第二章　非剛性隔震儲存槽之流體動力分析

本章將根據 Haroun 所提之理論，求解拉普拉斯方程式得到含流體自由液面激盪反應之流場速度勢，同時利用 Lagrange's Equation 建立非剛性儲存槽之運動方程式，進而推導出非剛性儲存槽結構－流體耦合系統(shell-liquid coupled system)之運動方程式。

圖 2.1 所示為非剛性圓柱型儲存槽分析模型示意圖，本文採用徑向(r)－角度(θ)－高度(z)之三維圓柱座標系統。由於非剛性儲存槽之槽殼徑向位移與所在之徑向、角度及高度有關，因此以$w(z,\theta,t)$表示之。

2.1流體動力分析

本文假設液體具不可壓縮性(incompressible)、非旋性(irrotational)及非黏滯性(invicid)，且儲存槽在$\theta=0$之方向受到地表加速度$\ddot{x}_g$之擾動。根據流體力學理論分析可知，若 **F** 代表一非旋轉的流場，則由向量分析可知，$\nabla\times\vec{\mathbf{F}}=\vec{0}$，因此，必存在一純量函數$\phi$使得$\mathbf{F}=\nabla\phi$。其中，$\phi$即為此流場之速度勢(velocity potential)。此外，由流體之連續條件可知，流場$\mathbf{F}$須滿足

$$div(\rho_l\mathbf{F})=-\frac{\partial\rho_l}{\partial t} \tag{2.1-1}$$

其中，ρ_l為流體之密度。當流體為不可壓縮時，ρ_l即為常數，式(2.1-1)可簡化為

$$div(\mathbf{F})=0 \tag{2.1-2a}$$

或 $\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi=0$ (2.1-2b)

式(2.1-2b)即為拉普拉斯方程式(Laplace Equation)。若將式(2.1-2b)進一步展開可到

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{2.1-3}$$

此外，由速度勢函數可計算流體在 $\mathbf{n}$ 方向之速率為 $v_n=\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}$，動態液壓力為 $p=-\rho_l\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 。

流場速度勢 $\phi(r,\theta,z,t)$ 尚須滿足下列之邊界條件：

(1)不考慮垂直地震力，因此液體速度在槽底 $(z=0)$ 為零

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \tag{2.1-4a}$$

(2)液體之徑向速度和非剛性槽殼在槽壁($r=R$)之速度一致

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R}=\dot{w}(z,t)\cos\theta+\dot{x}_g\cos\theta+\dot{x}_b\cos\theta \tag{2.1-4b}$$

其中 $w(z,t)$ 為槽壁之徑向位移，$\dot{x}_g$ 為地表之速度。

此外，在自由液面處—高度為 $z=H+d(r,\theta,t)$，其中，$d(r,\theta,t)$ 為自由液面上任一位置相對於靜止表面(quiescent liquid free surface)之垂直波動位移有兩個條件必須加以考慮：

(1)流體沒有產生剝離(separation)現象，並且滿足 Bernoulli Equation，即

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{p}{\rho_l}+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi+g(z-H)=0$$

(2)自由液面上之壓力為零(假設儲存槽槽頂開放)，因此可得到以下兩個邊界條件：

$$\rho_l \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=H} + \rho_l g d = 0 \qquad (2.1\text{-}4c)$$

(自由液面的壓力平衡式，其中 g 為重力加速度，詳附錄 A)

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=H} = \frac{\partial d}{\partial t} \qquad (2.1\text{-}4d)$$

(自由液面垂直速度之一致性)。

根據分離變數法，令 $\phi = \hat{R}(r)\hat{\theta}(\theta)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$ 並代入式(2.1-3)可得

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2}\hat{\theta}\hat{Z}\hat{T} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{R}}{\partial r}\hat{\theta}\hat{Z}\hat{T} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \theta^2}\hat{R}\hat{Z}\hat{T} + \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2}\hat{R}\hat{\theta}\hat{T} = 0 \qquad (2.1\text{-}5)$$

將上式同除以 $\hat{R}\hat{\theta}\hat{Z}\hat{T}$ ，可得

$$\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\hat{\theta}}\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\hat{Z}}\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.1\text{-}6)$$

再將式(2.1-6)乘上 r^2 ，可得

$$\frac{r^2}{\hat{R}}\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{r}{\hat{R}}\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{r^2}{\hat{Z}}\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.1\text{-}7)$$

或

$$\frac{r^2}{\hat{R}}\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{r}{\hat{R}}\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{r^2}{\hat{Z}}\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\hat{\theta}}\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \theta^2} \qquad (2.1\text{-}8)$$

由於上式等號兩邊為不同自變數之函數，等號成立的條件為兩邊皆等於同一常數，令該常數為 n^2($-n^2$ 不合)，則可得以下二式(詳附錄 B)：

$$\frac{r^2}{\hat{R}}\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{r}{\hat{R}}\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{r^2}{\hat{Z}}\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = n^2 \qquad (2.1\text{-}9)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \theta^2} + n^2 \hat{\theta} = 0 \tag{2.1-10}$$

首先求解$\hat{\theta}(\theta)$。式(2.1-10)之通解可表示如下：

$$\hat{\theta}(\theta) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta) \tag{2.1-11}$$

其中，未定係數 A 與 B 利用幾何對稱性關係，亦即

$$\hat{\theta}(\theta) = \hat{\theta}(-\theta)$$

可求出 B=0，則式(2.1-11)可簡化為

$$\hat{\theta}(\theta) = A\cos(n\theta) \tag{2.1-12}$$

此外，根據式(2.1-9)可進一步得到

$$\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} = -\frac{1}{\hat{Z}}\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} \tag{2.1-13}$$

同樣地，因上式等號兩邊為不同自變數之函數，等號成立的條件為兩邊皆等於同一常數，令該常數為λ，即

$$\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} = \lambda \tag{2.1-14}$$

與

$$-\frac{1}{\hat{Z}}\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = \lambda \tag{2.1-15}$$

將式(2.1-14)乘上$r^2\hat{R}$，經整理後可得

$$r^2\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + r\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} - \left(r^2\lambda + n^2\right)\hat{R} = 0 \tag{2.1-16}$$

此外，式(2.1-15)可改寫為

$$\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} + \lambda\hat{Z} = 0 \tag{2.1-17}$$

以下針對λ為正、負及零等三種狀況討論其數值解。

(a)當 $\lambda=-k^2, k\in R$ 且 $k>0$

式(2.1-16)可表示為貝索方程式(Bessel's differential equation)如下

$$r^2\frac{\partial^2\hat{R}}{\partial r^2}+r\frac{\partial\hat{R}}{\partial r}+\left(r^2k^2-n^2\right)\hat{R}=0 \tag{2.1-18}$$

其通解為

$$\hat{R}(r)=A_{1n}J_n(kr)+A_{2n}Y_n(kr) \tag{2.1-19}$$

其中，

J_n 為n階第一類貝索函數；

Y_n 為n階第二類貝索函數；

A_{1n} 、 A_{2n} 為待定常數。

由於 $\lim\limits_{r\to 0}Y_n(kr)\to-\infty$ ，顯然與物理現象不符，因此 A_{2n} 必須等於0，因此式(2.1-19)可簡化為

$$\hat{R}(r)=A_{1n}J_n(kr) \tag{2.1-20}$$

另一方面，當 $\lambda<0$ 時，式(2.1-17)可改寫為

$$\frac{\partial^2\hat{Z}}{\partial z^2}-k^2\hat{Z}=0 \tag{2.1-21}$$

式(2.1-21)之通解為

$$\hat{Z}(z)=B_1\cosh(kz)+B_2\sinh(kz) \tag{2.1-22}$$

其中， B_1, B_2 為待定常數。

由槽底界面垂直向速度為零之邊界條件(式(2.1-4a))，可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(r,\theta,0,t)=0=\hat{R}\hat{\theta}\hat{T}\left.\frac{\partial\hat{Z}}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{2.1-23}$$

或相當於

$$\left.\frac{\partial \hat{Z}}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \tag{2.1-24}$$

可得 $B_2 = 0$ 。因此式(2.1-21)可簡化為

$$\hat{Z}(z) = B_1 \cosh(kz) \tag{2.1-25}$$

綜合上述推導結果可知，當 $\lambda < 0$ 時，速度勢為

$$\phi = \phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} J_n(kr)][A \cos(n\theta)][B_1 \cosh(kz)]\hat{T}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}_{1n}(t)\cos(n\theta) J_n(kr)\cosh(kz) \tag{2.1-26}$$

其中，$\hat{T}_{1n}(t) = A_{1n} A B_1 \hat{T}(t)$ 。

$\boxed{\text{(b)當 } \lambda = 0}$

將式(2.1-16)改寫如下：

$$r^2 \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \hat{R}}{\partial r} - n^2 \hat{R} = 0 \tag{2.1-27}$$

其通解為

$$\hat{R}(r) = D_{1n} r^n + D_{2n} r^{-n} \tag{2.1-28}$$

由於 $\lim_{r \to 0} r^{-n} = \infty$ ，故須 $D_{2n} = 0$ ，否則此解將與物理現象不符。因此，$\hat{R}(r)$ 可簡化為

$$\hat{R}(r) = D_{1n} r^n \tag{2.1-29}$$

另一方面，當 $\lambda = 0$ 時，式(2.1-17)可表示為

$$\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = 0 \tag{2.1-30}$$

其通解為

$$\hat{Z}(z) = B_5 z + B_6 \tag{2.1-31}$$

同樣地，由式(2.1-24)之條件可得$B_5=0$，因此式(2.1-31)可簡化為

$$\hat{Z}(z)=B_6 \tag{2.1-32}$$

綜合上述推導的結果可知，當$\lambda=0$時，速度勢為

$$\phi=\phi_2=\sum_{n=1}^{\infty}B_6\left(D_{1n}r^n\right)\left(A\cos(n\theta)\right)\hat{T}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{T}_{2n}(t)\cos(n\theta)r^n \tag{2.1-33}$$

其中，$\hat{T}_{2n}=AB_6D_{1n}\hat{T}(t)$。

$\boxed{\text{(c)當 } \lambda=+\mu^2,\mu>0}$

式(2.1-16)可改寫如下：

$$r^2\frac{\partial^2\hat{R}}{\partial r^2}+r\frac{\partial\hat{R}}{\partial r}-\left(r^2\mu^2+n^2\right)\hat{R}=0 \tag{2.1-34}$$

其通解為

$$\hat{R}(r)=C_{1n}I_n(\mu r)+C_{2n}K_n(\mu r) \tag{2.1-35}$$

其中，

I_n為 n 階第一類修正貝索函數；

K_n為 n 階第二類修正貝索函數；

C_{1n} 、 C_{2n} 為待定係數

由於$\lim_{r\to 0}K_n(\mu r)=\infty$，因此$C_{2n}$必須為 0，否則此解將與物理現象不符，故$\hat{R}(r)$可簡化為

$$\hat{R}(r)=C_{1n}I_n(\mu r) \tag{2.1-36}$$

另一方面，當$\lambda=\mu^2$時，式(2.1-17)可表示為

$$\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2}+\mu^2\hat{Z}=0 \tag{2.1-37}$$

其通解為

$$\hat{Z}(z)=B_3\cos(\mu z)+B_4\sin(\mu z) \tag{2.1-38}$$

同樣地，由式(2.1-24)之條件可得$B_4=0$，因此式(2.1-38)可簡化為

$$\hat{Z}(z)=B_3\cos(\mu z) \tag{2.1-39}$$

綜合上述推導的結果可知，當$\lambda>0$時，速度勢為

$$\phi=\phi_3=\sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}I_n(\mu r))(A\cos(n\theta))B_3\cos(\mu z)\hat{T}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{T}_{3n}(t)\cos(n\theta)I_n(\mu r)\cos(\mu z) \tag{2.1-40}$$

其中， $\hat{T}_{3n}(t)=C_{1n}AB_3\hat{T}(t)$ 。

組合以上三種情況，流場速度勢之全解可表示如下

$$\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3$$

$$\phi_1=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{T}_{1n}(t)\cos(n\theta)J_n(kr)\cosh(kz) \tag{2.1-41}$$

$$\phi_2=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{T}_{2n}(t)\cos(n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \tag{2.1-42}$$

$$\phi_3=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{T}_{3n}(t)\cos(n\theta)I_n(\mu r)\cos(\mu z) \tag{2.1-43}$$

若分別針對ϕ_1、ϕ_2及ϕ_3滿足邊界條件式(2.1-4b)與式(2.1-4c)的情況加以討論，可將速度勢分為與槽殼作同步運動之衝擊(impulsive)速度勢，以及流體對槽壁作對流(convective)運動之流體速度勢。

首先討論ϕ須滿足邊界條件式(2.1-4c)的情況：

第一種情況

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right|_{z=H} = gd(r,\theta,t) \qquad (2.1\text{-}45a)$$

$$\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right|_{z=H} = 0 \qquad (2.1\text{-}45b)$$

$$\left.\frac{\partial \phi_3}{\partial t}\right|_{z=H} = 0 \qquad (2.1\text{-}45c)$$

第二種情況

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right|_{z=H} = 0 \qquad (2.1\text{-}46a)$$

$$\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right|_{z=H} = gd(r,\theta,t) \qquad (2.1\text{-}46b)$$

$$\left.\frac{\partial \phi_3}{\partial t}\right|_{z=H} = 0 \qquad (2.1\text{-}46c)$$

第三種情況

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right|_{z=H} = 0 \qquad (2.1\text{-}47a)$$

$$\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right|_{z=H} = 0 \qquad (2.1\text{-}47b)$$

$$\left.\frac{\partial \phi_3}{\partial t}\right|_{z=H} = gd(r,\theta,t) \qquad (2.1\text{-}47c)$$

其中，第二種情況及第三種情況之結果均會發生矛盾不合理的情況(詳附錄C)，因此本文主文部分僅針對第一種情況推導。由式(2.1-45c)可得

$$\left.\frac{\partial \phi_3}{\partial t}\right|_{z=H} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\hat{T}}_{3n}(t)\cos(n\theta) I_n(\mu r)\cos(\mu H) = 0$$

上式恆成立的條件為 $\cos(\mu H) = 0$ ，即

$$\mu_i H = \frac{(2i-1)\pi}{2} = \lambda_i \qquad (i = 1,2,\cdots\cdots,\infty)$$

或

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{H}$$

將上式代回式(2.1-44)可得

$$\phi_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\hat{T}_{3ni}(t)\cos(n\theta)I_n\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right) \tag{2.1-48}$$

當儲存槽受到地震擾動時，若不考慮儲存槽圓周不完美的情況，則液體反應只有 $\cos\theta$-mode 會被激發，因此若只考慮 n=1 的模態，式(2.1-42)、式(2.1-43)及式(2.1-44)可簡化如下：

$$\phi_1 = \hat{T}_1(t)\cos(\theta)J_1(kr)\cosh(kz) \tag{2.1-49}$$

$$\phi_2 = \hat{T}_2(t)\cos(\theta)\frac{r}{R} \tag{2.1-50}$$

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^{\infty}\hat{T}_{3i}(t)\cos(\theta)I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right) \tag{2.1-51}$$

此外，ϕ 亦須滿足徑向速度一致之邊界條件，即式(2.1-4b)，因此

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{w}(z,t)\cos\theta + \dot{x}_g\cos\theta + \dot{x}_b\cos\theta$$

其中，$w(z,t)$ 為槽殼之徑向位移。

茲分為下列三種情況討論：

第一種情況

$$\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \tag{2.1-52a}$$

$$\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{x}_g(t)\cos\theta + \dot{x}_b(t)\cos\theta \tag{2.1-52b}$$

$$\left.\frac{\partial\phi_3}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{w}(z,t)\cos\theta \tag{2.1-52c}$$

第二種情況

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{x}_g(t)\cos\theta + \dot{x}_b(t)\cos\theta \tag{2.1-53a}$$

$$\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \tag{2.1-53b}$$

$$\left.\frac{\partial \phi_3}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{w}(z,t)\cos\theta \tag{2.1-53c}$$

第三種情況

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{w}(z,t)\cos\theta \tag{2.1-54a}$$

$$\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{x}_g(t)\cos\theta + \dot{x}_b(t)\cos\theta \tag{2.1-54b}$$

$$\left.\frac{\partial \phi_3}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \tag{2.1-54c}$$

其中，第二種情況及第三種情況均會發生矛盾與不合理的情況（詳附錄 D），本文僅針對第一種情況推導。由式(2.1-52a)可得

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = \hat{T}_1(t)\cos(\theta)kJ_1'(kR)\cosh(kz) = 0$$

上式恆成立的條件為 $J_1'(kR)=0$ ，若令 ε_j 為 $J_1'(kR)=0$ 之根，即

$$J_1'(k_jR) = J_1'(\varepsilon_j) = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots\cdots,\infty)$$

其中， $k_j = \dfrac{\varepsilon_j}{R}$

將上式代回式(2.1-49)可得

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{T}_{1j}(t)\cos(\theta)J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)\cosh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}z\right) \tag{2.1-55}$$

由式(2.1-52b)可知

$$\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = \hat{T}_2(t)\frac{1}{R}\cos\theta = \dot{x}_g(t)\cos\theta + \dot{x}_b(t)\cos\theta$$

由上式可得到 $\hat{T}_2(t) = R(\dot{x}_g(t) + \dot{x}_b(t))$。

將 $\hat{T}_2(t)$ 代回式(2.1-50) 可將 ϕ_2 改寫為

$$\phi_2 = \left(\dot{x}_g(t)+\dot{x}_b(t)\right)r\cos\theta \tag{2.1-56}$$

由式(2.1-52c)可得

$$\left.\frac{\partial\phi_3}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{i=1}^{\infty}\hat{T}_{3i}(t)\cos\theta I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)=\dot{w}(z,t)\cos\theta$$

將上式乘以 $\cos\left(\frac{\lambda_s}{H}z\right)$，並對 z 積分，可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\hat{T}_{3i}(t)I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)\int_0^H\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)\cos\left(\frac{\lambda_s}{H}z\right)dz=\int_0^H\dot{w}(z,t)\cos\left(\frac{\lambda_s}{H}z\right)dz \tag{2.1-57}$$

其中，$\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)$ 滿足正交性質 $\int_0^H\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)\cos\left(\frac{\lambda_s}{H}z\right)dz=\begin{cases}0 & i\neq s\\ \frac{H}{2} & i=s(s\geq 1)\end{cases}$

當 $i=s$ 時，式(2.1-57)可化簡為

$$\frac{H}{2}\hat{T}_{3i}(t)I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)=\int_0^H\dot{w}(z,t)\cos\left(\frac{\lambda_s}{H}z\right)dz$$

經整理後可得

$$\hat{T}_{3i}(t)=\dot{W}(t)\frac{2\int_0^H\psi(z)\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)dz}{HI_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}$$

將上式代回式(2.1-51)得到 ϕ_3 如下

$$\phi_3=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2C_1(\lambda_i)}{HI_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}\right]\cos\theta I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)\dot{W}(t) \tag{2.1-58}$$

假設非剛性儲存槽受到地震擾動時(入侵角度 $\theta=0$)之徑向振動模態如一懸臂梁(儲存槽斷面仍保持圓形，如圖 2.1)，因此可將槽壁之振動速度表示為 $\dot{w}(z,t)=\psi(z)\dot{W}(t)$。本文假設非剛性儲存槽其第一振動模態為 $\psi(z)=1-\cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right)$，因此 C_1 可計算如下：

$$C_1(\lambda_i)=\int_0^H \psi(z)\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)dz=\left[\frac{H}{\lambda_i}-\frac{\left(\frac{H}{\lambda_i}\right)\cos\left(\frac{\pi H}{2L}\right)}{1-\left(\frac{H}{\lambda_i}\right)^2\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2}\right]\sin(\lambda_i)$$

根據ϕ_1、ϕ_2及ϕ_3各自滿足之邊界條件，可將其視為流體對槽壁之對流速度勢與流體對槽壁之衝擊速度勢。因此，ϕ_1必須滿足式(2.1-4d)自由液面垂直向速度一致之邊界條件，亦即

由(2.1-4d)式 $$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right|_{z=H}=\sum_{j=1}^{\infty}\hat{T}_{1j}(t)\cos\theta J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)\left(\frac{\varepsilon_j}{R}\right)\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)=\frac{\partial d(r,\theta,t)}{\partial t} \qquad (2.1\text{-}59)$$

令 $d(r,\theta,t)=\sum_{j=1}^{\infty}D_j(t)\frac{J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)}{J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta$

其中，$D_j(t)$為流體激盪模態位移；$\frac{J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)}{J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta$為流體激盪反應之模態。

式(2.1-59)可進一步改寫為$\sum_{j=1}^{\infty}\hat{T}_{1j}(t)\cos\theta J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)\left(\frac{\varepsilon_j}{R}\right)\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)=\sum\dot{D}_j(t)\frac{J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)}{J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta$

由比較上式後可知

$$\hat{T}_{1j}(t)=\frac{R}{\varepsilon_j}\frac{\dot{D}_j(t)}{\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)J_1(\varepsilon_j)}$$

代回(2.1-55)式可得

$$\phi_1=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R}{\varepsilon_j}\frac{\dot{D}_j(t)\cosh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}z\right)}{\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)}\frac{J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)}{J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta \qquad (2.1\text{-}60)$$

故流體速度勢ϕ可表示為

$$
\begin{aligned}
\phi &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R}{\varepsilon_j} \frac{\dot{D}_j(t)\cosh\left(\frac{\varepsilon_j}{R} z\right)}{\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R} H\right)} \frac{J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R} r\right)}{J_1(\varepsilon_j)} \cos\theta + \left(\dot{x}_g(t) + \dot{x}_b(t)\right) r\cos\theta + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2C_1(\lambda_i)}{HI_1'\left(\frac{\lambda_i}{H} R\right)}\right] \cos\theta I_1\left(\frac{\lambda_i}{H} r\right) \cos\left(\frac{\lambda_i}{H} z\right) \dot{W}(t)
\end{aligned}
\tag{2.1-61}
$$

2.2 非剛性隔震儲存槽之基底剪力與傾覆力矩

根據式(2.1-61)之流體速度勢可計算流體之動水壓如下

$$
\begin{aligned}
P_d &= -\rho_l \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\Bigg|_{r=R} \\
&= -\rho_l \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{R}{\varepsilon_j} \frac{\ddot{D}_j(t)\cosh\left(\frac{\varepsilon_j}{R} z\right)}{\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R} H\right)} \cos\theta + \left(\ddot{x}_g(t) + \ddot{x}_b(t)\right) R\cos\theta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2C_1(\lambda_i)}{HI_1'\left(\frac{\lambda_i}{H} R\right)} \ddot{W}(t) \cos\theta I_1\left(\frac{\lambda_i}{H} R\right) \cos\left(\frac{\lambda_i}{H} z\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.2-1}
$$

由動水壓施加於槽壁之側向作用力，以及槽殼本身之慣性力，吾人可分別求得儲存槽之基底剪力(S)及傾覆力矩($M_{O.T.}$)為

$$
S = \int_0^H \int_0^{2\pi} P_d R(\cos\theta) d\theta dz + \int_0^L \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_s r\left(\ddot{w}(z,t) + \ddot{x}_g(t) + \ddot{x}_b(t)\right) d\theta dr dz
$$

上式積分後可整理如下：

$$
\begin{aligned}
S = &-M_l \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R}{H\varepsilon_j^2} \ddot{D}_j(t) - M_l\left(\ddot{x}_g(t) + \ddot{x}_b(t)\right) - M_l \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2C_1(\lambda_i)}{RH\lambda_i I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H} R\right)}\right] I_1\left(\frac{\lambda_i}{H} R\right) \sin(\lambda_i) \ddot{W}(t) + M_s\left(\ddot{x}_g(t) + \ddot{x}_b(t)\right) \\
&+ M_s\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \ddot{W}(t)
\end{aligned}
\tag{2.2-2}
$$

其中，$M_l = \rho_l \pi R^2 H$ 為流體總質量；$M_s = \int_V dm = \int_0^L \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_s r d\theta dr dz = \rho_s 2\pi RhL$ 為槽殼質量；ρ_s 為槽殼密度，L 為儲存槽高度，h 為槽壁厚度。

$$
M_{O.T.} = \int_0^H \int_0^{2\pi} P_d R(\cos\theta) z d\theta dz + \int_0^L \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_s r\left[\ddot{x}_g(t) + \ddot{w}(t) + \ddot{x}_b(t)\right] z d\theta dr dz
$$

上式積分後可整理如下：

$$M_{O.T.}=-M_l\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\int_0^H z\cosh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}z\right)dz}{\varepsilon_j H\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)}\ddot{D}_j(t)-\frac{M_lH}{2}\left(\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}_b(t)\right)-M_l\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2C_1(\lambda_i)}{RH^2I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}\right]I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)\int_0^H z\cos\left(\frac{\lambda_i}{H}z\right)dz\ddot{W}(t)$$
$$+\frac{M_sL}{2}\left(\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}_b(t)\right)+M_s\left(\frac{L}{2}-\frac{2L}{\pi}+\frac{4L}{\pi^2}\right)\ddot{W}(t) \qquad (2.2\text{-}3)$$

2.3非剛性隔震儲存槽之流體激盪動力方程式

本文進一步將邊界條件式(2.1-4c)、式(2.1-4d)整理成一個以流場速度勢表示之自由液面邊界條件，式(2.1-4c)可對時間 t 取一次偏微分如下：

$$\rho_l\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{z=H}+\rho_l g\frac{\partial d(r,\theta,t)}{\partial t}=0$$

將式(2.1-2d)代入上式可得到

$$\rho_l\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{z=H}+\rho_l g\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=H}=0 \qquad (2.3\text{-}1)$$

將ϕ_1、ϕ_2及ϕ_3代入式(2.3-1)可得：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R}{\varepsilon_j}\frac{\dddot{D}_j(t)\cosh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)}{\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)}\frac{J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)}{J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta+\left(\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}_b(t)\right)r\cos\theta$$
$$+g\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\dot{D}_j(t)\frac{J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)}{J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2\lambda_iC_1(\lambda_i)}{H^2I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}\right]\dot{W}(t)\cos\theta I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)\sin(\lambda_i)\right\}=0 \qquad (2.3\text{-}2)$$

將式(2.3-2)乘上$rJ_1\left(\frac{\varepsilon_s}{R}r\right)$，並對 r 作積分可得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R}{\varepsilon_j}\frac{\ddot{D}_j(t)\cosh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)\int_0^R rJ_1\left(\frac{\varepsilon_s}{R}r\right)J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)dr}{\sinh\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta+\left(\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}_b(t)\right)\cos\theta\int_0^R r^2J_1\left(\frac{\varepsilon_s}{R}r\right)dr$$

$$+g\sum_{j=1}^{\infty}\dot{D}_j(t)\frac{\int_0^R rJ_1\left(\frac{\varepsilon_s}{R}r\right)J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)dr}{J_1(\varepsilon_j)}\cos\theta-g\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2\lambda_iC_1(\lambda_i)}{H^2I_1{}'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}\right]\int_0^R rJ_1\left(\frac{\varepsilon_s}{R}r\right)I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)dr\dot{W}(t)\cos\theta\sin(\lambda_i)=0 \qquad (2.3\text{-}3)$$

根據 Bessel Function 的正交性質，

$$\int_0^R rJ_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)J_1\left(\frac{\varepsilon_s}{R}r\right)dr=\begin{cases}0 & j\neq s\\ \frac{R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_j^2}\right)J_1^2(\varepsilon_j) & j=s\end{cases}$$

可將式(2.3-3)簡化如下：

$$\coth\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)J_1(\varepsilon_j)\frac{R^3(\varepsilon_j^2-1)}{2\varepsilon_j^3}\ddot{D}_j(t)+\left(\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}_b(t)\right)\int_0^R r^2J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)dr+g\frac{R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_j^2}\right)J_1(\varepsilon_j)\dot{D}_j(t)$$

$$-g\dot{W}(t)\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2\lambda_iC_1(\lambda_i)}{H^2I_1{}'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}\right]\sin(\lambda_i)\int_0^R rJ_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)dr=0 \qquad (2.3\text{-}4)$$

其中，$\int_0^R r^2J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)dr=\frac{R^3}{\varepsilon_j^2}J_1(\varepsilon_j)$。

假設初始條件 $\ddot{D}_j(0)=\ddot{W}(0)=\ddot{x}_g(0)=\ddot{x}_b(0)=0$ 與 $D_j(0)=W(0)=x_g(0)=x_b(0)=0$，將式(2.3-4)對時間 t 積分一次可得：

$$\coth\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)J_1(\varepsilon_j)\frac{R^3(\varepsilon_j^2-1)}{2\varepsilon_j^3}\dot{D}_j(t)+\frac{R^3}{\varepsilon_j^2}J_1(\varepsilon_j)\left(\dot{x}_g(t)+\dot{x}_b(t)\right)+g\frac{R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_j^2}\right)J_1(\varepsilon_j)D_j(t)$$

$$-\left\{g\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2\lambda_iC_1(\lambda_i)}{H^2I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}\right]\sin(\lambda_i)\int_0^R rJ_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)dr\right\}W(t)=0 \qquad (2.3\text{-}5)$$

若液體激盪反應僅考慮前面 m 個振態($j=1\sim m$)，則式(2.3-5)可以矩陣型式表示如下：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{M}_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{D}}\\ \ddot{W}\\ \ddot{x}_b\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{D}\\ W\\ x_b\end{Bmatrix}=-\{\mathbf{M}_2\}\ddot{x}_g \tag{2.3-6}$$

(2.3-6)即為非剛性隔震儲存槽之流體激盪動力方程式，其中

$\mathbf{D}=[D_1\cdots D_m]^T$ 為 $m\times1$之激盪模態位移向量；

$\mathbf{M}_1=\begin{bmatrix}m_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & m_{1m}\end{bmatrix}$，$m_{1j}=\coth\left(\frac{\varepsilon_j}{R}H\right)J_1(\varepsilon_j)\frac{R^3(\varepsilon_j^2-1)}{2\varepsilon_j^3}\rho_l$；

$\mathbf{M}_2=[m_{21}\cdots m_{2m}]^T$，$m_{2j}=\frac{R^3}{\varepsilon_j^2}J_1(\varepsilon_j)\rho_l$；

$\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix}k_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & k_{1m}\end{bmatrix}$，$k_{1j}=g\frac{R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_j^2}\right)J_1(\varepsilon_j)\rho_l$；

$\mathbf{K}_2=[k_{21}\cdots k_{2m}]^T$，$k_{2j}=-g\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2\lambda_i C_1(\lambda_i)}{H^2 I_1'\left(\frac{\lambda_i}{H}R\right)}\right]\sin(\lambda_i)\int_0^R rJ_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}r\right)I_1\left(\frac{\lambda_i}{H}r\right)dr\rho_l$