

第一章 緒論

1-1 前言

矩形板構件的設計在許多現代科學裡扮演相當重要的一環。以古典板理論(CPT)而言，根據 Kirchhoff 假設，忽略剪應力變形和轉動慣量，常應用於寬厚比(L/h)遠小於 1 的薄板結構體，作為初步的力學分析是可接受的。但今日世界技術發展的趨勢涉及一系列高壓、高速、高溫及特殊材料的問題，大多數板應用於精密工業中都是具有一定的厚度；當厚度逐漸增加時，剪力產生的剪力變形與轉動慣量若是再被忽略，則將導致高估振動頻率。故發展出一階剪力變形理論(FSDT) Mindlin (1951)，在該理論將剪應力變形和轉動慣量考慮其中逐漸受到重視，並以一個剪力修正因子(shear correction factor)來修正剪應變，作為厚板理論的基礎。另外，在工程中逐漸得到廣泛的應用的特殊或複合材料也都是以厚板理論作為分析之基礎，可見考慮剪力變形的厚板理論已日益受到採用，進而知道其重要性。

1-2 研究動機與方法

板結構設計，常會面臨不規則如應力奇異點(stress singularity)之問題。結構體會產生奇異點的原因為：(1)形狀幾何如裂縫、尖銳切角、厚度之不連續、或邊界條件；(2)載重如單點載重或載重強度(intensity)之急遽改變；(3)材料如材料性質之陡變。奇異點常是破壞之起始點，因此奇異點的應力分析便顯的重要。當進行具奇異點之結構單元數值分析時，更賴於奇異點特性之正確模擬，方能得到準確之解。關於奇異點方面，Huang (2003)推導出 Mindlin 板彎矩奇異及剪

力奇異的漸近解，此漸近解應可較準確的描述出板結構在應力奇異點附近實際的行為。

傳統上，考慮奇異點之應力奇異特性的有限元素方法有二；一為利用奇異元素(singular element)正確地描述應力隨 r 趨近於零而趨近於奇異之階數，而另一種為疊加應力奇異解於有限元素。後者另有兩種方式處理：【1】為該應力奇異解含蓋整個問題之幾何區域(Igarashi 和 Honma, 1996)；【2】為該應力奇異解只含蓋奇異點附近之區域，然後再用所謂之“transfinite elements”，連接該區域與外面由正規(regular)有限元素所含蓋之其他區域(Yosibash 和 Schiff, 1993)。本研究將採用類似第【2】種方式，但不需有“transfinite elements”。

為簡化說明，就以圖(1.1)所示為例，整個板之區域 Ω ，A 點為 reentrant corner，具有奇異應力。如同傳統有限元素法，於 Ω 內建立網格，選擇適當之形狀函數(shape function)來處理；而為了適當的描述 reentrant corner 處之彎矩及剪力奇異特性，於該處附近劃定一小區域 Ω_c 。 Ω_c 之邊界 Γ_c (不含 reentrant corner 之兩邊)與 Ω 中之某些元素的邊是完全重疊。於 Ω_c 中，引入 corner functions。所以， Ω_c 內之位移場是以 C^∞ 之應力奇異函數結合 C^0 傳統有限元形狀函數來表示。不過在 Ω_c 內之位移函數只侷限於 Ω_c ，故與有限元素位移函數之相互關係亦僅侷限於 Ω_c 。將 Ω 及 Ω_c 中的位移函數代入有限元素的公式中，得到一特徵方程式，解特徵根，即求出結構體之自然振動頻率。

1.3 文獻回顧

本論文主要是探討具裂縫之 Mindlin 矩形板，以下是針對本論文所要研究的實例收集整理相關文獻做一概略回顧。

Leissa (1969)將早期所有相關薄板資料統整起來，以方便查詢比對。Liew 等人 (1993a~d) 以透過 *pb-2* Rayleigh-Ritz 方法分析矩形 Mindlin 板，依 21 種邊界條件組合、含內部斜線支承、或含內部環狀支承或拉伸壓力(In-plan pressure)對板之振動影響。爾後，於(1995)再將 132 篇關於厚板振動的文獻，根據板的幾何形狀加以分類統整起來。

利用古典板理論分析具裂縫板的文獻方面，Lynn 與 Kumbasar (1967)首先利用 Green's 函數推導出 Fredholm 第一型積分方程式，分析具之有裂縫簡支承矩形薄板之自然振動。Stahl 與 Keer (1972)進一步發展出 Fredholm 第二型積分方程式，來決定具裂縫薄板矩形板之自然振動；Neku (1982)與 Solecki (1983)則利用有限傅立葉轉換來求解薄板控制微分方程問題；Lee (1991)利用 Ritz method 分析邊界條件為簡支承及固定端且具有環向裂縫的環狀薄板；Yuan 等人 (1993)也用了 Ritz method 對具有不同邊界條件的徑向、環向裂縫之環狀板及十字裂縫之圓形板作分析。Khadem 和 Kezaee (2000)以古典板理論，利用 Ritz method 並代入 “modified comparison function” 分析具裂縫的矩形板。

在利用 Mindlin 厚板理論分析具裂縫版的文獻方面，Qian 等人 (1991)用有限元素法分析在板中央有不同長度裂縫的簡支承矩形厚板；Lee 和 Lim (1993)用 Ritz method 做了含有裂縫之簡支承矩形厚板的振動分析。

綜觀上述前人有關矩形裂縫板振動之研究，其數值解均未考慮奇異點之特性，本論文將以 Mindlin 一階板理論(FSDT)為基礎，提出以有限元素法，並配合二階形狀函數，在包含奇異點附近的奇異元素引

入奇異點之漸近解，即角函數(corner function)；用以求取含有奇異點厚板之自然振動頻率，及受靜載重後之應力分佈。希望能藉由考慮奇異點之彎矩與剪力奇異性行為，使本論文對於一階板理論(FSDT)有所貢獻。

1.4 內容概要

本論文之內容略述如下：

第一章 緒論：藉由說明研究動機與目的，明確指出研究內容與方法。

第二章 奇異漸近解之推導：依 Huang (2003)之推導簡介本論文所需之奇異漸近解。

第三章 有限元素法平衡方程式之推導：介紹 Mindlin 板理論的控制方程並以虛功法推導出所需的勁度、質量矩陣及外力矩陣，進而導出所需的特徵方程式。

第四章 實例分析：以具 v 行缺口之扇形板與具有裂縫矩形板之收斂性分析，並引入奇異漸近解，證明本研究方法之可行性及正確性。再探討靜力作用時之應力分佈狀況。最後分析當裂縫大小、位置、角度不同時，對振動頻率之影響。

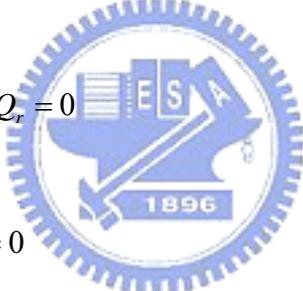
第五章 結論與建議：將本論文之所得實例分析結果作完整結論，並針對所遇到之問題提出建議與方法。

第二章 奇異漸近解之推導

本論文藉由 Mindlin 板理論，提出以有限元素法配合二階形狀函數，並導入描述彎矩與剪力奇異性之函數(corner function)於包含奇異點之元素中，此方法不同於一般有限元素法分析有應力奇異問題之方式。以下依 Huang (2003)之推導，簡介本文所需之奇異漸近解(corner function)。

2.1 基本公式

一階剪力變形板理論，其未施加外載重的平衡方程式以極座標的力表示式如下：


$$\begin{aligned}M_{rr} + \frac{1}{r}M_{r\theta,\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r &= 0 \\M_{r\theta} + \frac{1}{r}M_{\theta,\theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_r &= 0 \\Q_{rr} + \frac{Q_r}{r} + \frac{1}{r}Q_{\theta\theta} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

力與位移分量的關係式為：

$$\begin{aligned}M_r &= -D[\Psi_{r,r} + \nu r^{-1}(\Psi_r + \Psi_{\theta,\theta})], \\M_\theta &= -D[r^{-1}(\Psi_r + \Psi_{\theta,\theta}) + \nu\Psi_{r,r}], \\M_{r\theta} &= \frac{-(1-\nu)D}{2}[r^{-1}(\Psi_{r,\theta} - \Psi_\theta) + \Psi_{\theta,r}], \\Q_r &= \kappa^2 Gh(-\Psi_r + W_{,r}),\end{aligned}$$

$$Q_\theta = \kappa^2 Gh(-\Psi_\theta + r^{-1}W_{,\theta}), \quad (2.2)$$

如圖(2.1)所示， M_r 為垂直於 r 面上沿 θ 方向之單位長之彎曲力矩， M_θ 為垂直於 θ 面上沿 r 方向單位長之彎曲力矩， $M_{r,\theta}$ 為垂直於 r 面或 θ 面上沿 θ 方向或 r 方向單位長之彎曲力矩，而 Q_r 為垂直 r 面沿 z 方向單位長之剪力， Q_θ 為垂直 θ 面沿 z 方向單位長之剪力。式(2.2)中，“，”表示微分， w 為 z 方向位移， Ψ_r 、 Ψ_θ 分別為徑向與環向撓曲造成中平面上之轉角。 h 為板厚度， D 為撓曲剛度， E 為彈性模數， ν 為波松比， G 為剪力模數， κ^2 為剪力修正因子，取為 $\pi^2/12$ 。將式(2.2)代入式(2.1)中可得到以位移分量所表示的平衡方程式表示如下：

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\Psi_{r,rr} + r^{-1}\Psi_{r,r} + r^{-2}\Psi_{r,\theta\theta} - r^{-2}\Psi_r - 2r^{-2}\Psi_{\theta,\theta}) \\ & + (1+\nu)(\Psi_{r,rr} - r^{-2}\Psi_r + r^{-1}\Psi_{r,r} - r^{-2}\Psi_{\theta,\theta} + r^{-1}\Psi_{\theta,\theta r}) \} \\ & + \kappa^2 Gh(-\Psi_r + W_{,r}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\Psi_{\theta,rr} + r^{-1}\Psi_{\theta,r} + r^{-2}\Psi_{\theta,\theta\theta} - r^{-2}\Psi_\theta + 2r^{-2}\Psi_{r,\theta}) \\ & + (1+\nu)(r^{-2}\Psi_{\theta,\theta\theta} + r^{-2}\Psi_{r,\theta} + r^{-1}\Psi_{\theta,\theta r}) \} + \kappa^2 Gh(-\Psi_\theta + r^{-1}W_{,\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\kappa^2 Gh(W_{,rr} + r^{-1}W_{,r} + r^{-2}W_{,\theta\theta} - \Psi_{r,r} - r^{-1}\Psi_r - r^{-1}\Psi_{\theta,\theta}) = 0. \quad (2.3c)$$

利用分離變數的觀念，將式(2.3)中的三個位移分量假設成下列形式：

$$\Psi_r(r,\theta) = e^{p\theta}\psi_r(r), \quad \Psi_\theta(r,\theta) = e^{p\theta}\psi_\theta(r) \quad \text{和} \quad W(r,\theta) = e^{p\theta}w(r) \quad (2.4)$$

上式中 p 為一複數，將式(2.4)代入式(2.3)中，得

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\psi_r'' + r^{-1}\psi_r' - (1+p^2)r^{-2}\psi_r + 2pr^{-2}\psi_\theta) \\ & + (1+\nu)(\psi_r'' - r^{-2}\psi_r + r^{-1}\psi_r' - pr^{-2}\psi_\theta + pr^{-1}\psi_\theta') \} + \kappa^2 Gh(-\psi_r + w') = 0 \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\psi_\theta'' + r^{-1}\psi_\theta' + (p^2-1)r^{-2}\psi_\theta + 2pr^{-2}\psi_r) \\ & + (1+\nu)(p^2r^{-2}\psi_\theta + pr^{-2}\psi_r + pr^{-1}\psi_r') \} + \kappa^2 Gh(-\psi_\theta + pr^{-1}w) = 0 \end{aligned} \quad (2.5b)$$

$$\kappa^2 Gh(w'' + r^{-1}w' + p^2r^{-2}w - \psi_r' - r^{-1}\psi_r - pr^{-1}\psi_\theta) = 0 \quad (2.5c)$$

上式中“'”表示微分，接著可利用 Frobenius 級數來求解式(2.5)。

2.2 考慮彎矩奇異性的漸近解

假設板的三個位移分量，與 r 相關的函數為：

$$\psi_r(r) = \sum_{m=0} a_{2m} r^{\lambda+2m}, \quad \psi_\theta(r) = \sum_{m=0} b_{2m} r^{\lambda+2m} \quad \text{and} \quad w(r) = \sum_{m=0} c_{2m} r^{\lambda+2m+1}, \quad (2.6)$$

λ 亦可為一複數，而在 r 趨近於 0 時， λ 必須大於 0 以滿足位移分量的常規條件(regularity conditions)。式(2.6)代入式(2.3)可發現其造成在 $r=0$ 附近的彎矩奇異(singular moments)，但不會引致剪力的奇異性。

式(2.6)代入式(2.5)，整理得

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \left\{ \sum_{m=0} [(-2+2(2m+\lambda)^2 + p^2(1-\nu))a_{2m} + p((\lambda+2m)(1+\nu)-3+\nu)b_{2m}] r^{\lambda+2m-2} \right\} \\ & + \sum_{m=0} \kappa^2 Gh[-a_{2m} + (\lambda+2m+1)c_{2m}] r^{\lambda+2m} = 0 \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \left\{ \sum_{m=0} [(3-\nu+(1+\nu)(\lambda+2m))pa_{2m} + ((1-\nu)((\lambda+2m)^2 + p^2-1) + (1+\nu)p^2)b_{2m}] r^{\lambda+2m-2} \right\} \\ & + \sum_{m=0} \kappa^2 Gh[-b_{2m} + pc_{2m}] r^{\lambda+2m} = 0 \end{aligned} \quad (2.7b)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [((\lambda + 2m + 1)^2 + p^2)c_{2m} - (\lambda + 2m + 1)a_{2m} - pb_{2m}]r^{\lambda + 2m - 1} = 0 \quad (2.7c)$$

滿足式(2.7)導致

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ [(-2 + 2(2m + 2 + \lambda)^2 + p^2(1 - \nu)]a_{2m+2} + p[(\lambda + 2m + 2)(1 + \nu) - 3 + \nu]b_{2m+2} \} \\ & = -\kappa^2 Gh[-a_{2m} + (\lambda + 2m + 1)c_{2m}], \end{aligned} \quad (2.8a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ [3 - \nu + (1 + \nu)(\lambda + 2m + 2)]pa_{2m+2} + [(1 - \nu)((\lambda + 2m + 2)^2 + p^2 - 1) + \\ & (1 + \nu)p^2]b_{2m+2} \} = -\kappa^2 Gh[-b_{2m} + pc_{2m}], \end{aligned} \quad (2.8b)$$

$$-(\lambda + 2m + 3)a_{2m+2} - pb_{2m+2} + [(\lambda + 2m + 3)^2 + p^2]c_{2m+2} = 0 \quad (2.8c)$$

從式(2.7)中 r 的最低階係數提出整理得

$$[(1 - \nu)]p^2 + 2\lambda^2 - 2]a_0 + p[(1 + \nu)\lambda - 3 + \nu]b_0 = 0 \quad (2.9a)$$

$$p[3 - \nu + (1 + \nu)\lambda]a_0 + [(1 - \nu)(\lambda^2 + p^2 - 1) + (1 + \nu)p^2]b_0 = 0 \quad (2.9b)$$

$$-(\lambda + 1)a_0 - pb_0 + [(\lambda + 1)^2 + p^2]c_0 = 0 \quad (2.9c)$$

式(2.9)中， a_0 ， b_0 ， c_0 有非零解，可得 p 須為

$$p = \pm i(\lambda - 1) \text{ 和 } p = \pm i(\lambda + 1) \quad (2.10)$$

當 $p = \pm i(\lambda - 1)$ ， $b_0 = \pm ia_0$ ，且 c_0 是未定係數。

$$\text{當 } p = \pm i(\lambda + 1)，b_0 = \pm k_1 a_0，c_0 = \gamma_1 a_0 \quad (2.11)$$

其中

$$k_1 = -\frac{i[2(1 - \nu) + (1 + \nu)(\lambda + 1)]}{[2(1 - \nu) - (1 + \nu)(\lambda - 1)]} \quad (2.12a)$$

$$\gamma_1 = \frac{\nu - 1}{-3 + \lambda + \nu + \nu\lambda} \quad (2.12b)$$

因此，從以上推導知，

$$\begin{aligned}\Psi_r &= e^{i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,1} r^{\lambda+2m} + e^{-i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,2} r^{\lambda+2m} + e^{i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,3} r^{\lambda+2m} \\ &+ e^{-i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,4} r^{\lambda+2m}\end{aligned}\quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned}\Psi_\theta &= e^{i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,1} r^{\lambda+2m} + e^{-i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,2} r^{\lambda+2m} + e^{i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,3} r^{\lambda+2m} \\ &+ e^{-i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,4} r^{\lambda+2m}\end{aligned}\quad (2.13b)$$

$$\begin{aligned}W &= e^{i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,1} r^{\lambda+2m+1} + e^{-i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,2} r^{\lambda+2m+1} + e^{i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,3} r^{\lambda+2m+1} \\ &+ e^{-i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,4} r^{\lambda+2m+1}\end{aligned}\quad (2.13c)$$

其中 $b_{0,1} = ia_{0,1}$ ， $b_{0,2} = -ia_{0,2}$ ， $b_{0,3} = k_1 a_{0,3}$ ， $b_{0,4} = -k_1 a_{0,4}$ ， $c_{0,3} = \gamma_1 a_{0,3}$ ， $c_{0,4} = \gamma_1 a_{0,4}$ ；而 $a_{0,1}$ ， $a_{0,2}$ ， $a_{0,3}$ ， $a_{0,4}$ ， $c_{0,1}$ 和 $c_{0,2}$ 為待定係數。式(2.13)中的其他係數可從式(2.8)來決定。

所以一個具有尖角的板，可寫成下列的位移分量來表示出它的奇異性：

$$\begin{aligned}\Psi_r(r, \theta) &= (A_1 \cos(\lambda+1)\theta + A_2 \sin(\lambda+1)\theta + A_3 \cos(\lambda-1)\theta + A_4 \sin(\lambda-1)\theta) r^\lambda + O(r^{\lambda+2}), \\ \Psi_\theta(r, \theta) &= (A_2 \cos(\lambda+1)\theta - A_1 \sin(\lambda+1)\theta + k_2 A_4 \cos(\lambda-1)\theta - k_2 A_3 \sin(\lambda-1)\theta) r^\lambda + O(r^{\lambda+2}), \\ W(r, \theta) &= (C_1 \cos(\lambda+1)\theta + C_2 \sin(\lambda+1)\theta + \gamma_1 A_3 \cos(\lambda-1)\theta + \gamma_1 A_4 \sin(\lambda-1)\theta) r^{\lambda+1} \\ &+ O(r^{\lambda+3})\end{aligned}\quad (2.14)$$

上式中， $A_1 = a_{0,1} + a_{0,2}$ ， $A_2 = i(a_{0,1} - a_{0,2})$ ， $A_3 = a_{0,3} + a_{0,4}$ ， $A_4 = i(a_{0,3} - a_{0,4})$ ， $C_1 = c_{0,1} + c_{0,2}$ ， $C_2 = i(c_{0,1} - c_{0,2})$ ， $k_2 = -ik_1$ 。這些係數決定於徑向邊界條件。

本論文所考慮的案例為具有自由邊界條件之 v 型缺口板或是矩形

裂縫板，其邊界條件是自由端時

$$M_{\theta}\left(r, \pm \frac{\alpha}{2}\right) = M_{r\theta}\left(r, \pm \frac{\alpha}{2}\right) = Q_{\theta}\left(r, \pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad (2.15)$$

α 為特定開口角度，故將 $\Psi_r(r, \theta)$ 、 $\Psi_{\theta}(r, \theta)$ 、 $W(r, \theta)$ 分成下列所示的對稱及反對稱部分，

對稱：

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \theta) &= (A_1 \cos(\lambda + 1)\theta + A_3 \cos(\lambda - 1)\theta)r^{\lambda}, \\ \Psi_{\theta}(r, \theta) &= (-A_1 \sin(\lambda + 1)\theta - k_2 A_3 \sin(\lambda - 1)\theta)r^{\lambda}, \\ W(r, \theta) &= (C_1 \cos(\lambda + 1)\theta + \gamma_1 A_3 \cos(\lambda - 1)\theta)r^{\lambda+1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

反對稱：

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \theta) &= (A_2 \sin(\lambda + 1)\theta + A_4 \sin(\lambda - 1)\theta)r^{\lambda}, \\ \Psi_{\theta}(r, \theta) &= (A_2 \cos(\lambda + 1)\theta + k_2 A_4 \cos(\lambda - 1)\theta)r^{\lambda}, \\ W(r, \theta) &= (C_2 \sin(\lambda + 1)\theta + \gamma_1 A_4 \sin(\lambda - 1)\theta)r^{\lambda+1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

將式(2.16)、(2.17)分別代入式(2.15)，可以各得到一組三元一次聯立方程式：

對稱：

$$\begin{aligned} A_1 \lambda (1 - \nu) \cos\left(\frac{\lambda + 1}{2} \alpha\right) + A_3 (k_2 (\lambda - 1) - \lambda \nu - 1) \cos\left(\frac{\lambda - 1}{2} \alpha\right) &= 0 \\ -2A_1 \lambda \sin\left(\frac{\lambda + 1}{2} \alpha\right) - A_3 (1 + k_2) (\lambda - 1) \sin\left(\frac{\lambda - 1}{2} \alpha\right) &= 0 \\ -A_1 \sin\left(\frac{\lambda + 1}{2} \alpha\right) + A_3 (\lambda \gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \sin\left(\frac{\lambda - 1}{2} \alpha\right) + C_1 (\lambda + 1) \sin\left(\frac{\lambda + 1}{2} \alpha\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

反對稱：

$$A_2 \lambda (1 - \nu) \sin\left(\frac{\lambda+1}{2} \alpha\right) + A_4 (k_2 (\lambda - 1) - \lambda \nu - 1) \sin\left(\frac{\lambda-1}{2} \alpha\right) = 0$$

$$2A_2 \lambda \cos\left(\frac{\lambda+1}{2} \alpha\right) + A_4 (1 + k_2) (\lambda - 1) \cos\left(\frac{\lambda-1}{2} \alpha\right) = 0$$

$$A_2 \cos\left(\frac{\lambda+1}{2} \alpha\right) - A_4 (\lambda \gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \cos\left(\frac{\lambda-1}{2} \alpha\right) - C_2 (\lambda + 1) \cos\left(\frac{\lambda+1}{2} \alpha\right) = 0 \quad (2.19)$$

因為 A_1 、 A_3 、 C_1 和 A_2 、 A_4 、 C_2 皆不為 0，所以以上兩聯立方程組的係數矩陣之行列式值要等於 0。結果可得到兩條特徵方程式：

對稱：

$$\sin \lambda \alpha = -\lambda \sin \alpha \quad (2.20)$$

反對稱：

$$\sin \lambda \alpha = \lambda \sin \alpha \quad (2.21)$$



將式(2.20)、(2.21)代回式(2.18)、(2.19)可解出 A_1 、 A_2 等係數，得到邊界條件為自由端的彎矩奇異 corner function 整理如下：

對稱：

$$\Psi_r(r, \theta) = A_3 r^\lambda \{\eta_1 \cos(\lambda + 1)\theta + \cos(\lambda - 1)\theta\},$$

$$\Psi_\theta(r, \theta) = A_3 r^\lambda \{-\eta_1 \sin(\lambda + 1)\theta - k_2 \sin(\lambda - 1)\theta\},$$

$$W(r, \theta) = r^{\lambda+1} \{\eta_2 \cos(\lambda + 1)\theta + \gamma_1 \cos(\lambda - 1)\theta\} \quad (2.22)$$

其中

$$\eta_1 = -\frac{k_2 (\lambda - 1) - \lambda \nu - 1}{\lambda (1 - \nu)} \frac{\cos(\lambda - 1)\alpha / 2}{\cos(\lambda + 1)\alpha / 2}$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1+\lambda} - \frac{(\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1)\sin(\lambda-1)\alpha/2}{(1+\lambda)\sin(\lambda+1)\alpha/2}$$

反對稱：

$$\Psi_r(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{\eta_3 \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta\},$$

$$\Psi_\theta(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{\eta_3 \cos(\lambda+1)\theta + k_2 \cos(\lambda-1)\theta\},$$

$$W(r, \theta) = A_4 r^{\lambda+1} \{\eta_4 \sin(\lambda+1)\theta + \gamma_1 \sin(\lambda-1)\theta\} \quad (2.23)$$

其中

$$\eta_3 = -\frac{k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1 \sin(\lambda-1)\alpha/2}{\lambda(1-\nu) \sin(\lambda+1)\alpha/2}$$

$$\eta_4 = \frac{\eta_3}{1+\lambda} - \frac{(\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1)\cos(\lambda-1)\alpha/2}{(1+\lambda)\cos(\lambda+1)\alpha/2}$$

2.3 考慮剪力奇異性的漸近解

為了考慮剪力的奇異性，將板三個位移分量與 r 相關的函數假設成：

$$\psi_r = \sum_{n=0} \bar{a}_{2n} r^{\bar{\lambda}+2n+1}, \quad \psi_\theta = \sum_{n=0} \bar{b}_{2n} r^{\bar{\lambda}+2n+1} \quad \text{和} \quad w = \sum_{2n=0} \bar{c}_{2n} r^{\bar{\lambda}+2n} \quad (2.24)$$

式(2.20)中 $\bar{\lambda}$ 是一個帶有正實部的複數，可滿足位移分量在 $r=0$ 附近的常規條件(regularity conditions)。式(2.24)代入式(2.2)可發現其造成在 $r=0$ 附近的剪力奇異(singularity of shear force)，但不會引致彎矩的奇異性。

有關剪力奇異性的漸近解之推導過程和前一節彎矩奇異性的漸近解相同，在這裡便不再贅述，經過計算之後得三個位移表示式如下：

$$\Psi_r(r, \theta) = (\bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_3 \cos(2 + \bar{\lambda})\theta + \bar{A}_4 \sin(2 + \bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1} + O(r^{\bar{\lambda}+3}),$$

$$\Psi_\theta(r, \theta) = (\bar{B}_1 \cos \bar{\lambda} \theta - \bar{B}_2 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_4 \cos(2 + \bar{\lambda})\theta - \bar{A}_3 \sin(2 + \bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1} + O(r^{\bar{\lambda}+3}),$$

$$W(r, \theta) = (\bar{l}_1(\bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta) + \bar{l}_2(\bar{B}_2 \cos \bar{\lambda} \theta - \bar{B}_1 \sin \bar{\lambda} \theta))r^{\bar{\lambda}} + O(r^{\bar{\lambda}+2}) \quad (2.25)$$

上式中

$$\bar{l}_1 = \frac{-D}{2\kappa^2 Gh} (3 - \nu + (1 + \nu)(1 + \bar{\lambda}))$$

$$\bar{l}_2 = \frac{D}{2\kappa^2 Gh} (2(1 - \nu) - (1 + \nu)\bar{\lambda})$$

如同 2-1 推導的過程，將式(2.25)分成對稱及反對稱兩部分，

對稱：

$$\Psi_r(r, \theta) = (\bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_3 \cos(2 + \bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$\Psi_\theta(r, \theta) = (-\bar{B}_2 \sin \bar{\lambda} \theta - \bar{A}_3 \sin(2 + \bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$W(r, \theta) = (\bar{l}_1 \bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{l}_2 \bar{B}_2 \cos \bar{\lambda} \theta)r^{\bar{\lambda}} \quad (2.26)$$

反對稱：

$$\Psi_r(r, \theta) = (+\bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_4 \sin(2 + \bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$\Psi_\theta(r, \theta) = (\bar{B}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_4 \cos(2 + \bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$W(r, \theta) = (\bar{l}_1 \bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta - \bar{l}_2 \bar{B}_1 \sin \bar{\lambda} \theta)r^{\bar{\lambda}} \quad (2.27)$$

將式(2.26)、(2.27)代入式(2.15)中，可分別得到一組三元一次聯立方程式如下：

對稱：

$$\bar{A}_1(1 + \nu + \bar{\lambda} \nu) \cos\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) + \bar{A}_3(1 + \bar{\lambda})(-1 + \nu) \cos\left(\frac{\bar{\lambda} + 2}{2} \alpha\right) + \bar{B}_2 \bar{\lambda} \cos\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{A}_1 \bar{\lambda} \sin\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) - 2\bar{A}_3 (1 + \bar{\lambda}) \sin\left(\frac{\bar{\lambda} + 2}{2} \alpha\right) + \bar{B}_2 \bar{\lambda} \sin\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) = 0 \\
& \bar{A}_1 \bar{l}_1 \bar{\lambda} \sin\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) + \bar{B}_2 \bar{l}_2 \bar{\lambda} \sin\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

反對稱：

$$\begin{aligned}
& \bar{A}_2 (1 + \nu + \nu \bar{\lambda}) \sin\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) + \bar{A}_4 (1 + \bar{\lambda}) (\nu - 1) \sin\left(\frac{\bar{\lambda} + 2}{2} \alpha\right) - \bar{B}_1 \bar{\lambda} \sin\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) = 0 \\
& \bar{A}_2 \bar{\lambda} \cos\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) + 2\bar{A}_4 (1 + \bar{\lambda}) \cos\left(\frac{\bar{\lambda} + 2}{2} \alpha\right) + \bar{B}_1 \bar{\lambda} \cos\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) = 0 \\
& -\bar{l}_1 \bar{A}_2 \bar{\lambda} \cos\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) + \bar{l}_2 \bar{B}_1 \bar{\lambda} \cos\left(\frac{\bar{\lambda} \alpha}{2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

同樣的 \bar{A}_1 、 \bar{A}_3 、 \bar{B}_2 和 \bar{A}_2 、 \bar{A}_4 、 \bar{B}_1 皆不為 0，因此以上兩聯立方程組的係數矩陣之行列式值要等於 0。結果可得到兩條特徵方程式：

對稱：

$$\sin \frac{\bar{\lambda} \alpha}{2} = 0 \tag{2.30}$$

反對稱：

$$\cos \frac{\bar{\lambda} \alpha}{2} = 0 \tag{2.31}$$

將式(2.30)、(2.31)代回式(2.28)、(2.29)可解出 \bar{A}_1 、 \bar{A}_3 、 \bar{B}_2 和 \bar{A}_2 、 \bar{A}_4 、 \bar{B}_1 ，由式(2.30)得知 $\bar{\lambda} = \frac{2n\pi}{\alpha}$ ，所以在對稱部分不會有奇異性。而邊界條件為自由端的具有剪力奇異的 corner function 反對稱項整理如下：

$$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \sin \bar{\lambda} \theta$$

$$\Psi_{\theta}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu + \bar{\lambda} \nu)}{\bar{\lambda}} \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \cos \bar{\lambda} \theta$$

$$W(r, \theta) = \bar{A}_2 \left(\bar{l}_1 - \frac{\bar{l}_2 (1 + \nu + \bar{\lambda} \nu)}{\bar{\lambda}} \right) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta \quad (2.32)$$

圖(2.2)、(2.3)分別為 Huang (2003)所研究的楔形角之彎矩奇異特性及剪力奇異特性的關係圖，本論文的案例邊界條件皆為自由端，因此從圖中可觀查出不論彎矩或剪力的奇異性皆從楔形角大於 180 度時才會發生。



第三章 有限元素平衡方程式之推導

本章將介紹用 Mindlin 板理論的控制方程以虛功法推導出有限元素的勁度、質量矩陣及外力矩陣，進而導出求取自然振動頻率之特徵方程式。藉由外力矩陣的存在，可求所需的節點變位，最後得到各節點之內力。

3.1 有限元素法的位移場表示式

如圖(1.1)所示，本研究先用傳統的有限元素法於整個板區域 Ω 內建立網格，在 Mindlin 板理論中於 x - y 座標系統之三個位移函數為

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{N}_{xe}^T \{\hat{\psi}_x\}_e \quad (3.1a)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{N}_{ye}^T \{\hat{\psi}_y\}_e \quad (3.1b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{N}_{we}^T \{\hat{w}\}_e \quad (3.1c)$$

上式中 \mathbf{N}_e 為每一元素之形狀函數行向量， $\{\hat{\psi}_x\}_e$ ， $\{\hat{\psi}_y\}_e$ ， $\{\hat{w}\}_e$ 為元素 e 之節點位移向量。而在 Ω_c 區域則引入 corner function(即應力漸近解)：

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{c=1}^{N_c} a_c(t) \tilde{\psi}_{xc}(x, y) f(x, y) \quad (3.2a)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{c=1}^{N_c} b_c(t) \tilde{\psi}_{yc}(x, y) f(x, y) \quad (3.2b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{c=1}^{N_c} c_c(t) \tilde{w}_c(x, y) f(x, y) \quad (3.2c)$$

上式中 $\tilde{\psi}_{xc}$ 、 $\tilde{\psi}_{yc}$ 、 \tilde{w}_c 為 corner function， a_c 、 b_c 、 c_c 為其係數，而 $f(x, y)$ 則為一函數，其在邊界 Γ_c 處為 0。Corner function 乘上 $f(x, y)$ 後，雖會改變 corner function 之行為，但卻依然保存該 corner function 於奇異點處之原來奇異特性。由於 Ω_c 內之三個位移函數是由式 (3.1) 與 (3.2) 疊加，且 corner function 乘上 $f(x, y)$ ，使得 Ω_c 內位移場不會與 Ω_c 外由有限元素函數所描述之位移場有不連續現象。另外，由於式 (3.2) 只侷限於 Ω_c ，故其與有限元素之位移函數 (式 (3.1)) 之相互關係亦僅侷限於 Ω_c 。整個板結構之三個位移函數可整理表示成

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{N}_{xe}^T \{\hat{\psi}_x\}_e + \sum_{c=1}^{Nc} a_c \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma_c} = \hat{\Phi}_x + \tilde{\Phi}_{xc} \quad (3.3a)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{N}_{ye}^T \{\hat{\psi}_y\}_e + \sum_{c=1}^{Nc} b_c \tilde{\psi}_{yc} f_{\Gamma_c} = \hat{\Phi}_y + \tilde{\Phi}_{yc} \quad (3.3b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{N}_{we}^T \{\hat{w}\}_e + \sum_{c=1}^{Nc} c_c \tilde{w}_c f_{\Gamma_c} = \hat{W} + \tilde{W}_c \quad (3.3c)$$

為了方便以下推導，令

$$\tilde{\Phi}_{xc} = \bar{\Phi}_{xc}^T \{\mathbf{a}_c\}, \quad \tilde{\Phi}_{yc} = \bar{\Phi}_{yc}^T \{\mathbf{b}_c\}, \quad \tilde{W}_c = \bar{w}_c^T \{\mathbf{c}_c\}$$

其中定義 $\bar{\Phi}_{xc}$ 、 $\bar{\Phi}_{yc}$ 與 \bar{w}_c 為各方向之 corner function 與邊界函數 f_{Γ_c} 相乘後之行矩陣，且 $\tilde{\Phi}_{xc}$ 、 $\tilde{\Phi}_{yc}$ 、 \tilde{W}_c 僅存在於 Ω_c 內。

3.2 以虛功法推導出特徵方程式

將式(3.3a~3.3c)之位移函數代入有限元素法推導之標準程序；在 Mindlin 板理論，需滿足下列虛功表示式(Reddy，1999)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} Q_x + \frac{\partial \delta w}{\partial y} Q_y + I_0 \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \delta w \right) dA - \left(\int_{\Gamma} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y) \delta w ds \right) = 0 \quad (3.4a)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} M_{xy} + \delta \psi_x Q_x + I_2 \delta \psi_x \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right) dA - \left(\int_{\Gamma} (\hat{M}_{xx} n_x + \hat{M}_{xy} n_y) \delta \psi_x ds \right) = 0 \quad (3.4b)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} M_{yy} + \delta \psi_y Q_y + I_2 \delta \psi_y \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right) dA - \left(\int_{\Gamma} (\hat{M}_{xy} n_x + \hat{M}_{yy} n_y) \delta \psi_y ds \right) = 0 \quad (3.4c)$$

其中

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right),$$

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right),$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2} D (1 - \nu) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right),$$

$$Q_x = \kappa^2 Gh \left(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$Q_y = \kappa^2 Gh \left(-\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$I_k = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^k dz$$

如圖(3.1)所示， q 為作用在板上方之分佈荷重，而 \hat{Q}_x ， \hat{Q}_y ， \hat{M}_{xx} ， \hat{M}_{xy} ，與 \hat{M}_{yy} 為在邊界上作用外力， n_x 與 n_y 分別是邊界 Γ 上法向量之 x 與 y 分量。 δ 為對有限元素之節點位移式(3.1)中之 $\{\hat{\psi}_x\}_e$ 、 $\{\hat{\psi}_y\}_e$ 及 $\{\hat{w}\}_e$ 或式(3.2)中之係數 a_c 、 b_c 及 c_c 變分，將位移場代入之後得到式(3.5)~(3.7)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial x} \kappa^2 Gh \left(-\hat{\Phi}_x + \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial y} \kappa^2 Gh \left(-\hat{\Phi}_y + \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} \right) + I_0 \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial t^2} \delta \hat{W} - q \delta \hat{W} \right] dA \\ & + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial x} \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{xc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial y} \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{yc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y} \right) + I_0 \frac{\partial^2 \tilde{W}_c}{\partial t^2} \delta \tilde{W}_c - q \delta \tilde{W}_c \right] dA \\ & + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial x} \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{xc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial y} \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{yc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y} \right) + I_0 \frac{\partial^2 \tilde{W}_c}{\partial t^2} \delta \hat{W} \right] dA \\ & + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial x} \kappa^2 Gh \left(\hat{\Phi}_x + \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial y} \kappa^2 Gh \left(\hat{\Phi}_y + \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} \right) + I_0 \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial t^2} \delta \tilde{W}_c \right] dA \\ & - \left[\left(\int_{\Gamma_e} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y) \right) + \left(\int_{\Gamma_c} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y) \right) \right] \delta \hat{W} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \delta \hat{\Phi}_x}{\partial x} D \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta \hat{\Phi}_x}{\partial y} \frac{1}{2} D(1-\nu) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \delta \hat{\Phi}_x \kappa^2 Gh \left(\hat{\Phi}_x + \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} \right) + I_2 \delta \hat{\Phi}_x \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_x}{\partial t^2} \right] dA \\ & + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x} D \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y} \frac{1}{2} D(1-\nu) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \delta \tilde{\Phi}_{yc} \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{xc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial x} \right) + I_2 \delta \tilde{\Phi}_{xc} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial t^2} \right] dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \hat{\Phi}_x}{\partial x} D \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta \hat{\Phi}_x}{\partial y} \frac{1}{2} D (1 - \nu) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x} \right) \right. \\
& + \delta \hat{\Phi}_x \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{xc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial x} \right) + I_2 \delta \hat{\Phi}_{xc} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial t^2} \left. \right] dA \\
& + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \hat{\Phi}_{xc}}{\partial x} D \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta \hat{\Phi}_{xc}}{\partial y} \frac{1}{2} D (1 - \nu) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial x} \right) \right. \\
& + \delta \tilde{\Phi}_{xc} \kappa^2 Gh \left(\hat{\Phi}_x + \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} \right) + I_2 \delta \tilde{\Phi}_{xc} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_x}{\partial t^2} \left. \right] dA - \left(\int_{\Gamma} (\hat{M}_{xx} n_x + \hat{M}_{xy} n_y) \delta \tilde{\Phi}_{xc} ds \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \delta \hat{\Phi}_y}{\partial x} \cdot \frac{D}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \hat{\Phi}_y}{\partial y} \cdot D \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial x} \right) + \right. \\
& \delta \hat{\Phi}_y \cdot \kappa^2 Gh \left(\hat{\Phi}_y + \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} \right) + I_2 \cdot \delta \hat{\Phi}_y \cdot \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_y}{\partial t^2} \left. \right] dA \\
& + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x} \cdot \frac{D}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y} \cdot D \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x} \right) + \right. \\
& \delta \tilde{\Phi}_{yc} \cdot \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{yc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y} \right) + I_2 \cdot \delta \tilde{\Phi}_{yc} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial t^2} \left. \right] dA \\
& + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_y}{\partial x} \cdot \frac{D}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_y}{\partial y} \cdot D \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x} \right) + \right. \\
& \delta \tilde{\Phi}_y \cdot \kappa^2 Gh \left(\tilde{\Phi}_{yc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y} \right) + I_2 \cdot \delta \tilde{\Phi}_y \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial t^2} \left. \right] dA \\
& + \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x} \cdot \frac{D}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y} \cdot D \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial x} \right) + \right. \\
& \delta \tilde{\Phi}_{yc} \cdot \kappa^2 Gh \left(\hat{\Phi}_y + \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} \right) + I_2 \cdot \delta \tilde{\Phi}_{yc} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_y}{\partial t^2} \left. \right] dA - \left(\int_{\Gamma} (\hat{M}_{xy} n_x + \hat{M}_{yy} n_y) \delta \hat{\Phi}_y ds \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 Ω 為整個板所佔之區域， Ω_c 為 corner function 所含蓋之區域。另外再定義 Ω_e 為每個單元所佔之區域。所以 $\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \Omega_e$ ， $\Omega_c = \sum_{e=1}^{N_{ec}} \Omega_e$ ， N_e 、 N_{ec} 分別為在 Ω 與 Ω_c 之有限元個數。式(3.5)~(3.7)分成數項，為推導方便將分別給予編號。例如式(3.5)的第一積分項定為(3.5a)，第二積分項定為(3.5b)，以此類推。

使用變分原理，計算式(3.5a)~(3.5d)後，整理如下

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial x} \cdot \kappa^2 Gh (\hat{\Phi}_x + \frac{\partial \hat{W}}{\partial x}) + \frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial y} \cdot \kappa^2 Gh (\hat{\Phi}_y + \frac{\partial \hat{W}}{\partial y}) + I_0 \cdot \delta \hat{W} \cdot \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial t^2} - q \delta \hat{W} \right] dA \\ &= \left[\int_{\Omega} -N_{we,x} \kappa^2 Gh N_{xe}^T \{ \hat{\psi}_x \}_e + \kappa^2 Gh N_{we,x} \cdot N_{we,x}^T \{ \hat{w} \}_e - \kappa^2 Gh N_{we,y} \cdot N_{ye}^T \{ \hat{\psi}_y \}_e + \right. \\ & \left. \kappa^2 Gh N_{we,y} \cdot N_{we,y}^T \{ \hat{w} \}_e + I_0 N_{we} \cdot N_{we}^T \{ \hat{w} \}_e - q N_{we}^T dA \right] \end{aligned} \quad (3.8a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial x} \cdot \kappa^2 Gh (\tilde{\Phi}_{xc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial x}) + \frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial y} \cdot \kappa^2 Gh (\tilde{\Phi}_{yc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y}) + I_0 \cdot \delta \tilde{W}_c \cdot \frac{\partial^2 \tilde{W}_c}{\partial t^2} - q \delta \tilde{W}_c \right] dA \\ &= \int_{\Omega_c} \left[\kappa^2 Gh \bar{w}_{c,x} (\bar{\phi}_{xc}^T \{ a_c \}) + \bar{w}_{c,x}^T \{ c_c \} + \kappa^2 Gh \bar{w}_{c,y} \cdot (\bar{\phi}_{yc}^T \{ b_c \}) + \bar{w}_{c,y}^T \{ c_c \} + I_0 \bar{w}_c \bar{w}_c^T \{ \ddot{c}_c \} \right. \\ & \left. - q \bar{w} dA \right] \end{aligned} \quad (3.8b)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial x} \cdot \kappa^2 Gh (\tilde{\Phi}_{xc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial x}) + \frac{\partial \delta \hat{W}}{\partial y} \cdot \kappa^2 Gh (\tilde{\Phi}_{yc} + \frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y}) + I_0 \cdot \delta \hat{W} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{W}_c}{\partial t^2} \right] dA \\ &= \int_{\Omega_c} \left[\kappa^2 Gh \cdot N_{we,x} (\bar{\phi}_{xc}^T \{ a_c \}) + \bar{w}_{c,x} \{ c_c \} + \kappa^2 Gh \cdot N_{we,y} (\bar{\phi}_{yc}^T \{ b_c \}) + \bar{w}_{c,y}^T \{ c_c \} \right. \\ & \left. + I_0 N_{we} \bar{w}_c^T \{ \ddot{c}_c \} \right] dA \end{aligned} \quad (3.8c)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial x} \cdot \kappa^2 Gh (\hat{\Phi}_x + \frac{\partial \hat{W}}{\partial x}) + \frac{\partial \delta \tilde{W}_c}{\partial y} \cdot \kappa^2 Gh (\hat{\Phi}_y + \frac{\partial \hat{W}}{\partial y}) + I_0 \cdot \delta \tilde{W}_c \cdot \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial t^2} \right] dA \\ &= \int_{\Omega_c} \left[\kappa^2 Gh \bar{w}_{c,x} (N_{xw}^T \{ \hat{\psi}_x \}_e + N_{we,x}^T \{ \hat{w} \}_e) + \kappa^2 Gh \bar{w}_{c,y} (N_{ye}^T \{ \hat{\psi}_y \}_e + \right. \\ & \left. N_{we,y}^T \{ \hat{w} \}_e) + I_0 \bar{w}_c N_{we}^T \{ \hat{w} \}_e \right] dA \end{aligned} \quad (3.8d)$$

$$\begin{aligned}
& [(\int_{\Gamma_e} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y) - (\int_{\Gamma_c} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y)) \delta \hat{W} ds = [(\int_{\Gamma_e} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y) N_{we}) \\
& - \int_{\Gamma_c} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y) \bar{w}_c) ds] \quad (3.8e)
\end{aligned}$$

如同式(3.8)的變分計算過程來處理式(3.6)、(3.7)之後，可將這些式子整理成兩部分，以矩陣的方式表示。第一類為不含有 corner function 的元素，即在 Ω_c 區域之外的部分

$$[\mathbf{K}_e] \begin{Bmatrix} \hat{\Psi}_x \\ \hat{\Psi}_y \\ \hat{\mathbf{w}} \end{Bmatrix}_e + [\mathbf{M}_e] \begin{Bmatrix} \ddot{\Psi}_x \\ \ddot{\Psi}_y \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{Bmatrix}_e = [\mathbf{F}_e] \quad (3.9)$$

其中

$$[\mathbf{K}_e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_e^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_e dA,$$



$$[\mathbf{B}]_e^T = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{xe,x} & \{0\} & \mathbf{N}_{xe,y} & \{0\} & -\mathbf{N}_{xe} \\ \{0\} & \mathbf{N}_{ye,y} & \mathbf{N}_{ye,x} & -\mathbf{N}_{ye} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \mathbf{N}_{we,y} & \mathbf{N}_{we,x} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{D}]_e = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 Gh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 Gh \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{F}_e] = \begin{Bmatrix} f_x \\ \sim \\ f_y \\ \sim \\ f_z \\ \sim \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma_e} (\hat{M}_{xx}n_x + \hat{M}_{xy}n_y)\mathbf{N}_{xe}ds \\ \int_{\Gamma_e} (\hat{M}_{xy}n_x + \hat{M}_{yy}n_y)\mathbf{N}_{ye}ds \\ \int_{\Omega_e} q\mathbf{N}_{we}dA + \int_{\Gamma_e} (\hat{Q}_xn_x + \hat{Q}_yn_y)\mathbf{N}_{we}ds \end{Bmatrix},$$

$[\mathbf{K}_e]$ 、 $[\mathbf{M}_e]$ 、 $[\mathbf{F}_e]$ 分別是在 Ω_c 區域之外的單元勁度、質量矩陣，及外力矩陣， Γ_e 表示針對邊界上的元素，而“ $\ddot{}$ ”是代表對 t 微分兩次， $\hat{\psi}_x$ 、 $\hat{\psi}_y$ 、 \hat{w} 為有限元素法中各個元素的節點位移。

第二類為在 Ω_c 區域內的部分

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\psi}_x \\ \hat{\psi}_y \\ \hat{w} \\ \mathbf{a}_c \\ \mathbf{b}_c \\ \mathbf{c}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_x \\ \ddot{\psi}_y \\ \ddot{w} \\ \ddot{\mathbf{a}}_c \\ \ddot{\mathbf{b}}_c \\ \ddot{\mathbf{c}}_c \end{Bmatrix} = [\mathbf{F}_c] \quad (3.10)$$

其中

$$[\mathbf{K}_{11}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_e^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_e dA,$$

$$[\mathbf{K}_{22}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_c^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_c dA,$$

$$[\mathbf{K}_{12}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_e^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_c dA,$$

$$[\mathbf{K}_{21}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_c^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_e dA ,$$

$$[\mathbf{B}]_c^T = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{xc,x} & \{\mathbf{0}\} & \bar{\varphi}_{xc,y} & \{\mathbf{0}\} & -\bar{\varphi}_{xc} \\ \{\mathbf{0}\} & \bar{\varphi}_{yc,y} & \bar{\varphi}_{yc,x} & -\bar{\varphi}_{yc} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \bar{\varphi}_{w,y} & \bar{\varphi}_{w,x} \end{bmatrix} ,$$

$$[\mathbf{M}_{11}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} I_2 \mathbf{N}_{xe} \mathbf{N}_{xe}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & I_2 \mathbf{N}_{ye} \mathbf{N}_{ye}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & I_0 \mathbf{N}_{we} \mathbf{N}_{we}^T \end{bmatrix} dA ,$$

$$[\mathbf{M}_{12}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} I_2 \bar{\varphi}_{xc} \mathbf{N}_{xe}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & I_2 \bar{\varphi}_{yc} \mathbf{N}_{ye}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & I_0 \bar{\varphi}_{wc} \mathbf{N}_{we}^T \end{bmatrix} dA ,$$

$$[\mathbf{M}_{21}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} I_2 \mathbf{N}_{xe} \bar{\varphi}_{xc}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & I_2 \mathbf{N}_{ye} \bar{\varphi}_{yc}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & I_0 \mathbf{N}_{we} \bar{\varphi}_{wc}^T \end{bmatrix} dA ,$$

$$[\mathbf{M}_{22}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} I_2 \bar{\varphi}_{xc} \bar{\varphi}_{xc}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & I_2 \bar{\varphi}_{yc} \bar{\varphi}_{yc}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & I_0 \bar{\varphi}_{wc} \bar{\varphi}_{wc}^T \end{bmatrix} dA ,$$

$$[\mathbf{F}_c] = \begin{Bmatrix} f_x \\ \sim \\ f_y \\ \sim \\ f_z \\ \sim \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma_c} (\hat{M}_{xx} n_x + \hat{M}_{xy} n_y) \bar{\varphi}_{xc} ds \\ \int_{\Gamma_c} (\hat{M}_{xy} n_x + \hat{M}_{yy} n_y) \bar{\varphi}_{yc} ds \\ \int_{\Omega_e} q \mathbf{N}_{we} dA + \int_{\Omega_e} q \bar{\mathbf{w}}_c dA \end{Bmatrix} ,$$

$\{\mathbf{a}_c\}$ 、 $\{\mathbf{b}_c\}$ 、 $\{\mathbf{c}_c\}$ 為各個 corner function 之係數； \mathbf{K}_{11} 、 \mathbf{M}_{11} 與 \mathbf{F}_c 分別是 Ω_e 區域內的單元勁度、質量矩陣與外力矩陣， Γ_c 表示針對邊界上的元

素， \mathbf{K}_{12} 、 \mathbf{K}_{21} 、 \mathbf{M}_{12} 、 \mathbf{M}_{21} 是有限元素與 corner function 相關的部分， \mathbf{K}_{22} 、 \mathbf{M}_{22} 則是完全由 corner function 所組成的。

本論文考慮靜力載重問題及自由振動問題，其解為：

(a) 靜力分析

當外載作用時整個板內所有元素的勁度及外力矩陣可疊加組成一組方程式：

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (3.11)$$

其中 $[\mathbf{K}]$ 、 $\{\mathbf{f}\}$ 分別為板結構的大域勁度矩陣、與外力向量而 $\{\mathbf{d}\}$ 為板結構所需的節點的位移向量與角函數之係數。

將(3.11)求解，即可求出所需的節點的位移向量與角函數之係數，而將所需奇異點附近之內力求出。

(b) 動力分析

整個板內所有元素的勁度及質量矩陣可疊加組成一組方程式：

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} + [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{d}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.12)$$

其中 $[\mathbf{K}]$ 、 $[\mathbf{M}]$ 分別為板結構的大域勁度矩陣、大域質量矩陣， $\{\mathbf{d}\}$ 為板結構所有節點的位移向量與角函數之係數。

$$\text{令 } \{\mathbf{d}\} = e^{i\omega t} \{\tilde{\mathbf{d}}\} \quad (3.13)$$

將(3.12)代入(3.11)得

$$[\mathbf{K}] = \omega^2 [\mathbf{M}] \quad (3.14)$$

式(3.14)為一特徵方程式，依解特徵值的方法即可求得自然振動頻率。

本論文所用有限元素八個節點四邊形單元(有 24 個自由度)或六個節點三角形單元(有 18 個自由度)，若網格切割的越細，總自由度便增多。因此，式(3.14)中， $[\mathbf{K}]$ 、 $[\mathbf{M}]$ 兩矩陣的維度大小乃決定於網格切割的多寡，由於本文案例的總自由度非常多，所以在利用程式求解的過程中，為節省電腦記憶體的儲存空間，便使用林聰悟與林佳慧(1999)中變寬帶儲存矩陣的方式配合次空間法(subspace)來求取自然振動頻率 ω 。



第四章 實例分析

本章將把 corner function 代入具有 v 形缺口之扇形板及具有裂縫的矩形板，以有限元素法，配合用二階形狀函數作收斂性分析，來驗證本研究方法之可行性與正確性；並探討奇異點附近之應力分佈狀態。最後本研究方法應用於不同裂縫長度、位置與角度對矩形板振動頻率及模態影響。

4.1 座標轉換

4.1.1 漸近解的採用

本章所分析的實例在四周邊界為 CFCF 而內部裂縫處的邊界條件為自由邊界(free)見圖(4.1)，因此所採用的角函數(corner function)會有對稱和反對稱兩種特性。在考慮三個位移分量的特性後， $\tilde{\psi}_{xc}$ 、 $\tilde{\psi}_{yc}$ 將採用考慮彎矩奇異的漸近解， \tilde{w}_c 將採用考慮剪力奇異的漸近解。在 (r, θ) 座標系統中，corner function 之表示式可由第二章得：

對稱：

$$\begin{aligned}\psi_{ri} &= r^{\lambda_i} \{ \eta_i \cos(\lambda_i + 1)\theta + \cos(\lambda_i - 1)\theta \} \\ \psi_{\theta i} &= r^{\lambda_i} \{ -\eta_i \sin(\lambda_i + 1)\theta - k_2 \sin(\lambda_i - 1)\theta \} \\ w_i &= r^{\bar{\lambda}_i} \cos \bar{\lambda}_i \theta\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中

$$\eta_i = -\frac{k_2(\lambda_i - 1) - \lambda_i \nu - 1}{\lambda_i(1 - \nu)} \frac{\cos(\lambda_i - 1)\alpha / 2}{\cos(\lambda_i + 1)\alpha / 2}$$

$$k_2 = -\frac{[2(1-\nu) + (1+\nu)(\lambda_i + 1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\lambda_i - 1)]}$$

λ_i 滿足 $\sin \lambda_i \alpha = -\lambda_i \sin \alpha$,

$\bar{\lambda}_i$ 滿足 $\sin \frac{\bar{\lambda}_i \alpha}{2} = 0$, 所以得到 $\bar{\lambda}_i = \frac{2n\pi}{\alpha}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

反對稱：

$$\psi_{r_i} = r^{\tilde{\lambda}_i} \left\{ \tilde{\eta}_i \sin(\tilde{\lambda}_i + 1)\theta + \sin(\tilde{\lambda}_i - 1)\theta \right\},$$

$$\psi_{\theta_i} = r^{\tilde{\lambda}_i} \left\{ \tilde{\eta}_i \cos(\tilde{\lambda}_i + 1)\theta + k_2 \cos(\tilde{\lambda}_i - 1)\theta \right\},$$

$$w_i = r^{\hat{\lambda}_i} \sin \hat{\lambda}_i \theta \tag{4.2}$$

其中

$$\tilde{\eta}_i = -\frac{\tilde{k}_2(\tilde{\lambda}_i - 1) - \tilde{\lambda}_i \nu - 1}{\tilde{\lambda}_i(1-\nu)} \frac{\sin(\tilde{\lambda}_i - 1)\alpha/2}{\sin(\tilde{\lambda}_i + 1)\alpha/2}$$

$$\tilde{k}_2 = -\frac{[2(1-\nu) + (1+\nu)(\tilde{\lambda}_i + 1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\tilde{\lambda}_i - 1)]}$$

$\tilde{\lambda}_i$ 滿足 $\sin \tilde{\lambda}_i \alpha = \tilde{\lambda}_i \sin \alpha$,

$\hat{\lambda}_i$ 滿足 $\cos \frac{\hat{\lambda}_i \alpha}{2} = 0$, 所以得到 $\hat{\lambda}_i = \frac{(2n+1)\pi}{\alpha}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

4.1.2 極座標轉換到卡氏座標

式(4.1)及(4.2)表示的角函數是以 r 、 θ 座標系統來表示，而第三章有限元素的勁度及質量矩陣卻是用 ξ 、 η 座標系統建立的。因此要引入角函數到具奇異點附近的元素中，需將 ψ_r 、 ψ_θ 作兩次座標轉換。

本小節將介紹極座標和卡氏座標的轉換，考慮兩座標系統的關係如圖

(4.2)，轉換如下：

$$\tilde{\psi}_{xc} = \psi_r \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta$$

$$\tilde{\psi}_{yc} = \psi_r \sin \theta + \psi_\theta \cos \theta$$

$$\tilde{w}_c = w \quad (4.3)$$

由於 corner function 僅存在於 Ω_c 區域內，所以須先決定要加入 corner function 的邊界函數 $f(x, y)$ ，並轉換到 ξ, η ，最後再乘上 $f(\xi, \eta)$ ，

以確保其在邊界 Γ_c 處為 0。

$$\bar{\psi}_{xc} = \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma_c}$$

$$\bar{\psi}_{yc} = \tilde{\psi}_{yc} f_{\Gamma_c}$$

$$\bar{w}_c = \tilde{w}_c f_{\Gamma_c}$$



(4.4)

在式(3.9)組成勁度矩陣的過程中， $\bar{\psi}_{xc,x}$ 、 $\bar{\psi}_{xc,y}$ 、 $\bar{\psi}_{yc,x}$ 、 $\bar{\psi}_{yc,y}$ 、 $\bar{w}_{c,x}$ 、 $\bar{w}_{c,y}$ 也是需要透過 ψ_r 、 ψ_θ 轉換得來，在此列出 $\bar{\psi}_{xc,x}$ 、 $\bar{\psi}_{xc,y}$ 的

轉換過程如下：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta = \frac{x}{r}$$

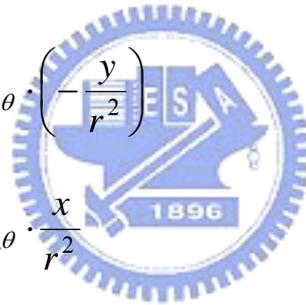
$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta = \frac{y}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{y}{r^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{r} = \frac{x}{r^2}\end{aligned}\tag{4.5}$$

式(4.5)是一些微分的基本公式，因此 $\bar{\psi}_{xc,x}$ 、 $\bar{\psi}_{xc,y}$ 可以寫成

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{xc,x} &= \tilde{\psi}_{xc,x} \cdot f_{\Gamma c} + \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma c,x} \\ \bar{\psi}_{xc,y} &= \tilde{\psi}_{xc,y} \cdot f_{\Gamma c} + \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma c,y}\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{xc,x} &= \tilde{\psi}_{xc,r} \cdot \frac{x}{r} + \tilde{\psi}_{xc,\theta} \cdot \left(-\frac{y}{r^2}\right) \\ \tilde{\psi}_{xc,y} &= \tilde{\psi}_{xc,r} \cdot \frac{y}{r} + \tilde{\psi}_{xc,\theta} \cdot \frac{x}{r^2}\end{aligned}$$



再來將下面兩式

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\tag{4.7}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi\tag{4.8}$$

代入式(4.6)即完成極座標對卡氏座標之轉換。

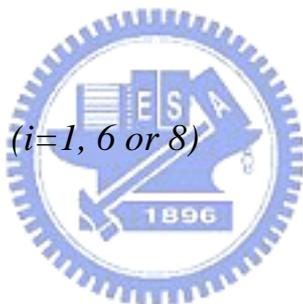
4.1.3 卡氏座標轉換到 ξ 、 η 座標

本論文所用的有限元素單元有兩種，一為八個節點的四邊形元素，另一個則是六個節點的三角形單元，如圖(4.3)、(4.4)所示，且皆

為等參數單元(isoparametric element)。每個元素都是轉換到 ξ 、 η 座標；這個座標系相對於原來的卡氏座標稱為局部座標系，它只適用於各個單元的範圍之內。兩座標系的轉換方式可由下列的關係式得到

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 N_i 是以 ξ 、 η 表示的形狀函數， x_i 、 y_i 分別是節點 i 的 x 、 y 座標值。由於座標系的變換，因此在式(3.9)中 $N_{x_e, x}$ 、 $N_{x_e, y}$ 、 $N_{y_e, x}$ 和 $N_{y_e, y}$ 都必須作以下的轉換：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (i=1, 6 \text{ or } 8) \quad (4.10)$$


其中

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}, \text{ 稱為 Jacobian Matrix。}$$

另外在組成勁度、質量矩陣的式(3.9)、(3.10)中積分的變數也要因座標轉換而改變如下：

$$dA = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (4.11)$$

其中 $|J|$ 為 Jacobian 行列式值。

4.2 實例分析

為了證明 corner function 在具有應力奇異性問題中之可行性與正確性；以下針對具有奇異性之板分別作動力分析與靜力分析，觀察角函數對含有奇異點的板之有限元素收斂性分析的速度快慢影響，及對板之應力分析是否有影響。

4.2.1 自然振動頻率分析

本節以具有 v 形缺口之扇形板與具有裂縫的矩形板為實例，使用有限元數法配合二階形狀函數，於奇異點附近元素引入角函數，再藉由收斂性分析探討角函數對收斂速度之影響。

<A>扇形板



如圖(4.5)，為 $\alpha = 355^\circ$ 的扇形板。在徑向及環向的邊界條件皆為自由邊界(free)，取 $h/a = 0.1$ (a 為扇形板半徑)，波松比 $\nu = 0.3$ ；傳統有限元素的分析中，當切割的網格越多，越能逼近到精確的結果。本案例共切割了四種網格分別具有 397、635、667、779 個元素，為了方便描述，分別給予編號，sp1、sp2、sp3、sp4，如圖(4.6)、(4.7)、(4.8)、(4.9)所示，圖灰色區域即為加入角函數之區域。由於應力的奇異點產生的部分都是在尖端，為方便切割，吾人皆採用三角形元素來涵蓋奇異點附近的區域。sp1 網格中，引入角函數的區域 Ω_c 切割成 8 個元素，該元素遠比外圍的元素大。sp2 網格則將 Ω_c 範圍縮小，用 16 個元素連結於奇異點，如圖(4.7)，並將外圍的網格分割的更細。sp3 的 Ω_c 區域和 sp2 相同，不過又再將外圍切割更細一點，圖(4.8a)與圖(4.8b)為角函數加在不同區域作用情況。最後的 sp4 則是將 sp3 的 Ω_c 切的更

細，如圖(4.9)，而圖(4.10)為其內部示意圖，此時奇異點附近網格已足夠故暫不考慮角函數作用之情形。

本案例所使用的角函數其 r 的起算點必須在奇異點上， θ 的起算點應於扇形板對稱軸上，故需將原本的 r 、 θ 座標系統轉換成 r 、 θ_1 即

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta_1 = \theta - 177.5^\circ \quad (4.12)$$

每組實例皆取前 5 個模態(mode)，整理出 sp1~sp4 的無因自由振動頻率 Ω

$$\Omega = a^2 \sqrt{\rho h / D}$$

其中

$$D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2) \quad (4.13)$$



a 為圓之半徑， ρ 為密度， h 為厚度， E 為彈性模數， ν 為泊松比。表(4.1)為所得分析之結果並與 Kim(1998)結合 corner function 與 Ritz method 所得結果作比對。

表(4.1)可明顯看出角函數對本案例中 355 度扇形板之效果，因此以下對所觀察到之結果作一整理探討：

(a)傳統的有限元素其網格的精細度影響其數值結果，本案例 sp1~sp4 隨著網格元素的增加而收斂到準確解，但觀察加入角函數後，明顯的加速收斂速度，以表(4.1)中的 sp1 來看，當角函數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 與 \bar{w}_c 分別由 2 項、2 項增加到 10 項、10 項及 4 項，頻率值明顯

下降，特別是增加到 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 與 \bar{w}_c 分別是 10 項、10 項及 4 項，此時已達到 sp4 所得到之分析結果。

(b)觀察表(4.1)可發現，角函數確實可以增加收斂速度，但對於高階模態效果並不是相當良好，所以由 sp3 所得之結果可發現，雖然低階模態已趨向收斂，但高階模態仍需有賴於網格的切細方能得到經準值。

(c)如圖(4.8a)與圖(4.8b)所示 sp3 可分成兩個區加入 corner function，由表(4.1)中可清楚知道角函數所在的區域只要選取與奇異點相連的元素即可獲得相同的結果，這現象在具裂縫板中有相同的趨勢，並且避免因為較多的元素加入角函數而增加程式計算時間。

具裂縫之矩形板



今再將角函數應用到具裂縫之矩形板，此時矩形板具有 $c/a=0.5$ 的裂縫於其中間， c 為裂縫長度而 a 為矩形板之長，在四周邊界為 CFCF(與 x 軸平行之邊界為固定端)而內部裂縫處的邊界條件為自由端(free)，且 $a/h=10$ ，波松比 $\nu=0.3$ 。圖(4.11)為裂縫端點示意圖，圖中裂縫視為兩平行線，但裂縫的端點須閉合成一點，因此可視為一尖角，其開口約 0.5 度，；本案例將裂縫的端點模擬成 359.5 度的尖角。

由於裂縫的位於板內，故須考慮兩個應力奇異點，分別在裂縫的起點和終點。藉由本實例也可觀察角函數對於描述角度將近 360 度的應力奇異點，是否能達到良好的效果。

為方便收斂性分析之網格劃分，將此板內部區分為三個區間如圖所示(4.1)，其中 $n1$ 及 $n2$ 隔間數由 4 個增加到 8 個最後增加到 10 個，而 $n3$ 由 8 個隔間數增加到 16 個最後增加到 20 個，最後共產生三組

網格，分別有 128、512、800 個元素，如圖(4.12)。為了方便描述分別給予編號，即 rec1、rec2、rec3，圖中深色部分為有角函數涵蓋之區域。第一組網格 rec1 在兩個奇異點周圍各用了 4 個含有角函數的元素來涵蓋奇異點；rec2 便是將 rec1 再作等分切割的動作，而在每個奇異點附近所包圍的元素由 4 個變成為 16 個；最後的 rec3 則是將 rec2 針對裂縫周圍再加以切割，而在每個奇異點附近所包圍的元素為 64 個。

本案例中則要考慮兩個奇異點所在的位置關係，如圖(4.13)，因為奇異點不在原點，所以必須先轉換到 \bar{X} 、 \bar{Y} 區域座標系統；此系統和整體 X 、 Y 系統轉換如下：

$$\begin{aligned}\bar{X} &= X - x_0 \\ \bar{Y} &= Y - y_0 \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\end{aligned}\tag{4.14}$$


之後再代入

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2} \\ \theta_1 &= \theta + 180^\circ\end{aligned}\tag{4.15}$$

則 r 、 θ_1 即符合角函數中之定義。另一個奇異點也須仿照式(4.14)、(4.15)作轉換。引入角函數後，先在 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 的對稱及反對稱項各取 2 項， \bar{w}_c 的對稱及反對稱項各取 1 項；後來再增加角函數的項數， $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 的對稱及反對稱項各增加到 5 項， \bar{w}_c 的對稱及反對稱項增加到 2 項。每組實例皆取前 5 個模態(mode)，整理出 rec1~rec3 的無因自由振動頻率

表(4.2)為三組網格所得無因次化後所整理的自然振動頻率，並於傳統有限元素分析中引入角函數之後所得數值結果作一比較。由表(4.2)可觀查出 rec1~rec3 振動頻率隨著網格數目的增加而降低，而 rec1~rec3 在加入角函數後，頻率降低的幅度已減小而接近於準確值。

以下是對分析結果的整理：

- (a) 從 $c/a=0.5$ 矩形裂縫厚板之收斂性分析中可知道隨著網格的增加其振動值會越逼近正確值(exact sol.)，在 rec1 加入角函數所得之結果已達到 rec3 的數值解，由此可見角函數確實有達到加快降低振動頻率收斂的效果。
- (b) 如圖(4.12)所示 rec2 可分成兩個區加入 corner function，由表(4.1)中可清楚知道角函數所在的區域只要選取與奇異點相連的元素即可獲得相同的結果，這現象在具裂縫板中有相同的趨勢，並且避免因為較多的元素加入角函數而增加程式計算時間。
- (c) 觀察分析結果可發現角函數對越高階模態的作用明顯的不如第一、二個模態；並且在同一網格中 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 及 \bar{w}_c 的項數從分別從 4 項、4 項及 2 項增加到 10 項、10 項及 4 項時，頻率值降低的幅度不是太多，尤其是在網格越精細時越明顯，增加角函數項數所得到的效果十分有限，所以在本論文後面其他實例分析之中 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項。

4.2.2 靜力分析

本節主要探討當靜力作用時，裂縫附近之內力情形。首先使用有限元數法，並配合網格的切細，再進行收斂性分析，並比對角函數

引入後，角函數對剪力與彎矩之影響。

如圖(4.1)矩形板的中央具有 $c/a=0.5$ 的裂縫，其中 c 為裂縫長度而 a 為矩形板之長，在四周邊界為 CFCF 而內部裂縫處的邊界條件為自由端(free)，矩形板長寬比為 2 比 1，波松比 $\nu=0.3$ 。網格大小採取與上節一樣即 rec1、rec2 與 rec3 即圖(4.12)，而載重僅考慮分佈荷重，載重分佈的情形如圖(4.14)所示，紅色線內部即為受力區域。

圖(4.15)為所分析應力位置之示意圖，表(4.3)為將內力無因次化後所得之彎矩與剪力值；由於奇異點之彎矩會趨近無窮大，所以隨著網格越切越細其值會逼近實際狀況。當加入 corner function 則會增加其逼近速度。表(4.3)之內力無因次化如下

$$\bar{M} = 10 * \frac{M}{q * a^2}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{q_0 * a} \quad (4.16)$$

其中 a 為矩形板之長而 q_0 為分佈荷重之值。

由表(4.3)可觀察，彎矩值的大小隨著網格的切細而遞增，這是因為當網格越細則會越接近實際情況，所以這現象發生是合理的；對同一網格而言，當離奇異點距離越遠，奇異現象則會越不明顯，所以內力會隨著距離增加而有遞減的現象發生。由於本案例幾何形狀具有對稱性，但函數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項，所以角函數並未對剪力產生應有效果，故表(4.3)中的剪力變化不是很明顯，是可被理解的。

最後將比對使用有限元素法之 rec3 結果與 rec1 加入角函數之彎矩分佈情況如圖(4.16)所示，所選取的位置從 $10^{-8} \sim 10^{-5}a$ (a 為矩形板之長度)共取 4 點來比對，可觀察到當只使用傳統有限元素，則奇異點附近之彎矩值大小相差無幾，但加入角函數後可明顯看出變化的趨

勢，所以可以驗證角函數不但可以增加振動頻率之收斂，並且能有效逼近真實奇異點附近內力之實際分佈情形。

4.3 案例分析

透過收斂性分析中已證實角函數對於含有應力奇異之問題的收斂速度有明顯的效果，因此本節將此方法應用到其他裂縫的矩形板，如圖(4.17)所示(長寬比值為 0.5)， $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項，波松比 $\nu=0.3$ ，分析探討當裂縫大小、位置與角度不同時，對振動頻率及模態之影響。

4.3.1 裂縫位於中間之矩形板分析

為了探討裂縫長度對板振動的影響，吾人將探討裂縫位於板中間並逐漸向兩邊延伸之實例，如圖(4.17)此時固定 $b_1/b=0.5$ 。首先利用有限元素分析了邊界條件為 CFCF 之無裂縫厚板，如圖(4.18)，共有 512 個元素，再分別對於 c/a 值為 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{2}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{6}{8}$ 在寬厚比(a/h)為 10 及 20 時的實例分析，在四周邊界為 CFCF 而內部裂縫處的邊界條件為自由端(free)。所切割的網格每個長寬都是 $\frac{a}{16}$ ，一共 512 個元素，每個奇異點都將附近 16 個元素引入角函數，如圖 4.19(a)~4.19(d)而灰色部分是有角函數加入的區塊。四組網格分析所採取的角函數項數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項，每組實例皆取前 5 個模態，連同 $a/h=10$ 與 20 無因次化後整理於表(4.4)與表(4.5)，藉由表可了解裂縫的長短對於不同寬厚比之圓板振動頻率的影響及趨勢。另外也將完整矩形板、 $c/a=\frac{1}{8}$ 及 $c/a=\frac{6}{8}$ 三個實例的振態(mode shape)整理

於圖(4.20)，其中整個板 w 位移為 0 的點連接起來的直線或曲線稱之為節點線(nodal line)，用來比較各個振態之差異性。

由於具有裂縫之矩形厚板，其振動頻率必定比完整的矩形厚板小，這個是必然的物理現象，由表(4.4)與(4.5)的結果可再次驗證此推論。振動頻率會隨著裂縫長度的增加而遞減，在 $c/a=\frac{1}{8}$ 時，裂縫對於自然振動頻率的影響十分有限，和無裂縫板的頻率相差不大，尤其是第二個的模態更是幾乎沒有改變。當 $c/a=\frac{3}{8}$ 或 $\frac{6}{8}$ ，裂縫造成勁度明顯下降，所以振動頻率已有明顯的變化，不論 a/h 為 10 or 20 皆符合此情況。對於高階模態而言，因為變形已趨向複雜，因此裂縫影響會大於低階模態，這些結果也都符合了物理直覺及現象。

觀察圖(4.20)， $c/a=0$ 是一個無裂縫的矩形板， $c/a=0$ 、 $c/a=\frac{1}{8}$ 及 $c/a=\frac{6}{8}$ 三組實例模態雖不相同，但仍應與無裂縫板前五個模態有對稱 y 軸、反對稱 y 軸、對稱 y 軸、反對稱 y 軸及對稱 y 軸具有相同之物理特性。第一模態 $c/a=\frac{1}{8}$ 及 $c/a=\frac{6}{8}$ 兩案例同樣的也是對稱的；第二個模態因為 $c/a=\frac{6}{8}$ 裂縫過大，彎矩勁度明顯降低，導致裂縫錯開，因而振動頻率有顯著的差異；第三個模態可發現 $c/a=\frac{1}{8}$ 恢復對稱性質，而 $c/a=\frac{6}{8}$ 此時才呈現出與無裂縫第二個模態相同的性質(反對稱 Y 軸)。第四個與第五個模態 $c/a=\frac{1}{8}$ 仍呈現出與無裂縫板高度的相似，而 $c/a=\frac{6}{8}$ 因為裂縫過大，所以造成振動頻率有顯著的差異。

4.3.2 裂縫位置 $c_1/a=0.25$ 之矩形板分析

前一節所分析的實例裂縫是位於中間，本節是將裂縫平移到 $c_1/a=0.25$ 且 $b_1/b=0.5$ 的位置，參考圖(4.17)，探討此時裂縫對板的影響。板四周邊界仍為 CFCF 而內部裂縫處的邊界條件為自由端(free)，分別對於 c/a 值為 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{2}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{6}{8}$ 在寬厚比(a/h)為 10 及 20 時作實例分析，所切割的網格精細度仍以圖(4.18)為標準，即每個元素長寬都是 $\frac{a}{16}$ ，一共 512 個元素。最後選取 16 個元素導入角函數作用，如圖 4.21(a)~4.21(d)，灰色區塊即為角函數作用處。四組網格分析所採取的角函數項數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項，每組實例皆取前 5 個模態，連同 $a/h=10$ 與 20 的結果整理成無因次化自由振動頻率於表(4.4)及(4.1)，由表可了解裂縫的長短對於不同寬厚比之圓板振動頻率的影響及趨勢。另外也將完整矩形板、 $c/a=\frac{1}{8}$ 及 $c/a=\frac{6}{8}$ 三個實例的振態(mode shape)整理於圖(4.22)，用以比較各個振態之差異性。

由表(4.4)與(4.5)可發現不論 a/h 為 10 or 20 自然振動頻率皆隨裂縫長度增加而下降。當裂縫 a/h 為 10 時，除了裂縫發生 $c/a=\frac{6}{8}$ 會與其他組數有較大的差異，其他比值的模態值差異都不是很明顯；並且可發現雖然裂縫長度增加，但裂縫對於偶數個模態值的影響卻較奇數格模態小，除了裂縫比值為 $c/a=\frac{6}{8}$ 外，這情況在 a/h 為 10 or 20 都是具有相同的特性。

為了方便觀察裂縫對模態的影響，所以將 $c/a=0$ 、 $c/a=\frac{1}{8}$ 及 $c/a=\frac{6}{8}$ 三組實例之振態(mode shape)整理於圖 (4.22)來做與完整板詳細的探討比對。觀察圖(4.22) $c/a=0$ 與 $c/a=\frac{1}{8}$ 之模態圖可發現，裂縫導致圖中的節點線(nodal line)變化不大，因此振動頻率下降不多； $c/a=\frac{6}{8}$ 這例子由於已開裂至邊界，造成彎矩勁度明顯降低，模態圖變的與無裂縫時不同，所以振動頻率有顯著的下降也可是合理的。

4.3.3 裂縫位置 $c_1/a=0$ 之矩形板分析

當 $c_1/a=0$ 時也就是裂縫已從邊界開始，參考圖(4.17)，所取的四邊邊界仍採用 CFCF 而內部裂縫處之邊界條件為自由端(free)，分別對於 c/a 值為 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{2}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{6}{8}$ 在寬厚比(a/h)為 10 及 20 時作實例分析，圖(4.18)的矩形板為網格精細度標準，每個元素長寬都是 $\frac{a}{16}$ ，皆取 512 個元素來做分析，此時奇異點只剩一個，並在奇異點附近選取 16 個元素來加入 corner function，所採取的角函數項數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項，每組實例皆取前 5 個模態，連同 $a/h=10$ 、20 的結果整理成無因次化自由振動頻率於表(4.4)及(4.1)。圖 4.23(a)~4.23(d)為四組所要分析之網格 mesh 圖形。另外再對無裂縫($c/a=0$)、 $c/a=\frac{1}{8}$ 及 $c/a=\frac{6}{8}$ 三個實例之模態圖(mode shape)以圖(4.24)表示之。

由表(4.4)與(4.1)可知到振動頻率隨裂縫增加而下降無論是在(a/h)為 10 或 20 都成立，這也可驗證上面的分析結果。對於 $c/a=\frac{6}{8}$ 所得

到的振動頻率數值與上節 $c_1/a=0.25$ 中 $c/a=\frac{6}{8}$ 之分析結果完全一樣，這是因為所選取的邊界兩兩相同，因此結構具有對稱的性質，所以當裂縫長度相同時，而且當裂縫所在位置亦發生幾何對稱時(參考圖 4.21(d)與圖 4.23(d))，則會有相同的結果，這也符合直觀的看法。

觀察圖(4.24)， $c/a=\frac{1}{8}$ 的模態圖，第一個模態因為已經開裂，所以板的彎矩勁度明顯降低導致與 $c/a=0$ 之振動頻率有較明顯的差別；第 2 模態與第 4 個模態為反對稱 Y 軸，並且可看出裂縫並沒與節點線(nodal line)接觸到，所以沒有直接影響到振動行為，而分析出來的振動頻率值可驗證出吾人判斷是合理的；觀察第 5 個模態，此時模態圖已觀察不出與 $c/a=0$ 之圖形相似點，這情形表示裂縫已影響原先振動行為，進一步可推斷出高階模態受到裂縫的影響會大於低階模態，而所得之分析結果與無裂縫比較也確實可看出兩者明顯差異，這結果也是可接受的； $c/a=\frac{6}{8}$ 與上節 $c_1/a=0.25$ ， $b_1/b=0.5$ 裂縫位置具有對稱關係且邊界對稱，所以物理性質相同也是必然的，故不再贅加討論。觀察裂縫由中間到 $c_1/a=0$ 的過程，可明顯發現前兩個模態值隨著裂縫的移動又下降，這應該是當裂縫越向邊界其進度降低越多，所以模態值會有遞減的情形。

4.3.4 裂縫位置 $b_1/b=0.25$ 之矩形板分析

本節要探討的裂縫位置是位於板中間並逐漸向兩邊延伸之實例，但高度已從 $b_1/b=0.5$ 下降到 $b_1/b=0.25$ 參考圖(4.17)，分別對於 c/a 值為 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{2}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{6}{8}$ 在寬厚比(a/h)為 10 及 20 時作實例分析。在四周邊界為 CFCF 而內部裂縫處的邊界條件為自由端(free)。所切割的網

格精細度以圖(4.17)的矩形為標準，皆為 512 個元素，每個元素都是邊長 $\frac{a}{16}$ 的正方形方塊，並且在奇異點附近選取 16 個元素來加入角函數，如圖 4.25(a)~4.25(d)所示。四組網格分析所採取的角函數項數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項，每組實例皆取前 5 個模態，連同 $a/h = 10$ 與 20 的結果整理成無因次化自由振動頻率於表(4.4)與表(4.1)。另外也將 $c/a=0$ 、 $c/a=\frac{1}{8}$ 及 $c/a=\frac{6}{8}$ 三個矩形板實例的振態(mode shape)整理於圖(4.26)，用以比較裂縫對各個振態造成之差異性。

表(4.4)與表(4.1)再次驗證振動隨裂縫增加而下降，並由前些章節可知，此情況不會因為位置不同而改變；對第一個模態而言， $c/a=\frac{6}{8}$ 時振動頻率下降的相當明顯，可推估此時裂縫長度過長，所以造成板的振動行為改變；第二個模態除了 $c/a=\frac{6}{8}$ 這實例與其他三個實例所得到之分析結果都相差無幾，可知到此時裂縫並不影響板的振動行為；在第 3 與第 5 模態，可看出 $c/a=\frac{6}{8}$ 頻率下降趨勢已趨向平緩。

圖(4.26)以選取 $c/a=\frac{1}{8}$ 與 $c/a=\frac{6}{8}$ 用以比對無裂縫板。當 $c/a=\frac{1}{8}$ 發生時，可看出各模態圖中的節點線(nodal line)與 $c/a=0$ 的圖形變化不大，所以知道裂縫並沒有改變原本之物理性質；當裂縫持續增加到 $c/a=\frac{6}{8}$ ，第一模態因裂縫明顯改變了原本的行為，而振動頻率也明顯的下降；第 2 個模態雖然裂縫通過節點線(nodal line)，但仍然反對稱 y 軸，所以影響不大；其他高階模態則因為裂縫過長，而影響到原先的模態，甚至第五個模態的節點線(nodal line)已呈現合併的情形，呈

現曲線形式，並以再與 $c/a=0$ 的圖形發生同樣對稱 y 軸的情況，並且觀察模態值可加以驗證。

比對裂縫在中間但高度不同的兩種情況，由表(4.4)與(4.1)可觀察出當 $c/a=\frac{1}{8}$ 時 $b_1/b=0.25$ 的奇數個模態值會高於 $b_1/b=0.5$ 的模態值，偶數個模態則剛好相反；圖(4.20)與(4.26)可知到奇數模呈現對稱 Y 軸的情況，而偶數模態則是反對稱 Y 軸，所以可知道裂縫對 $b_1/b=0.5$ 實例中的對稱模態影響較大，反對稱則較小，因此會反映在模態值中。

4.3.5 不同角度之矩形裂縫板分析

前幾節的實例分析以裂縫在不同位置，並配合增加裂縫長度，探討裂縫對模態的影響；本節將選擇以 $c/a=\frac{3}{8}$ 的縫長度，以不同旋轉角參考圖(4.27)，瞭解裂縫旋轉角度不同時對自然振動頻率的影響及模態圖變化的趨勢。所選取的四邊邊界仍採用 CFCF 而內部裂縫處之邊界條件為自由端(free)。由於是探討裂縫旋轉角度對自然振動頻率的影響，因此選擇了三組案例，分別是當旋轉角為 30、60、90 度時，分割的網格圖如圖 4.28(a)~4.28(c)，並考慮長厚比為 10 及 20 情況下的差異。三組網格分析所採取的角函數項數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 對稱與反對稱各取 1 項， \bar{w}_c 只取反對稱 1 項，每組實例皆取前 5 個模態，連同 $a/h=10$ 與 20 的結果整理成無因次化自由振動頻率於表(4.6)。另外也將旋轉角分別是 $\theta=30^\circ$ 、 $\theta=60^\circ$ 與 $\theta=90^\circ$ 三個實例的振態圖(mode shape)整理於圖(4.29)，用以比較不同角度各個振態之差異性。

觀察表(4.6)可發現第一個模態值，隨著角度變大而遞增，這表是當角度趨向 90 度時，此時裂縫對板的影響是最低的，因此模態值會

與無裂縫狀態最接近；對第 2 與第 3 模態值而言，角度造成的影響是不明顯的，特別是當厚度下降時如表(4.6(b))更可以清楚的看出，只有小數點的差異，可知旋轉角對此模態影響不大；第四個模態值會因為旋轉角的增加而下降；觀察第五個模態值可發現是隨著角度的增加，但當角度為 90 度時，模態值會有些微的下降，這現象在 $a/h=10$ 與 20 都存在，這應該是高階模態振動行為趨向複雜所導致的。

由圖(4.29)可瞭解不同角度之模態圖，用以分析旋轉角對模態圖造成之影響。觀察奇數模態模態圖，當旋轉角度增加，而模態圖會趨向對稱 y 軸，此時的振動特性會與無裂縫時相近，故模態值隨角度增加而同時遞增；第二與第四個模態圖本應是趨向反對稱於 y 軸，但隨旋轉角之增加，裂縫造成之影響越大，所以由模態值可察覺，角度越大下降幅度越多，而且高階模態影響會較低階模態明顯；最後探討第五個模態圖，由無裂縫之模態圖可知，此時是恢復到對稱 y 軸，所以跟前面的對稱模態一樣，隨角度增加而模態值增加，不過由於高階模態振動行為較複雜，所以當旋轉角增加到 90 度時，此時模態值還有些幅的下降，這現象應該是裂縫對其他節點線造成的影響所導致的。

第五章 結論與建議

5.1 結論

本論文以有限元素法為基礎，引進角函數來探討具有奇異應力矩形 Mindlin 板之問題，並針對不同裂縫長度、位置及角度進行探討與分析。其過程為利用 Fortran 語言撰寫分析自然振動頻率之有限元素電腦程式，藉由收斂性分析與文獻的比對來印證本論文所採用方法之可行性與正確性。下面是針對於本研究做一完整的結論。

- (a) 透過表(4-1)之矩形裂縫板收斂性分析可看出角函數的確可以降低自然振動頻率，並且增加收斂的速度，但角函數對於高階模態成效卻不見理想，所以要將所分析數值解趨近收斂值還有賴於切割網格的精細度，如此高階模態才會趨近收斂。
- (b) 矩形裂縫板中的角函數 $\hat{\psi}_{xc}$ 、 $\hat{\psi}_{yc}$ 及 \hat{w}_c 的項數從分別從 4 項、4 項及 2 項增加到 10 項、10 項及 4 項時，頻率值降低的幅度不是太多，尤其是在網格越精細時越明顯，增加角函數項數所得到的效果十分有限，所以可知到角函數的項數不需太多即可達到它的功能，一再增加項數只是多浪費電腦計算時間，並無實質的幫助。
- (c) 具有裂縫的矩形板其自然振動頻率比無裂縫矩形板小的特性，不因裂縫位置改變而不同，且從分析的過程也發現當寬厚比為 10 及

20 的厚板皆符合此規則；當裂縫過小，如 $c/a = \frac{1}{8}$ 裂縫對振態幾乎沒有明顯的改變，除了當裂縫從邊界裂開時，才對高階模態有顯著的改變，並且可由模態圖及模態值中可清楚察覺。

(d) 裂縫從邊界開始的實例所得到的自然振動頻率值都較小，特別是 c/a 比值愈大越明顯，對於高階的影響會更顯著，這是因為裂縫已經開裂，導致矩形板彎矩勁度明顯降低所發生的結果。

(e) 比較不同高度，但裂縫長度都是從中間向兩邊遞增可發現有一定的關係，當 $c/a = \frac{1}{8}$ 時模態可分成對稱與反對稱， $b_1/b = 0.5$ 的反對稱其值會較大於 $b_1/b = 0.5$ ，對稱模態則剛好相反。

(f) 當裂縫長度固定，有不同的旋轉角發生時振動頻率會有一定的趨勢，由於幾何圖形與裂縫都是兩兩相同，所以模態可分為對稱與反對稱；對稱模態發生時，自然振動頻率隨角度增加而增加，反之當反對稱發生時，自然振動頻率隨角度增加而遞減。

5.2 建議

以下針對於本論文研究結果提出建議：

(a) 本論文是利用有限元素並配合二次形狀函數，採用 8 個節點的四邊形及 6 個節點的三角形來模擬，在奇異點處引入角函數，以增加

收斂速度，但網格建立花費大量的時間，所以建議後人可以用無網格(mesh free)來模擬奇異點附近的狀態，並進行比對分析。

- (b)裂縫的發生常是結構體破壞的起點，因此後人可進一步探討分析應力強度因子(stress intensity factor)，以變將來提供給工程界作為破壞檢定之參考因子。



參考文獻

- Huang, C. S. (2003) “Stress singularities at angular corners in first-order shear deformation plate theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45, pp. 1-20.
- Khadem, S. E. and Rezaee, M. (2000) “Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate”, *Journal of Sound and Vibration*, 236(2), pp. 245-258.
- Kim, J. W. (1998), A Ritz variational procedure for three-dimensional vibroelasticity problems with singularities, Ph.D dissertation Georgia Institute of Technology.
- Lee, H. P. (1991) “Fundamental frequencies of annular plates with internal cracks”, *Computers & Structures*, 43(6), pp. 1085-1089.
- Lee, H. P. and Lim, S. P. (1992) “Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inertia”, *Computers & Structures*, 49(4), pp. 715-718.
- Leissa, A. W. (1969) “Vibration of plates”, NASA SP-160 Washington, DC, Office of Technology Utilization, NASA.
- Liew, K. M., Xiang. Y. and Kitipornchai, S. (1993a) “Transverse vibration of thick rectangular plates, I: Comprehensive Sets of Boundary Conditions”, *Computers & Structures*, 49(1), pp. 1-29.
- Liew, K. M., Xiang. Y. and Kitipornchai, S. (1993b) “Transverse vibration of thick rectangular plates, II: Inclusion of Oblique Internal Line Supports”, *Computers & Structures*, 49(1), pp. 31-58.
- Liew, K. M., Xiang. Y. and Kitipornchai, S. (1993c) “Transverse vibration of thick rectangular plates, III: Effect of Multiple Internal Eccentric Ring Supports”, *Computers & Structures*, 49(1), pp. 59-67.

- Liew, K. M., Xiang. Y. and Kitipornchai, S. (1993d) “Transverse vibration of thick rectangular plates, IV: Influence of Isotropic In-Plan Pressure”, *Computers & Structures*, 49(1), pp. 69-78.
- Liew, K. M., Xiang. Y. and Kitipornchai, S. (1995) “Research on thick plate vibration a literature survey”, *Journal of Sound and Vibration*, 180(1), pp. 163-176.
- Liu, F. L. and Liew, K. M. (1998) “Free vibration analysis of Mindlin sector plates: numerical solutions by differential quadrature method”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177, pp. 77-92.
- Lynn, P. P. and Kumbasar, N. (1967) “Free vibration of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges”, *Midwestern Mechanics Conference*.Fort, pp. 911-928.
- Qian, G. L., Gu, S. N. and Jiang, J. S. (1990) “A finite element model of cracked plates and application to vibration problems”, *Computers & Structures*, 39(5), pp. 483-487.
- Stahl, B. Keer, L. M. (1972) “Vibration and stability of crack rectangular plates”, *International Journal of Solid and structures*, 29, pp.69-91.
- Solecki, R. (1983) “Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge”, *Engineering Fracture Mechanics*, 18, pp. 1111-1118.
- Yuan, J., Young, P. G. and Dickinson, S. M. (1993) “Natural frequencies of circular and annular plates with radial or circumferential cracks”, *Computers & Structures*, 53(2), pp. 327-334.

林聰悟，林佳慧，「數值方法與程式」，圖文技術服務有限公司，民國八十八年。

洪彥斌，「利用考慮應力奇異之有限元素法分析具開口或裂縫之圓厚

板振動」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文(2003)。



表 4.1 355 度扇形板之收斂性分析結果(h/a=0.1)

網格名稱	sp1			sp2			sp3								sp4	Ritz**
node no.	1100			1810			1876								2150	
no. of element	397			635			667								779	
Mode	Corner Function			Corner Function			Corner Function								Corner Function	
	(0,0,0)	(2,2,1)*	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)	(a)				(b)					
	(0,0,0)	(1,1,1)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(1,1,1)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(1,1,1)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(0,0,0)		
1	2.768	2.734	2.730	2.765	2.729	2.725	2.740	2.728	2.723	2.721	2.740	2.729	2.723	2.722	2.729	2.729
2	4.254	4.239	4.233	4.250	4.235	4.229	4.235	4.229	4.228	4.226	4.235	4.230	4.228	4.226	4.229	4.228
3	7.574	7.560	7.553	7.570	7.555	7.550	7.555	7.550	7.549	7.547	7.555	7.550	7.549	7.547	7.549	7.548
4	7.599	7.588	7.588	7.595	7.584	7.583	7.586	7.583	7.581	7.581	7.586	7.583	7.582	7.581	7.582	7.577
5	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.23

*(2,2,1) 代表 $\hat{\psi}_{xc}$ 、 $\hat{\psi}_{yc}$ 的對稱及反對稱項各取 2 項， \hat{w}_c 的對稱及反對稱項各取 1 項；以此類推。

**結果出自 Kim (1998)

表 4.2 c/a=0.5 矩形裂縫厚板 (Ω) 收斂性分析結果

網格名稱	rec1			rec2						rec3		
Node no.	448			1664						2560		
No. of element	128			512						800		
Mode	Corner function			Corner function						Corner function		
				(a)			(b)					
	(0,0,0)	(2,2,1)*	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)
1	6.038	6.021	6.009	6.017	6.003	6.002	6.017	6.007	6.003	6.009	6.002	6.002
2	7.221	7.211	7.204	7.205	7.196	7.196	7.205	7.199	7.196	7.200	7.196	7.196
3	7.966	7.966	7.966	7.959	7.948	7.947	7.959	7.959	7.959	7.958	7.943	7.943
4	8.099	8.011	7.994	8.016	7.959	7.959	8.016	7.972	7.965	7.979	7.958	7.958
5	10.13	10.11	10.10	10.10	10.09	10.09	10.10	10.10	10.09	10.10	10.09	10.09

*(2,2,1) 代表 $\hat{\psi}_{xc}$ 、 $\hat{\psi}_{yc}$ 的對稱及反對稱項各取 2 項， \hat{w}_c 的對稱及反對稱項各取 1 項；以此類推。

表 4.3 奇異點附近不同位置之無因次內力值

$$\bar{M} = 10 * \frac{M}{q * a^2}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{q_0 * a}$$

element	128			512			800			Corner function		
	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01
Distance	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01	a*1.E-05	a*1.E-03	a*1.E-01
\bar{M}_{xx}	0.048	0.048	0.045	0.097	0.097	0.084	0.167	0.166	0.130	0.143	0.056	0.044
\bar{M}_{yy}	0.181	0.181	0.171	0.246	0.246	0.212	0.340	0.339	0.239	0.211	0.185	0.172
\bar{M}_{xy}	-0.036	-0.036	-0.031	-0.066	-0.066	-0.051	-0.104	-0.103	-0.058	-0.035	-0.035	-0.031
\bar{Q}_x	-0.274	-0.273	-0.245	-0.346	-0.345	-0.292	-0.402	-0.401	-0.312	-0.272	-0.272	-0.243
\bar{Q}_y	0.138	0.137	0.115	0.099	0.098	0.068	0.071	0.071	0.032	0.136	0.135	0.113

a 為矩形板之長度而 q_0 為分佈荷重之值

*(1,1,1) 代表 $\hat{\psi}_{xc}$ 、 $\hat{\psi}_{yc}$ 的對稱及反對稱項各取 1 項， \hat{w}_c 的反對稱項取 1 項

表 4.4 不同位置之矩形裂縫板之無因次振動頻率(a/h=10)

c/a	b/b	c/a		1/8	2/8	3/8	6/8
		Mode					
0	1/2	1		65.94	59.24	55.47	51.62
		2		71.53	71.43	61.42	52.52
		3		82.22	74.32	71.36	64.24
		4		105.0	82.05	80.93	72.90
		5		116.0	104.5	102.1	76.10
1/4	1/2	1		68.95	65.86	62.34	51.62
		2		72.48	72.42	72.17	52.52
		3		82.90	80.81	78.95	64.24
		4		103.9	102.9	97.09	72.90
		5		139.8	130.3	102.2	76.10
1/2	1/2	1		69.12	66.11	62.43	54.92
		2		72.84	72.72	72.24	62.25
		3		81.64	79.51	78.67	65.80
		4		105.4	104.6	97.10	77.60
		5		138.7	130.3	102.4	95.02
1/2	1/4	1		69.77	66.36	57.62	36.16
		2		72.80	72.64	72.15	60.56
		3		82.36	78.89	76.59	74.29
		4		105.2	104.4	101.7	88.18
		5		138.9	133.0	127.0	123.3

表 4.5 不同位置之矩形裂縫板之無因次振動頻率($a/h=20$)

c_1/a	b_1/b	c/a				
		Mode	1/8	2/8	3/8	6/8
0	1/2	1	19.18	16.83	15.52	14.20
		2	21.15	21.11	17.64	14.51
		3	24.66	22.29	21.09	18.48
		4	31.83	24.60	24.19	21.39
		5	37.95	31.68	30.83	22.55
1/4	1/2	1	20.31	18.73	17.99	14.20
		2	21.50	21.48	21.39	14.51
		3	24.96	23.61	23.58	18.48
		4	31.56	31.35	30.96	21.39
		5	43.06	41.32	31.49	22.55
1/2	1/2	1	20.32	19.27	17.96	15.36
		2	21.62	21.57	21.40	17.94
		3	24.50	23.76	23.47	19.12
		4	32.04	31.75	30.97	23.08
		5	42.69	42.22	31.01	29.26
1/2	1/4	1	20.63	19.91	17.57	10.26
		2	21.61	21.57	21.47	18.05
		3	24.90	23.85	22.86	22.18
		4	32.00	31.78	31.09	26.19
		5	42.88	41.18	39.14	37.50

表 4.6 不同旋轉角之裂縫矩形板自然振動頻率

($c/a=3/8$, $c_1/a=1/2$, $c_1/b=1/2$)

(a)					
a/h	θ Mode	0 度	30 度	60 度	90 度
10	1	62.43	64.96	68.72	70.03
	2	72.24	72.02	71.44	71.29
	3	78.67	77.92	78.23	79.50
	4	97.10	89.61	85.46	84.52
	5	102.4	115.8	126.8	125.5
(b)					
a/h	θ Mode	0 度	30 度	60 度	90 度
20	1	17.96	18.95	20.25	20.65
	2	21.40	21.45	21.21	21.12
	3	23.47	23.27	23.54	24.04
	4	30.97	27.94	26.43	26.01
	5	31.01	35.81	38.92	38.69

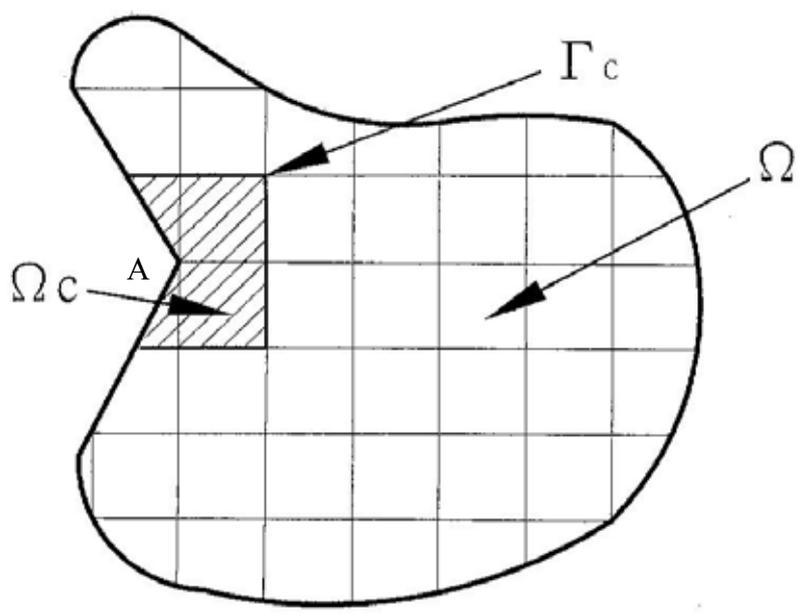


圖 1.1 具應力奇異點板示意圖

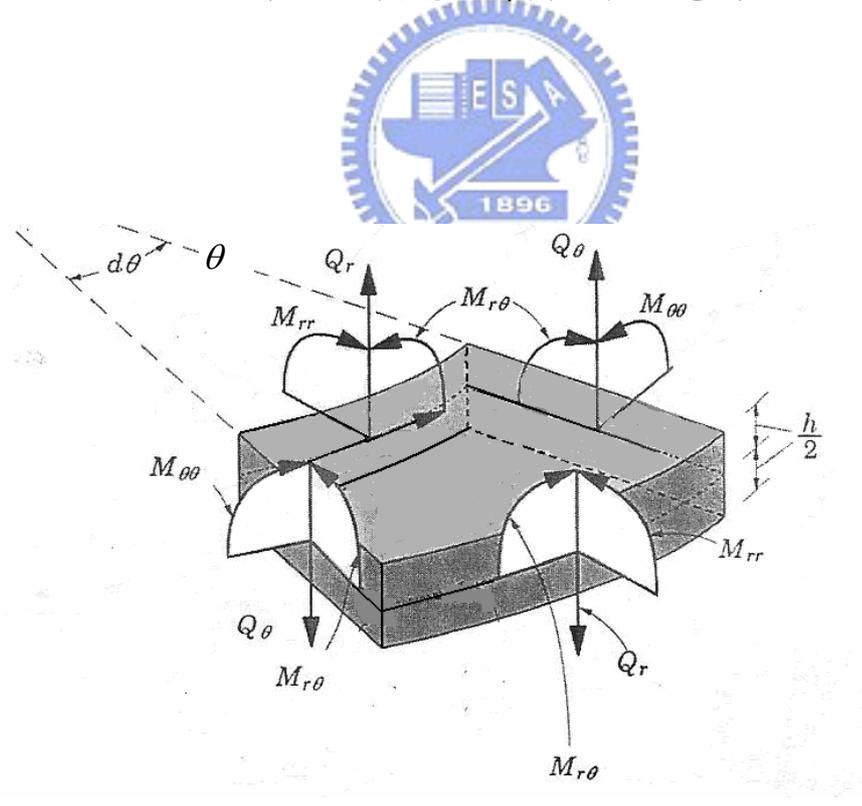


圖 2.1 板上內力之示意圖

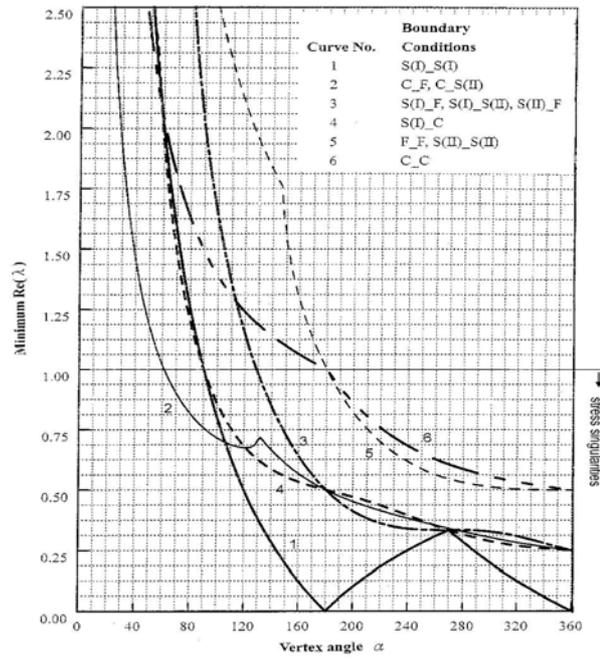


Figure 1 Variation of minimum positive $\text{Re}(\lambda)$ with vertex angle α for FSDPT.

圖 2.2 最小實部 λ 值與扇形角之關係(節錄 Huang(1994))

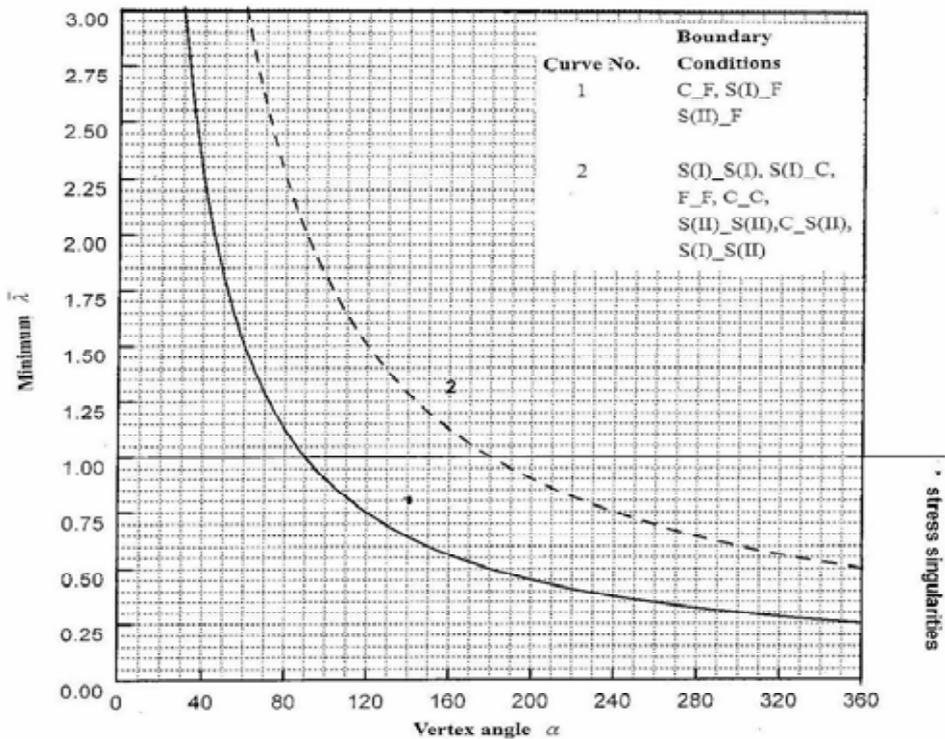


圖 2.3 最小 $\bar{\lambda}$ 值與扇形角之關係(節錄 Huang(1994))

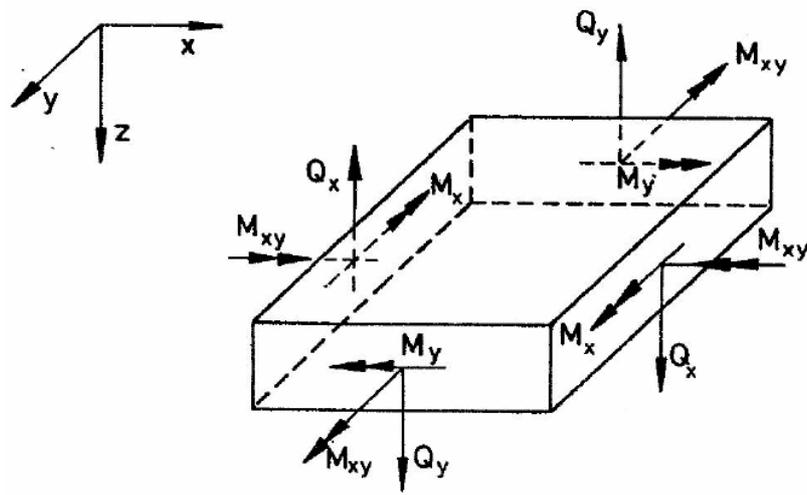


圖 3.1 板上之剪力與彎矩示意圖



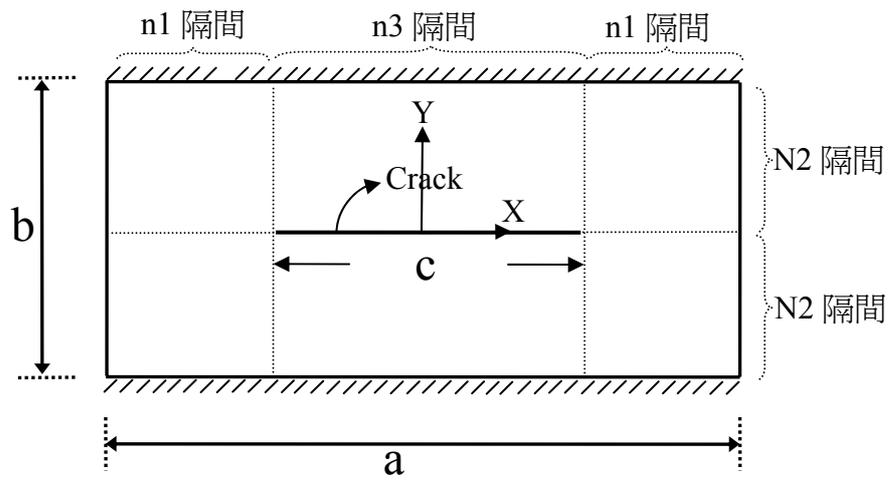


圖 4.1 矩形板之裂縫示意圖

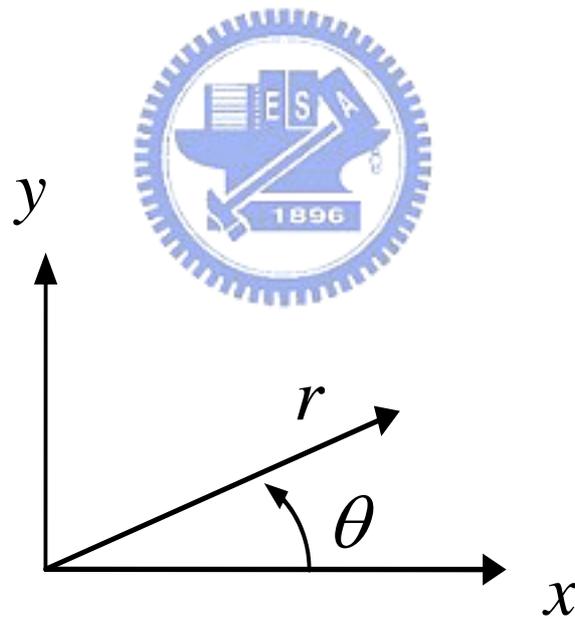


圖 4.2 極座標和卡氏座標的轉換關係

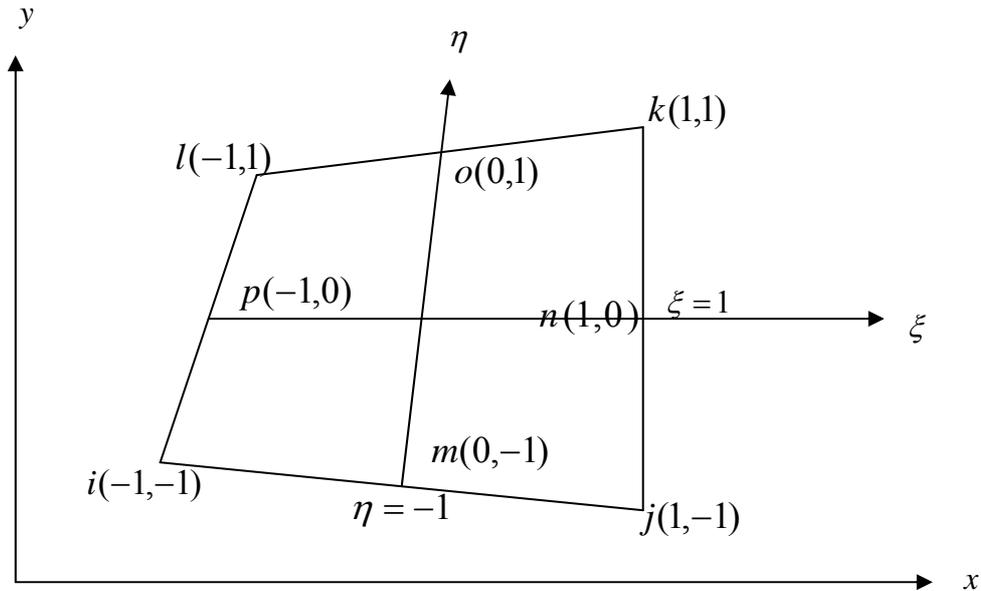


圖 4.3 四邊型元素示意圖

其中形狀函數(shape function)如下

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_l(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_m(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_n(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_o(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_p(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

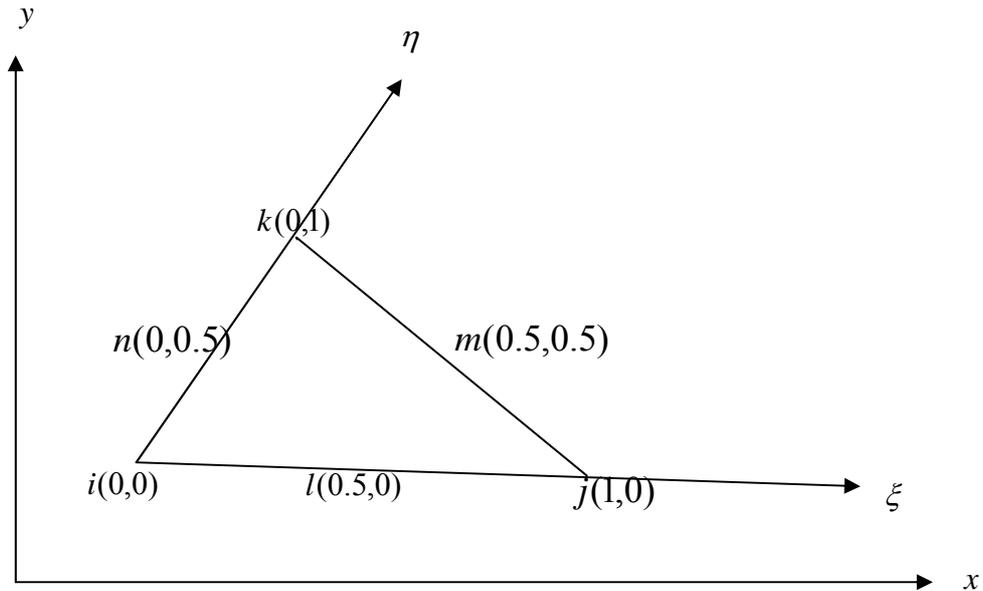


圖 4.4 三角形元素示意圖

其中形狀函數(shape function)如下

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$

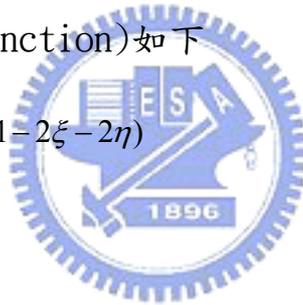
$$N_j(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_k(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_l(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$N_m(\xi, \eta) = 4\xi\eta$$

$$N_n(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$



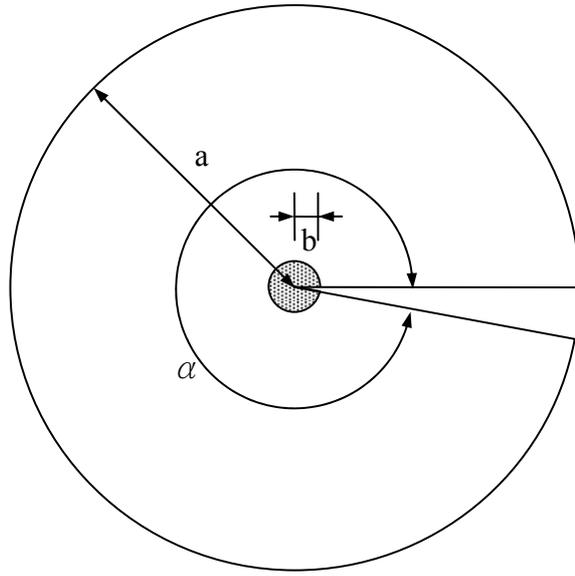


圖 4.5 355 度扇形板示意圖



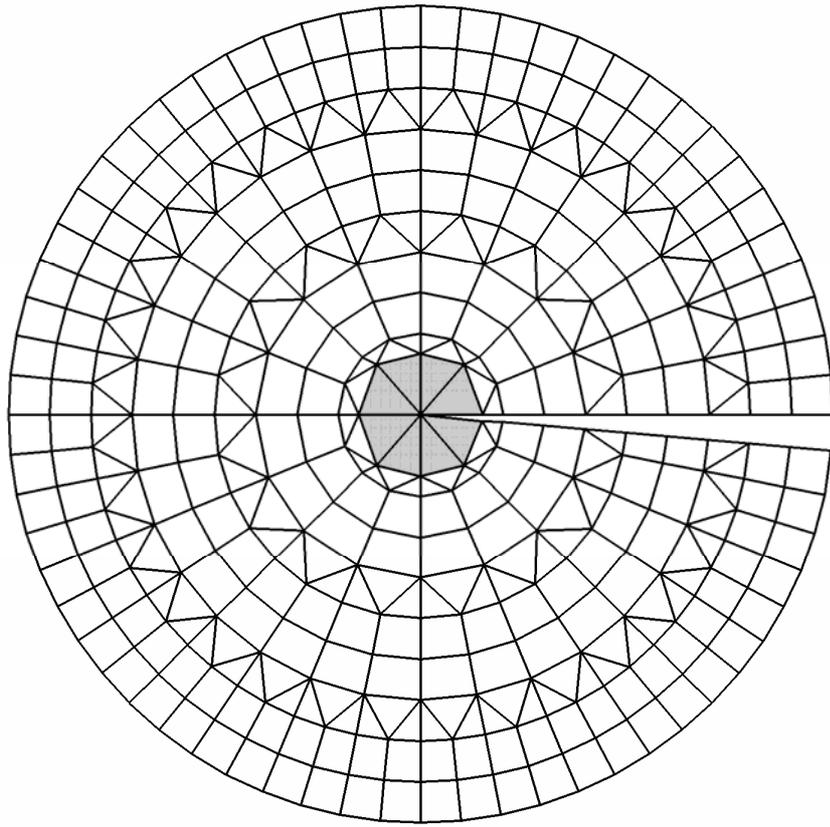


圖 4.6 $sp1$ 網格切割圖

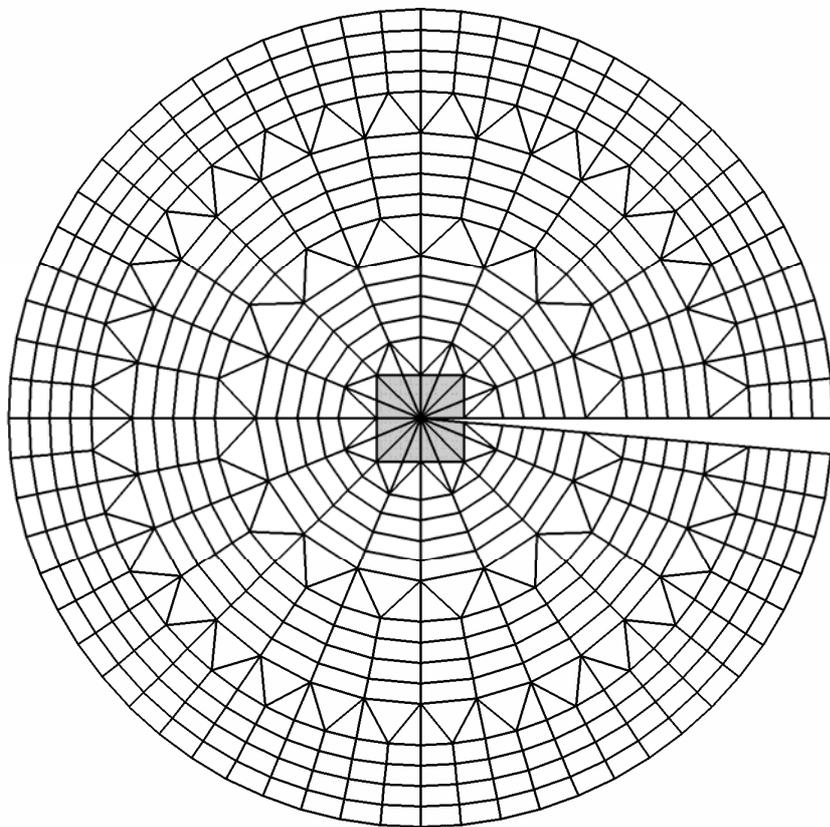


圖 4.7 $sp2$ 網格切割圖

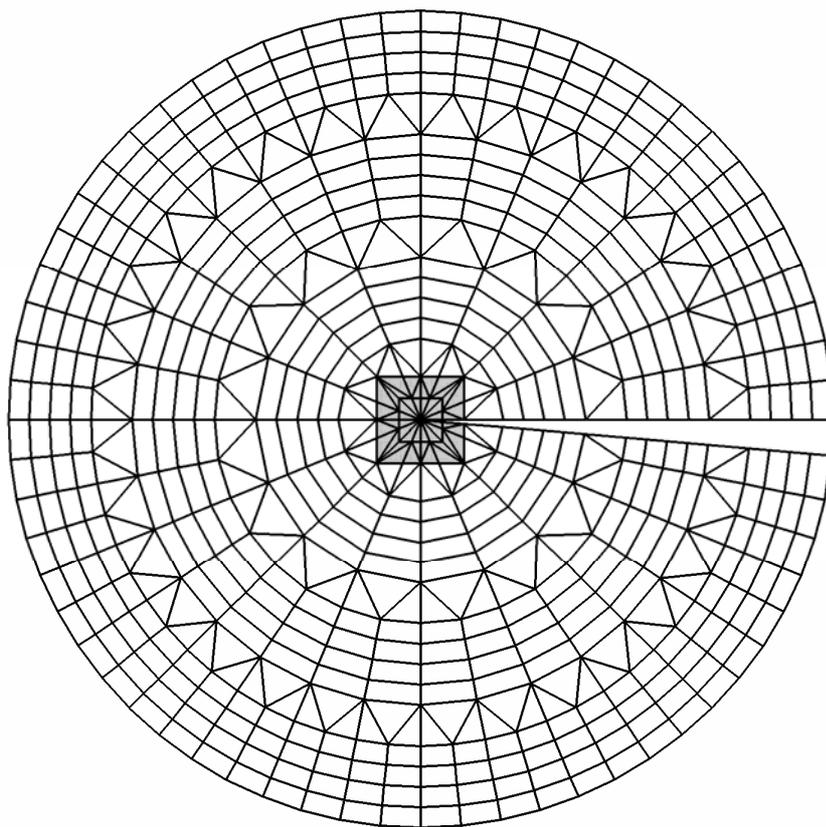


圖 4.8(a) sp3(a)網格切割

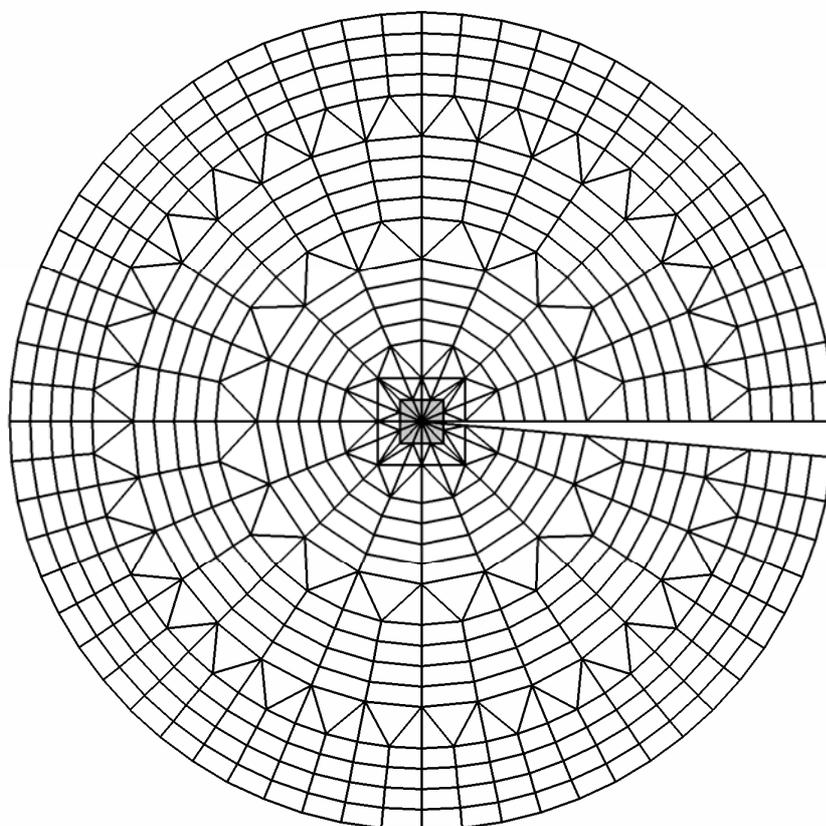


圖 4.8(b) sp3(b)網格切割圖

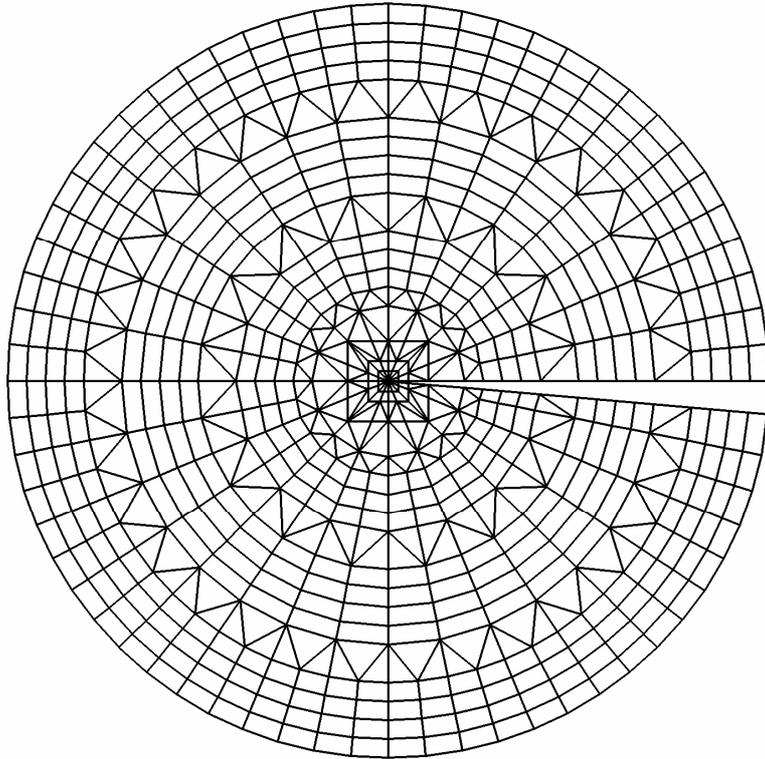


圖 4.9 sp4 網格切割圖

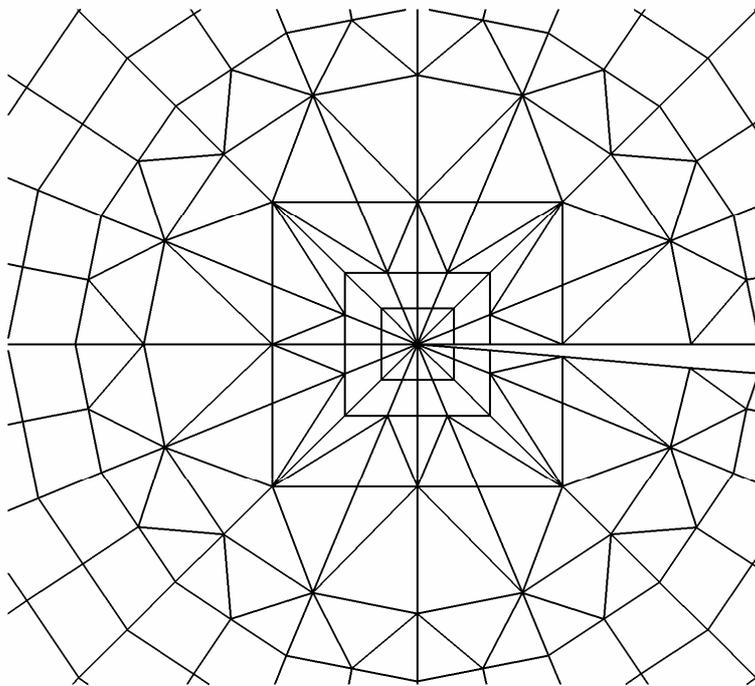


圖 4.10 sp4 網格內部示意圖

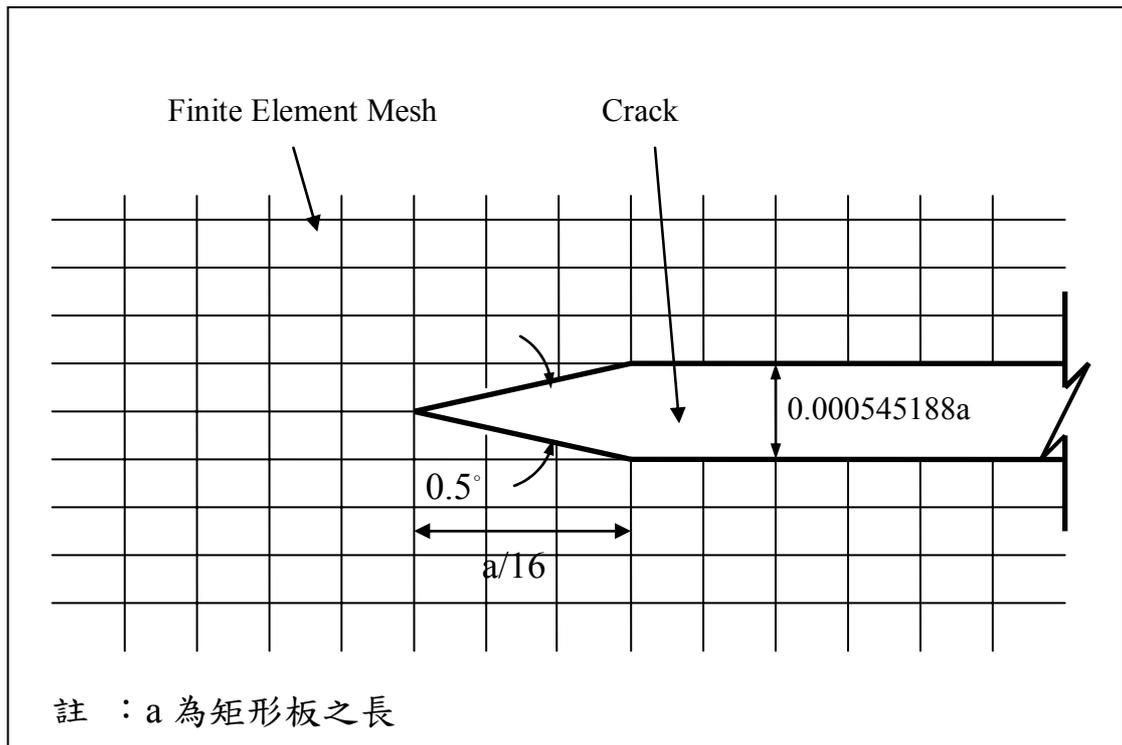
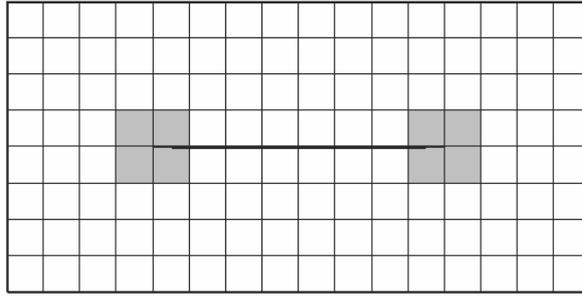
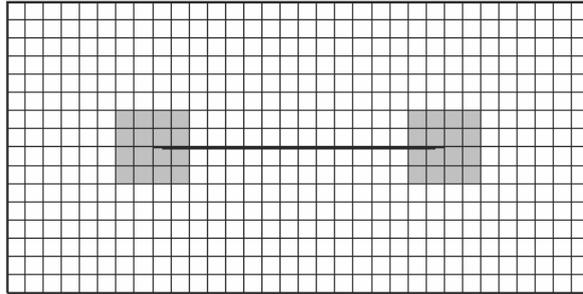


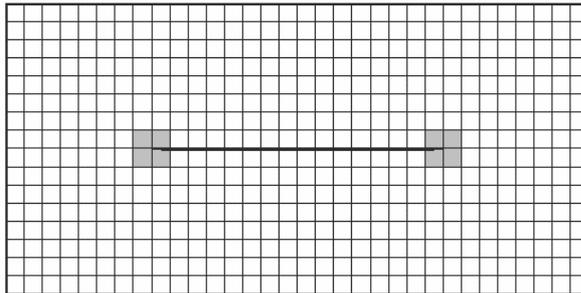
圖 4.11 裂縫之端點示意圖



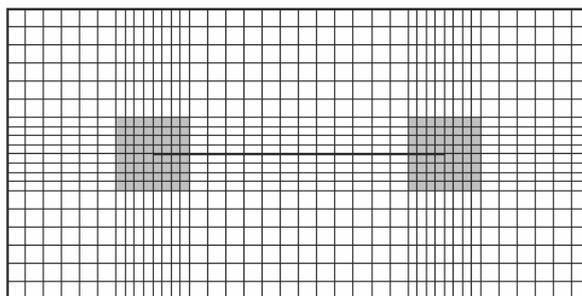
rec1



rec2(a)



rec2(b)



rec3

圖 4.12 之 rec1、rec2 與 rec3 之網格切割圖

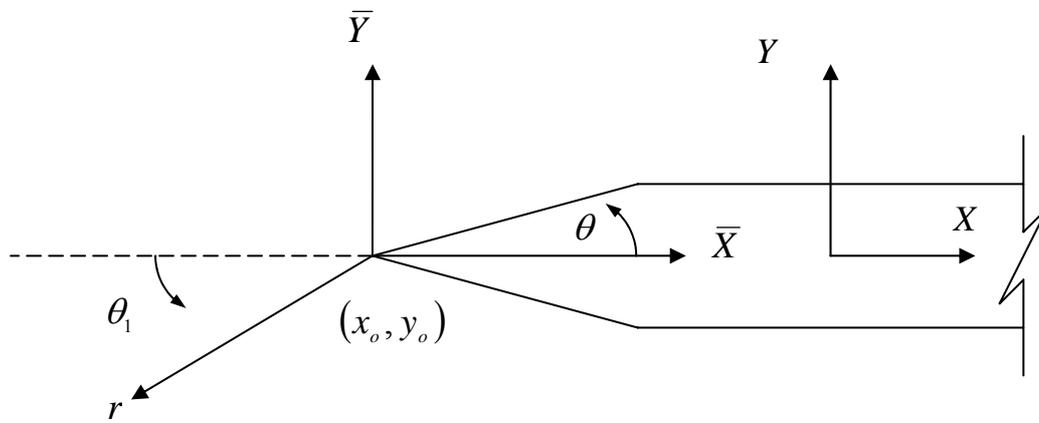
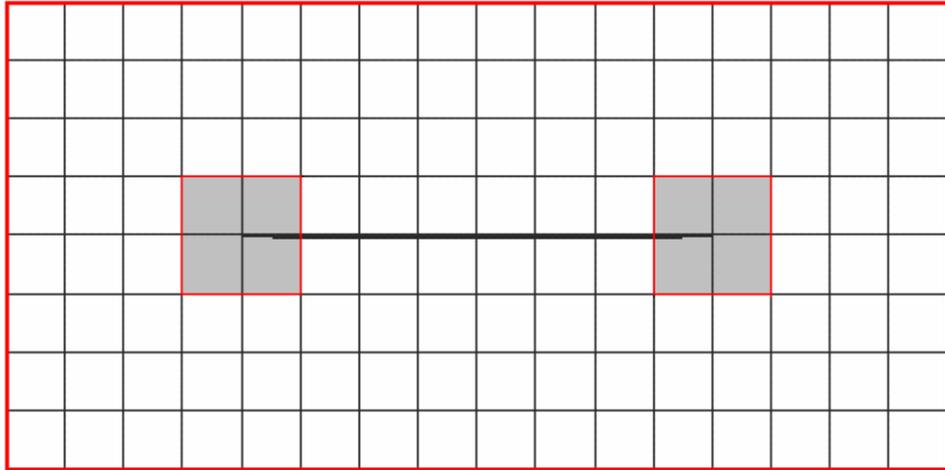
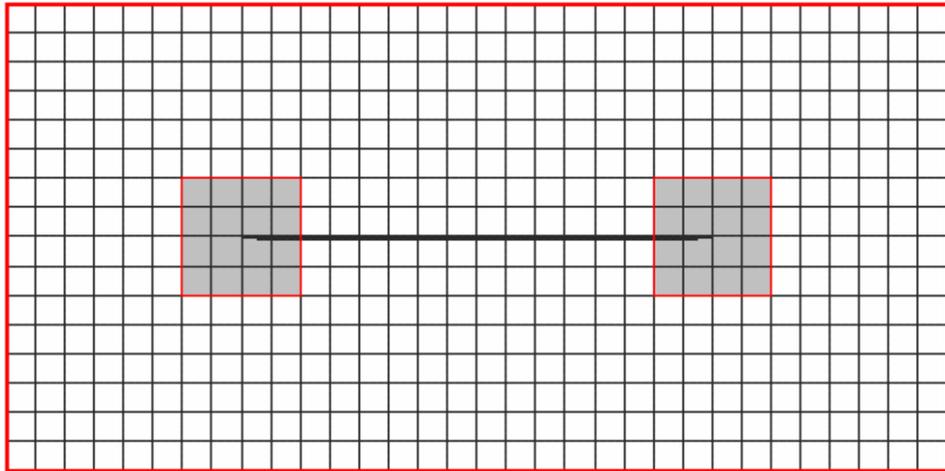


圖 4.13 裂縫端點之座標轉換示意圖

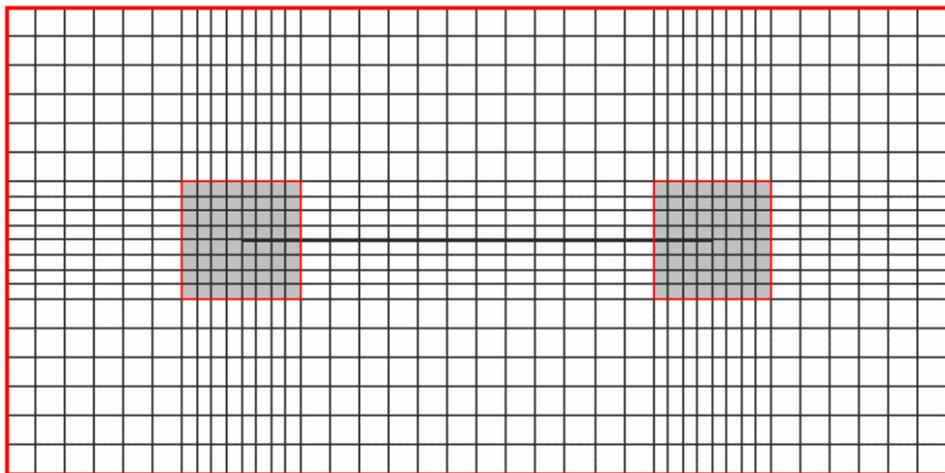




rec1



rec2



rec3

圖 4.14 之 rec1、rec2 與 rec3 之受力示意圖

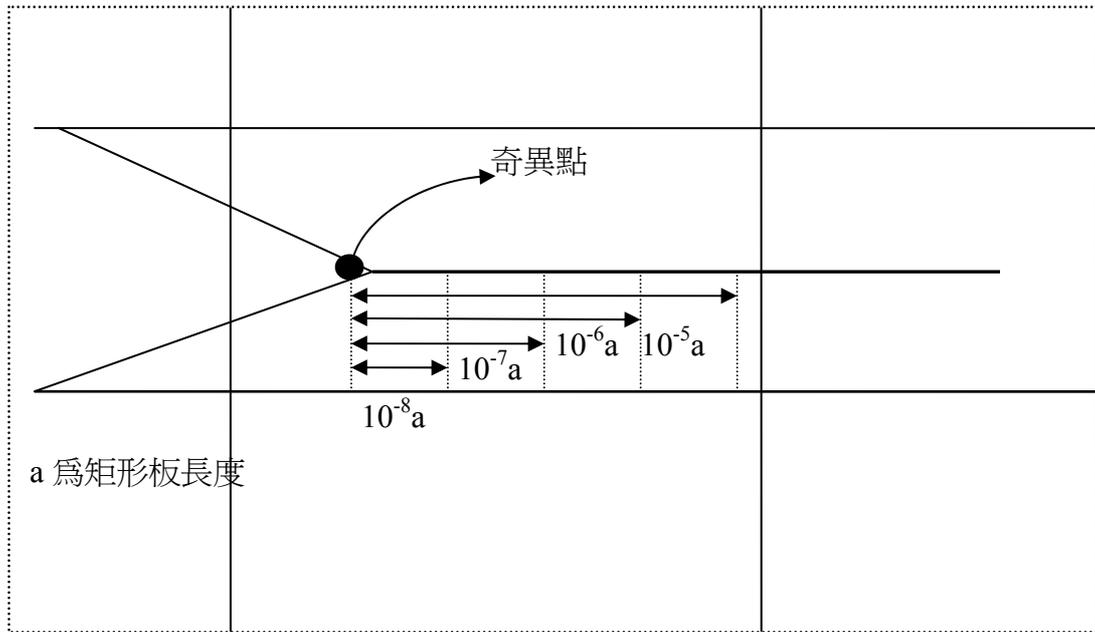


圖 4.15 奇異點附近位置示意圖

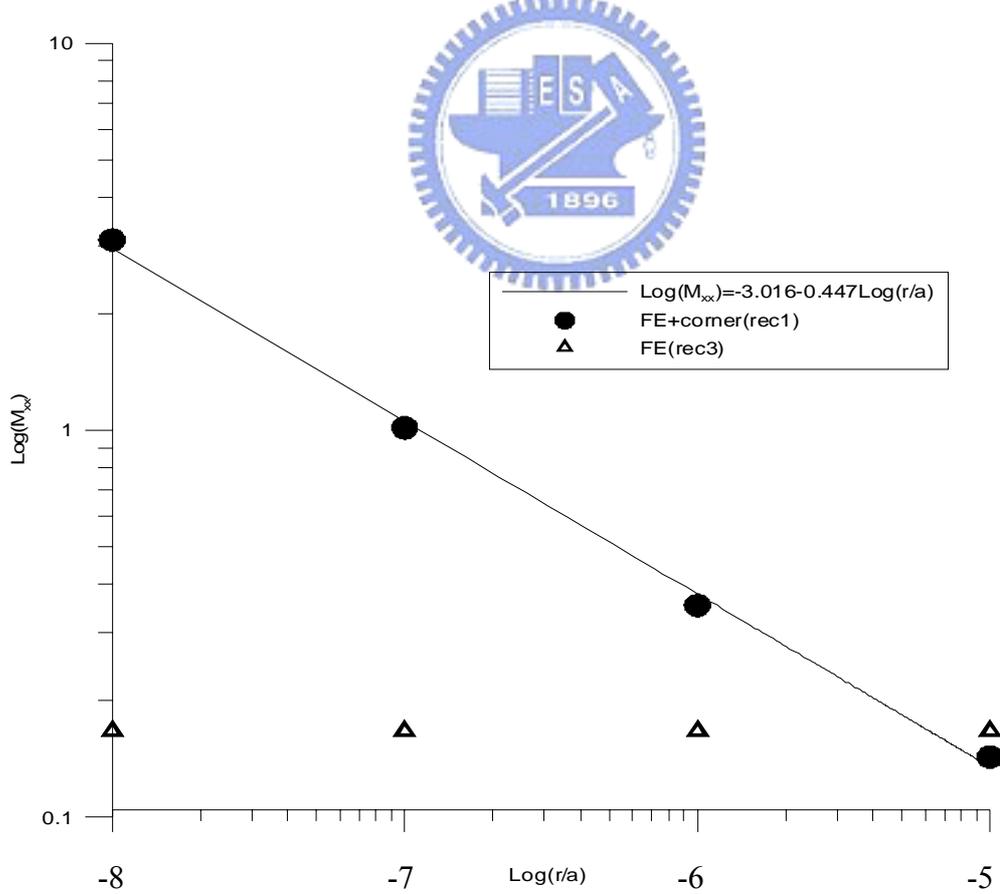
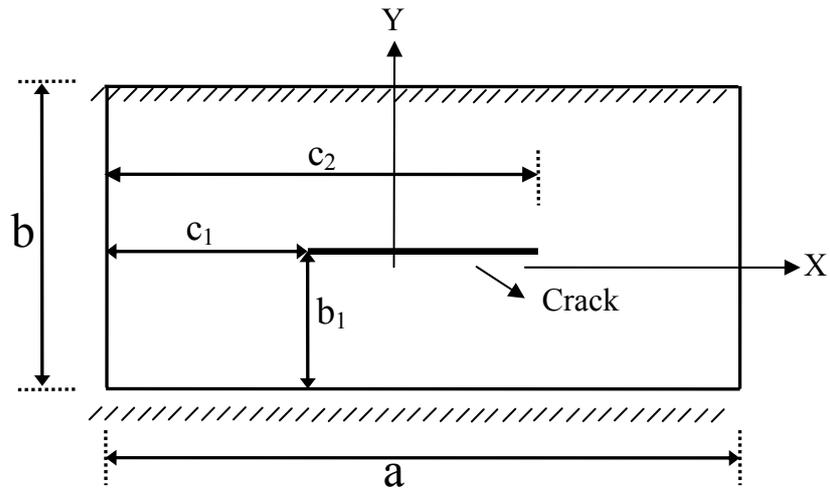


圖 4.16 奇異點附近各位置 moment 之趨勢圖



注： $c=c_2 - c_1$

圖 4.17 矩形板之裂縫示意圖

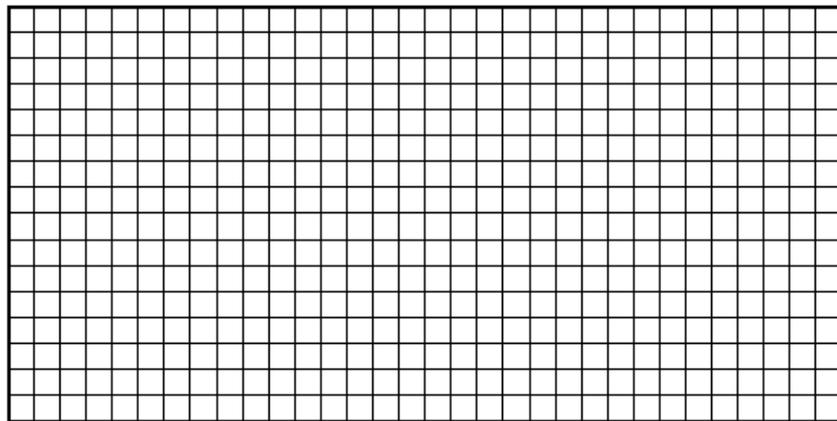


圖 4.18 矩形板網格切割圖

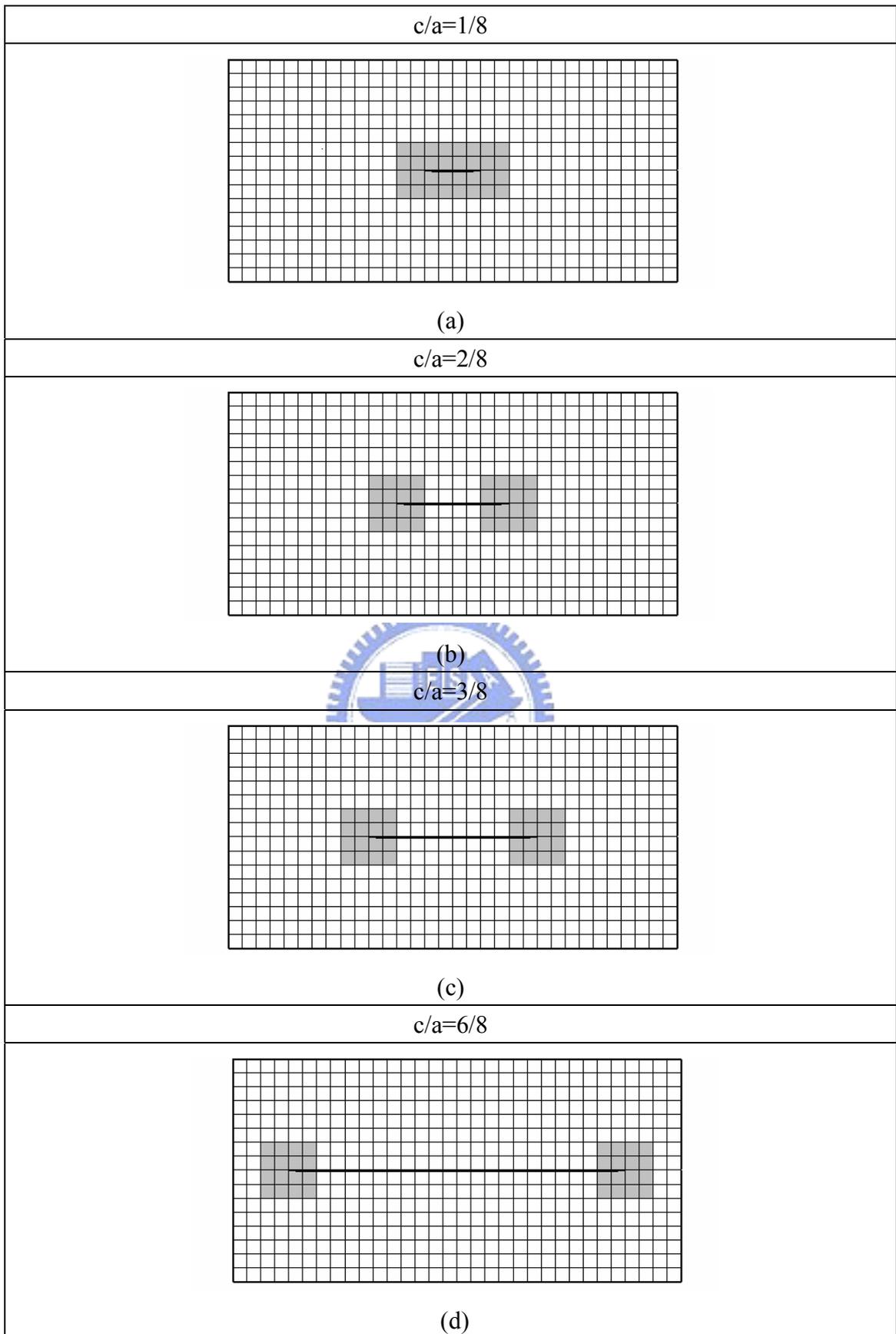


圖 4.19 裂縫位於中間之網格切割圖

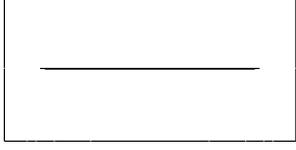
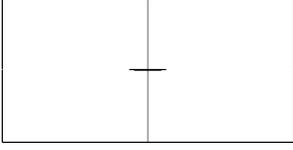
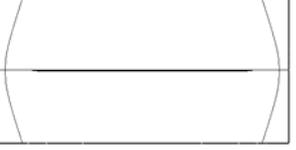
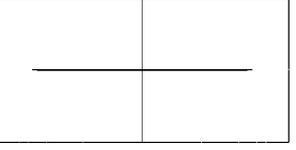
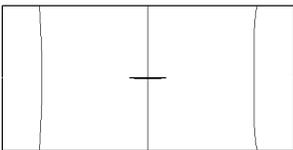
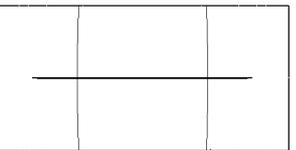
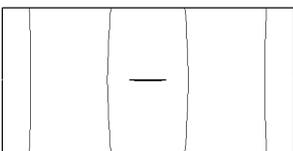
Mode	0	1 / 8	6 / 8
1			
	70.28	69.12	54.92
2			
	72.85	72.84	62.25
3			
	83.40	81.64	65.80
4			
	105.5	105.4	77.60
5			
	140.3	138.7	95.02

圖 4.20 裂縫位於中間之矩形板節點線圖

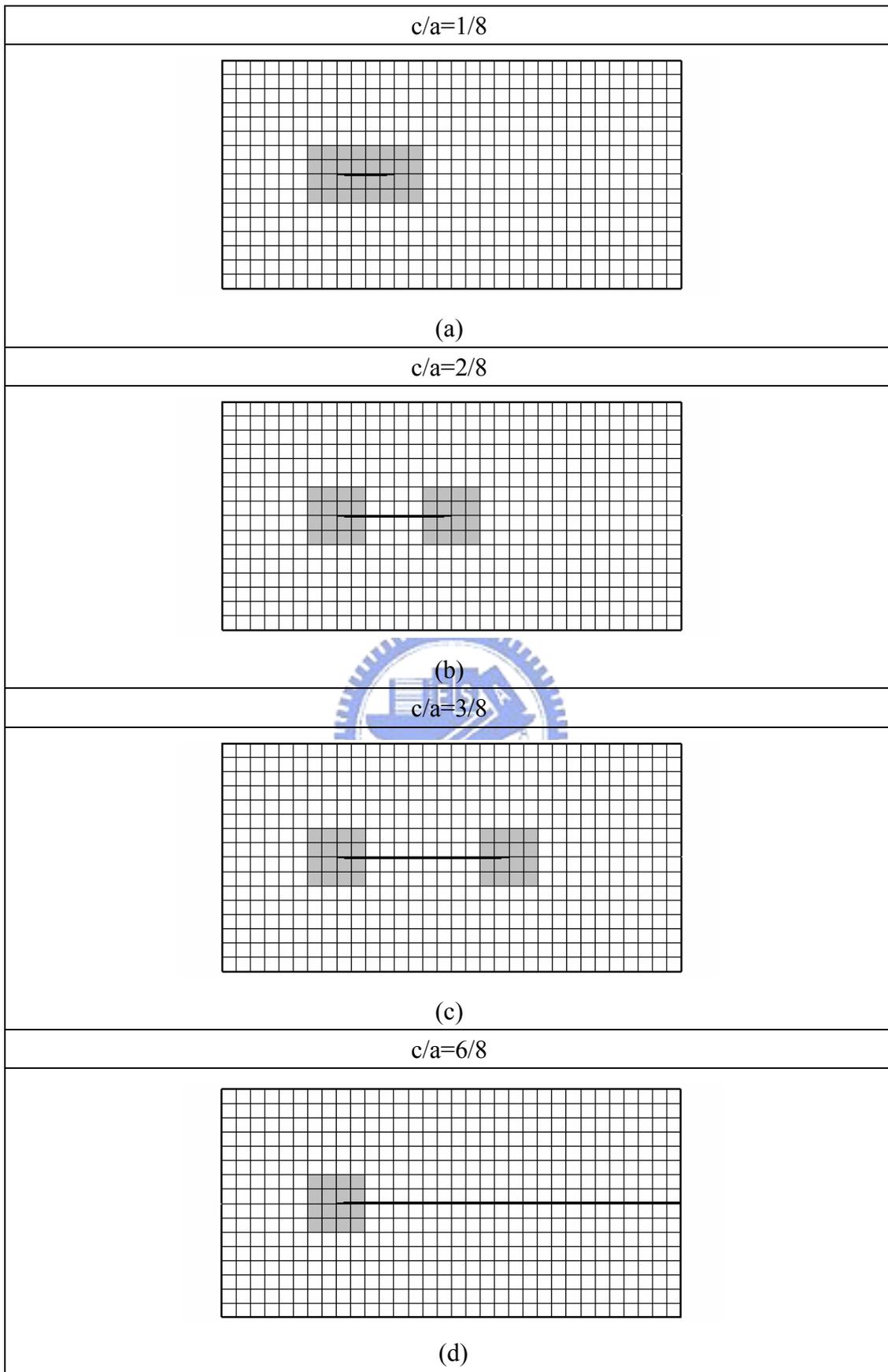


圖 4.21 $c_1/a=0.25$ 之網格切割圖

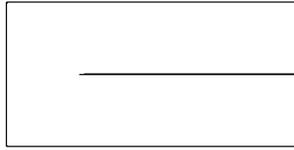
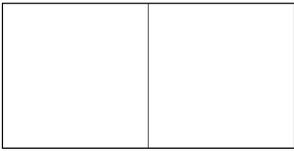
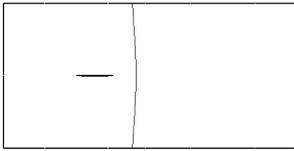
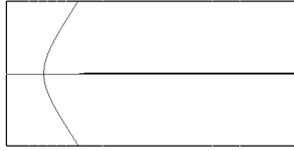
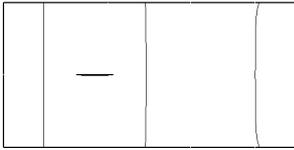
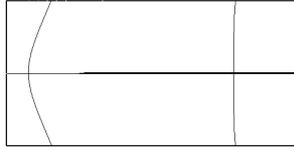
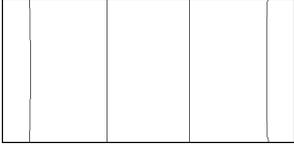
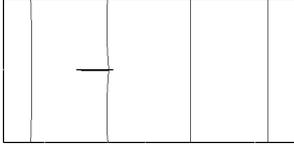
Mode	c/a		
	0	1 / 8	6 / 8
1			
	70.28	68.95	51.62
2			
	72.85	72.48	52.52
3			
	83.41	82.90	64.24
4			
	105.5	103.9	72.90
5			
	140.3	139.8	76.10

圖 4.22 $c_1/a=0.25$ 之矩形裂縫板節點線圖

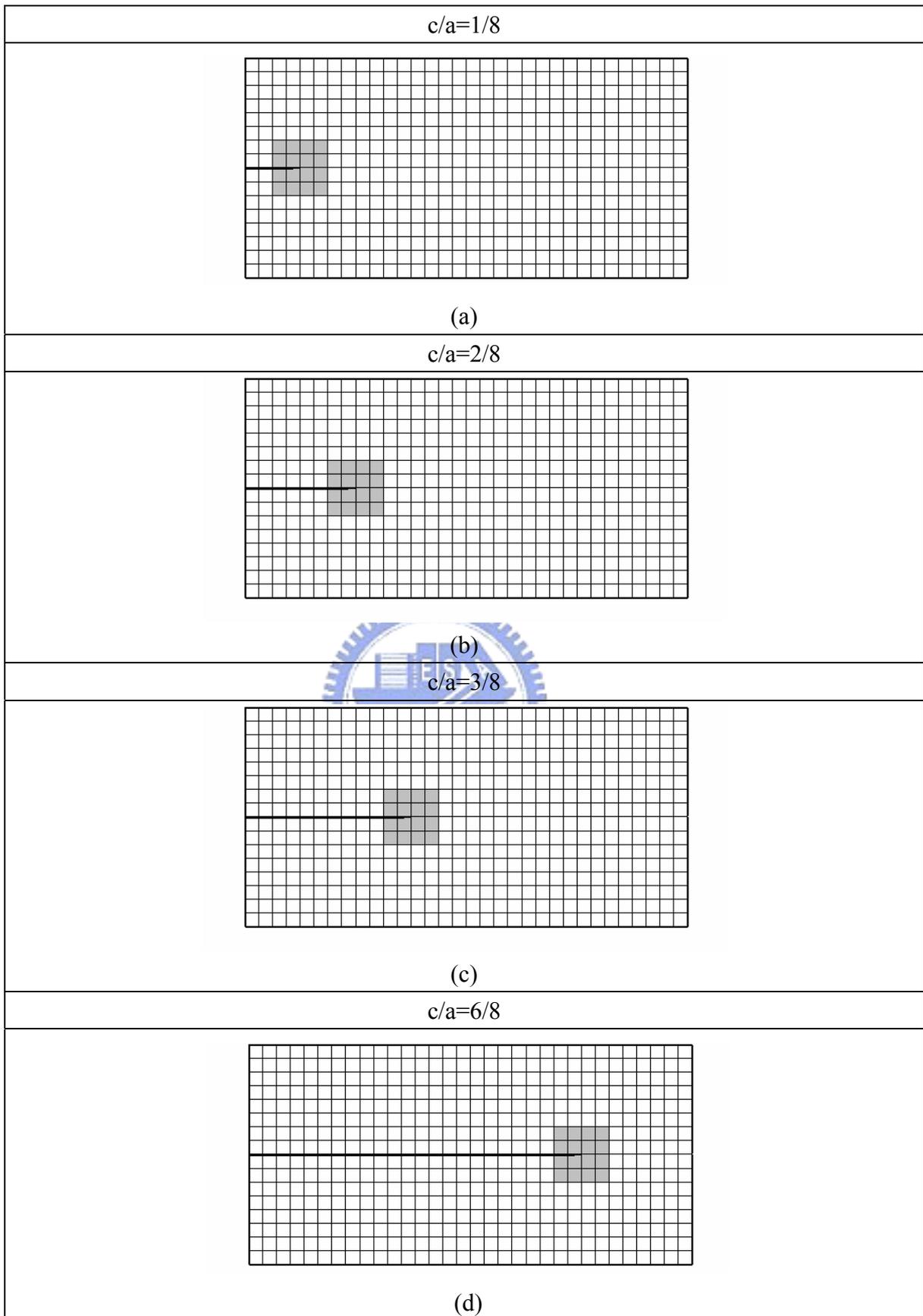


圖 4.23 $c_1/a=0$ 之網格切割圖

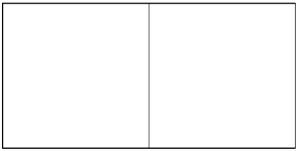
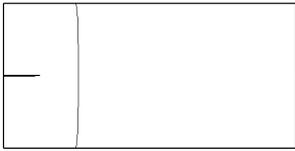
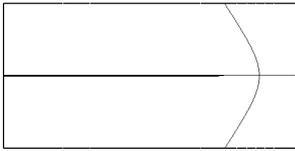
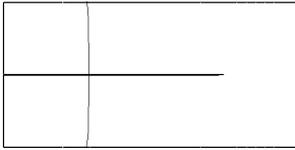
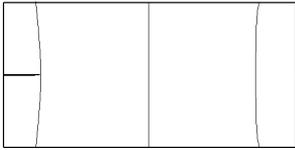
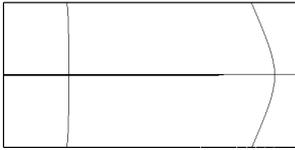
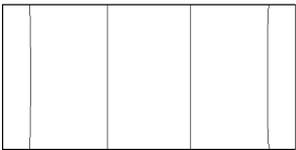
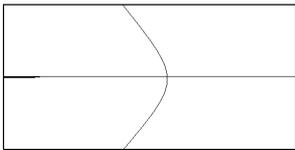
Mode	c/a		
	0	1 / 8	6 / 8
1			
	70.28	65.94	51.62
2			
	72.85	71.53	52.52
3			
	83.41	82.22	64.24
4			
	105.5	105.0	72.90
5			
	140.3	116.0	76.10

圖 4.24 $c_1/a=0$ 之矩形裂縫板節點線圖

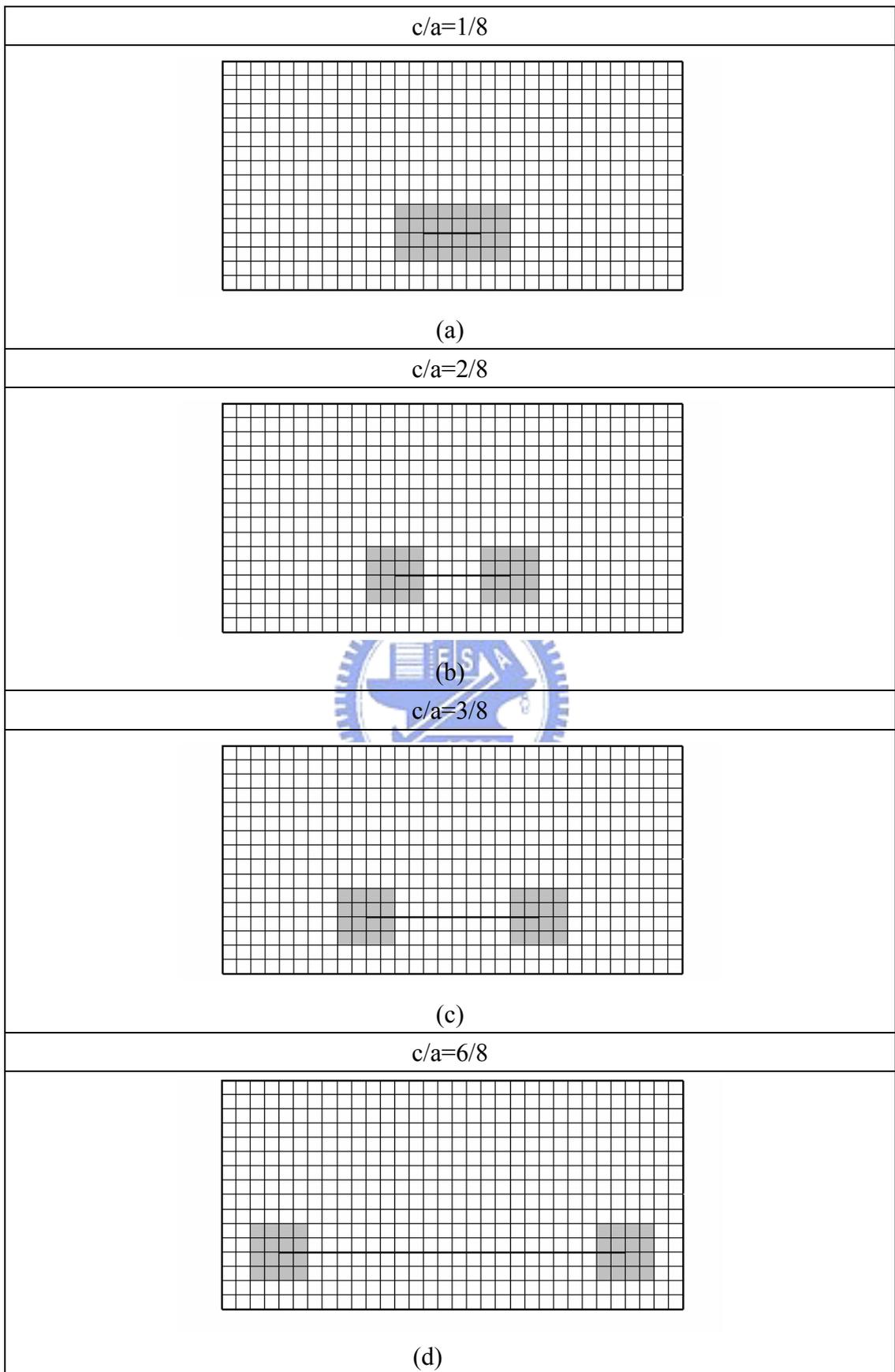


圖 4.25 $b_1/b=0.25$ 之網格示意圖

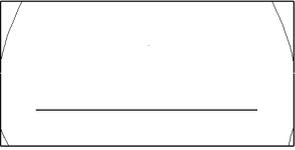
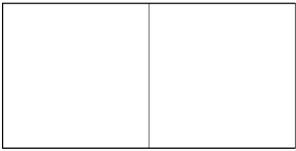
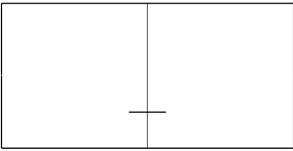
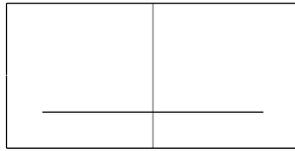
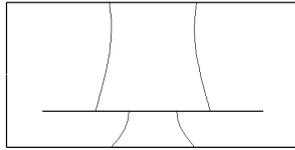
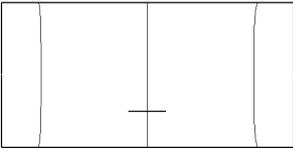
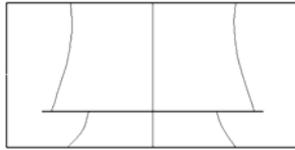
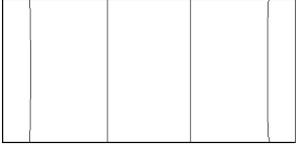
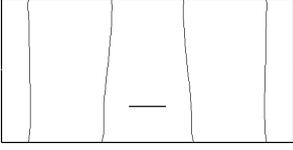
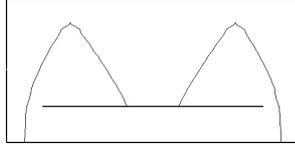
Mode	c/a		
	0	1 / 8	6 / 8
1			
	70.28	69.77	36.16
2			
	72.85	72.78	60.56
3			
	83.41	82.36	74.29
4			
	105.5	104.4	88.18
5			
	140.5	138.9	123.3

圖 4.26 $b_1/b=0.25$ 之矩形裂縫板節點線圖

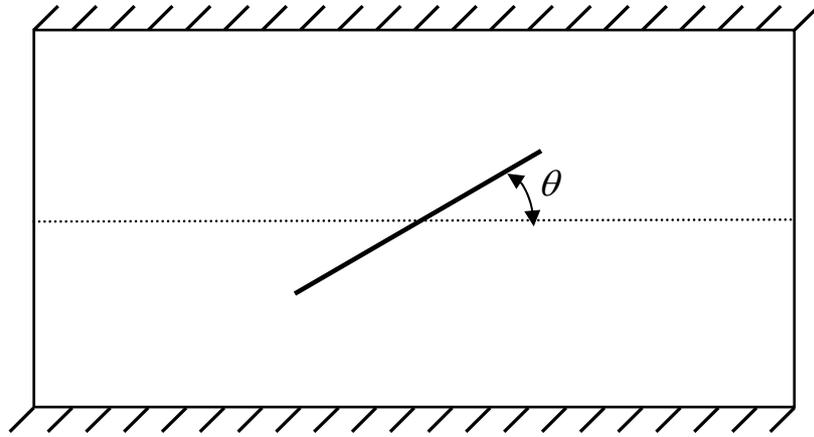


圖 4.27 矩形裂板在不同角度之示意圖



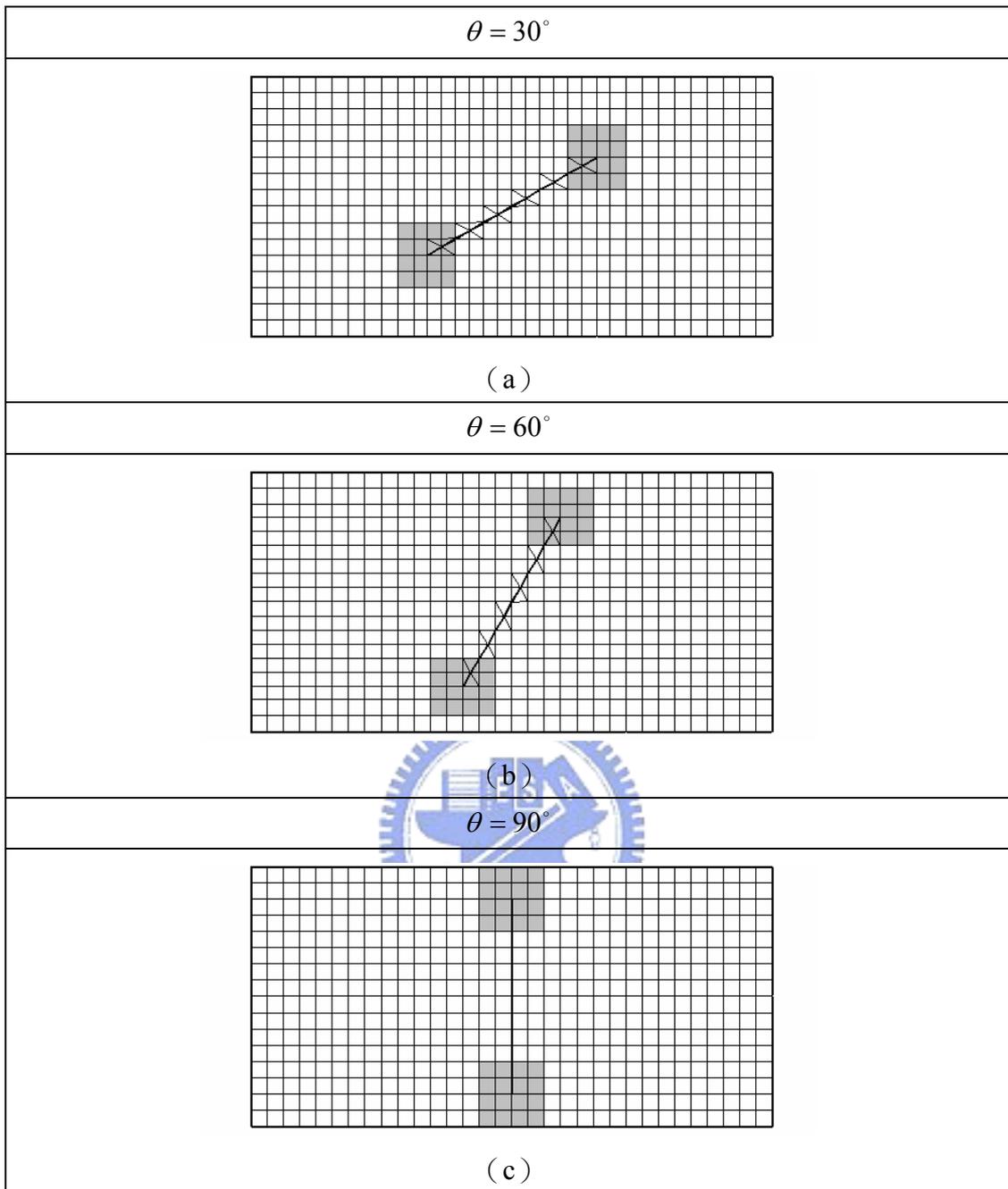


圖 4.28 不同旋轉角之網格示意圖

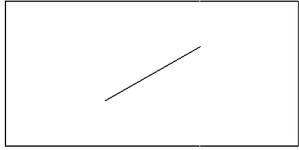
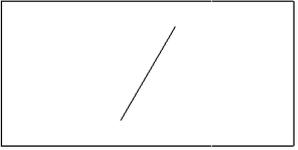
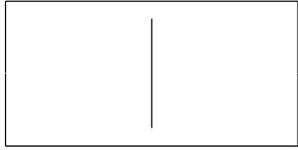
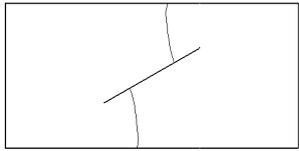
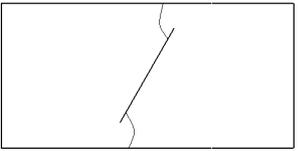
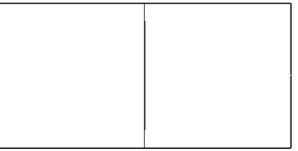
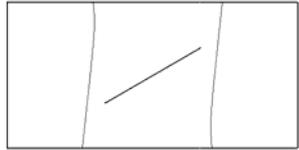
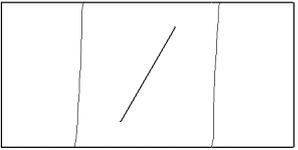
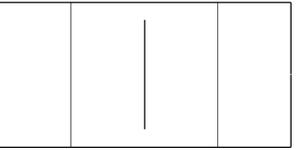
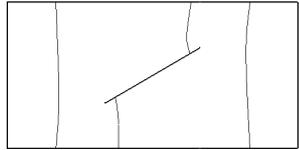
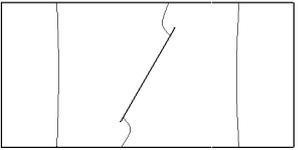
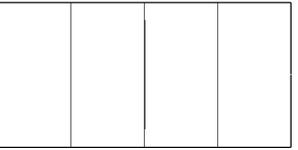
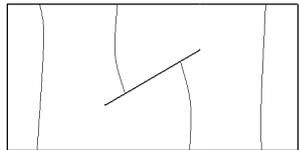
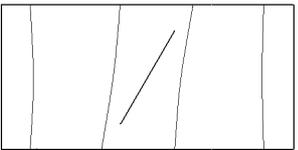
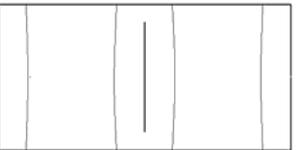
Mode	θ		
	30	60	90
1			
	64.96	68.72	70.03
2			
	72.02	71.44	71.29
3			
	77.92	78.23	79.50
4			
	89.61	85.46	84.42
5			
	115.8	126.8	125.5

圖 4.29 不同旋轉角之矩形裂縫板節點線圖