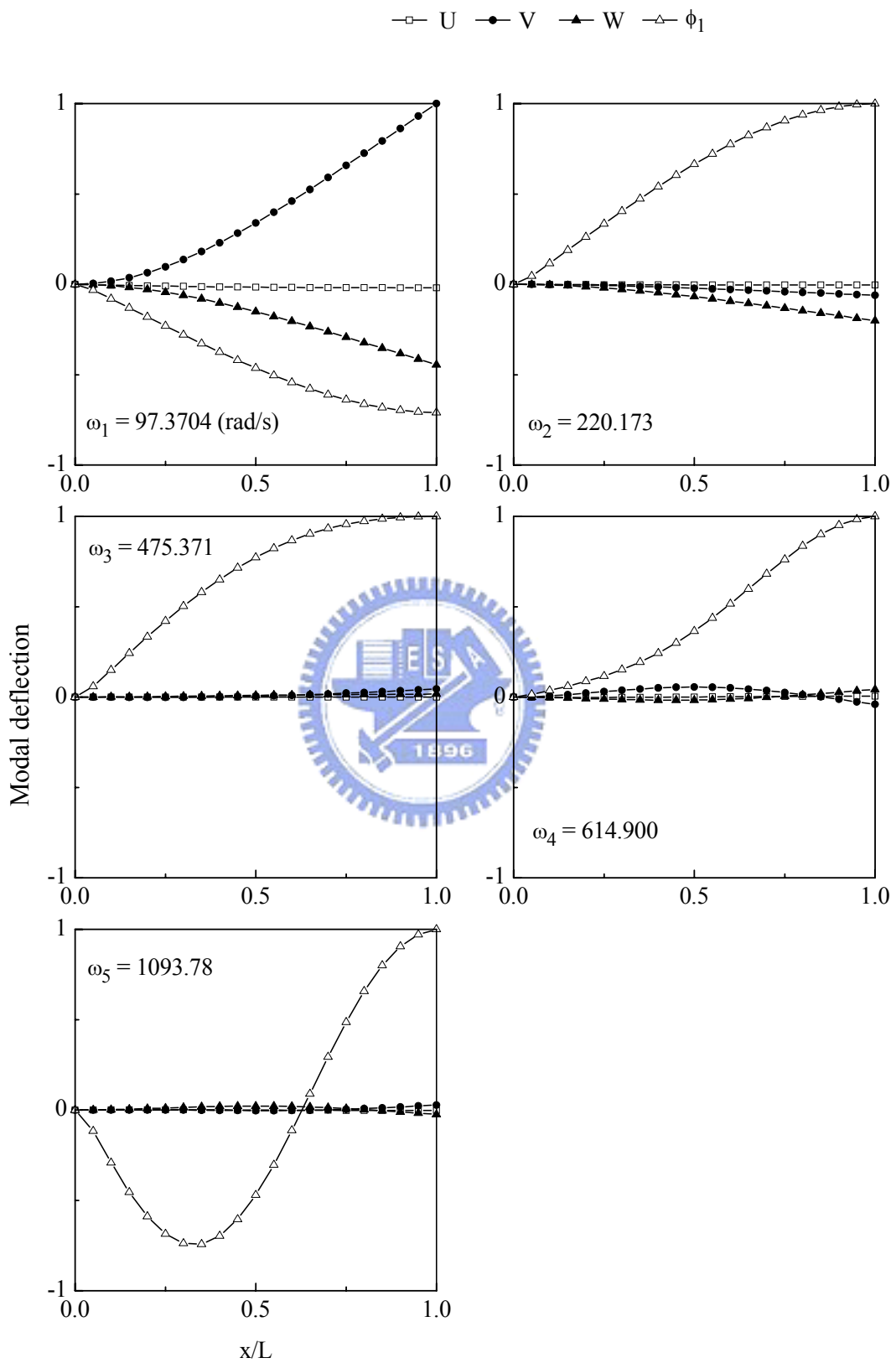


圖 4.122 例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之振動模態圖($P=0$)

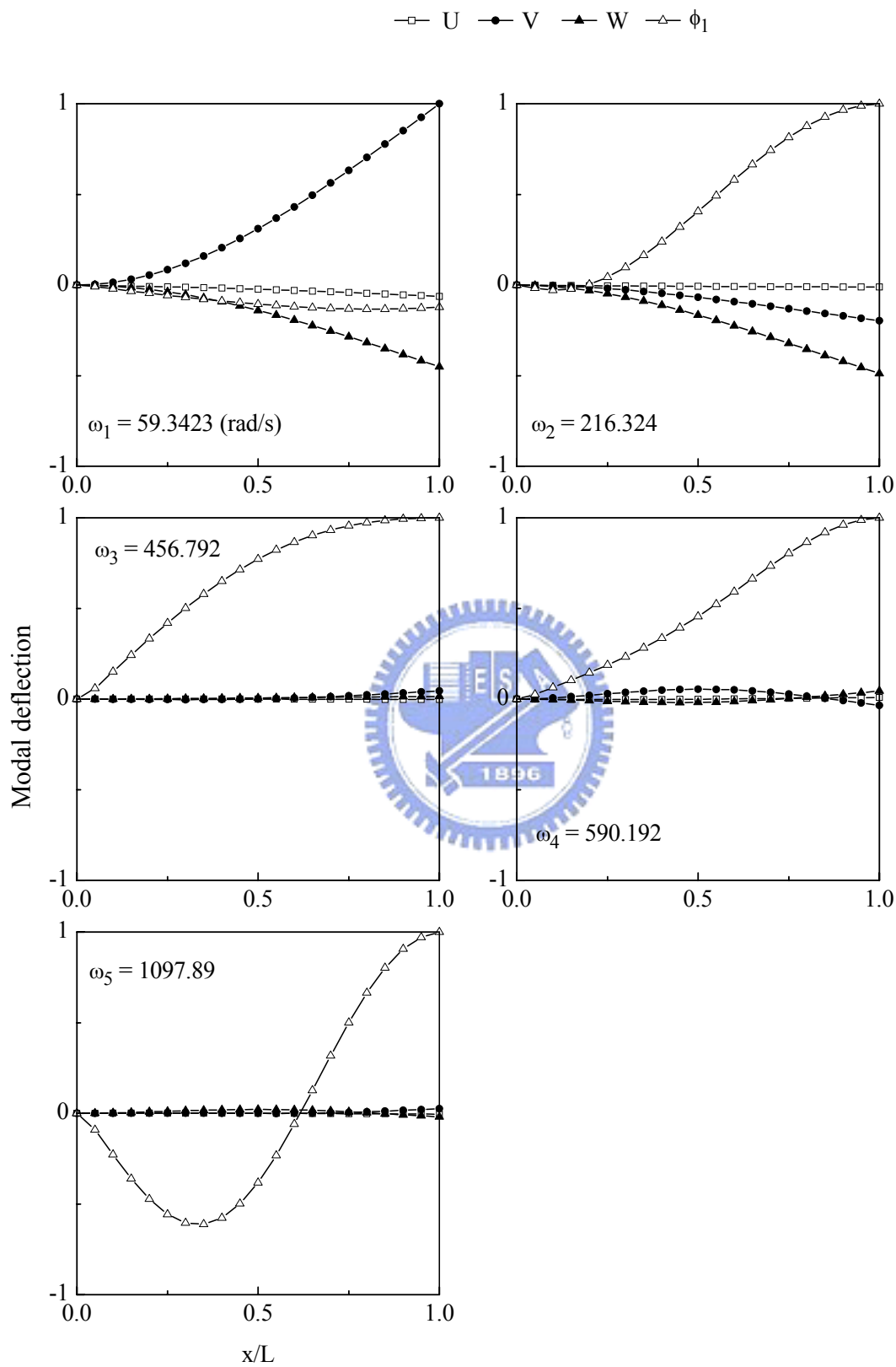


圖 4.123 例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之振動模態圖($P = 15 \text{ kN}$)

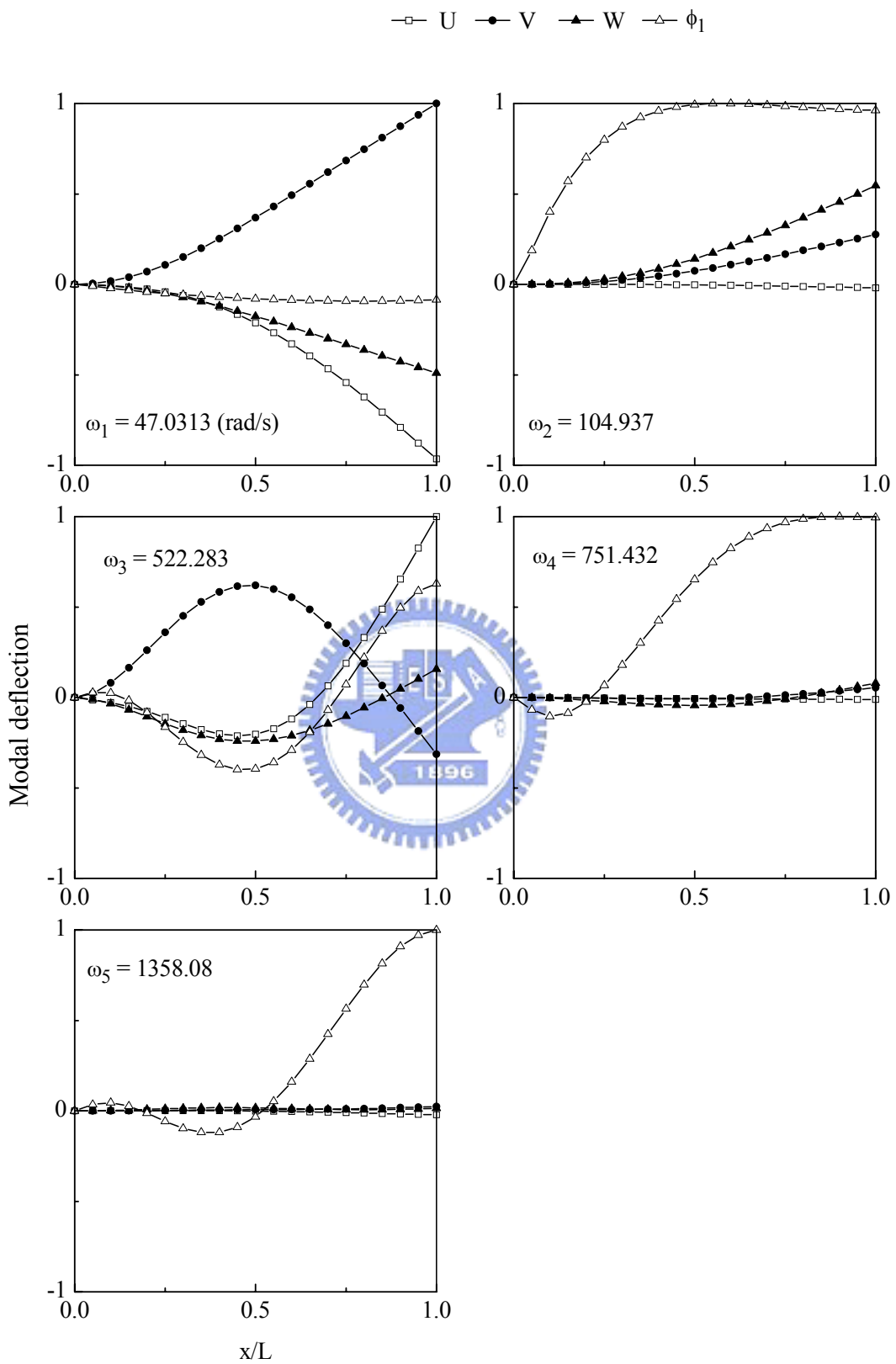


圖 4.124 例題 4.3.10 懸臂不對稱角型斷面梁之振動模態圖($P = 25 \text{ kN}$)

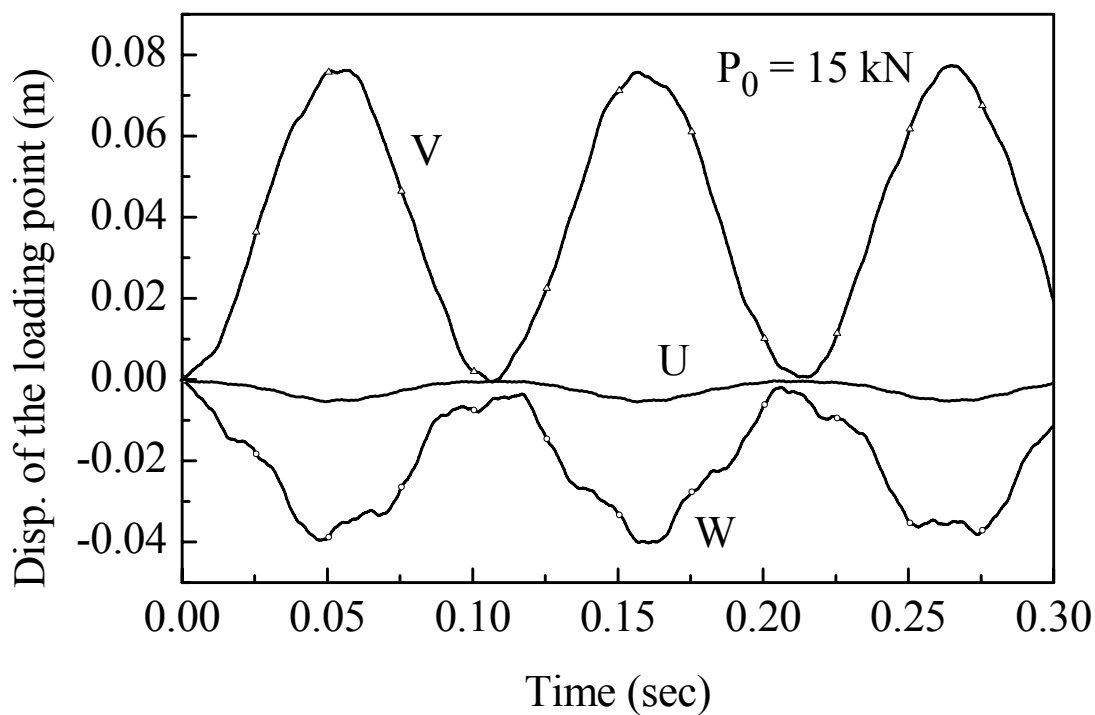


圖 4.125 例題 4.3.10 梁自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移
($P_0 = 15 \text{ kN}$)

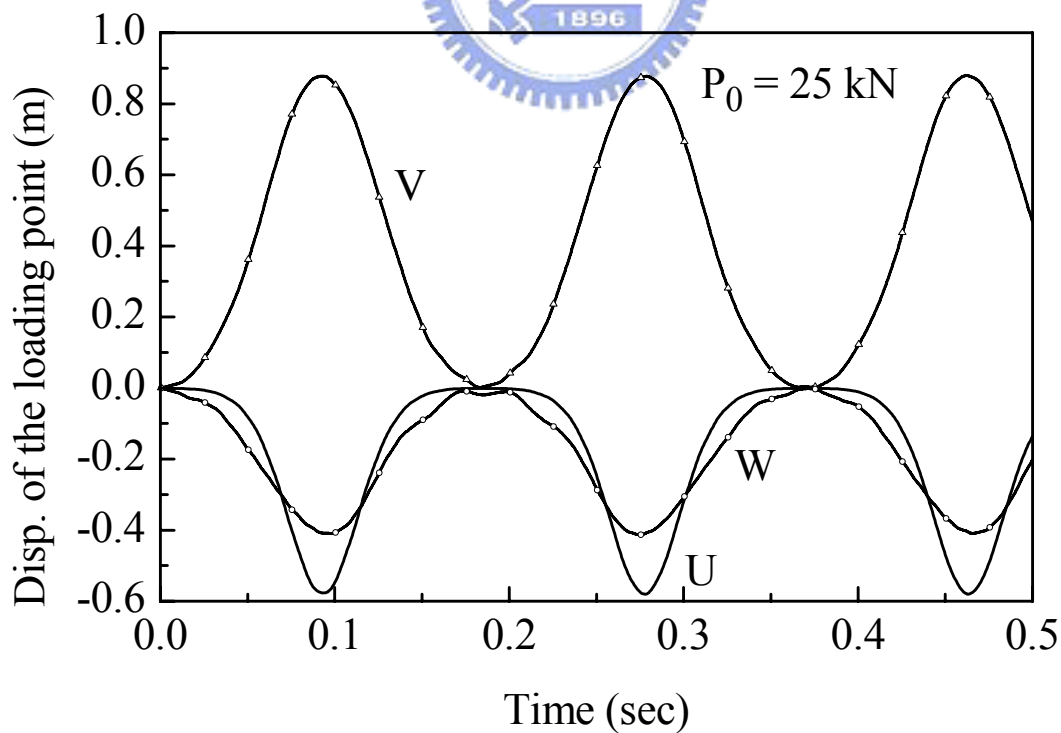
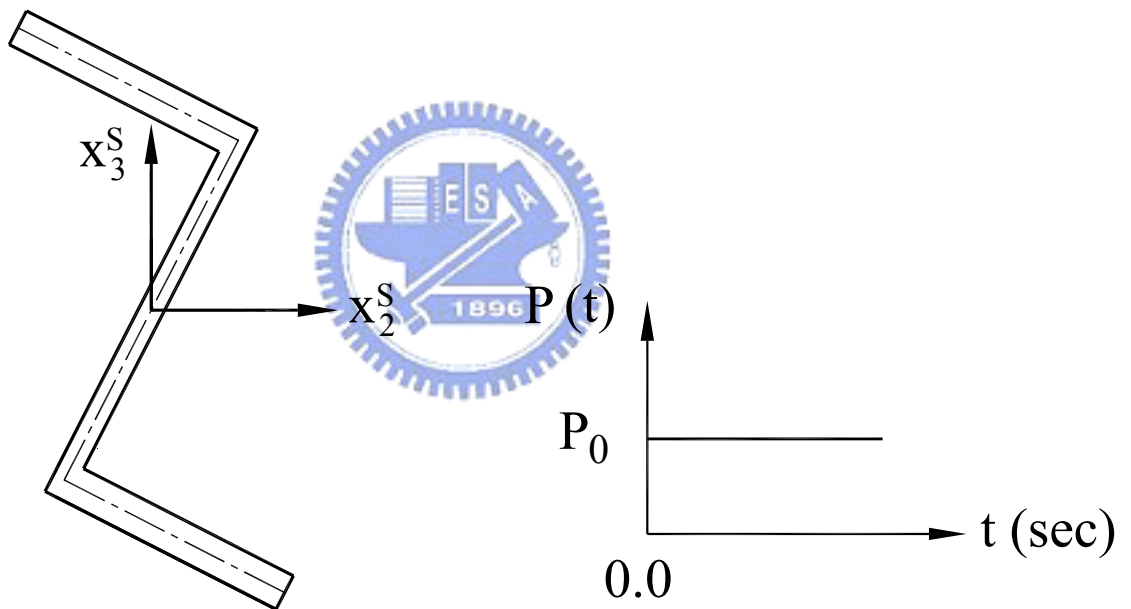
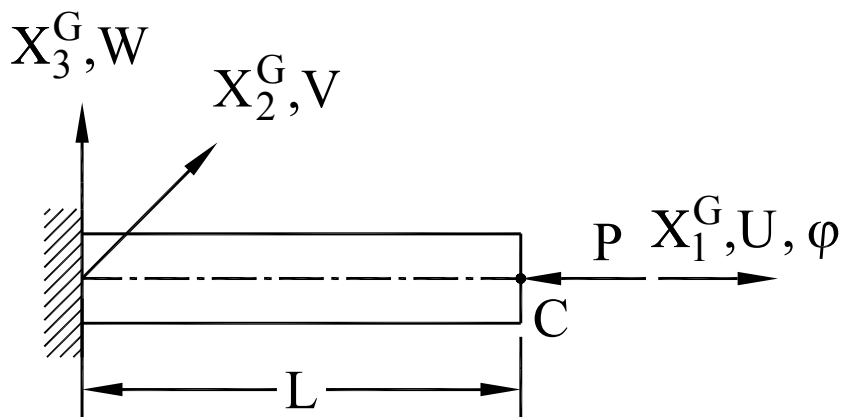


圖 4.126 例題 4.3.10 梁自由端在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移
($P_0 = 25 \text{ kN}$)



End cross section

Time History of Load

圖 4.127 例題 4.3.11 懸臂 Z 型斷面梁之幾何及受力圖

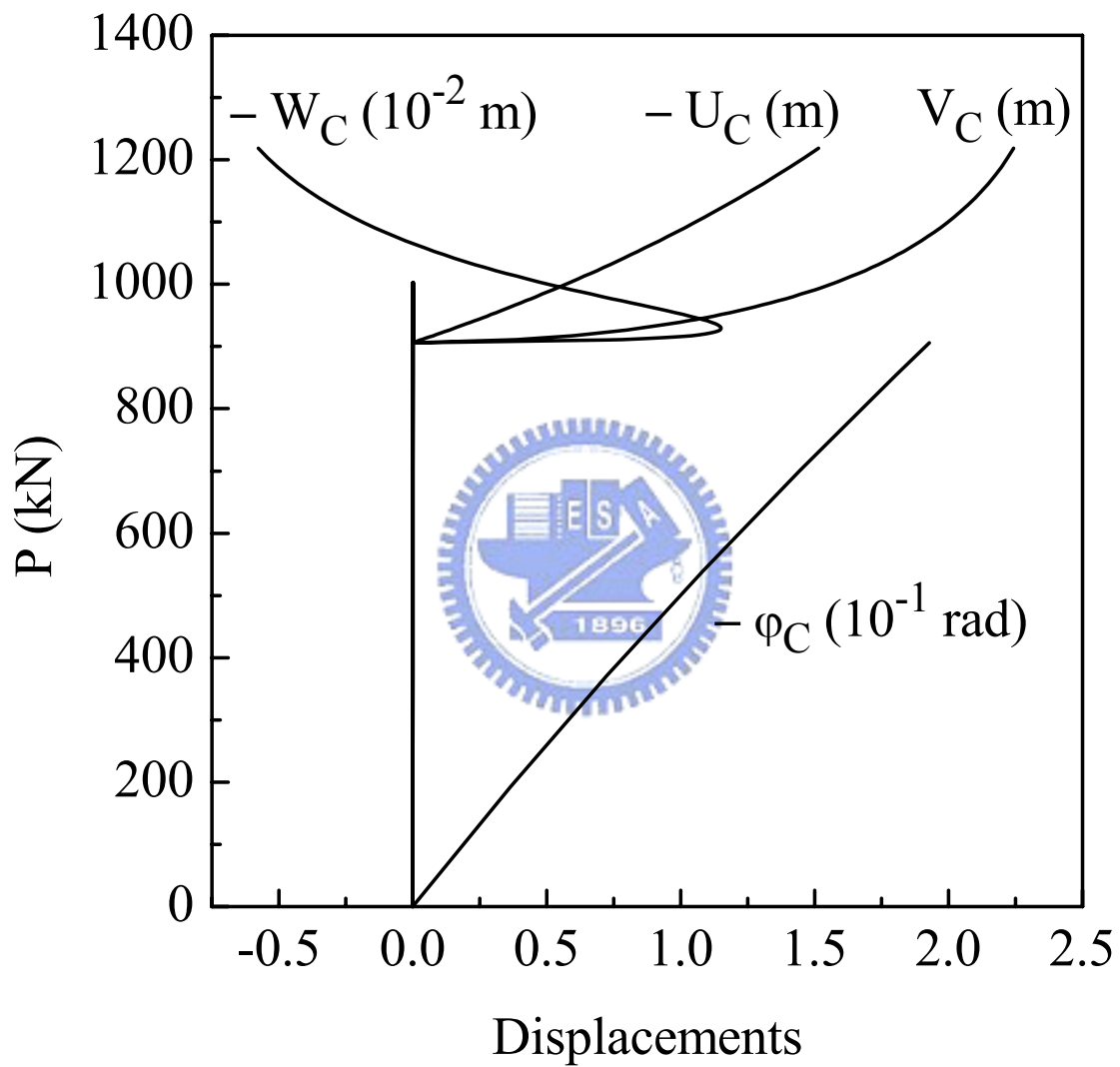


圖 4.128 例題 4.3.11 自由端 C 點之靜態負荷—位移曲線圖

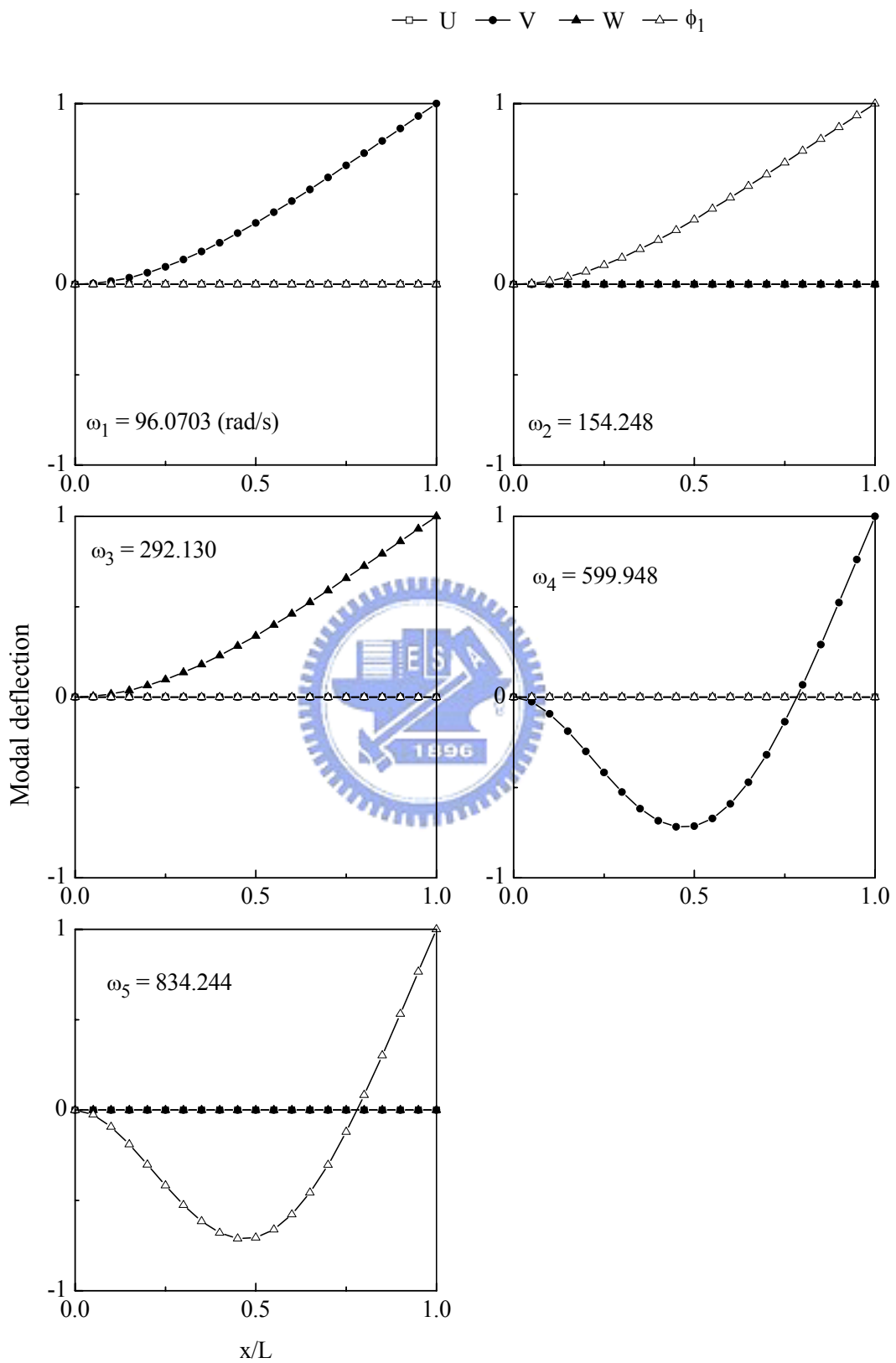


圖 4.129 例題 4.3.11 Z 型斷面懸臂梁之振動模態圖($P=0$)

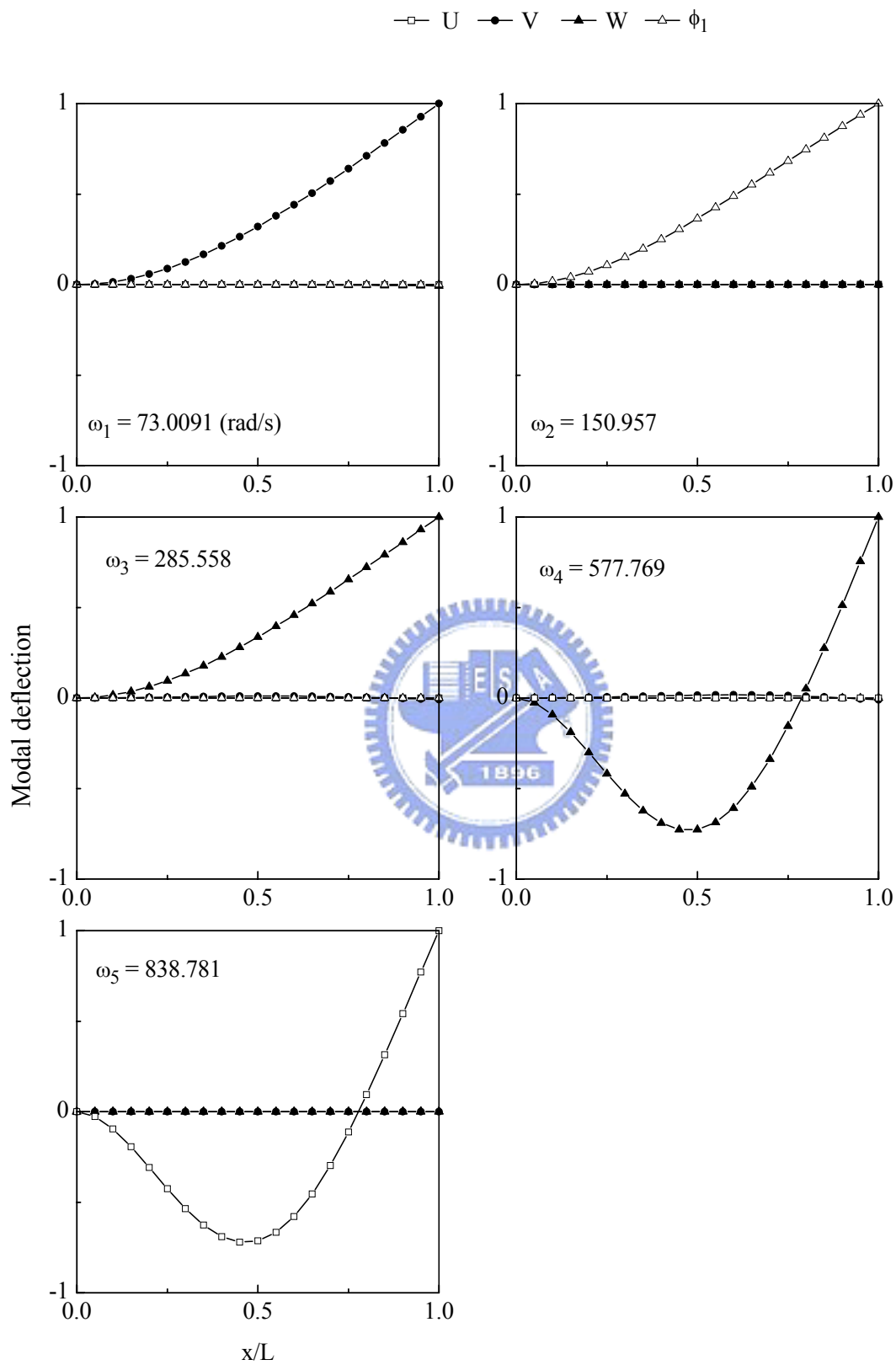


圖 4.130 例題 4.3.11 Z 型斷面懸臂梁之振動模態圖 ($P = 400 \text{ kN}$)

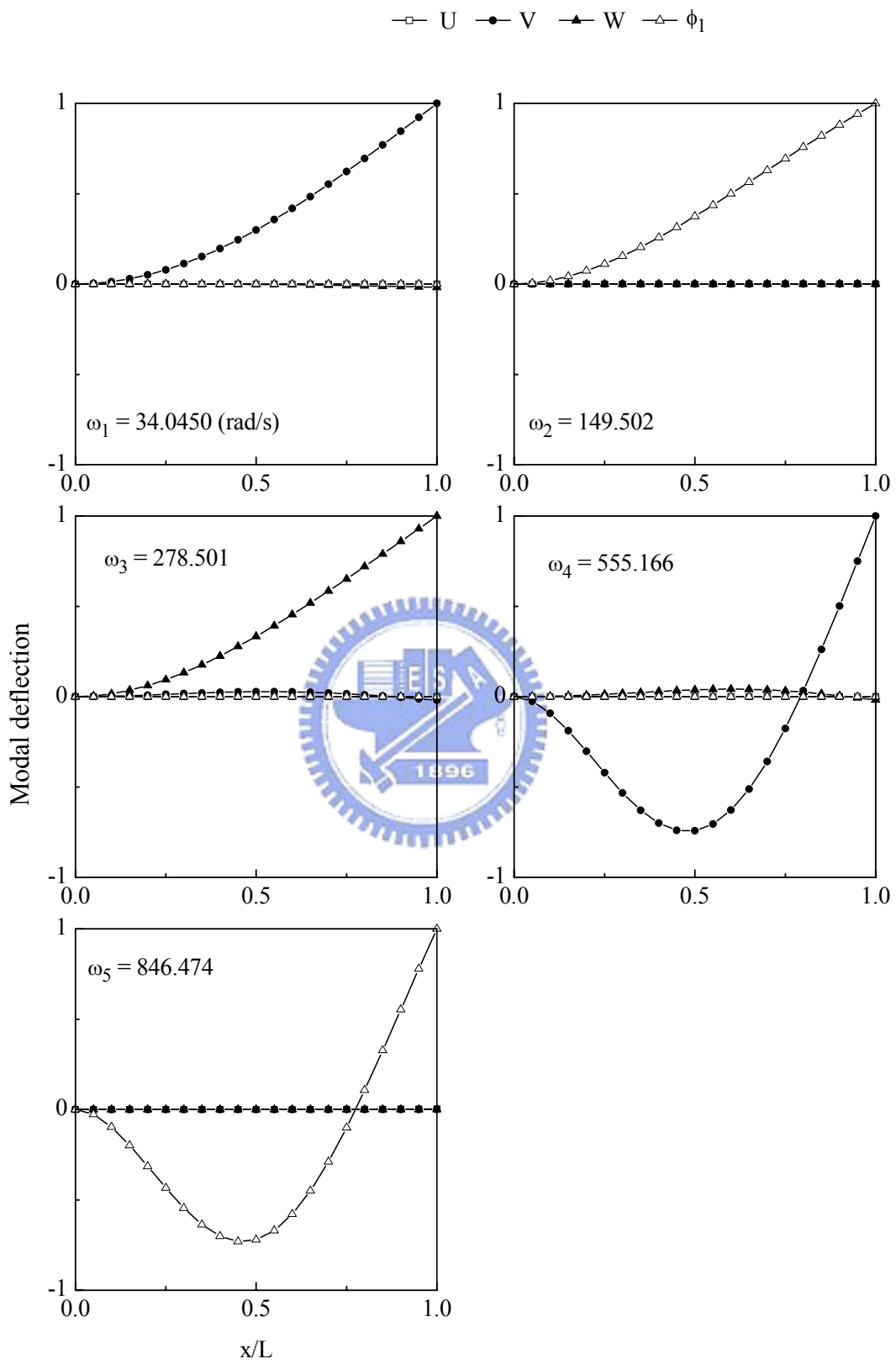


圖 4.131 例題 4.3.11 Z 型斷面懸臂梁之振動模態圖 ($P = 800 \text{ kN}$)

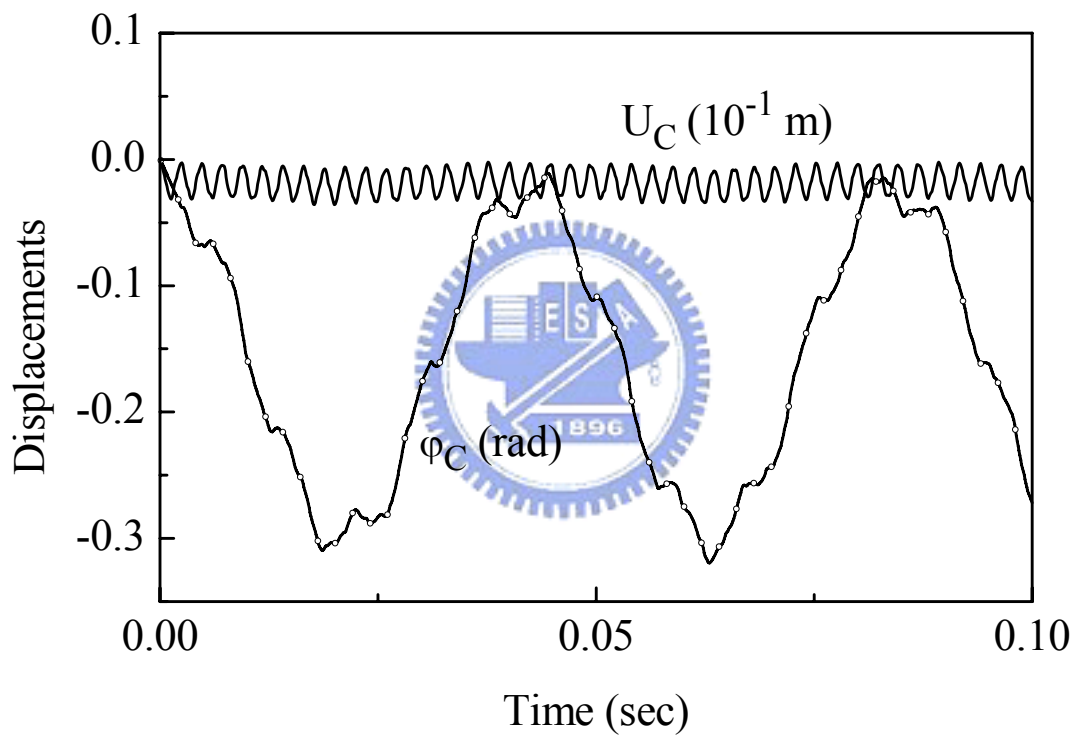
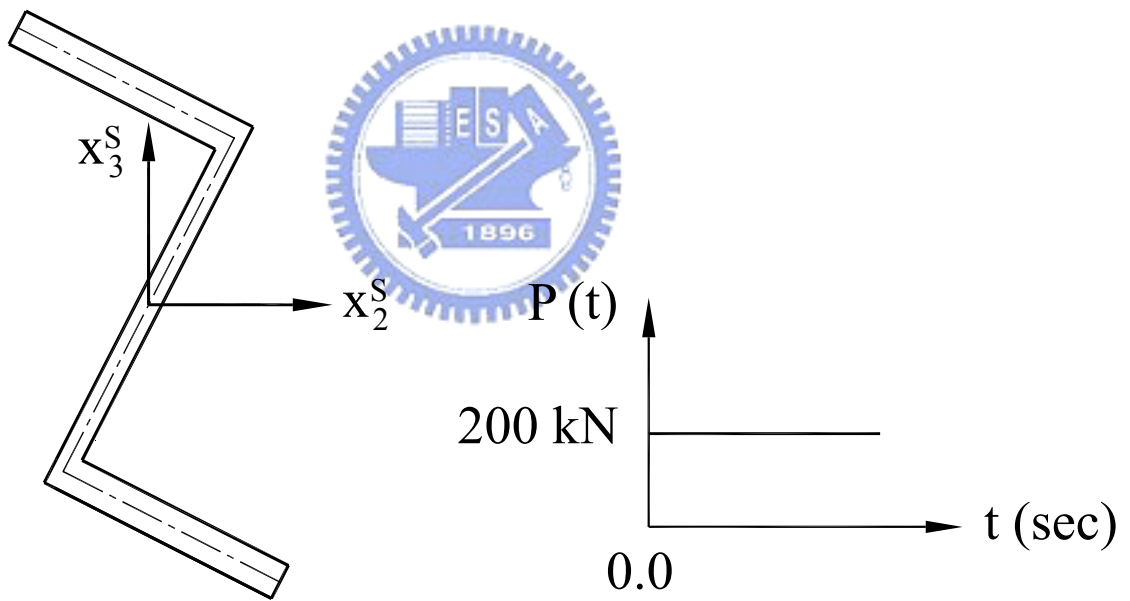
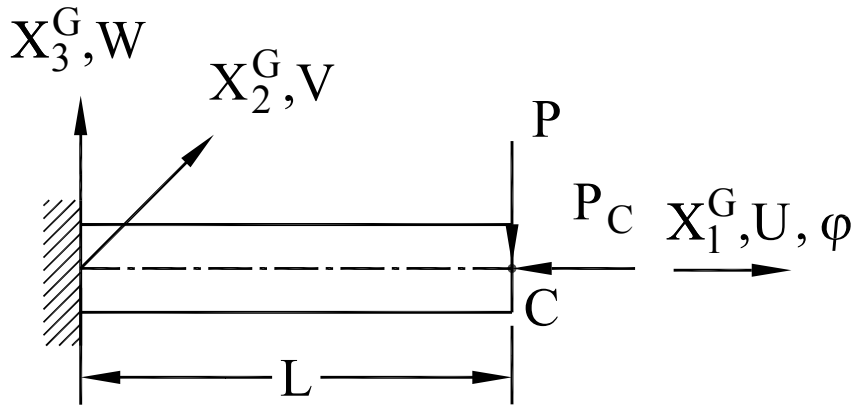


圖 4.132 例題 4.3.11 自由端 C 點在 X_1^G 方向與扭轉角之位移



End cross section

Time History of Load

圖 4.133 例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之幾何及受力圖

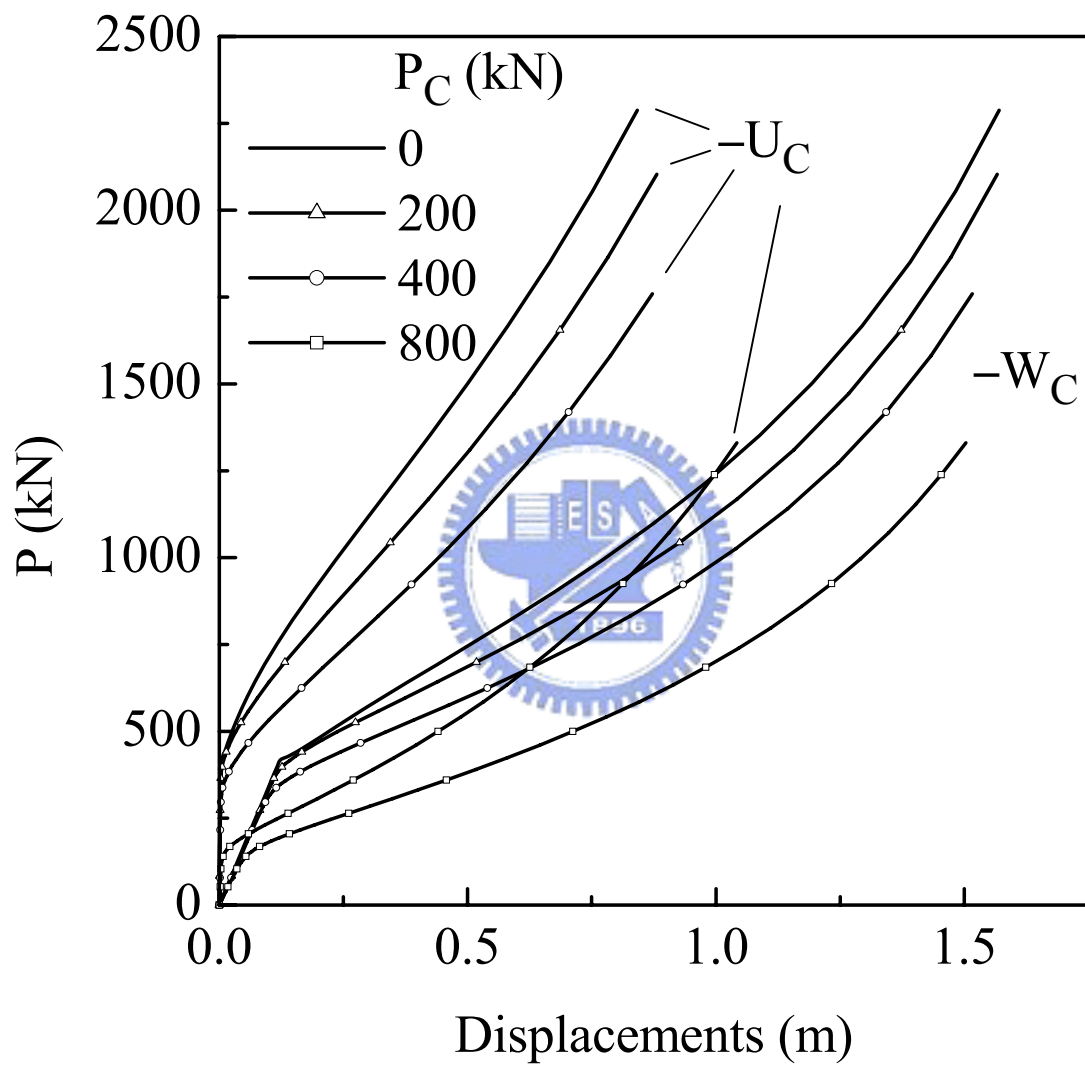


圖 4.134 例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 及 X_3^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖

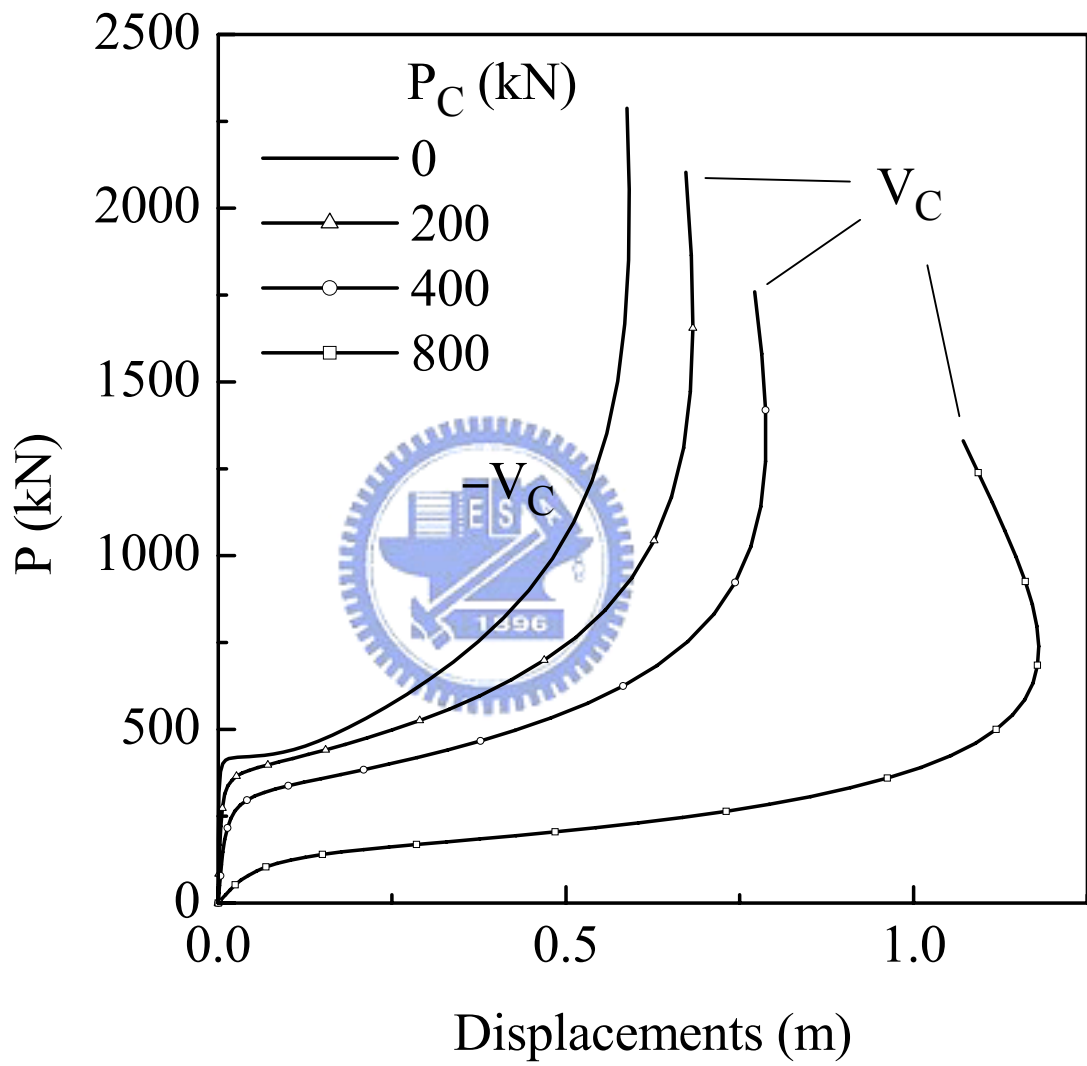


圖 4.135 例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_2^G 方向之靜態負荷—位移曲線圖

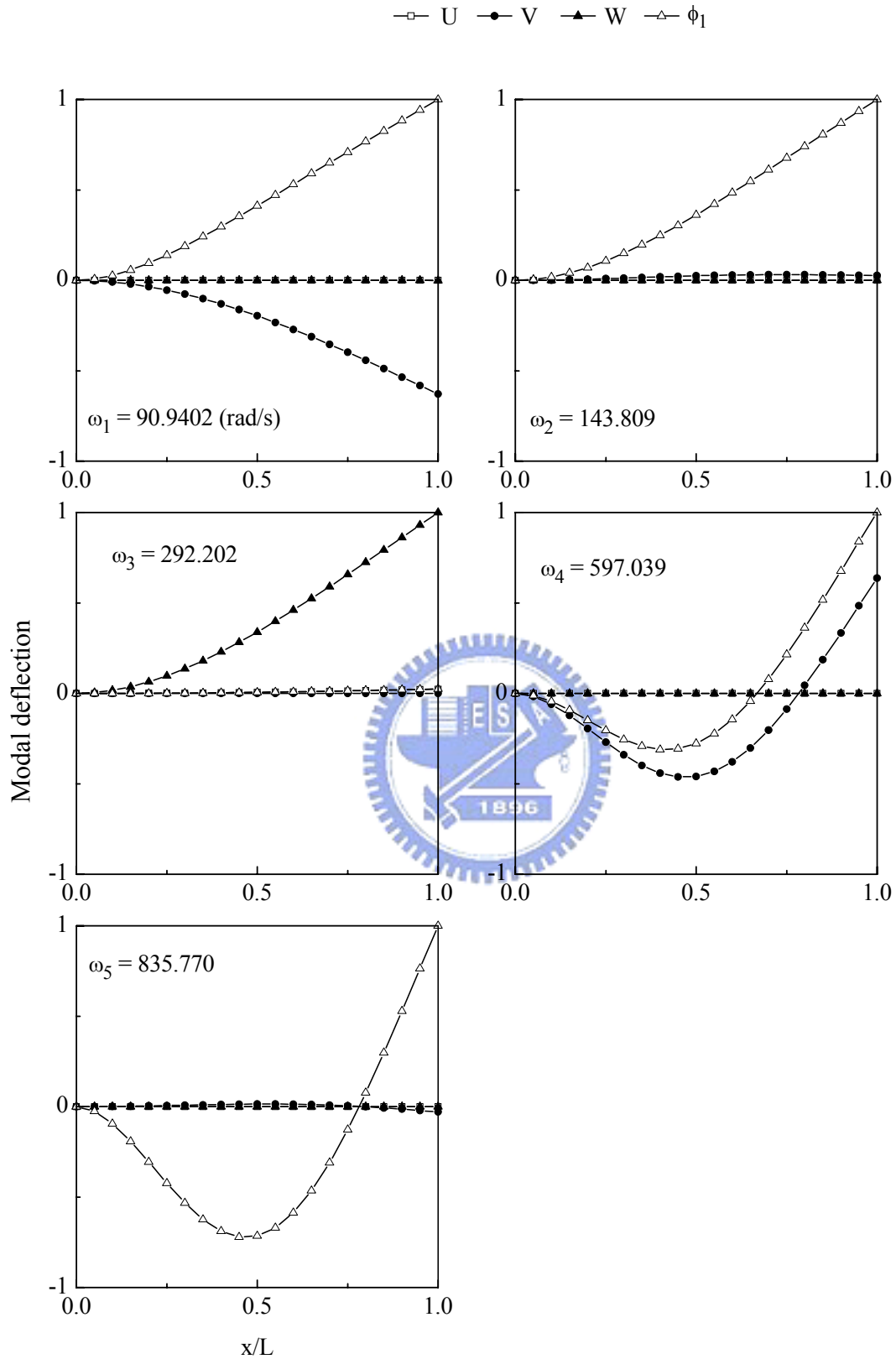


圖 4.136 例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖($P_C = 0$ 、 $P = 200 \text{ kN}$)

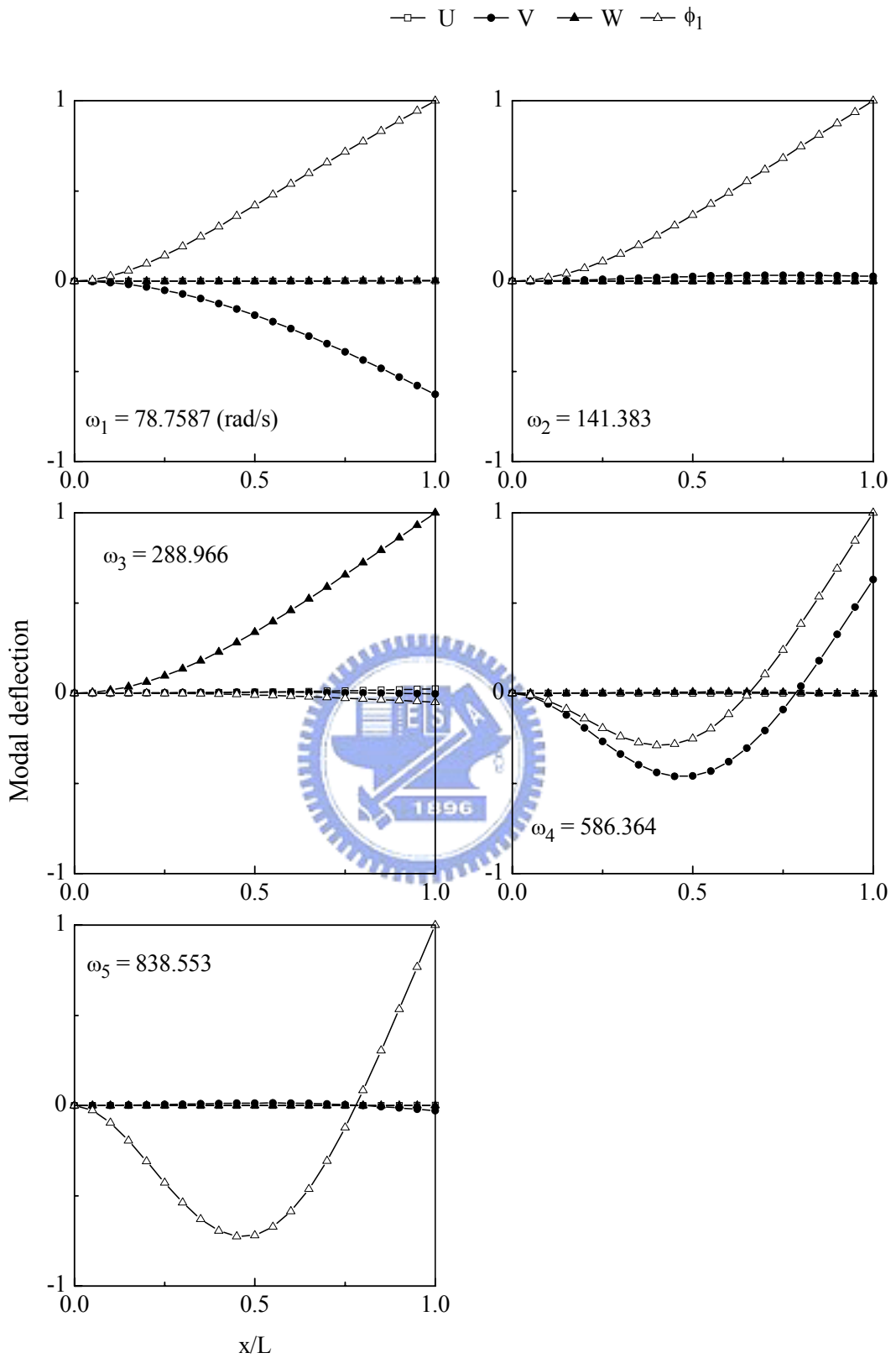


圖 4.137 例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P_C = 200$ kN、 $P = 200$ kN)

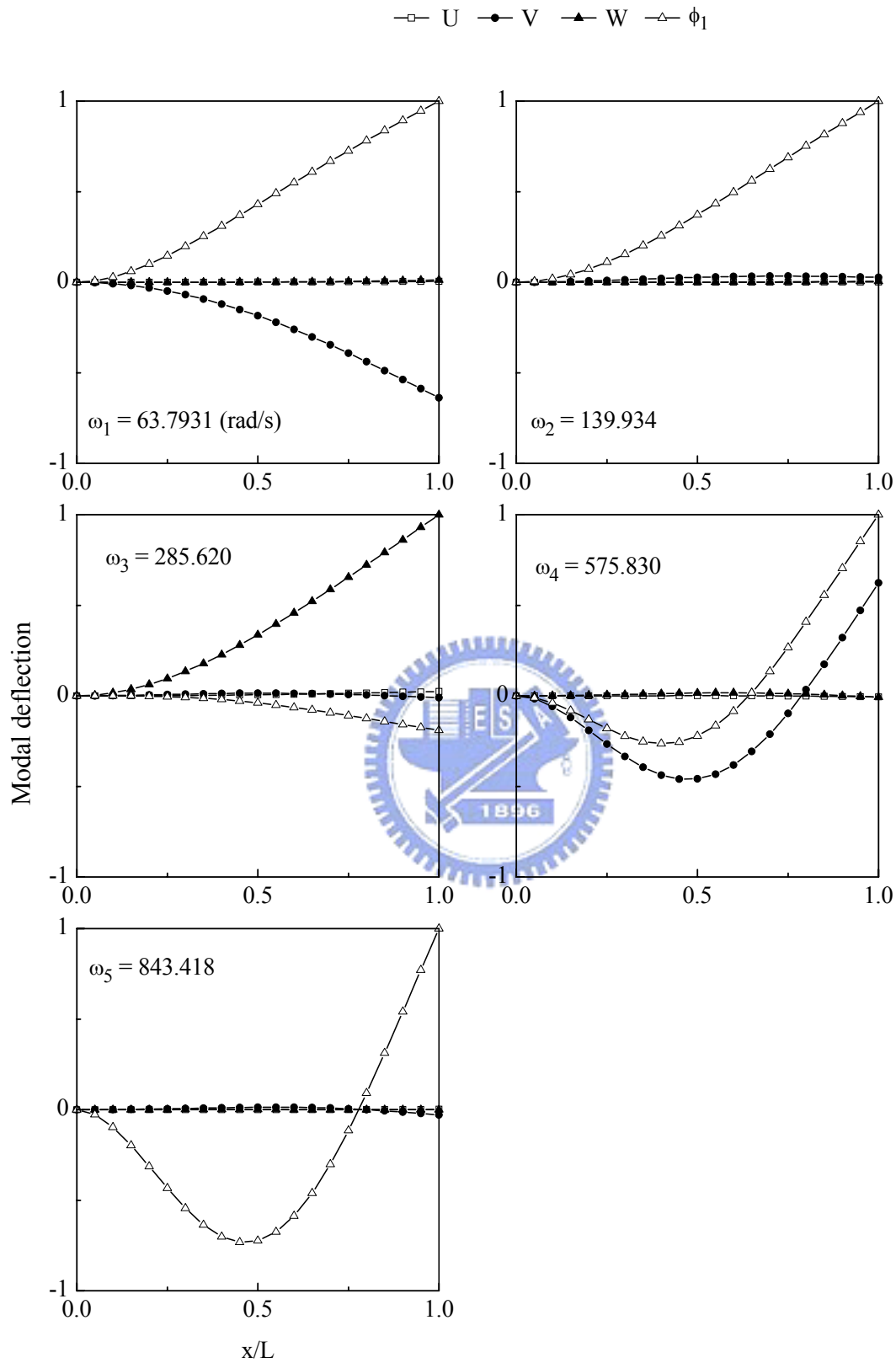


圖 4.138 例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P_C = 400 \text{ kN}$ 、 $P = 200 \text{ kN}$)

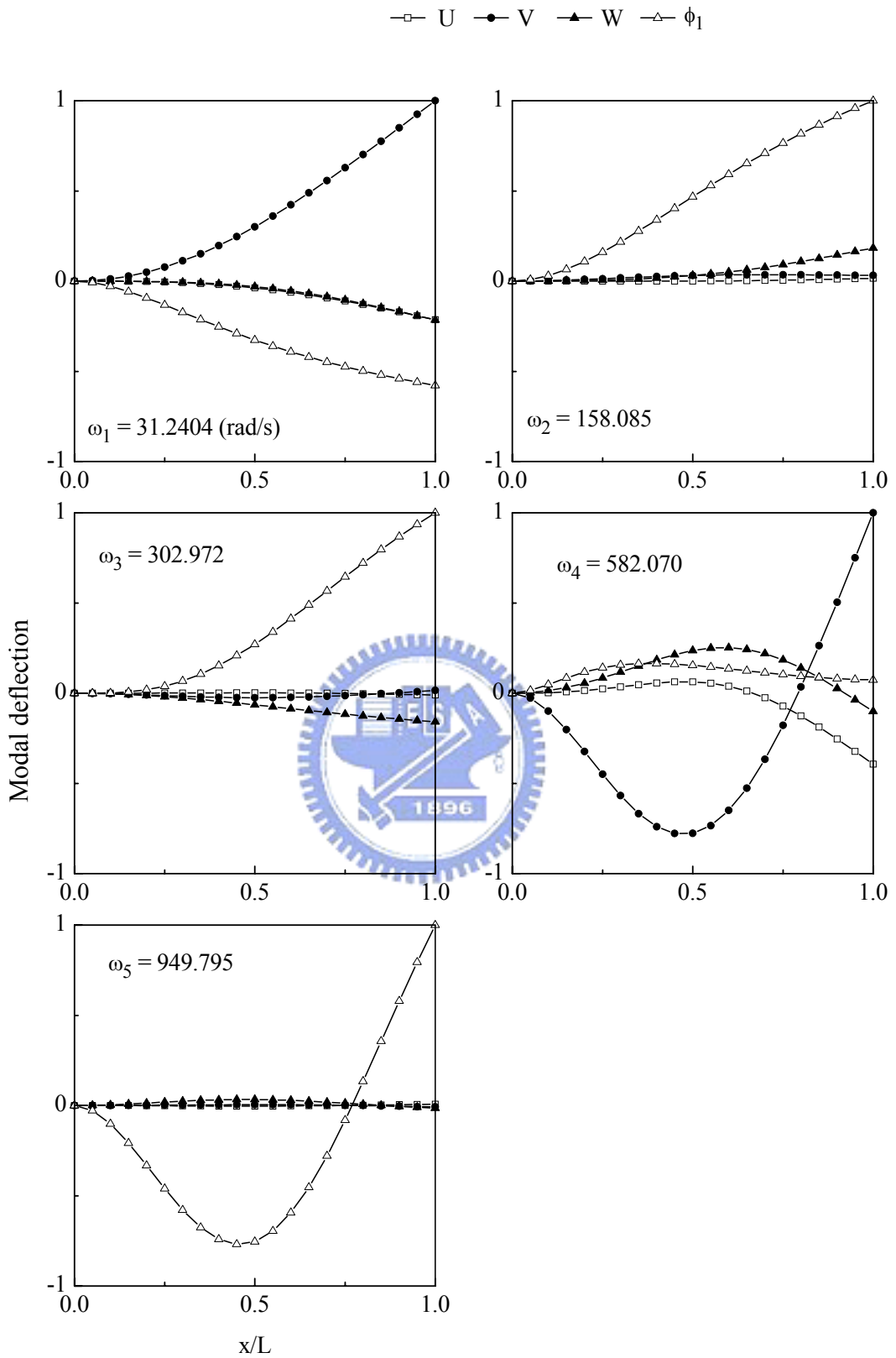


圖 4.139 例題 4.3.12 懸臂 Z 型斷面梁之振動模態圖 ($P_C = 800 \text{ kN}$ 、 $P = 200 \text{ kN}$)

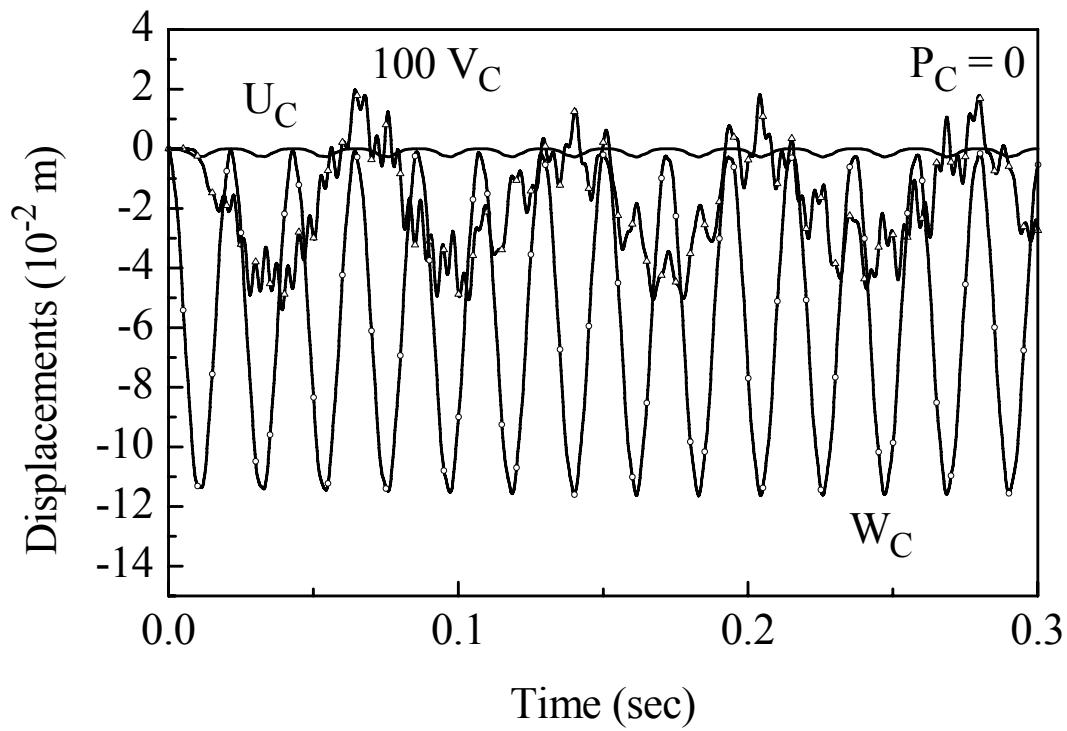


圖 4.140 例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 ($P_C = 0$)

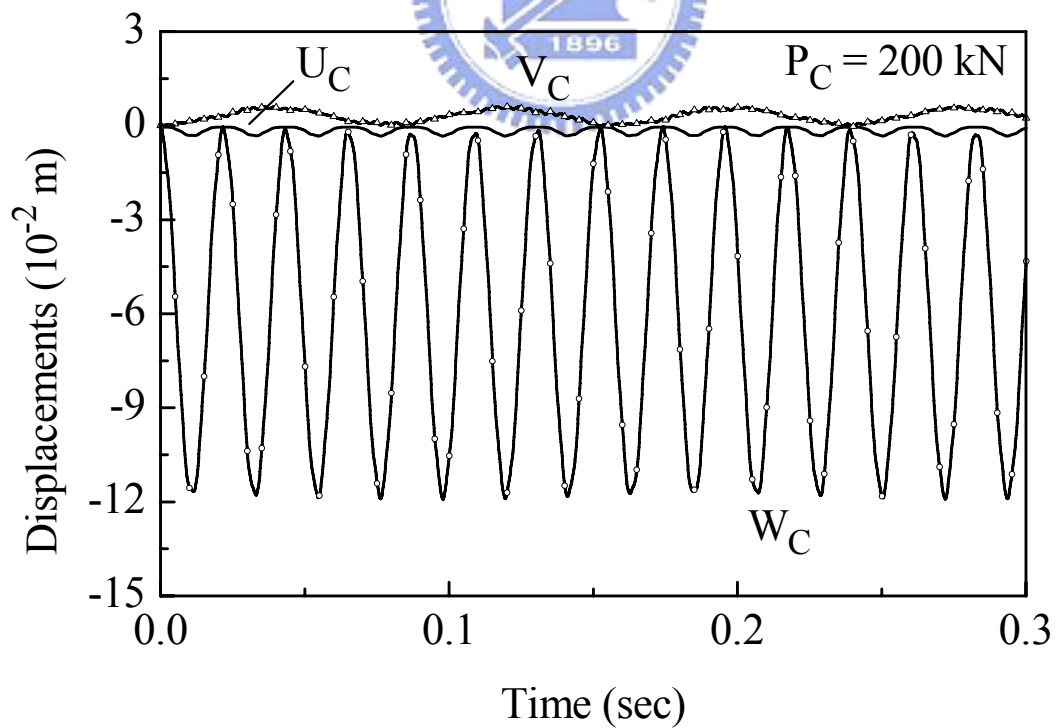


圖 4.141 例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 ($P_C = 200$ kN)

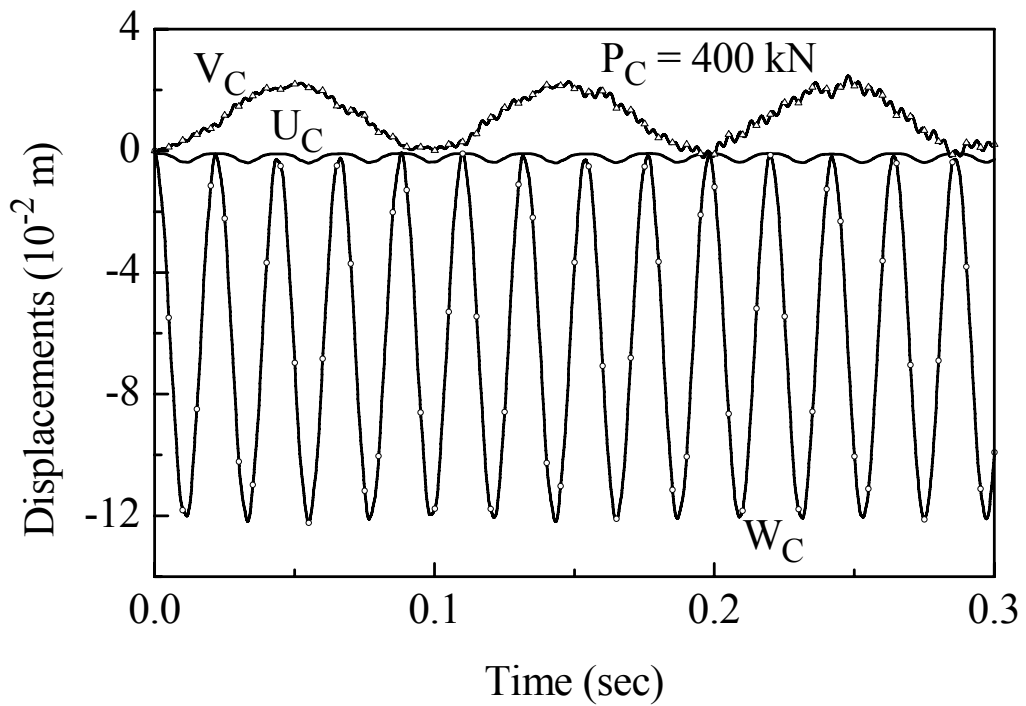


圖 4.142 例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 ($P_C = 400 \text{ kN}$)

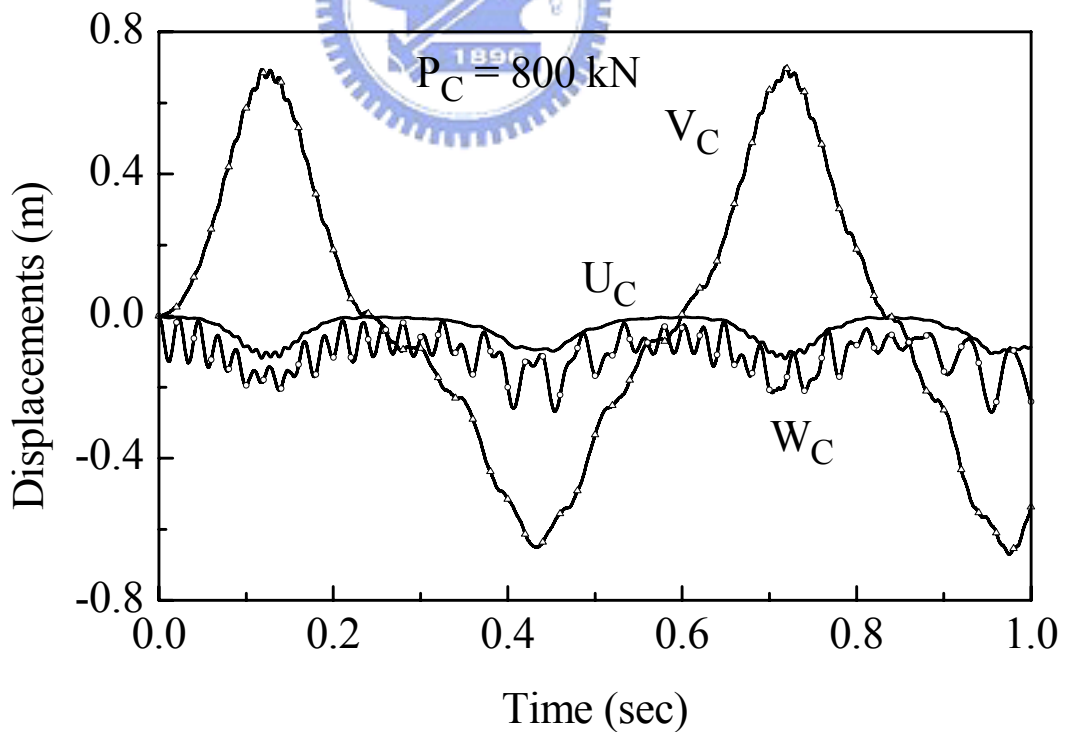


圖 4.143 例題 4.3.12 自由端 C 點在 X_1^G 方向、 X_2^G 和 X_3^G 方向之位移 ($P_C = 800 \text{ kN}$)

附錄 A 擾動後的移動元素座標及節點旋轉參數

本推導是在元素當前的變形位置之固定元素座標上進行，所有向量的分量都是指在該座標上的分量。令 t 表示當前的時間， \bar{x}_i 與 x_i ($i=1, 2, 3$) 表示在當前變形位置重合的固定元素座標與移動元素座標，在當前變形位置的固定元素座標與移動元素座標是重合的。令 $\bar{\mathbf{u}}_j = \bar{\mathbf{u}}_j(t) = \{\bar{u}_{1j}, \bar{u}_{2j}, \bar{u}_{3j}\} = \{\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j\}$ 、 $\phi_j = \phi_j(t) = \{\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}\}$ 分別表示元素節點 j 當前的絕對位移向量、旋轉向量； \mathbf{e}_i 表示在 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向的單位向量、 \mathbf{e}_{ij}^S ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$) 為在元素節點 j 之當前元素斷面座標軸 x_{ij}^S 的單位向量； $\theta_{ij} = \theta_{ij}(t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 及 $\ell = \ell(t)$ 分別表示元素節點 j 當前的旋轉參數及元素當前的弦長。本文中旋轉向量 ϕ_j 的值在當前變形位置重新設定為零， $\bar{\mathbf{u}}_j$ 的分量除了 $\bar{u}_{12} = \bar{u}_2$ 外其餘的值皆為零，但因推導移動元素座標的速度、角速度、加速度及角加速度過程的需要，仍保留全部的 ϕ_j 及 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 。

令 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta\phi_j$ ($j=1, 2$) 分別代表元素節點 j 的位移向量 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 與旋轉向量 ϕ_j 的擾動量， δt 代表元素節點 j 受擾動的時間。當元素節點 j 受到 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta\phi_j$ ($j=1, 2$) 作用後，可由 2.6 節的方法及一致性一階線性化 (consistent first order linearization)，即保留 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 、 ϕ_j 、 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 、 $\delta\phi_j$ 、及 θ_{ij} 的一次項，決定受擾動後的移動元素座標、元素節點旋轉參數 $\theta_{ij}(t + \delta t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)、元素弦長 $\ell(t + \delta t)$ ，其推導的過程如下所述：

元素節點 j ($j=1, 2$) 當前的位置向量可表示成

$$\bar{\mathbf{r}}_1(t) = \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\mathbf{r}}_2(t) = \{L, 0, 0\} + \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{u}_2 = \ell - L + \bar{u}_1 \quad (\text{A.3})$$

其中 L 為梁之剪心軸變形前的長度。

當元素節點 j ($j=1, 2$) 受到擾動位移 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 作用，擾動後的元素節點位置向量可表示成

$$\hat{\mathbf{r}}_j = \bar{\mathbf{r}}_j(t + \delta t) = \bar{\mathbf{r}}_j(t) + \delta\bar{\mathbf{u}}_j \quad (\text{A.4})$$

擾動後之元素的弦長 $\hat{\ell}$ 可表示成

$$\hat{\ell} = \ell(t + \delta t) = \|\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1\| \quad (\text{A.5})$$

將(A.5)式做一致性一階線性化，則 $\hat{\ell}$ 可表示成

$$\hat{\ell} = \ell + \delta\Delta\bar{u} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \Delta\bar{v} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \Delta\bar{w} \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta\bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1, \quad \Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \quad \Delta\bar{w} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \quad (\text{A.7})$$

$$\delta\Delta\bar{u} = \delta\bar{u}_2 - \delta\bar{u}_1, \quad \delta\Delta\bar{v} = \delta\bar{v}_2 - \delta\bar{v}_1, \quad \delta\Delta\bar{w} = \delta\bar{w}_2 - \delta\bar{w}_1 \quad (\text{A.8})$$

本文中元素弦長的擾動量 $\delta\ell$ 為擾動後與擾動前元素的弦長的差，由

(A.6)式可得

$$\delta\ell = \hat{\ell} - \ell = \delta\Delta\bar{u} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \Delta\bar{v} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \Delta\bar{w} \quad (\text{A.9})$$

擾動後之元素座標 x_1 軸的單位向量可表示成

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1(t + \delta t) = \frac{\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1}{\hat{\ell}} \quad (\text{A.10})$$

將(A.10)式一致性一階線性化，則 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 可以表示成

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \left\{ 1 - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{w}}{\ell^2}, \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2}, \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} \right\} \quad (\text{A.11})$$

對應於 $\phi_j(t)$ 的 $\mathbf{e}_{ij}^S(t)$ ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$)可以視為(2.22)式中之 \mathbf{e}_{ij}^S 受到 $\phi(t)$ 作用後的新向量，由(2.2)式、(2.22)式及一致性一階線性化可得

$$\mathbf{e}_{1j}^S(t) = \{1, \theta_{3j} + \phi_{3j}, -\theta_{2j} - \phi_{2j}\} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{e}_{2j}^S(t) = \{-\theta_{3j} - \phi_{3j}, 1, \theta_{1j} + \phi_{1j}\}$$

$$\mathbf{e}_{3j}^S(t) = \{\theta_{2j} + \phi_{2j}, -\theta_{1j} - \phi_{1j}, 1\}$$

因 $\phi_j(t) = \mathbf{0}$ ，所以(A.12)式之 $\mathbf{e}_{ij}^S(t)$ 與(2.22)式之 \mathbf{e}_{ij}^S 是重合的。

當 $\phi_j(t)$ 受到一擾動量 $\delta\phi_j$ 作用，對應於 ϕ_j 的 \mathbf{e}_{ij}^S ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$)會轉到擾動後對應於旋轉向量 $\hat{\phi}_j = \phi_j(t + \delta t) = \phi_j + \delta\phi_j$ 的 $\hat{\mathbf{e}}_{ij}^S = \mathbf{e}_{ij}^S(t + \delta t)$ ，由(2.2)式、(A.12)式及一致性一階線性化，則 $\hat{\mathbf{e}}_{1j}^S$ 及 $\hat{\mathbf{e}}_{2j}^S$ 可以表示成

$$\hat{\mathbf{e}}_{1j}^S = \mathbf{e}_{1j}^S + \delta\phi_j \times \mathbf{e}_{1j}^S \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
&= \{1 - \theta_{2j} \delta \phi_{2j} - \theta_{3j} \delta \phi_{3j} - \phi_{2j} \delta \phi_{2j} - \phi_{3j} \delta \phi_{3j}, \theta_{3j} + \phi_{3j} + \delta \phi_{3j} + \theta_{2j} \delta \phi_{1j} \\
&\quad + \phi_{2j} \delta \phi_{1j}, -\theta_{2j} - \phi_{2j} - \delta \phi_{2j} + \theta_{3j} \delta \phi_{1j} + \phi_{3j} \delta \phi_{1j}\} \\
\hat{\mathbf{e}}_{2j}^S &= \mathbf{e}_{2j}^S + \delta \boldsymbol{\phi}_j \times \mathbf{e}_{2j}^S \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{-\delta \phi_{3j} - \phi_{3j} - \theta_{3j} + \theta_{1j} \delta \phi_{2j} + \phi_{2j} \delta \phi_{1j}, 1 - \theta_{1j} \delta \phi_{1j} - \theta_{3j} \delta \phi_{3j} \\
&\quad - \phi_{1j} \delta \phi_{1j} - \phi_{3j} \delta \phi_{3j}, \delta \phi_{1j} + \phi_{1j} + \theta_{1j} + \theta_{3j} \delta \phi_{2j} + \phi_{3j} \delta \phi_{2j}\}
\end{aligned}$$

令旋轉向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj} = \boldsymbol{\theta}_{nj}(t + \delta t)$ ($j=1, 2$) 為擾動後元素節點 j 之旋轉參數，其定義方式與(2.28)式之 $\boldsymbol{\theta}_{nj}$ 相同，由(2.28)、(A.11)與(A.13)式可得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj} = \hat{\theta}_{nj} \hat{\mathbf{n}}_j \tag{A.15}$$

$$\sin \hat{\theta}_{nj} \hat{\mathbf{n}}_j = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_{1j}^S \tag{A.16}$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 與 $\hat{\mathbf{e}}_{1j}^S$ ($j=1, 2$) 分別定義於(A.11)式與(A.13)式。

將(A.11)式、(A.13)式代入(A.15)式，再將(A.15)式之 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj}$ 一致性一階線性化可得

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj} &= \left\{ -\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} (\theta_{2j} + \phi_{2j}) - \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} (\theta_{3j} + \phi_{3j}) - \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} \delta \phi_{2j} - \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} \delta \phi_{3j}, \theta_{2j} + \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} + \phi_{2j} \right. \\
&\quad + \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{2j} - \theta_{3j} \delta \phi_{1j} - \frac{\Delta \bar{w} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} - \phi_{3j} \delta \phi_{1j}, \theta_{3j} - \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} + \phi_{3j} - \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} \\
&\quad \left. + \delta \phi_{3j} + \theta_{2j} \delta \phi_{1j} + \frac{\Delta \bar{v} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} + \phi_{2j} \delta \phi_{1j} \right\} \tag{A.17}
\end{aligned}$$

擾動後之移動元素座標軸 x_2 、 x_3 的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_3$ 可由以下步驟決定：

將旋轉向量 $-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj}$ 作用在 $\hat{\mathbf{e}}_{ij}^S$ 上，使其旋轉到 $\hat{\mathbf{e}}_{ij}^{S'}$ ，此時 $\hat{\mathbf{e}}_{1j}^{S'}$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 重合。由(2.2)式及一致性一階線性化可得

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_{2j}^{S'} &= \left\{ -\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} - \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} \theta_{1j} + \frac{\Delta \bar{v} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} - \frac{\Delta \bar{w} \delta \phi_{1j} + \phi_{1j} \delta \Delta \bar{w}}{\ell}, 1 - \theta_{1j} \delta \phi_{1j} - \phi_{1j} \delta \phi_{1j} \right. \\
&\quad - \frac{\Delta \bar{v} \delta \Delta \bar{v}}{\ell^2}, \theta_{1j} + \phi_{1j} + \delta \phi_{1j} - \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{v} \delta \Delta \bar{w} + \Delta \bar{w} \delta \Delta \bar{v}}{\ell^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \bar{w}}{\ell} - \theta_{2j} \right) \delta \phi_{3j} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} + \theta_{3j} \right) \delta \phi_{2j} + \frac{\theta_{2j} + \phi_{2j}}{2\ell} \delta \Delta \bar{v} + \frac{\theta_{3j} + \phi_{3j}}{2\ell} \delta \Delta \bar{w} - \frac{\phi_{2j} \delta \phi_{3j} - \phi_{3j} \delta \phi_{2j}}{2} \right\} \tag{A.18}
\end{aligned}$$

擾動後之移動元素座標軸 x_2 的單位向量可以表示成

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{22}^{S'} + \hat{\mathbf{e}}_{21}^{S'}}{\|\hat{\mathbf{e}}_{22}^{S'} + \hat{\mathbf{e}}_{21}^{S'}\|} \quad (\text{A.19})$$

將(A.19)式一致性一階線性化，則 $\bar{\mathbf{e}}_2$ 可以表示成

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_2 = & \left\{ -\frac{\Delta\bar{v}}{l} - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} + \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} - \frac{\Delta\bar{w}}{l} \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2}, 1 \right. \\ & - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{v}}{l^2} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{4} (\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{4} (\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}), \\ & \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} + \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} + \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{v}}{2l^2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{l} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) \\ & + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{l} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} (\phi_{21} + \phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} (\phi_{31} + \phi_{32}) + \frac{1}{4} \theta_{31} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{21} \right) \\ & + \frac{1}{4} \theta_{32} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{22} \right) + \frac{1}{4} \theta_{21} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} - \delta\phi_{31} \right) + \frac{1}{4} \theta_{22} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} - \delta\phi_{32} \right) \\ & \left. - \frac{\phi_{21}\delta\phi_{31} - \phi_{31}\delta\phi_{21}}{4} - \frac{\phi_{22}\delta\phi_{32} - \phi_{32}\delta\phi_{22}}{4} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

擾動後之移動元素座標軸 x_3 的單位向量可以可以由 $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$ 決定，由一致性一階線性化， $\hat{\mathbf{e}}_3$ 可以表示成

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_3 = & \left\{ -\frac{\Delta\bar{w}}{l} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} + \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} + \frac{\Delta\bar{v}}{l} \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \right. \\ & , -\frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{v}}{2l^2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{l} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) \\ & - \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{l} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} (\phi_{21} + \phi_{22}) - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} (\phi_{31} + \phi_{32}) - \frac{1}{4} \theta_{31} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{21} \right) \\ & - \frac{1}{4} \theta_{32} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{22} \right) + \frac{1}{4} \theta_{21} \left(-\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} + \delta\phi_{31} \right) + \frac{1}{4} \theta_{22} \left(-\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} + \delta\phi_{32} \right) \\ & \left. + \frac{\phi_{21}\delta\phi_{31} - \phi_{31}\delta\phi_{21}}{4} + \frac{\phi_{22}\delta\phi_{32} - \phi_{32}\delta\phi_{22}}{4}, 1 - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{4} (\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}) \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{4}(\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}) - \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{w}}{\ell^2} \} \quad (\text{A.21})$$

其中 $\theta_{11} = -\theta_{12}$ ，所以 $\theta_{11} + \theta_{12} = 0$ 。

由(A.11)、(A.20)、(A.21)式可將擾動後的移動元素座標與當前的固定元素座標的關係表示成

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\bar{x}x} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}}_1 + \delta\bar{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{A}_{\bar{x}x} = {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} + {}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} \quad (\text{A.23})$$

$${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} & -\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \\ \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} & 1 & -\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \\ \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} & \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \phi_{1m} & \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \phi_{1m} \\ -\frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} \delta\phi_{1m} & 0 & -A_1 \\ -\frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} \delta\phi_{1m} & A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} - \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{w}}{\ell^2} & -\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} \delta\phi_{1m} & \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} \delta\phi_{1m} \\ -\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} \delta\phi_{1m} & -\frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} + B_1 & -\frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{v}}{2\ell^2} \\ \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} \delta\phi_{1m} & -\frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{v}}{2\ell^2} & -\frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{w}}{\ell^2} + B_1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{A.25})$$

其中 $\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t)$ 為擾動後的移動元素座標相對於固定元素座標的方向餘弦矩陣， ${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}$ 及 ${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x}$ 為節點參數的零次項及一次項，

$$A_1 = \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\phi_{21} + \phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\phi_{31} + \phi_{32})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \theta_{31} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{21} \right) + \frac{1}{4} \theta_{32} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{22} \right) + \frac{1}{4} \theta_{21} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{31} \right) + \frac{1}{4} \theta_{22} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{32} \right) \\
& + \frac{\phi_{21} \delta \phi_{31} - \phi_{31} \delta \phi_{21}}{4} + \frac{\phi_{22} \delta \phi_{32} - \phi_{32} \delta \phi_{22}}{4}, \quad \phi_{1m} = \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2},
\end{aligned}$$

$\delta \phi_{1m} = \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2}$, $B_1 = -\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \delta \phi_{1m}$ 。為了以後推導方便，本文在

${}^1 \mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}(2,1)$ 及 ${}^1 \mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}(3,1)$ 的元素上分別補上 $\frac{\Delta \bar{w}}{\ell} \delta \phi_{1m} - \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} \delta \phi_{1m}$ 及 $-\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} \delta \phi_{1m} + \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} \delta \phi_{1m}$ ，這兩項的值皆為零，並將 ${}^1 \mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}$ 分成兩個矩陣。

若將 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ 視為一個在移動元素座標上的固定點在移動元素座標的位置向量，則 $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(t + \delta t) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ 可視為該點在當前變形位置的固定元素座標的位置向量。

由(2.30)式，擾動後節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{1j} = \theta_{1j}(t + \delta t)$ ($j=1,2$) 可表示如下

$$\sin \hat{\theta}_{1j} = \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_{2j}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (\text{A.26})$$

將(A.3)、(A.18)及(A.20)代入(A.26)式並將其一致性一階線性化， $\hat{\theta}_{1j}$ 可表示如下

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{1j} = & -\frac{\theta_{11}}{2} - \frac{\theta_{12}}{2} + \theta_{1j} - \frac{\delta \phi_{11}}{2} - \frac{\delta \phi_{12}}{2} + \delta \phi_{1j} \\
& - \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} (\theta_{22} + \theta_{21}) - \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} (\theta_{32} + \theta_{31}) + \frac{1}{2} \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} \theta_{2j} + \frac{1}{2} \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} \theta_{3j} - \frac{1}{4} \theta_{31} \delta \phi_{21} \\
& - \frac{1}{4} \theta_{32} \delta \phi_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \delta \phi_{31} + \frac{1}{4} \theta_{22} \delta \phi_{32} + \frac{1}{2} \theta_{3j} \delta \phi_{2j} - \frac{1}{2} \theta_{2j} \delta \phi_{3j} \\
& - \frac{\Delta \bar{v}}{4} (\delta \phi_{21} + \delta \phi_{22}) - \frac{\Delta \bar{w}}{4} (\delta \phi_{31} + \delta \phi_{32}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} \delta \phi_{2j} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} \delta \phi_{3j} \\
& - \frac{\delta \Delta \bar{v}}{4} (\phi_{21} + \phi_{22}) - \frac{\delta \Delta \bar{w}}{4} (\phi_{31} + \phi_{32}) + \frac{1}{2} \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} \phi_{2j} + \frac{1}{2} \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} \phi_{3j} \\
& + \frac{\phi_{21} \delta \phi_{31} - \phi_{31} \delta \phi_{21}}{4} + \frac{\phi_{22} \delta \phi_{32} - \phi_{32} \delta \phi_{22}}{4} - \frac{\phi_{2j} \delta \phi_{3j} - \phi_{3j} \delta \phi_{2j}}{2}
\end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

由(A.27)式可得

$$\hat{\theta}_{12} = -\hat{\theta}_{11}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{12} = & -\frac{\theta_{11}}{2} + \frac{\theta_{12}}{2} - \frac{\delta\phi_{11}}{2} + \frac{\delta\phi_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31}) \\
& - \frac{1}{4} \theta_{31} \delta\phi_{21} + \frac{1}{4} \theta_{32} \delta\phi_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \delta\phi_{31} - \frac{1}{4} \theta_{22} \delta\phi_{32} + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} (\delta\phi_{22} - \delta\phi_{21}) \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} (\delta\phi_{32} - \delta\phi_{31}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\phi_{32} - \phi_{31}) \\
& + \frac{\phi_{21} \delta\phi_{31} - \phi_{31} \delta\phi_{21}}{4} - \frac{\phi_{22} \delta\phi_{32} - \phi_{32} \delta\phi_{22}}{4}
\end{aligned} \tag{A.28}$$

由(2.31)式，擾動後節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij} = \theta_{ij}(t + \delta t)$ ($i = 2, 3$; $j = 1, 2$) 可表示如下

$$\hat{\theta}_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_{1j}^S \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \tag{A.29}$$

將(A.11)、(A.13)、(A.20)、(A.21)式代入(A.29)，將其一致性一階線性化， $\hat{\theta}_{2j}$ 和 $\hat{\theta}_{3j}$ 可表示如下

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{2j} = & \theta_{2j} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j} + \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \theta_{3j} - \theta_{3j} \delta\phi_{1j} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{3j} \right) \\
& + \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \phi_{3j} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{3j} \right) - \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \phi_{3j} \delta\phi_{1j}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{3j} = & \theta_{3j} - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} + \delta\phi_{3j} - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \theta_{2j} + \theta_{2j} \delta\phi_{1j} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j} \right) \\
& - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{2j} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j} \right) + \frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \phi_{2j} \delta\phi_{1j}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

本文中元素節點旋轉參數的擾動量 $\delta\theta_{ij}$ ($i = 1, 2, 3$) ($j = 1, 2$) 為擾動後元素節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}$ 與擾動前元素節點旋轉參數 θ_{ij} 的差，即

$$\delta\theta_{ij} = \hat{\theta}_{ij} - \theta_{ij} \tag{A.32}$$

其中 $\hat{\theta}_{ij}$ 定義於(A.27)式、(A.30)式與(A.31)式。

附錄 B 不同的元素節點參數向量之擾動量的關係及其對時間微分的關係

$\delta\mathbf{q}_\varphi$ 、 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 、 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 為定義於(2.96)式之元素節點參數向量之擾動量，為了方便說明，在此將其重複表示如下

$$\delta\mathbf{q}_\varphi = \{\delta\bar{\mathbf{u}}_1, \delta\phi_1, \delta\bar{\mathbf{u}}_2, \delta\phi_2, \delta\beta\} \quad (\text{B.1})$$

$$\delta\mathbf{q}_\phi = \{\delta\bar{\mathbf{u}}_1, \delta\phi_1, \delta\bar{\mathbf{u}}_2, \delta\phi_2, \delta\beta\} \quad (\text{B.2})$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\theta_1^*, \delta\mathbf{u}_2, \delta\theta_2^*, \delta\beta\} \quad (\text{B.3})$$

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_j = \{\delta\bar{u}_j, \delta\bar{v}_j, \delta\bar{w}_j\}, \quad \delta\phi_j = \{\delta\phi_{1j}, \delta\phi_{2j}, \delta\phi_{3j}\}, \quad \delta\beta = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\} \quad (\text{B.4})$$

$$\delta\phi_j = \{\delta\phi_{1j}, \delta\phi_{2j}, \delta\phi_{3j}\}, \quad \delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}, \quad \delta\theta_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$$

其中 $j=1, 2$ ， $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 為節點 j 對固定元素座標的擾動位移向量， $\delta\phi_j$ 的分量為節點 j 之斷面繞固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸的擾動旋轉， $\delta\beta$ 為擾動扭轉率向量， $\delta\beta_j$ 為元素扭轉率在節點 j 的擾動量， $\delta\phi_j$ 為節點 j 之斷面對固定元素座標的擾動旋轉向量， $\delta\mathbf{u}_j$ 為節點 j 對移動元素座標的擾動位移向量， $\delta\theta_{1j}$ 為元素扭轉角在節點 j 的擾動量， $\delta v'_j$ 及 $\delta w'_j$ 為定義於(2.15)式之 w' 及 v' 在元素節點 j 的擾動量。

由(2.6)及(2.7)式，可得 $\delta\mathbf{q}_\varphi$ 與 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 有以下關係

$$\delta\mathbf{q}_\varphi = \mathbf{T}_{\varphi\phi} \delta\mathbf{q}_\phi \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{T}_{\varphi\phi} = \mathbf{I}_{14} + \mathbf{T}_{\varphi\phi}^1 \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{T}_{\varphi\phi}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\phi_{3j}}{2} & \frac{\phi_{2j}}{2} \\ \frac{\phi_{3j}}{2} & 0 & -\frac{\phi_{1j}}{2} \\ -\frac{\phi_{2j}}{2} & \frac{\phi_{1j}}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

其中 \mathbf{I}_{14} 為 14×14 的單位矩陣， $\mathbf{T}_{\phi\phi}^1$ 為 $(i=1, 2, 3; j=1, 2)$ 的一次項。 ϕ_{ij} 為元素節點旋轉向量的分量。雖然 ϕ_{ij} 的值為零，但其擾動量及對時間的微分都不為零，故在推導的過程中 $\mathbf{T}_{\phi\phi}^1$ 仍需保留。

由(2.13)式、(2.14)式、(2.38)-(2.43)式、(2.74)式、(2.82)式可得 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 與 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 有以下的關係

$$\delta\mathbf{q}_\theta = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R)\delta\mathbf{q}_\phi \quad (\text{B.9})$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R)\mathbf{T}_{\phi\phi}^t \delta\mathbf{q}_\phi \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^0 + \mathbf{T}_{\theta\phi}^1 + \mathbf{T}_{\theta\phi}^2 \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_a & \mathbf{T}_c & -\mathbf{T}_a & \mathbf{T}_d & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_b & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{T}_b & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_a & \mathbf{T}_d & -\mathbf{T}_a & \mathbf{T}_c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\ell \\ 0 & 1/\ell & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{a1} & \mathbf{T}_{c1} & -\mathbf{T}_{a1} & \mathbf{T}_e & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{a2} & \mathbf{T}_{d1} & -\mathbf{T}_{a2} & \mathbf{T}_{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{T}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{2j}}{L} & \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2\ell} & -\frac{\varepsilon_{oj}}{\ell} \\ -\frac{\theta_{3j}}{L} & \frac{\varepsilon_{oj}}{\ell} & \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2\ell} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\theta_{21} - \theta_{22}}{4\ell} & \frac{\theta_{31} - \theta_{32}}{4\ell} \\ 0 & -\frac{6y_p}{L\ell} \theta_{2j} & -\frac{6z_p}{L\ell} \theta_{2j} \\ 0 & -\frac{6y_p}{L\ell} \theta_{3j} & -\frac{6z_p}{L\ell} \theta_{3j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{cj} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\theta_{3j}}{4} & -\frac{\theta_{2j}}{4} \\ -\frac{\theta_{3j}}{2} & \varepsilon_{oj} & \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \\ \frac{\theta_{2j}}{2} & -\frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} & \varepsilon_{oj} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3z_p}{L} \theta_{2j} & -\frac{3y_p}{L} \theta_{2j} \\ 0 & \frac{3z_p}{L} \theta_{3j} & -\frac{3y_p}{L} \theta_{3j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\theta_{31}}{4} & \frac{\theta_{21}}{4} \\ \frac{\theta_{32}}{2} & \frac{3z_p}{L} \theta_{22} & -\frac{3y_p}{L} \theta_{22} \\ -\frac{\theta_{22}}{2} & \frac{3z_p}{L} \theta_{32} & -\frac{3y_p}{L} \theta_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\theta_{32}}{4} & \frac{\theta_{22}}{4} \\ \frac{\theta_{31}}{2} & -\frac{3z_p}{L} \theta_{21} & \frac{3y_p}{L} \theta_{21} \\ -\frac{\theta_{21}}{2} & -\frac{3z_p}{L} \theta_{31} & \frac{3y_p}{L} \theta_{31} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{A1} & \mathbf{T}_{B1} & -\mathbf{T}_{A1} & \mathbf{T}_{C1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{A2} & \mathbf{T}_{B2} & -\mathbf{T}_{A2} & \mathbf{T}_{C2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{T}_{Aj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (G_{b2} + G_{b4}) \frac{\theta_{2j}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4}) \frac{\theta_{2j}}{\ell} \\ 0 & (G_{b2} + G_{b4}) \frac{\theta_{3j}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4}) \frac{\theta_{3j}}{\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{T}_{Bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{c2}\theta_{2j} & G_{b2}\theta_{2j} \\ 0 & G_{c2}\theta_{3j} & G_{b2}\theta_{3j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{Cj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{c4}\theta_{2j} & G_{b4}\theta_{2j} \\ 0 & G_{c4}\theta_{3j} & G_{b4}\theta_{3j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{R1}^a & \mathbf{T}_{R1}^b & -\mathbf{T}_{R1}^a & \mathbf{T}_R^c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_R^d & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{T}_R^d & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{R2}^a & \mathbf{T}_R^e & -\mathbf{T}_{R2}^a & \mathbf{T}_{R2}^b & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{T}_{Rj}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\ell^2} & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2\ell} & 0 \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{\ell^2} & 0 & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2\ell} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\phi_{21} - \phi_{22}}{4\ell} & \frac{\phi_{31} - \phi_{32}}{4\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{Rj}^b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{4\ell} + \frac{\phi_{3j}}{4} & \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{4\ell} - \frac{\phi_{2j}}{4} \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{2\ell} - \frac{\phi_{3j}}{2} & 0 & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \\ -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{2\ell} + \frac{\phi_{2j}}{2} & -\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_R^c = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{4\ell} - \frac{\phi_{32}}{4} & -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{4\ell} + \frac{\phi_{22}}{4} \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{2\ell} + \frac{\phi_{31}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{2\ell} - \frac{\phi_{21}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_R^d = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{\ell} & -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_R^e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{4\ell} - \frac{\phi_{31}}{4} & -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{4\ell} + \frac{\phi_{21}}{4} \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{2\ell} + \frac{\phi_{32}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{2\ell} - \frac{\phi_{22}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 ε_{oj} ($j=1,2$) 是 ε_o 在節點 j 的值， $\mathbf{T}_{\theta\phi}^0$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^1$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^2$ 分別為 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 之零次項、一次項及二次項， $\mathbf{0}_3$ 為 3×3 的零矩陣， $\mathbf{0}_{2 \times 3}$ 為 2×3 的零矩陣， $\mathbf{0}_{3 \times 2}$ 為 3×2 的零矩陣， \mathbf{I}_2 為 2×2 的單位矩陣。因為元素的扭轉率與元素座標系統無關，所以 $\delta\beta_j$ ($j=1,2$) 在固定元素座標 \bar{x}_i 和移動元素座標 x_i 中有相同的值。(B.16) 式中之 G_{b2} 、及 G_{b4} 及 G_{c2} 、 G_{c4} 分別為(2.84)式中向量 \mathbf{G}_b 和 \mathbf{G}_c 第2及第4個元素。矩陣 \mathbf{T}_R 中 \bar{v}_j 、 \bar{w}_j 、 ϕ_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2$) 的值皆為零，但是其擾動量並不為零，在推導元素切線剛度矩陣時須用到 \mathbf{T}_R 擾動量，故(B.9)式中

\mathbf{T}_R 仍需保留。(B.14)式中加底線” --- ”之項在元素很小時會趨近於零，故本文中計算時將其忽略。

假設擾動時間 $\delta t \rightarrow 0$ ，將(B.9)式除以 δt ，可得

$$\dot{\mathbf{q}}_\theta = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{q}_\theta}{\delta t} = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \dot{\mathbf{q}}_\phi = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\theta = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^*, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\boldsymbol{\theta}}_2^*, \dot{\boldsymbol{\beta}}\}, \quad \dot{\mathbf{q}}_\phi = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\boldsymbol{\phi}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\boldsymbol{\phi}}_2, \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \quad (\text{B.19})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\phi = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\boldsymbol{\phi}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\boldsymbol{\phi}}_2, \dot{\boldsymbol{\beta}}\}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_j = \{\dot{u}_j, \dot{v}_j, \dot{w}_j\}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_j^* = \{\dot{\theta}_{1j}, -\dot{w}'_j, \dot{v}'_j\}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \{\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2\}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_j = \{\dot{u}_j, \dot{v}_j, \dot{w}_j\}, \quad \dot{\boldsymbol{\phi}}_j = \{\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{2j}, \dot{\phi}_{3j}\}, \quad \dot{\boldsymbol{\phi}}_j = \{\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{2j}, \dot{\phi}_{3j}\}$$

其中 \mathbf{T}_R 的值為 $\mathbf{0}$ ， $\mathbf{T}_{\phi\phi}$ 的值為 \mathbf{I} ，但其對時間的微分不為 0 ，故仍需保留。

將(B.18)式對時間微分，可得

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_\theta &= \frac{d\dot{\mathbf{q}}_\theta}{dt} = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \ddot{\mathbf{q}}_\phi + (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi} + \dot{\mathbf{T}}_R) \dot{\mathbf{q}}_\phi \\ &= (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \ddot{\mathbf{q}}_\phi + (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi} + \dot{\mathbf{T}}_R) \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \dot{\mathbf{q}}_\phi + (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \dot{\mathbf{T}}_{\phi\phi}^t \dot{\mathbf{q}}_\phi \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

因 $\dot{\mathbf{T}}_{\phi\phi}^t \dot{\mathbf{q}}_\phi = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{T}_{\phi\phi} = \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{T}_R = \mathbf{0}$ ，若僅保留到變形參數的一次項，則

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = (\mathbf{T}_{\theta\phi}^0 + \mathbf{T}_{\theta\phi}^1) \ddot{\mathbf{q}}_\phi + (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^1 + \dot{\mathbf{T}}_R) \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{B.21})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1^*, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2^*, \ddot{\boldsymbol{\beta}}\}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_\phi = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\boldsymbol{\phi}}_2, \ddot{\boldsymbol{\beta}}\} \quad (\text{B.22})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\phi = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\boldsymbol{\phi}}_2, \ddot{\boldsymbol{\beta}}\}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_j = \{\ddot{u}_j, \ddot{v}_j, \ddot{w}_j\}, \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}}_j^* = \{\ddot{\theta}_{1j}, -\ddot{w}'_j, \ddot{v}'_j\}, \quad \ddot{\boldsymbol{\beta}} = \{\ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_2\}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_j = \{\ddot{u}_j, \ddot{v}_j, \ddot{w}_j\}, \quad \ddot{\boldsymbol{\phi}}_j = \{\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{2j}, \ddot{\phi}_{3j}\}, \quad \ddot{\boldsymbol{\phi}}_j = \{\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{2j}, \ddot{\phi}_{3j}\}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{a1} & \dot{\mathbf{T}}_{c1} & -\dot{\mathbf{T}}_{a1} & \dot{\mathbf{T}}_e & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{a2} & \dot{\mathbf{T}}_{d1} & -\dot{\mathbf{T}}_{a2} & \dot{\mathbf{T}}_{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_{2j}}{L} & \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2l} & \frac{\dot{l} - l\dot{\varepsilon}_{oj}}{l^2} \\ -\frac{\dot{\theta}_{3j}}{L} & -\frac{\dot{l} - l\dot{\varepsilon}_{oj}}{l^2} & \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2l} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{22}}{4l} & \frac{\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{32}}{4l} \\ 0 & -\frac{6y_p}{Ll} \dot{\theta}_{2j} & -\frac{6z_p}{Ll} \dot{\theta}_{2j} \\ 0 & -\frac{6y_p}{Ll} \dot{\theta}_{3j} & -\frac{6z_p}{Ll} \dot{\theta}_{3j} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{cj} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\theta}_{3j}}{4} & -\frac{\dot{\theta}_{2j}}{4} \\ -\frac{\dot{\theta}_{3j}}{2} & \dot{\varepsilon}_{oj} & \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2} \\ \frac{\dot{\theta}_{2j}}{2} & -\frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2} & \dot{\varepsilon}_{oj} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3z_p}{L} \dot{\theta}_{2j} & -\frac{3y_p}{L} \dot{\theta}_{2j} \\ 0 & \frac{3z_p}{L} \dot{\theta}_{3j} & -\frac{3y_p}{L} \dot{\theta}_{3j} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{\theta}_{31}}{4} & \frac{\dot{\theta}_{21}}{4} \\ \frac{\dot{\theta}_{32}}{2} & \frac{3z_p}{L} \dot{\theta}_{22} & -\frac{3y_p}{L} \dot{\theta}_{22} \\ -\frac{\dot{\theta}_{22}}{2} & \frac{3z_p}{L} \dot{\theta}_{32} & -\frac{3y_p}{L} \dot{\theta}_{32} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{T}}_e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{\theta}_{32}}{4} & \frac{\dot{\theta}_{22}}{4} \\ \frac{\dot{\theta}_{31}}{2} & -\frac{3z_p}{L} \dot{\theta}_{21} & \frac{3y_p}{L} \dot{\theta}_{21} \\ -\frac{\dot{\theta}_{21}}{2} & -\frac{3z_p}{L} \dot{\theta}_{31} & \frac{3y_p}{L} \dot{\theta}_{31} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{R1}^a & \dot{\mathbf{T}}_{R2}^b & -\dot{\mathbf{T}}_{R1}^a & \dot{\mathbf{T}}_R^c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_R^d & \mathbf{0}_3 & -\dot{\mathbf{T}}_R^d & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{R2}^a & \dot{\mathbf{T}}_R^e & -\dot{\mathbf{T}}_{R2}^a & \dot{\mathbf{T}}_{R1}^b & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{Rj}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l^2} & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2l} & 0 \\ -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l^2} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2l} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\phi}_{21} - \dot{\phi}_{22}}{4l} & \frac{\dot{\phi}_{31} - \dot{\phi}_{32}}{4l} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{Rj}^b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{4l} + \frac{\dot{\phi}_{3j}}{4} & \frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{4l} - \frac{\dot{\phi}_{2j}}{4} \\ -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{2l} - \frac{\dot{\phi}_{3j}}{2} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \\ -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{2l} + \frac{\dot{\phi}_{2j}}{2} & -\frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_R^c = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{4l} - \frac{\dot{\phi}_{32}}{4} & -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{4l} + \frac{\dot{\phi}_{22}}{4} \\ -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{2l} + \frac{\dot{\phi}_{31}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{2l} - \frac{\dot{\phi}_{21}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_R^d = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} & -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_R^e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{4l} - \frac{\dot{\phi}_{31}}{4} & -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{4l} + \frac{\dot{\phi}_{21}}{4} \\ -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{2l} + \frac{\dot{\phi}_{32}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{2l} - \frac{\dot{\phi}_{22}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

附錄 C 元素節點力向量 \mathbf{f}^D 與 \mathbf{f}_θ^D 的關係

為了方便說明，在此將(2.97)式中節點變形力向量 \mathbf{f}^D 與 \mathbf{f}_θ^D 之關係重複如下

$$\mathbf{f}^D = \mathbf{T}_{\varphi\phi}(\mathbf{T}_{\theta\phi}^t + \mathbf{T}_R^t)\mathbf{f}_\theta^D \quad (\text{C.1})$$

其中

$$\mathbf{f}^D = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{f}_\theta^D = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}, \quad \mathbf{f}_j^\theta = \{f_{1j}^\theta, f_{2j}^\theta, f_{3j}^\theta\} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}, \quad \mathbf{m}_j^\theta = \{m_{1j}^\theta, m_{2j}^\theta, m_{3j}^\theta\} \quad (j = 1, 2),$$

$$\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$$

將式(B.6)、(B.11)及(B.17)代入式(C.1)， \mathbf{f}^D 與 \mathbf{f}_θ^D 之關係的顯式可表示如下

$$f_{12} = -f_{11} = f_{12}^\theta + f_{12}^{\theta\phi} \quad (\text{C.5})$$

$$f_{12}^{\theta\phi} = \frac{\theta_{21}}{L} m_{21}^\theta + \frac{\theta_{22}}{L} m_{22}^\theta + \frac{\theta_{31}}{L} m_{31}^\theta + \frac{\theta_{32}}{L} m_{32}^\theta \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} f_{21} = -f_{22} = & \frac{1}{4\ell}(\theta_{22} - \theta_{21})(m_{11}^\theta - m_{12}^\theta) + \frac{1}{\ell}(1 + \varepsilon_{o1})m_{31}^\theta + \frac{1}{\ell}(1 + \varepsilon_{o2})m_{32}^\theta \\ & + \frac{1}{2\ell}(\theta_{11} + \theta_{12})(m_{21}^\theta + m_{22}^\theta) + \frac{6y_p}{L\ell}(m_{21}^\theta\theta_{21} - m_{22}^\theta\theta_{22}) \\ & + \frac{6y_p}{L\ell}(m_{31}^\theta\theta_{31} - m_{32}^\theta\theta_{32}) + \frac{f_{12}^{\theta\phi}L}{\ell}(G_{b2} + G_{b4}) = \frac{1}{\ell}(m_{31} + m_{32}) \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{31} = -f_{32} = & \frac{1}{4\ell}(\theta_{32} - \theta_{31})(m_{11}^\theta - m_{12}^\theta) - \frac{1}{\ell}(1 + \varepsilon_{o1})m_{21}^\theta - \frac{1}{\ell}(1 + \varepsilon_{o2})m_{22}^\theta \\ & + \frac{1}{2\ell}(\theta_{11} + \theta_{12})(m_{31}^\theta + m_{32}^\theta) + \frac{6z_p}{L\ell}(m_{21}^\theta\theta_{21} - m_{22}^\theta\theta_{22}) \\ & + \frac{6z_p}{L\ell}(m_{31}^\theta\theta_{31} - m_{32}^\theta\theta_{32}) - \frac{f_{12}^{\theta\phi}L}{\ell}(G_{c2} + G_{c4}) = -\frac{1}{\ell}(m_{21} + m_{22}) \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

$$m_{11} = -m_{12} = \frac{1}{2}(m_{11}^\theta - m_{12}^\theta) + \frac{1}{2}\theta_{32}m_{22}^\theta - \frac{1}{2}\theta_{31}m_{21}^\theta - \frac{1}{2}\theta_{22}m_{32}^\theta + \frac{1}{2}\theta_{21}m_{31}^\theta \quad (\text{C.9})$$

$$m_{21} = (1 + \varepsilon_{o1})m_{21}^\theta + \frac{\theta_{31}}{4}(m_{11}^\theta - m_{12}^\theta) - \frac{(\theta_{11} + \theta_{12})}{2}m_{31}^\theta - \frac{3z_p}{L}(m_{21}^\theta\theta_{21} - m_{22}^\theta\theta_{22})$$

$$-\frac{3z_p}{L}(m_{31}^\theta\theta_{31} - m_{32}^\theta\theta_{32}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{c2}L \quad (\text{C.10})$$

$$m_{31} = (1 + \varepsilon_{o1})m_{31}^\theta - \frac{\theta_{21}}{4}(m_{11}^\theta - m_{12}^\theta) + \frac{(\theta_{11} + \theta_{12})}{2}m_{21}^\theta + \frac{3y_p}{L}(m_{21}^\theta\theta_{21} - m_{22}^\theta\theta_{22}) \\ + \frac{3y_p}{L}(m_{31}^\theta\theta_{31} - m_{32}^\theta\theta_{32}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{b2}L \quad (\text{C.11})$$

$$m_{22} = (1 + \varepsilon_{o2})m_{22}^\theta - \frac{\theta_{32}}{4}(m_{11}^\theta - m_{12}^\theta) - \frac{(\theta_{11} + \theta_{12})}{2}m_{32}^\theta - \frac{3z_p}{L}(m_{21}^\theta\theta_{21} - m_{22}^\theta\theta_{22}) \\ - \frac{3z_p}{L}(m_{31}^\theta\theta_{31} - m_{32}^\theta\theta_{32}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{c4}L \quad (\text{C.12})$$

$$m_{32} = (1 + \varepsilon_{o2})m_{32}^\theta + \frac{\theta_{22}}{4}(m_{11}^\theta - m_{12}^\theta) + \frac{(\theta_{11} + \theta_{12})}{2}m_{22}^\theta + \frac{3y_p}{L}(m_{21}^\theta\theta_{21} - m_{22}^\theta\theta_{22}) \\ + \frac{3y_p}{L}(m_{31}^\theta\theta_{31} - m_{32}^\theta\theta_{32}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{b4}L \quad (\text{C.13})$$

由(C.5)–(C.13)式可以發現節點變形力 \mathbf{f}^D 能滿足平衡方程式且側向力 f_{2j} ， f_{3j} ($j=1, 2$)可視為是彎矩 m_{2j} ， m_{3j} 的反作用力與 f_{2j}^θ ， f_{3j}^θ ($j=1, 2$)無關，但為了方便表示，本文中推導節點變形力 \mathbf{f}^D 時仍保留 f_{2j}^θ ， f_{3j}^θ ($j=1, 2$)。以共旋轉有限元素法離散梁結構時，隨著元素數目的增加，元素之剪心軸的曲率及扭轉率會趨近一個常數，而其中長度、斜率及扭轉角會趨近於零，所以(C.5)–(C.13)式中與曲率有關的 $\frac{\theta_{ij}}{L}$ ($i=2, 3; j=1, 2$)會趨近一個常數而與斜率有關的 θ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)會趨近於零，由上述的討論可知(C.5)–(C.13)式中加底線的項在元素增加時會趨近於零，故本文中將其忽略。

附錄 D 位置向量的擾動量及對時間的微分

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則(2.61)式中元素內任意點Q之位置向量 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 對固定元素座標的擾動量 $\delta\bar{\mathbf{r}}$ 可表示成

$$\delta\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) - \bar{\mathbf{r}}(t) = {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} + \delta\bar{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{D.1})$$

$${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} & -\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \\ \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} & 1 & -\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \\ \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} & \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

其中 $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t)$ 為Q點受擾動後在固定元素座標 \bar{x}_i 上的位置向量， $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t)$ 已在(2.64)式定義， ${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}$ 在(2.34)式已經定義， $\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ ， $\Delta\bar{w} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1$ ， $\delta\bar{\mathbf{u}}_1 = \{\delta\bar{u}_1, \delta\bar{v}_1, \delta\bar{w}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的擾動位移向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 上的位置向量， $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 已在(2.62)式定義， $\delta\mathbf{r}$ 為位置向量 \mathbf{r} 的變分。

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則由(2.62)式中 \mathbf{r} 的定義再配合(2.13)、(2.14)、(2.16)、(2.74)、(2.75)式， \mathbf{r} 及 $\delta\mathbf{r}$ 在 x_i ($i=1, 2, 3$)軸方向之分量 r_i 及 δr_i 可表示成

$$r_1 = (1 + \varepsilon_c)x + \omega\theta_{1,x} \quad (\text{D.3})$$

$$r_2 = y - y_p$$

$$r_3 = z - z_p$$

$$\varepsilon_c = \frac{\ell - L}{L} + \frac{y_p}{L}(\theta_{32} - \theta_{31}) - \frac{z_p}{L}(\theta_{22} - \theta_{21}) \quad (\text{D.4})$$

$$\delta r_1 = \delta x_p - (y - y_p)\delta\theta_3 + (z - z_p)\delta\theta_2 + \delta\theta_{1,x}\omega \quad (\text{D.5})$$

$$\delta r_2 = \delta v - (z - z_p)\delta\theta_1 + \omega\theta_{1,x}\delta\theta_3$$

$$\delta r_3 = \delta w + (y - y_p)\delta\theta_1 - \omega\theta_{1,x}\delta\theta_2$$

$$\delta x_p = x \delta \varepsilon_c - y_p (\delta \theta_3 - \delta \theta_{31}) + z_p (\delta \theta_2 - \delta \theta_{21}) \quad (\text{D.6})$$

$$\delta \varepsilon_c = \frac{\delta \Delta \bar{u}}{L} + \frac{y_p}{L} (\delta \theta_{32} - \delta \theta_{31}) - \frac{z_p}{L} (\delta \theta_{22} - \delta \theta_{21}) \quad (\text{D.7})$$

$$\Delta \bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \circ$$

$$\delta \theta_2 = \delta \varepsilon_o w_{,x} - (1 - \varepsilon_o) \delta w_{,x} \quad (\text{D.8})$$

$$\delta \theta_3 = -\delta \varepsilon_o v_{,x} + (1 - \varepsilon_o) \delta v_{,x} \quad (\text{D.9})$$

由(B.12)、(2.23)–(2.25)式、(D.8)式、(D.9)式，保留至變形參數的零次項、及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $l \approx L$ 可得

$$\delta v = \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b = \mathbf{N}_b^t \mathbf{T}_b^0 \delta \mathbf{u}_b^\varphi \quad (\text{D.10})$$

$$\delta w = \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c = \mathbf{N}_c^t \mathbf{T}_c^0 \delta \mathbf{u}_c^\varphi$$

$$\delta \theta_1 = \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d = \mathbf{N}_d^t \mathbf{T}_d^0 \delta \mathbf{u}_d^\varphi$$

$$\delta \theta_{1,x} = \mathbf{N}_d^{t'} \delta \mathbf{u}_d = \mathbf{N}_d^{t'} \mathbf{T}_d^0 \delta \mathbf{u}_d^\varphi = \mathbf{N}_d^{t'} \delta \mathbf{u}_d^\varphi$$

$$\delta \theta_2 = -\delta w_{,x} = -\mathbf{N}_c^{t'} \delta \mathbf{u}_c = -\mathbf{N}_c^{t'} \mathbf{T}_c^0 \delta \mathbf{u}_c^\varphi$$

$$\delta \theta_3 = \delta v_{,x} = \mathbf{N}_b^{t'} \delta \mathbf{u}_b = \mathbf{N}_b^{t'} \mathbf{T}_b^0 \delta \mathbf{u}_b^\varphi$$

$$\mathbf{T}_b^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_c^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 1 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_d^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

其中 $\delta \mathbf{u}_b = \{\delta v_1, \delta v_1', \delta v_2, \delta v_2'\}$ ， $\delta \mathbf{u}_c = \{\delta w_1, -\delta w_1', \delta w_2, -\delta w_2'\}$ ，

$\delta \mathbf{u}_d = \{\delta \theta_{11}, \delta \beta_1, \delta \theta_{12}, \delta \beta_2\}$ ， $\delta \mathbf{u}_b^\varphi = \{\delta \bar{v}_1, \delta \varphi_{31}, \delta \bar{v}_2, \delta \varphi_{32}\}$

$\delta \mathbf{u}_c^\varphi = \{\delta \bar{w}_1, \delta \varphi_{21}, \delta \bar{w}_2, \delta \varphi_{22}\}$ ， $\delta \mathbf{u}_d^\varphi = \{\delta \varphi_{11}, \delta \beta_1, \delta \varphi_{12}, \delta \beta_2\}$ 已分別在(2.98)式及(2.113)式中定義， \mathbf{N}_i ($i=b, c, d$) 已在(2.23)–(2.25)式中定義。

將(D.2)-(D.10)式代入(D.1)式、保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項、使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $l \approx L$ ， $\delta \bar{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 $\delta \bar{r}_i$ 可表示成

$$\delta \bar{r}_1 = \mathbf{N}_a^t \delta \mathbf{u}_a^\varphi + y_p \mathbf{N}_e^t \delta \mathbf{u}_b^\varphi + z_p \mathbf{N}_f^t \delta \mathbf{u}_c^\varphi - y \mathbf{N}_b^{t'} \delta \mathbf{u}_b^\varphi - z \mathbf{N}_c^{t'} \delta \mathbf{u}_c^\varphi + \omega \mathbf{N}_d^{t'} \delta \mathbf{u}_d^\varphi \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{N}_b^t \delta\mathbf{u}_b^\phi - (z - z_p) \mathbf{N}_d^t \delta\mathbf{u}_d^\phi + \omega\theta_{1,x} \mathbf{N}_b^{t'} \delta\mathbf{u}_b^\phi \\ \delta\bar{\mathbf{r}}_3 &= \mathbf{N}_c^t \delta\mathbf{u}_c^\phi + (y - y_p) \mathbf{N}_d^t \delta\mathbf{u}_d^\phi + \omega\theta_{1,x} \mathbf{N}_c^{t'} \delta\mathbf{u}_c^\phi\end{aligned}$$

$$\delta\mathbf{u}_a^\phi = \{\delta\bar{u}_1, \delta\bar{u}_2\} \quad , \quad \mathbf{N}_a = \{N_5, N_6\} \quad (\text{D.13})$$

$$\mathbf{N}_e = \{0, N_5, 0, N_6\} \quad , \quad \mathbf{N}_f = \{0, -N_5, 0, -N_6\} \quad (\text{D.14})$$

$$N_5 = \frac{1-\xi}{2} \quad , \quad N_6 = \frac{1+\xi}{2}$$

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則(2.66)式中元素內任意點Q之位置向量對固定元素座標的絕對速度 $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 可表示成

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{D.15})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

$$\Omega_x = \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2}, \quad \Omega_y = -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l}, \quad \Omega_z = \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} \quad (\text{D.17})$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 為移動元素座標的角速度矩陣，已在(2.45)式中定義， $\dot{\mathbf{u}}_1 = \{\dot{u}_{11}, \dot{u}_{21}, \dot{u}_{31}\} = \{\dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{w}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的絕對速度向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 上的位置向量， \mathbf{r} 已在(2.62)式定義， $\dot{\mathbf{r}}$ 為Q點對移動元素座標的速度。

$\dot{\mathbf{r}}$ 為(2.62)式對時間的微分，由(2.13)、(2.14)、(2.16)、(2.74)、(2.75)式， $\dot{\mathbf{r}}$ 在 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 \dot{r}_i 可表示成

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= \dot{x}_p + (y - y_p)(\theta_2\dot{\theta}_1 + \theta_1\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + (z - z_p)(\theta_3\dot{\theta}_1 + \theta_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + \omega\dot{\theta}_{1,x} \\ &\quad - \omega\theta_{1,x}\theta_2\dot{\theta}_2 - \omega\theta_{1,x}\theta_3\dot{\theta}_3\end{aligned}$$

$$\dot{r}_2 = \dot{v} - (y - y_p)(\theta_1\dot{\theta}_1 + \theta_3\dot{\theta}_3) + (z - z_p)(-\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\theta_3\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{\theta}_3) + \omega\dot{\theta}_3\theta_{1,x} + \omega\theta_3\dot{\theta}_{1,x}$$

$$\dot{r}_3 = \dot{w} - (z - z_p)(\theta_1\dot{\theta}_1 + \theta_2\dot{\theta}_2) + (y - y_p)(\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\theta_3\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{\theta}_3) - \omega\dot{\theta}_2\theta_{1,x} - \omega\theta_2\dot{\theta}_{1,x}$$

(D.18)

$$\dot{x}_p = x\dot{\varepsilon}_c - y_p(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_{31}) + z_p(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{21}) - \int_0^x (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx \quad (D.19)$$

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\dot{\ell}}{L} + \frac{y_p}{L}(\dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{31}) - \frac{z_p}{L}(\dot{\theta}_{22} - \dot{\theta}_{21}) + \frac{1}{L}\int_0^L (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx \quad (D.20)$$

$$\dot{\ell} = \Delta\dot{u} + \Omega_z\Delta\bar{v} - \Omega_y\Delta\bar{w} \quad (D.21)$$

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\varepsilon}_o w_{,x} - (1 - \varepsilon_o)\dot{w}_{,x} \quad (D.22)$$

$$\dot{\theta}_3 = -\dot{\varepsilon}_o v_{,x} + (1 - \varepsilon_o)\dot{v}_{,x} \quad (D.23)$$

$$\dot{\varepsilon}_o = \dot{\varepsilon}_c - y_p\dot{\theta}_{3,x} + z_p\dot{\theta}_{2,x} \quad (D.24)$$

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $\ell \approx L$ ，則 $\dot{\mathbf{r}}$ 在 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 \dot{r}_i 可表示成

$$\dot{r}_1 = \dot{x}_p - (y - y_p)\dot{\theta}_3 + (z - z_p)\dot{\theta}_2 + \omega\dot{\theta}_{1,x} \quad (D.25)$$

$$\dot{r}_2 = \dot{v} - (z - z_p)\dot{\theta}_1 + \omega\dot{\theta}_3\theta_{1,x}$$

$$\dot{r}_3 = \dot{w} + (y - y_p)\dot{\theta}_1 - \omega\dot{\theta}_2\theta_{1,x}$$



$$\dot{x}_p = x\dot{\varepsilon}_c - y_p(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_{31}) + z_p(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{21}) \quad (D.26)$$

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\Delta\dot{u}}{L} + \frac{y_p}{L}(\dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{31}) - \frac{z_p}{L}(\dot{\theta}_{22} - \dot{\theta}_{21}) \quad (D.27)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{w}_{,x}, \quad \dot{\theta}_3 = \dot{v}_{,x} \quad (D.28)$$

其中 $\dot{\theta}_{2j}$ 及 $\dot{\theta}_{3j}$ ($j=1, 2$) 表示(D.22)、(D.23)式中 $\dot{\theta}_2$ 及 $\dot{\theta}_3$ 在節點 j 的節點值。

將(D.27)式代入(D.26)式，保留至變形參數的零次項及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ ， \dot{x}_p 可表示成

$$\dot{x}_p = \frac{x\Delta\dot{u}}{L} + y_p\mathbf{N}_e^t\dot{\mathbf{u}}_b^\theta + z_p\mathbf{N}_f^t\dot{\mathbf{u}}_c^\theta - y_p\dot{\theta}_3 + z_p\dot{\theta}_2 \quad (D.29)$$

其中

$$\dot{\mathbf{u}}_b^\theta = \{\dot{v}_1, \dot{\theta}_{31}, \dot{v}_2, \dot{\theta}_{32}\}, \quad \dot{\mathbf{u}}_c^\theta = \{\dot{w}_1, \dot{\theta}_{21}, \dot{w}_2, \dot{\theta}_{22}\} \quad (D.30)$$

由移動元素座標的定義方式，可知(D.30)式中 $\dot{v}_j = \dot{w}_j = 0$ ($j=1, 2$)。

將(D.3)、(D.16)、(D.25)式代入(D.15)式，保留至變形參數的零次項及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $\ell \approx L$ ， $\dot{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量

\dot{r}_i 可表示成

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= \dot{u}_1 + \dot{x}_p - (y - y_p)\dot{\theta}_3 + (z - z_p)\dot{\theta}_2 + \omega\dot{\theta}_{1,x} - (y - y_p)\Omega_z + (z - z_p)\Omega_y \\ \dot{r}_2 &= \dot{v}_1 + \dot{v} - (z - z_p)\dot{\theta}_1 - (z - z_p)\Omega_x + x\Omega_z + \omega\theta_{1,x}(\Omega_z + \dot{\theta}_3) \\ \dot{r}_3 &= \dot{w}_1 + \dot{w} + (y - y_p)\dot{\theta}_1 + (y - y_p)\Omega_x - x\Omega_y - \omega\theta_{1,x}(\Omega_y + \dot{\theta}_2)\end{aligned}\quad (D.31)$$

由(2.67)式可知元素內任意點Q之位置向量對固定元素座標的絕對加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 可表示成

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega})\mathbf{r} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{u}}_1 \quad (D.32)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \quad (D.33)$$

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{\ddot{\phi}_{11} + \ddot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{2}\Omega_z(\dot{\phi}_{21} + \dot{\phi}_{22}) - \frac{1}{2}\Omega_y(\dot{\phi}_{31} + \dot{\phi}_{32}) \\ \alpha_y &= -\frac{\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1}{\ell} - 2\frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell}\Omega_y + \Omega_z\Omega_x \\ \alpha_z &= \frac{\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1}{\ell} - 2\frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell}\Omega_z - \Omega_y\Omega_x\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{\Lambda}$ 為移動元素座標對固定元素座標的角加速度矩陣，已在(2.55)式定義， $\mathbf{\Omega}$ 為移動元素座標的角速度矩陣(見(D.16)或(2.46)式)， $\ddot{\mathbf{u}}_1 = \{\ddot{u}_{11}, \ddot{u}_{21}, \ddot{u}_{31}\} = \{\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{w}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的絕對加速度向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 上的位置向量(見(D.3)或(2.62)式)， $\dot{\mathbf{r}}$ 為Q點對移動元素座標的速度(見(D.18))， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為Q點對移動元素座標的加速度。

$\ddot{\mathbf{r}}$ 可以由(D.18)式之 $\dot{\mathbf{r}}$ 對時間微分求得，若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項， $\ddot{\mathbf{r}}$ 在 x_i ($i=1, 2, 3$)軸方向之分量 \ddot{r}_i 可表示成

$$\ddot{r}_1 = \ddot{x}_p + (y - y_p)(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_3) + (z - z_p)(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_2) + \omega\ddot{\theta}_{1,x} - \omega\theta_{1,x}(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_2 &= \ddot{v} - (y - y_p)(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2) + (z - z_p)(-\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) + 2\omega\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_3 + \omega\ddot{\theta}_3\theta_{1,x} \\
\ddot{r}_3 &= \ddot{w} - (z - z_p)(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + (y - y_p)(\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) - 2\omega\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_2 - \omega\ddot{\theta}_2\theta_{1,x}
\end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_p &= \frac{x\ddot{\ell}}{L} + \frac{x}{L} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \\
&\quad + \frac{xy_p}{L} (\ddot{\theta}_{32} - \ddot{\theta}_{31}) - \frac{xz_p}{L} (\ddot{\theta}_{22} - \ddot{\theta}_{21}) - y_p (\ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_{31}) + z_p (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_{21})
\end{aligned} \tag{D.35}$$

$$\ddot{\ell} = \Delta\ddot{u} + \ell(\Omega_z^2 + \Omega_y^2) \tag{D.36}$$

$$\ddot{\theta}_2 = 2\dot{\varepsilon}_o\dot{w}_{,x} - \ddot{w}_{,x}, \quad \ddot{\theta}_3 = -2\dot{\varepsilon}_o\dot{v}_{,x} + \ddot{v}_{,x} \tag{D.37}$$

將(D.36)式代入(D.35)式， \ddot{x}_p 可表示成

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_p &= \frac{x(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)}{L} + y_p \mathbf{N}_e^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\theta + z_p \mathbf{N}_f^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\theta - y_p \ddot{\theta}_3 + z_p \ddot{\theta}_2 + \frac{x}{L} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \\
&\quad - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx + \frac{\ell x}{L} (\Omega_z^2 + \Omega_y^2)
\end{aligned} \tag{D.38}$$

其中 $\ddot{\mathbf{u}}_b^\theta = \{\ddot{v}_1, \ddot{\theta}_{31}, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_{32}\}$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}_c^\theta = \{\ddot{w}_1, \ddot{\theta}_{21}, \ddot{w}_2, \ddot{\theta}_{22}\}$ ， $\ddot{\theta}_{2j}$ 及 $\ddot{\theta}_{3j}$ ($j=1, 2$) 表示 $\ddot{\theta}_2$ 及 $\ddot{\theta}_3$ 在節點 j 的節點值。

將(D.3)、(D.16)、(D.25)、(D.33)及(D.34)式代入(D.32)式，絕對加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 \ddot{r}_i 可表示如下

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_1 &= \ddot{u}_1 + \ddot{x}_p - (1 + \varepsilon_c)x(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + 2(\Omega_y\dot{w} - \Omega_z\dot{v}) + (y - y_p)[\Omega_x\Omega_y - \alpha_z \\
&\quad + 2(\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3] + (z - z_p)[\Omega_x\Omega_z + \alpha_y + 2(\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + \omega\dot{\theta}_{1,x} \\
&\quad - \omega\theta_{1,x}[(\Omega_y + \dot{\theta}_2)^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_3)^2] \\
\ddot{r}_2 &= \ddot{v}_1 + \ddot{v} + x\Omega_x\Omega_y - 2\Omega_x\dot{w} + x\alpha_z + 2\Omega_z\dot{x}_p - (y - y_p)[(\Omega_x + \dot{\theta}_1)^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_3)^2] \\
&\quad + (z - z_p)[\Omega_y\Omega_z - \alpha_x + (2\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1] + 2\omega(\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_{1,x} \\
&\quad + \omega\theta_{1,x}(\Omega_x\Omega_y - \alpha_z + 2\Omega_x\dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_3) \\
\ddot{r}_3 &= \ddot{w}_1 + \ddot{w} + x\Omega_x\Omega_z + 2\Omega_x\dot{v} - x\alpha_y - 2\Omega_y\dot{x}_p - (z - z_p)[(\Omega_y + \dot{\theta}_2)^2 + (\Omega_x + \dot{\theta}_1)^2] \\
&\quad + (y - y_p)[\Omega_y\Omega_z + \alpha_x + (2\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1] - 2\omega(\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_{1,x} \\
&\quad + \omega\theta_{1,x}(\Omega_x\Omega_z - \alpha_y + 2\Omega_x\dot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_2)
\end{aligned} \tag{D.39}$$

附錄 E \mathbf{H}_R 與 \mathbf{H}_θ 之顯式

定義於(2.132)式之 \mathbf{H}_R 的顯示可表示成

$$\mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{R1}^a & \mathbf{h}_{R1}^{c1} & -\mathbf{h}_{R1}^a & \mathbf{h}_{R1}^{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{R1}^b & \mathbf{h}_{R1}^e & -\mathbf{h}_{R1}^b & \mathbf{h}_R^{d1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{R2}^a & \mathbf{h}_{R2}^{c1} & -\mathbf{h}_{R2}^a & \mathbf{h}_{R2}^{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{R2}^b & \mathbf{h}_R^{d2} & -\mathbf{h}_{R2}^b & \mathbf{h}_{R2}^e & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{h}_{Rj}^a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{2j}^1}{\ell} & \frac{f_{3j}^1}{\ell} \\ 0 & -\frac{f_{1j}^1}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{1j}^1}{\ell} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{Rj}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{f_{31}^1}{2} & \frac{f_{21}^1}{2} \\ 0 & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{Rj}^{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f_{3j}^1}{2} & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} & 0 \\ \frac{f_{2j}^1}{2} & 0 & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{Rj}^{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f_{3j}^1}{2} & \frac{m_{1j}^1}{2\ell} & 0 \\ \frac{f_{2j}^1}{2} & 0 & \frac{m_{1j}^1}{2\ell} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_R^{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{32}^\theta}{2} & \frac{m_{22}^\theta}{2} \\ -\frac{m_{31}^\theta}{2} & 0 & 0 \\ \frac{m_{21}^\theta}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_R^{d2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{31}^\theta}{2} & \frac{m_{21}^\theta}{2} \\ -\frac{m_{32}^\theta}{2} & 0 & 0 \\ \frac{m_{22}^\theta}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{Rj}^e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{3j}}{2} & -\frac{m_{2j}}{2} \\ -\frac{m_{3j}}{2} & 0 & \frac{m_{1j}}{2} \\ \frac{m_{2j}}{2} & -\frac{m_{1j}}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{3j}^\theta}{2} & -\frac{m_{2j}^\theta}{2} \\ -\frac{m_{3j}^\theta}{2} & 0 & \frac{m_{1j}^1}{2} \\ \frac{m_{2j}^\theta}{2} & -\frac{m_{1j}^1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

其中 $f_{21}^1 = -f_{22}^1 = \frac{m_{31}^\theta + m_{32}^\theta}{\ell}$, $f_{31}^1 = -f_{32}^1 = -\frac{m_{21}^\theta + m_{22}^\theta}{\ell}$,

$m_{11}^1 = -m_{12}^1 = \frac{m_{11}^\theta - m_{12}^\theta}{2}$, 廣義力矩 m_{ij}^θ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已定義於(2.99)式 ,
傳統力矩 m_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已定義於(C.9)-(C.13)式。

定義於(2.134)式之 \mathbf{H}_θ 的顯示可表示成

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{h}_{a1} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{h}_{a2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_{d1} & -\mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_e & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{h}_{a1} & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{h}_{a2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_e^t & -\mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_{d2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{h}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_{21}^{\theta 1} + m_{22}^{\theta 1}}{2\ell} & 0 & 0 \\ \frac{m_{31}^{\theta 1} + m_{32}^{\theta 2}}{2\ell} & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{11}^{\theta 1} - m_{12}^{\theta 1}}{4\ell} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\theta 1} - m_{12}^{\theta 1}}{4\ell} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{2j}^{\theta 1}}{L} & -\frac{m_{3j}^{\theta 1}}{L} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6y_p}{Ll} m_{2j}^{\theta 1} & -\frac{6y_p}{Ll} m_{3j}^{\theta 1} \\ 0 & -\frac{6z_p}{Ll} m_{2j}^{\theta 1} & -\frac{6z_p}{Ll} m_{3j}^{\theta 1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{2j}^{\theta 1}}{L} & -\frac{m_{3j}^{\theta 1}}{L} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6y_p}{L^2} m_{2j}^{\theta 1} & -\frac{6y_p}{L^2} m_{3j}^{\theta 1} \\ 0 & -\frac{6z_p}{L^2} m_{2j}^{\theta 1} & -\frac{6z_p}{L^2} m_{3j}^{\theta 1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{dj} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{3j}^{\theta 1}}{2} & -\frac{m_{2j}^{\theta 1}}{2} \\ -\frac{m_{3j}^{\theta 1}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{m_{2j}^{\theta 1}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{12}^{\theta 1} - m_{11}^{\theta 1}}{4} \\ 0 & \frac{m_{11}^{\theta 1} - m_{12}^{\theta 1}}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6z_p}{L} m_{2j}^{\theta 1} & \frac{3z_p}{L} m_{3j}^{\theta 1} - \frac{3y_p}{L} m_{2j}^{\theta 1} \\ 0 & \frac{3z_p}{L} m_{3j}^{\theta 1} - \frac{3y_p}{L} m_{2j}^{\theta 1} & -\frac{6y_p}{L} m_{3j}^{\theta 1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{32}^{\theta_1}}{2} & \frac{m_{22}^{\theta_1}}{2} \\ -\frac{m_{31}^{\theta_1}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{m_{21}^{\theta_1}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3z_p}{L}(m_{22}^{\theta_1} - m_{21}^{\theta_1}) & \frac{3y_p}{L}m_{21}^{\theta_1} + \frac{3z_p}{L}m_{32}^{\theta_1} \\ 0 & -\frac{3y_p}{L}m_{22}^{\theta_1} - \frac{3z_p}{L}m_{31}^{\theta_1} & \frac{3y_p}{L}(m_{31}^{\theta_1} - m_{32}^{\theta_1}) \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

其中 $m_{ij}^{\theta_1}$ 表節點 j ($j=1, 2$) 的廣義力矩 m_{ij}^{θ} 中保留至節點參數的一次項。



附錄 F 計算系統節點內力向量之數值程序

若已知當前的系統位移向量 \mathbf{U}_{n+1} 、速度向量 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 、加速度向量 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 及位移改正量 $\Delta\mathbf{U}$ ，則依下列步驟計算節點內力向量：

1. 由 $\Delta\mathbf{U}$ 擷取元素節點 j ($j=1, 2$) 的改正位移向量 $\Delta\mathbf{u}_j^G$ 、改正旋轉向量 $\Delta\phi_j^G$ ，由 \mathbf{U}_{n+1} 擷取元素節點 j ($j=1, 2$) 的扭轉率 β_j 。令 $\Delta\phi_j^G = \Delta\phi_j^G$ ，由 2.6 節的步驟可以決定當前元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S ($i=1, 2, 3$)、元素座標 \mathbf{e}_i 、元素弦長 ℓ 及元素節點旋轉參數 θ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)。由(2.75)式可得 ε_c ，由近似式 $v'_j \approx \theta_{3j}$ 、 $w'_j \approx -\theta_{2j}$ 、(2.23)、(2.24)式，可得近似的 $v = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b$ 、 $w = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c$ 。由近似式 $\theta_{3,x} \approx v''$ 、 $\theta_{2,x} \approx -w''$ 、(2.74)式可得 ε_0 ，將 ε_0 之節點值 ε_{0j} 代入(2.13)、(2.14)式，可得一較精確的 $v'_j = (1 + \varepsilon_{0j})\theta_{3j}$ 、 $w'_j = -(1 + \varepsilon_{0j})\theta_{2j}$ ，將其代入(2.23)、(2.24)式，可得一較精確的 $v = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b$ 、 $w = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c$ 。由 θ_{ij} 、 β_j 、(2.25)式可得 $\theta_1 = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d$ 。將以上求得之值代入(2.106)–(2.110)式可得 \mathbf{f}_i^θ ($i = a, b, c, d$)，將 \mathbf{f}_i^θ 組合成 \mathbf{f}_θ^D ，再由(2.112)式可得元素節點變形力向量 \mathbf{f}^D 。
2. 從當前的系統速度向量 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 及加速度向量 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 擷取每個元素的速度向量及加速度向量，並將其從總體座標轉至當前元素座標。令 $\dot{\mathbf{q}}_\varphi = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\phi}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\phi}_2, \dot{\boldsymbol{\beta}}\}$ 為當前元素座標上元素速度向量， $\dot{\mathbf{u}}_j$ 與 $\dot{\phi}_j$ ($j=1, 2$) 分別為節點 j 的絕對速度及角速度， $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \{\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2\}$ 為扭轉率對時間的一次微分，令 $\ddot{\mathbf{q}}_\varphi = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\phi}_1, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\phi}_2, \ddot{\boldsymbol{\beta}}\}$ 為當前元素座標上元素加速度向量， $\ddot{\mathbf{u}}_j$ 與 $\ddot{\phi}_j$ 分別為節點 j 的絕對加速度及角加速度， $\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \{\ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_2\}$ 為扭轉率對時間的二次微分。令 $\dot{\phi}_j = \dot{\phi}_j$ 、 $\ddot{\phi}_j = \ddot{\phi}_j$ ，由 $\dot{\mathbf{u}}_j$ 、 $\dot{\phi}_j$ 、(2.46)式可得角速度矩陣 $\boldsymbol{\Omega}$ ，由 $\ddot{\mathbf{u}}_j$ 、 $\ddot{\phi}_j$ 、 $\boldsymbol{\Omega}$ 、 $\dot{\phi}_j$ 、(2.55)式

可得角加速度矩陣 Λ ，由 $\ddot{\mathbf{u}}_j$ 、(2.51) 式可得 $\dot{\ell}$ ，由 (2.52) 式可得 $\dot{\theta}_{ij}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)，由 $\dot{\theta}_{ij}$ ($i=2, 3; j=1, 2$)、 ε_{0j} 、(2.53) 式可得 $\dot{\theta}_{ij}^*$ ，由 $\dot{\theta}_{ij}$ 、 $\dot{\ell}$ 、(2.126) 式可得 $\dot{\varepsilon}_c$ ，由 $\dot{\theta}_{ij}^*$ 、近似式 $\dot{\theta}_{3,x} = (1 - \varepsilon_0)\dot{v}_{,xx}$ 、 $\dot{\theta}_{2,x} = -(1 - \varepsilon_0)\dot{w}_{,xx}$ 、 $\dot{\ell}$ 、(2.125) 式可得 $\dot{\varepsilon}_0$ ，由 (2.58) 式、 $\ddot{\mathbf{u}}_j$ 、 $\ddot{\phi}_j$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}_j$ 、 $\ddot{\phi}_j$ 、 $\dot{\theta}_{ij}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 可得 $\ddot{\theta}_{ij}$ 、由 (2.59) 式、 $\ddot{\theta}_{ij}$ 、 $\dot{\theta}_{ij}$ ($i=2, 3; j=1, 2$)、 ε_{0j} 、 $\dot{\varepsilon}_{0j}$ 可得 $\ddot{\theta}_{ij}^*$ ，由 (2.57) 式可得 $\ddot{u}_2 = \ddot{\ell}$ 。

3. 將以上求得之值代入 (2.129) 式可得 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$)，將 \mathbf{f}_i^I 組合成元素節點慣性力向量 \mathbf{f}^I 。
4. 元素節點內力向量 $\mathbf{f}_\varphi = \mathbf{f}^I + \mathbf{f}^D$ ，並由 (2.1) 式標準座標轉換關係將元素節點內力向量從當前元素座標轉至總體座標，再將每個元素節點內力向量組合至系統節點內力向量 \mathbf{F} 。



附錄 G 各種元素節點自由度及其對應的元素矩陣

圖 2.1 中在元素節點 j ($j=1, 2$) 之元素斷面上任意點 Q 和剪心 P 對總體座標的擾動位移向量可表示如下

$$\delta \mathbf{u}_j^{GQ} = \{\delta u_j^{GQ}, \delta v_j^{GQ}, \delta w_j^{GQ}\} \quad (G.1)$$

$$\delta \mathbf{u}_j^{GP} = \{\delta u_j^G, \delta v_j^G, \delta w_j^G\}$$

本附錄中向量的上標 G 表示該向量的分量定義於總體座標系統上。

依據基本假設(3)，假設元素斷面沒有變形，所以 $\delta \mathbf{u}_j^{GQ}$ 與 $\delta \mathbf{u}_j^{GP}$ 的關係可表示成

$$\delta \mathbf{u}_j^{GP} = \delta \mathbf{u}_j^{GQ} + \delta \boldsymbol{\varphi}_j^G \times \mathbf{r}_{QPj}^G \quad (G.2)$$

$$\delta u_j^G = \delta u_j^{GQ} + \delta \varphi_{2j}^G r_{QP3j}^G - \delta \varphi_{3j}^G r_{QP2j}^G \quad (G.3)$$

$$\delta v_j^G = \delta v_j^{GQ} + \delta \varphi_{3j}^G r_{QP1j}^G - \delta \varphi_{1j}^G r_{QP3j}^G$$

$$\delta w_j^G = \delta w_j^{GQ} + \delta \varphi_{1j}^G r_{QP2j}^G - \delta \varphi_{2j}^G r_{QP1j}^G$$

其中 $\delta \boldsymbol{\varphi}_j^G = \{\delta \varphi_{1j}^G, \delta \varphi_{2j}^G, \delta \varphi_{3j}^G\}$ 表示元素節點 j 之斷面所受的擾動旋轉， $\delta \varphi_{ij}^G$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 為繞 X_i^G 軸的微小擾動旋轉， $\mathbf{r}_{QPj}^G = \{r_{QP1j}^G, r_{QP2j}^G, r_{QP3j}^G\} = \mathbf{A}_j^{GS} \mathbf{r}_{QPj}^S$ ， \mathbf{A}_j^{GS} 表示總體座標與在元素節點 j 之元素斷面座標間的轉換矩陣， $\mathbf{r}_{QPj}^S = \{0, y_{Pj} - y_{Qj}, z_{Pj} - z_{Qj}\}$ 表示元素節點 j 之斷面上從 Q 點到 P 點的向量，上標 S 表示該向量的分量定義在元素斷面座標上。

由(G.2)和(G.3)式可得

$$\delta \mathbf{q}_P = \mathbf{T}_{PQM} \delta \mathbf{q}_{QM} \quad (G.4)$$

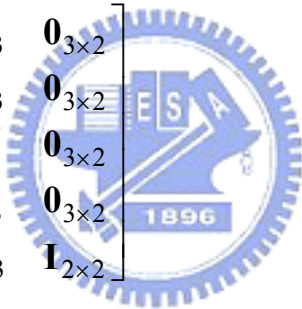
$$\delta \mathbf{q}_P = \mathbf{T}_{PQ} \delta \mathbf{q}_Q \quad (\text{G.5})$$

$$\delta \mathbf{q}_P = \{\delta \mathbf{u}_1^{GP}, \delta \boldsymbol{\varphi}_1^G, \delta \mathbf{u}_2^{GP}, \delta \boldsymbol{\varphi}_2^G, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (\text{G.6})$$

$$\delta \mathbf{q}_{QM} = \{\delta \mathbf{u}_1^{QM}, \delta \boldsymbol{\varphi}_1^G, \delta \mathbf{u}_2^{QM}, \delta \boldsymbol{\varphi}_1^G, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (\text{G.7})$$

$$\delta \mathbf{q}_Q = \{\delta \mathbf{u}_1^{GQ}, \delta \boldsymbol{\varphi}_1^G, \delta \mathbf{u}_2^{GQ}, \delta \boldsymbol{\varphi}_2^G, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (\text{G.8})$$

$$\mathbf{T}_{PQM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_1^{pqm} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_2^{pqm} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{G.9})$$

$$\mathbf{T}_{PQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_1^{pq} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_2^{pq} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{G.10})$$


其中

$$\delta \mathbf{u}_j^{QM} = \{\delta u_j^{GQ}, \delta v_j^G, \delta w_j^G\}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi}_j^G = \{\delta \varphi_{1j}^G, \delta \varphi_{2j}^G, \delta \varphi_{3j}^G\}, \quad \delta \boldsymbol{\beta} = \{\delta \beta_1, \delta \beta_2\}$$

$$\mathbf{T}_j^{pqm} = \begin{bmatrix} 0 & r_{QP3j}^G & -r_{QP2j}^G \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_j^{pq} = \begin{bmatrix} 0 & r_{QP3j}^G & -r_{QP2j}^G \\ -r_{QP3j}^G & 0 & r_{QP1j}^G \\ r_{QP2j}^G & -r_{QP1j}^G & 0 \end{bmatrix}$$

令 \mathbf{f}_{QM}^G 、 \mathbf{f}_Q^G 與 \mathbf{f}_P^G 為對應於擾動量 $\delta \mathbf{q}_{QM}$ 、 $\delta \mathbf{q}_Q$ 與 $\delta \mathbf{q}_P$ 的元素節點內力

向量。利用(G.4)式、(G.5)式可求得元素節點內力向量 \mathbf{f}_{QM}^G 、 \mathbf{f}_Q^G 與 \mathbf{f}_P^G 之關係如下

$$\mathbf{f}_{QM}^G = \mathbf{T}_{PQM}^t \mathbf{f}_P^G \quad (\text{G.11})$$

$$\mathbf{f}_Q^G = \mathbf{T}_{PQ}^t \mathbf{f}_P^G \quad (\text{G.12})$$

其中 \mathbf{f}_P^G 可由(2.97)式之 \mathbf{f}^D 經由式(2.1)的座標轉換求得，上標G表示元素節點內力向量定義於總體座標系統中。

令 \mathbf{k}_{QM}^G 、 \mathbf{k}_Q^G 與 \mathbf{k}^G 為對應於擾動量 $\delta\mathbf{q}_{QM}$ 、 $\delta\mathbf{q}_Q$ 與 $\delta\mathbf{q}_P$ 的元素剛度矩陣， \mathbf{m}_{QM}^G 、 \mathbf{m}_Q^G 與 \mathbf{m}^G 為對應於擾動量 $\delta\mathbf{q}_{QM}$ 、 $\delta\mathbf{q}_Q$ 與 $\delta\mathbf{q}_P$ 的元素質量矩陣。元素剛度矩陣 \mathbf{k}_{QM}^G 、 \mathbf{k}_Q^G 與 \mathbf{k}^G 的關係及元素質量矩陣 \mathbf{m}_{QM}^G 、 \mathbf{m}_Q^G 與 \mathbf{m}^G 的關係可表示成



$$\mathbf{k}_{QM}^G = \mathbf{T}_{PQM}^t \mathbf{k}^G \mathbf{T}_{PQM} \quad (\text{G.13})$$

$$\mathbf{k}_Q^G = \mathbf{T}_{PQ}^t \mathbf{k}^G \mathbf{T}_{PQ} \quad (\text{G.14})$$

$$\mathbf{m}_{QM}^G = \mathbf{T}_{PQM}^t \mathbf{m}^G \mathbf{T}_{PQM} \quad (\text{G.15})$$

$$\mathbf{m}_Q^G = \mathbf{T}_{PQ}^t \mathbf{m}^G \mathbf{T}_{PQ} \quad (\text{G.16})$$

其中 \mathbf{k}^G 與 \mathbf{m}^G 在(2.142)式中定義，上標G表示元素剛度矩陣與質量矩陣定義於總體座標系統中。

附錄 H 推導 lump mass 所產生之節點慣性力及質量矩陣

若元素節點 $j(j=1, 2)$ 有 Lump mass，則元素的質量矩陣須考慮 Lump mass 的貢獻。本文假設 Lump mass 為剛體，將其形心與梁斷面的形心重合，且其斷面積遠大於梁之斷面積，厚度 t 與梁元素長度 L 比 $t/L \ll 1$ ，在節點 j 之 Lump mass 上任意點的位置向量的擾動量 $\delta \bar{\mathbf{r}}_j^\ell$ 在固定元素座標 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ 軸方向之分量 $\delta \bar{r}_{ij}^\ell$ 可表示成

$$\begin{aligned}\delta \bar{r}_{1j}^\ell &= \delta \bar{u}_j - (y - y_p) \delta \varphi_{3j} + (z - z_p) \delta \varphi_{2j} \\ \delta \bar{r}_{2j}^\ell &= \delta \bar{v}_j - (z - z_p) \delta \varphi_{1j} \\ \delta \bar{r}_{3j}^\ell &= \delta \bar{w}_j + (y - y_p) \delta \varphi_{1j}\end{aligned}\quad (\text{H.1})$$

將(2.120)式中翹屈的貢獻去掉，可得在節點 j 之 Lump mass 上任意點的絕對加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_j^\ell$ 在固定元素座標 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ 軸方向之分量 \ddot{r}_{ij}^ℓ 可表示成

$$\begin{aligned}\ddot{r}_{1j}^\ell &= \ddot{u}_1 + \ddot{x}_{pj} - (1 + \varepsilon_c) x_j (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + (y - y_p) [\Omega_x \Omega_y - \alpha_z + 2(\Omega_y + \dot{\theta}_{2j}) \dot{\theta}_{1j} - \ddot{\theta}_{3j}] \\ &\quad + (z - z_p) [\Omega_x \Omega_z + \alpha_y + 2(\Omega_z + \dot{\theta}_{3j}) \dot{\theta}_{1j} + \ddot{\theta}_{2j}] \\ \ddot{r}_{2j}^\ell &= \ddot{v}_1 + x_j \Omega_x \Omega_y + x_j \alpha_z + 2\Omega_z \dot{x}_{pj} - (y - y_p) [(\Omega_x + \dot{\theta}_{1j})^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_{3j})^2] \\ &\quad + (z - z_p) [\Omega_y \Omega_z - \alpha_x + (2\Omega_z + \dot{\theta}_{3j}) \dot{\theta}_{2j} - \ddot{\theta}_{1j}] \\ \ddot{r}_{3j}^\ell &= \ddot{w}_1 + x_j \Omega_x \Omega_z - x_j \alpha_y - 2\Omega_y \dot{x}_{pj} - (z - z_p) [(\Omega_y + \dot{\theta}_{2j})^2 + (\Omega_x + \dot{\theta}_{1j})^2] \\ &\quad + (y - y_p) [\Omega_y \Omega_z + \alpha_x + (2\Omega_y + \dot{\theta}_{2j}) \dot{\theta}_{3j} + \ddot{\theta}_{1j}]\end{aligned}\quad (\text{H.2})$$

其中 x_j 在節點 j 的值 $x_1 = 0$ ， $x_2 = L$ ，及

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{2j} &= -(1 - \varepsilon_{oj}) \dot{w}'_j, & \dot{\theta}_{3j} &= (1 - \varepsilon_{oj}) \dot{v}'_j, & \ddot{\theta}_{2j} &= 2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{w}'_j - \ddot{w}'_j, \\ \ddot{\theta}_{3j} &= -2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{v}'_j + \ddot{v}'_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{pj} &= \frac{x_j(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)}{L} + \frac{x_j}{L} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^{x_j} (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx + \frac{\ell x_j}{L} (\Omega_z^2 + \Omega_y^2) \\
\dot{x}_{pj} &= \frac{x_j(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)}{L} \\
\alpha_x &= \frac{\ddot{\phi}_{11} + \ddot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{2} \Omega_z (\dot{\phi}_{21} + \dot{\phi}_{22}) - \frac{1}{2} \Omega_y (\dot{\phi}_{31} + \dot{\phi}_{32}) \\
\alpha_y &= -\frac{\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1}{\ell} - 2 \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell} \Omega_y + \Omega_z \Omega_x \\
\alpha_z &= \frac{\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1}{\ell} - 2 \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell} \Omega_z - \Omega_y \Omega_x
\end{aligned} \tag{H.3}$$

將(H.3)式 \ddot{x}_{pj} 、 \dot{x}_{pj} 、 α_y 、 α_z 及近似值 $\ell \approx L$ 代入(H.2)，可將絕對加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_j^\ell$ 在固定元素座標 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ 軸方向之分量 \ddot{r}_{ij}^ℓ 簡化成

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_{1j}^\ell &= \ddot{u}_j + (y - y_p) [\Omega_x \Omega_y - \alpha_z + 2(\Omega_y + \dot{\theta}_{2j}) \dot{\theta}_{1j} - \ddot{\theta}_{3j}] \\
&\quad + (z - z_p) [\Omega_x \Omega_z + \alpha_y + 2(\Omega_z + \dot{\theta}_{3j}) \dot{\theta}_{1j} + \ddot{\theta}_{2j}] \\
\ddot{r}_{2j}^\ell &= \ddot{v}_j - (y - y_p) [(\Omega_x + \dot{\theta}_{1j})^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_{3j})^2] \\
&\quad + (z - z_p) [\Omega_y \Omega_z - \alpha_x + (2\Omega_z + \dot{\theta}_{3j}) \dot{\theta}_{2j} - \ddot{\theta}_{1j}] \\
\ddot{r}_{3j}^\ell &= \ddot{w}_j - (z - z_p) [(\Omega_y + \dot{\theta}_{2j})^2 + (\Omega_x + \dot{\theta}_{1j})^2] \\
&\quad + (y - y_p) [\Omega_y \Omega_z + \alpha_x + (2\Omega_y + \dot{\theta}_{2j}) \dot{\theta}_{3j} + \ddot{\theta}_{1j}]
\end{aligned} \tag{H.4}$$

若考慮 lump mass 的影響，則(2.115)式右邊慣性力所做的虛功中除了原來的項外，還需再加入 lump mass 之慣性力所做的虛功 $\int_{V_\ell} \rho \delta \mathbf{r}_j^\ell \ddot{\mathbf{r}}_j^\ell dV_\ell$ ，將(H.1)、(H.3)及(H.4)代入 $\int_{V_\ell} \rho \delta \mathbf{r}_j^\ell \ddot{\mathbf{r}}_j^\ell dV_\ell$ 可得

$$\begin{aligned}
& \int_{V_\ell} \rho \delta \bar{\mathbf{r}}_j^\ell \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_j^\ell dV_\ell = \\
& \delta \bar{u}_j \left\{ \int \ddot{u}_j \rho_\ell t dA_\ell + y_p \int (\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{v}'_j + \Omega_x \Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \right. \\
& \quad - 2y_p \int (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)(-\dot{w}'_j + \Omega_y) \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad - z_p \int (\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{w}'_j - \Omega_x \Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad \left. - 2z_p \int (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \rho_\ell t dA_\ell \right\} \\
& + \delta \bar{v}_j \left\{ \int \ddot{v}_j \rho_\ell t dA_\ell + y_p \int (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)^2 \rho_\ell t dA_\ell \right. \\
& \quad + y_p \int (\dot{v}'_j + \Omega_z)^2 \rho_\ell t dA_\ell - z_p \int (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad \left. + z_p \int (\alpha_x + \ddot{\theta}_{1j} + \Omega_y \dot{v}'_j + \Omega_z \dot{w}'_j) \rho_\ell t dA_\ell \right\} \\
& + \delta \bar{w}_j \left\{ \int \ddot{w}_j \rho_\ell t dA_\ell + z_p \int (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)^2 \rho_\ell t dA_\ell \right. \\
& \quad + z_p \int (-\dot{w}'_j + \Omega_y)^2 \rho_\ell t dA_\ell - y_p \int (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad \left. - y_p \int (\alpha_x + \ddot{\theta}_{1j} + \Omega_y \dot{v}'_j + \Omega_z \dot{w}'_j) \rho_\ell t dA_\ell \right\} \\
& + \delta \varphi_{1j} \left\{ \int (y^2 + z^2 + y_p^2 + z_p^2)(\alpha_x + \ddot{\theta}_{1j} + \Omega_y \dot{v}'_j + \Omega_z \dot{w}'_j) \rho_\ell t dA_\ell \right. \\
& \quad - \int (z^2 - y^2 - y_p^2 + z_p^2)(-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad - y_p \int \ddot{w}_j \rho_\ell t dA_\ell + z_p \int \ddot{v}_j \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad \left. - y_p z_p \int (-\dot{w}'_j + \Omega_y)^2 \rho_\ell t dA_\ell + y_p z_p \int (\dot{v}'_j + \Omega_z)^2 \rho_\ell t dA_\ell \right\} \\
& + \delta \varphi_{2j} \left\{ \int z^2 (\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{w}'_j - \Omega_x \Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \right. \\
& \quad + 2 \int z^2 (\dot{v}'_j + \Omega_z)(\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell - z_p \int \ddot{u}_j \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad + z_p^2 \int (\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{w}'_j - \Omega_x \Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad + 2z_p^2 \int (\dot{v}'_j + \Omega_z)(\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell + 2y_p z_p \int (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \\
& \quad \left. - y_p z_p \int (\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{v}'_j + \Omega_x \Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \right\} \\
& + \delta \varphi_{3j} \left\{ \int y^2 (\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj} \dot{v}'_j + \Omega_x \Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \right. \\
& \quad \left. - 2 \int y^2 (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell + y_p \int \ddot{u}_j \rho_\ell t dA_\ell \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y_p^2 \int (\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{v}'_j + \Omega_x\Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j\Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \\
& - 2y_p^2 \int (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell - 2y_p z_p \int (\dot{v}'_j + \Omega_z)(\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \\
& - y_p z_p \int (\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{w}'_j - \Omega_x\Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j\Omega_x) \rho_\ell t dA_\ell \}
\end{aligned} \tag{H.5}$$

其中 t 、 ρ_ℓ 、 A_ℓ 分別為 lump mass 的厚度、密度、面積， y 、 z 為 lump mass 上任一點在 lump mass 斷面座標的座標值， y_p 、 z_p 為梁元素斷面剪力中心的座標值。

比較(2.115)式中等號兩邊 $\delta \mathbf{u}_i^{opt}$ ($i = a, b, c, d$) 的係數，則(2.129)式的節點慣性力需加入下式中 lump mass 所造成的節點慣性力：

$$\begin{aligned}
f_{1j}^\ell &= m_\ell \ddot{u}_j + m_\ell y_p (\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{v}'_j + \Omega_x\Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j\Omega_x) \\
& - 2m_\ell y_p (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)(-\dot{w}'_j + \Omega_y) - m_\ell z_p (\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{w}'_j - \Omega_x\Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j\Omega_x) \\
& - 2m_\ell z_p (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \\
f_{2j}^\ell &= m_\ell \ddot{v}_j + m_\ell y_p (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)^2 + m_\ell y_p (\dot{v}'_j + \Omega_z)^2 - m_\ell z_p (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \\
& + m_\ell z_p (\alpha_x + \ddot{\theta}_{1j} + \Omega_y\dot{v}'_j + \Omega_z\dot{w}'_j) \\
f_{3j}^\ell &= m_\ell \ddot{w}_j + m_\ell z_p (\dot{\theta}_{1j} + \Omega_x)^2 + m_\ell z_p (-\dot{w}'_j + \Omega_y)^2 - m_\ell y_p (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \\
& - m_\ell y_p (\alpha_x + \ddot{\theta}_{1j} + \Omega_y\dot{v}'_j + \Omega_z\dot{w}'_j) \\
m_{1j}^\ell &= m_\ell [(\frac{I_p}{A})_\ell + y_p^2 + z_p^2] (\alpha_x + \ddot{\theta}_{1j} + \Omega_y\dot{v}'_j + \Omega_z\dot{w}'_j) \\
& - m_\ell [(\frac{I_y - I_z}{A})_\ell - y_p^2 + z_p^2] (-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{v}'_j + \Omega_z) \\
& - m_\ell y_p \ddot{w}_j + m_\ell z_p \ddot{v}_j - m_\ell y_p z_p (-\dot{w}'_j + \Omega_y)^2 + m_\ell y_p z_p (\dot{v}'_j + \Omega_z)^2 \\
m_{2j}^\ell &= (\frac{m}{A} I_y)_\ell (\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{w}'_j - \Omega_x\Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j\Omega_x)
\end{aligned}$$

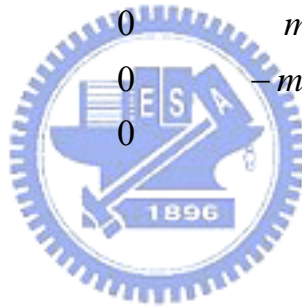
$$\begin{aligned}
& + 2\left(\frac{m}{A}I_y\right)_\ell(\dot{v}'_j + \Omega_z)(\dot{\theta}'_{1j} + \Omega_x) - m_\ell z_p \ddot{u}_j \\
& + m_\ell z_p^2(\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{w}'_j - \Omega_x\Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j\Omega_x) \\
& + 2m_\ell z_p^2(\dot{v}'_j + \Omega_z)(\dot{\theta}'_{1j} + \Omega_x) + 2m_\ell y_p z_p(-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{\theta}'_{1j} + \Omega_x) \\
& - m_\ell y_p z_p(\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{v}'_j + \Omega_x\Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j\Omega_x) \\
m_{3j}^\ell = & \left(\frac{m}{A}I_z\right)_\ell(\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{v}'_j + \Omega_x\Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j\Omega_x) \\
& - 2\left(\frac{m}{A}I_z\right)_\ell(-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{\theta}'_{1j} + \Omega_x) + m_\ell y_p \ddot{u}_j \\
& + m_\ell y_p^2(\alpha_z - 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{v}'_j + \Omega_x\Omega_y + \ddot{v}'_j - 2\dot{w}'_j\Omega_x) \\
& - 2m_\ell y_p^2(-\dot{w}'_j + \Omega_y)(\dot{\theta}'_{1j} + \Omega_x) - 2m_\ell y_p z_p(\dot{v}'_j + \Omega_z)(\dot{\theta}'_{1j} + \Omega_x) \\
& - m_\ell y_p z_p(\alpha_y + 2\dot{\varepsilon}_{oj}\dot{w}'_j - \Omega_x\Omega_z - \ddot{w}'_j - 2\dot{v}'_j\Omega_x)
\end{aligned} \tag{H.6}$$

其中 $m_\ell = \rho_\ell t A_\ell$ 為 lump mass 的質量， $(\)_\ell$ 代表 lump mass 的性質。

對應於 lump mass 之元素節點質量矩陣可以由(H.6)對元素節點加速度向量 $\ddot{\mathbf{q}}_\varphi$ (見(2.139)式)微分求得，將其加入(2.138)式之元素質量矩陣之相對應位置中，可得到含 Lump mass 的元素質量矩陣。Lump mass 所造成之元素節點質量矩陣可表示成

$$\mathbf{m}_\ell = \begin{bmatrix} m_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{m}{A}I_p)_\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{m}{A}I_y)_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{m}{A}I_z)_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -m_\ell z_p & m_\ell y_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_\ell z_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_\ell y_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_\ell z_p & -m_\ell y_p & m_\ell (y_p^2 + z_p^2) & 0 & 0 & 0 \\ -m_\ell z_p & 0 & 0 & 0 & m_\ell z_p^2 & -m_\ell y_p z_p & 0 \\ m_\ell y_p & 0 & 0 & 0 & -m_\ell y_p z_p & m_\ell y_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(H.7)

LIST OF PAPERS

A. Referred Papers

1. H.H. Chen, W.Y. Lin, K.M. Hsiao, Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with generic open section. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195(2006) 2334–2370.
2. H.H. Chen, K.M. Hsiao, Coupled axial–torsional vibration of thin-walled Z-section beam induced by boundary conditions. *Thin-walled Struct.* 45(6) 2007 573-583.
3. H.H. Chen, K.M. Hsiao, Quadruply coupled linear free vibrations of thin-walled beams with a generic open section. *Engrg. Struct.* (Accepted), (2007).

B. Conference Papers

1. K.M. Hsiao, H.H. Chen and C.C. Lin, Lateral-torsional buckling analysis of a doubly symmetric thin-walled beam under axial force and bending moment, in: *Proceedings of The International Conference on Advances in Structures*, Sydney, Australia (2003).
2. H.H. Chen, F.C. Liu and K.M. Hsiao, Co-rotational finite element formulation for doubly symmetric thin-walled beams with variable open section, in: *Proceedings of The 16th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Czestochowa, Poland (2005).
3. H.H. Chen, F.C. Liu and K.M. Hsiao, Torsional buckling analysis analysis for doubly symmetric thin-walled beams with variable open section, in: *Proceedings of The 6th European Solid Mechanics Conference*, Budapest, Hungary (2006).
4. K.M. Hsiao, H.H. Chen, Coupled vibrations of thin-walled beams with monosymmetric open section, in: *12th Asia Pacific Vibration Conference*, Sapporo, Japan (2007).