

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩士論文

利用認知診斷評量探討數位教材設計
對學習成效之影響—以排容原理為例

The Effect of Digital Teaching Material Designs
on Learning Achievement by Cognitively Diagnostic Assessment
—Inclusion-Exclusion Principle as an Example

研究生：鄧怡君

指導教授：曾建銘 博士

陳明璋 博士

中華民國一百年七月

利用認知診斷評量探討數位教材設計對學習成效之影響
—以排容原理為例

The Effect of Digital Teaching Material Designs on Learning Achievement
by Cognitively Diagnostic Assessment
— Inclusion-Exclusion Principle as an Example

研究生：鄧怡君

Student：Yi-Chun Teng

指導教授：曾建銘

Advisor：Dr. Chien-Ming Cheng

陳明璋

Dr. Ming-Jang Chen

國立交通大學
理學院網路學習學程
碩士論文



A Thesis
Submitted to Department of E-learning
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Degree Program of E-learning

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇一年七月

利用認知診斷評量探討數位教材設計 對學習成效之影響—以排容原理為例

學生：鄧怡君

指導教授：曾建銘 博士

陳明璋 博士

國立交通大學理學院科技與數位學習學程

中文摘要

本研究是探討不同的教材呈現方式，對學生在學習成效的影響，並比較在各認知能力的差異，進一步利用「認知診斷評量」分析各項技能的精熟程度，最後使用 Rasch model 探討教學方法對試題難易度的影響。

本研究以高中二年級數學科排容原理單元為教材設計主題，實驗組接受適性指標結合代數教材設計原則的多媒體教學，對照組接受適性指標結合串流式呈現的多媒體教學，另外選取傳統板書教學作為其他組，尚有同年級程度最好的兩個班作為資優組藉以比較。

研究結果如下：

1. 學習成效部分：

實驗組之中學業成就學生顯著優於其他組

2. 認知能力部分：

(1) 實驗組之中學業成就學生在程序執行部分顯著優於對照組

(2) 實驗組之中學業成就學生在概念理解、程序執行部分顯著優於其他組

(3) 對照組之中學業成就學生在概念理解部分顯著優於其他組

3. 技能精熟部分：

(1) 實驗組在技能 4、5 顯著優於對照組

(2) 實驗組在所有 6 項技能均顯著優於其他組

(3) 對照組在技能 2、3 顯著優於其他組

4. 實驗組與對照組的教學方法可以降低部分試題的難易度。

關鍵字：排容原理、多媒體學習、認知診斷評量

The Effect of Digital Teaching Material Designs on Learning Achievement
by Cognitively Diagnostic Assessment
— Inclusion-Exclusion Principle as an Example

Student : Yi-Chun Teng

Advisor : Dr. Chien-Ming Cheng
Dr. Ming-Jang Chen

Degree Program of E-learning
National Chiao Tung University

Abstract

This research aims at discovering what influence it will have on students' learning achievement through different presence of teaching materials and comparing the difference in each cognitive ability. However, it employs cognitively diagnostic assessment to analyze students' mastery of each skill and finally applies Rasch model to investigate how teaching approaches will influence item difficulty.

The research is targeted on inclusion-exclusion principle of mathematics for 10th graders. Experimental group accepts multimedia instruction with adaptive point and algebra teaching material designs. Controlled group accepts multimedia instruction with adaptive point and streaming presentation. Otherwise, researcher chooses the other students which accept traditional instruction without multimedia. The study called it "other group". Moreover, the study compares the gifted group to experimental group and controlled group.

The research results are as follows :

1. Learning achievement :

The students of medium learning achievement in experimental group perform better

than controlled group.

2. Cognitive ability :

- (1) The students of medium learning achievement in experimental group perform better than controlled group on procedural knowledge.
- (2) The students of medium learning achievement in experimental group perform better than other group on conceptual understanding and procedural knowledge.
- (3) The students of medium learning achievement in controlled group perform better than other group on conceptual understanding.

3. Mastery of skills :

- (1) The students in experimental group perform better than controlled group on skill 4 and 5.
- (2) The students in experimental group perform better than other group on the full of 6 skills.
- (3) The students in controlled group perform better than other group on skill 2 and 3.

4. Mastery of skills :

The teaching methods of experimental group and controlled group can reduce the degree of difficulty of some questions

Key word : inclusion-exclusion principle , multimedia learning , cognitively diagnostic assessment

誌 謝

在交大這兩年在職進修的日子，經歷許多喜怒哀樂，雖然辛苦，但也獲益良多。此篇論文能夠完成，受到許多人的幫忙，心中對這些幫助過我的人充滿感激。首先，感謝陳明璋博士和曾建銘博士的耐心指導，指引我研究的方向，當遇到瓶頸時，兩位指導教授總是十分熱心地教導我解決之道，使我能順利突破難關，而指導教授對研究的熱情與精神，著實令我佩服，也慶幸自己能夠遇到這兩位指導教授，開拓我對學術研究的視野。同時也感謝李榮耀博士和袁媛博士，在口試時給予的指導和建議，使本篇論文更加完善。

其次，我要感謝一起奮戰的同窗勃毅、嘉惠、真瑜、忠韻、志青、于芳和純慧，原本互不相識的我們，竟然就在交大的這兩年並肩作戰，一起完成許多忙碌的報告和作業，共同為了論文而打拼，當我遭遇困難的時候，大家都很熱心地予以幫助，甚至互相鼓勵、打氣，每一位都是我的良師益友，而我有幸遇到這些共同成長的伙伴，覺得真是一段神奇又難得的緣分，使我在求學的路上增添許多豐富的色彩。

最後，我要感謝學校同事的協助、家人的支持和一路照顧我、陪伴我的老公勝帆，感謝勝帆不辭辛勞的接送我來交大，在我忙得焦頭爛額之際，毫無怨言的打理家中大小瑣事，使我能心無旁騖地投入學業，更在我情緒低落、心情沮喪之時，給予我最大的安慰與鼓勵，正所謂患難見真情，我很幸運地遇到這位人生的伴侶，對勝帆的感激，絕非三言兩語能道盡。

要感謝的人很多，回首這一切，是生命中一段難忘的經歷，是對意志力的一場磨練，帶著歡笑、汗水與淚水，為走過的這一段路留下難忘的回憶。

目次

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iv
目次	v
表次	vii
圖次	ix
第一章 緒論	1
1.1 研究背景與動機	1
1.2 研究目的與待答問題	4
1.3 名詞解釋	5
1.4 研究範圍與限制	6
第二章 文獻探討	7
2.1 認知負荷理論	7
2.2 多媒體學習理論	12
2.3 適性指標與代數教材設計原則	17
2.4 認知診斷評量	20
2.5 排容原理相關研究	26
第三章 研究方法	31
3.1 研究流程	31
3.2 研究設計	32
3.3 研究對象	37
3.4 研究工具設計	41
3.5 資料分析方法	48
第四章 研究結果與討論	51
4.1 學習成效部分的資料分析與假設說明	51
4.2 認知能力部分的資料分析與假設說明	57
4.3 技能精熟部分的資料分析與假設說明	66
4.4 試題難易度分析	72



4.5 研究結果摘要	76
第五章 研究結論與建議	79
5.1 研究結論	79
5.2 建議	80
5.3 未來研究	81
參考文獻	83
1. 中文部分	83
2. 英文部分	85
附錄一 預試試卷	87
附錄二 成就測驗試卷	90
附錄三 實驗教材設計	92



表 次

表 1 認知負荷效應	10
表 2 適性指標的教材設計原則表	17
表 3 分數的減法認知屬性	23
表 4 「分數的減法」選擇題型	24
表 5 例題之 Q 矩陣	24
表 6 受試者的認知屬性狀態	24
表 7 高中數學排容原理相關例題	28
表 8 第一項實驗教材設計比較表	32
表 9 第二項實驗教學呈現比較表	33
表 10 第三項實驗教學呈現比較表	34
表 11 本學期第一次複習考數學成績之描述性統計摘要表	37
表 12 三組學生在第一次複習考成績之變異數分析摘要表	38
表 13 實驗組、對照組與其他組不同學業成就分組之人數分配表	38
表 14 三組高成就學生第一次複習考成績描述性統計摘要表	38
表 15 三組高成就學生第一次複習考成績之變異數分析摘要表	39
表 16 三組中成就學生第一次複習考成績描述性統計摘要表	39
表 17 三組中成就學生第一次複習考成績之變異數分析摘要表	39
表 18 三組低成就學生第一次複習考成績描述性統計摘要表	39
表 19 三組低成就學生第一次複習考成績之變異數分析摘要表	40
表 20 教學各階段兩份教材設計比較	41
表 21 實驗組與對照組的教材範例	42
表 22 預試試題雙向細目表	43
表 23 預試試題結果修改表	44
表 24 後測試題之雙向細目表	45
表 25 排容原理技能表	46
表 26 排容原理之 Q 矩陣	47
表 27 三組整體學生成就測驗總分描述性統計摘要表	51
表 28 三組整體學生成就測驗總分之變異數分析摘要表	52
表 29 三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表	52
表 30 三組高學業成就學生成就測驗總分描述性統計摘要表	53
表 31 三組高學業成就學生成就測驗總分之變異數分析摘要表	53
表 32 三組中學業成就學生成就測驗總分描述性統計摘要表	54

表 33	三組中學業成就學生成就測驗總分之變異數分析摘要表	54
表 34	三組中學業成就學生成就測驗總分之事後比較摘要表	54
表 35	三組低學業成就學生成就測驗總分描述性統計摘要表	55
表 36	三組低學業成就學生成就測驗總分之變異數分析摘要表	55
表 37	三組整體學生各認知能力描述性統計摘要表	57
表 38	三組整體學生各認知能力之變異數分析摘要表	58
表 39	三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表	58
表 40	三組高學業成就學生各認知能力描述性統計摘要表	61
表 41	三組高學業成就學生各認知能力之變異數分析摘要表	61
表 42	三組中學業成就學生各認知能力描述性統計摘要表	62
表 43	三組中學業成就學生各認知能力之變異數分析摘要表	63
表 44	三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表	63
表 45	三組低學業成就學生各認知能力描述性統計摘要表	64
表 46	三組低學業成就學生各認知能力之變異數分析摘要表	64
表 47	三組整體學生各技能達成率描述性統計摘要表	66
表 48	三組整體學生各技能達成率之變異數分析摘要表	68
表 49	三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表	69
表 50	實驗組與資優組整體學生各技能達成率獨立樣本 t 檢定摘要表	70
表 51	對照組與資優組整體學生各技能達成率獨立樣本 t 檢定摘要表	70
表 52	整體學生排容原理測驗題各題平均答對率摘要表	72
表 53	整體學生排容原理測驗題各題難度值摘要表	73
表 54	學習成效部分研究結果摘要表	76
表 55	認知能力部分研究結果摘要表	77
表 56	技能精熟部分研究結果摘要表	78

圖 次

圖 1 多媒體學習理論的雙通道模型	12
圖 2 空間接近原則範例	14
圖 3 信號接近原則範例	15
圖 4 分割原則範例	16
圖 5 受試者對試題 j 的反應程序圖	23
圖 6 兩個集合的交集文氏圖	26
圖 7 兩個集合的聯集文氏圖	26
圖 8 排列組合單元部分課程架構圖	27
圖 9 研究流程圖	31
圖 10 實驗流程圖	36



第一章 緒論

本章共分為四節，第一節為陳述研究背景與動機，第二節說明研究目的與待答問題，第三節為名詞解釋，第四節說明研究範圍與限制。

1.1 研究背景與動機

目前寬頻網路十分普及，從九十學年度開始實施九年一貫課程後，便將「資訊教育」列為七項重大議題之一，即使經過多次課程綱要的修訂，資訊教育仍包含在重大議題之內(教育部，2002，2009)。在教育部大力倡導資訊融入教學下，許多配合九年一貫能力指標的相關教材或高中教材陸續誕生，教科書的呈現也由傳統的紙本，進化到電子書的新紀元，但親臨教學的現場，這些書商配套的教學資源與坊間的多媒體教材，對老師來說，真的能完全取代傳統板書教學嗎？對學習者而言，真的有提升學習的成效嗎？

不少多媒體教材為了想吸引學生的注意力，往往添加許多不必要的文字、圖片或聲音，但根據多媒體學習理論及學者們的研究發現，這些多餘的元素反而會對學習有所妨害(Clark & Mayer, 2008)。因此，如何設計一套真正提升學習成效的教材，成為「資訊融入教學」中更進一步的課題。

基礎於認知科學與多媒體學習理論，交通大學陳明璋博士提出激發式動態呈現(Trigger-based Animation)，配合視覺化的方式，將教材結構化後，突顯訊息間的關聯性，希望能降低教材的外在認知負荷(Extraneous Cognitive Load)，協助學習者進行主動學習。而激發式動態呈現是透過微軟 PowerPoint 軟體為平台，以教師授課為導向，增加互動按鈕的功能設計，使教師呈現教材的方式更多元；此系統名為 AMA(Activate Mind Attention)系統(陳明璋，2008)。藉由 AMA 的功能，可使數位教材的製作更快速、便利，在展演的過程也增加了老師與學生間的溝通性，從多篇「激發式動態呈現」教學設計的相關論文(吳帝瑩，2008；洪榮忠，2008；葉子榕，2010；謝東育，2009)也指出，此種教材設計方法，的確能降低認知負荷，提高學生的學習成效。

研究者任教於高中的數學科，從個人學習歷程與教學經驗中發現，在高中的數學課程裡，不少學生對排列組合單元的學習感到困難，因此若在排列組合單元學習的開始，能清楚瞭解重要的基本概念，對於日後更複雜的問題，才能減輕負擔，使學習過程更為順利。在各版本的教科書中，排列組合單元都是以集合概念作為開頭，而在眾

多集合概念中，又以排容原理最為重要，也是往後應用最多的概念，例如：「甲、乙、丙、丁、戊排成一列，若甲不排第一個，且乙不排第二個，方法幾種？」上述這類「錯排」的問題，不知考倒了多少高中生，但實際上便是排容原理的應用。排容原理是在排列組合裡很基本的性質，但是在反反覆覆的加加減減之後，學生常無法理解為何要如此操作(李吉彬，2005)。另外，排容原理在日常生活中十分常見，其解題過程也能培養學習者的邏輯思考能力，對日後的學習歷程或生活經驗都有一定的影響。若不瞭解排容原理的概念，或是缺乏問題的轉換能力，解題往往只流於機械式的公式套用而已。因此，我們必須在排容原理學習的開始，幫助學生瞭解此一較抽象的概念。

在集合和排容原理的教學過程中，會運用到許多符號與圖像，在教學過程中，教師必須耗費許多心力繪製相對應的文氏圖，由於受限於粉筆的配色，想表達的集合區域範圍往往用斜線表示，因而使黑板上出現許多雜亂的圖，對學習者而言，看到一堆訊息呈現在黑板上，感覺頗有壓力，因此若將這些圖像利用多媒體呈現，教學者可以在課堂進行間，快速地呈現圖像與符號間的關係，於是將較多的時間用於課堂互動，減輕教學者的負擔。基於集合與排容原理教材的特質，針對圖像與符號的部分，本研究的教材設計以 Sweller 的認知負荷理論與 Mayer 的多媒體學習理論為基礎，以激發式動態呈現(AMA)為設計的工具。林煜庭(2008)提出「適性指標」(adaptive pointer)概念，適性指標是一種具有「協助視覺搜尋」以及「引導注意力」特性的視覺物件，教學者利用此可將學習者的注意力引導至關鍵訊息，節省訊息搜尋的時間與心力，將較多的認知資源用於組織與整合上，產生更有效的學習。由李鈴茹(2008)的眼動追蹤系統(eye-tracker) 實驗證明，含有適性指標的教學設計，在學習的記憶測驗上有顯著優異的表現，並且對於協助視覺搜尋和注意力引導有顯著的作用。因此在本研究中的多媒體教材設計上，均有加入適性指標的概念，以期幫助學生學習。

在千變萬化的排列組合題目中，關於排容原理應用的問題，有些題目屬於大量文字的應用題，冗長的串流式敘述往往讓學生感到焦慮與恐懼，缺乏耐心去理解題意，因此若能將大量的訊息作適當的切割，並利用電腦多媒體教材的功能之一：增進學習動機與滿足學習者視覺與認知上的好奇心(林麗娟，2000)，對學習效果應該會有所影響。因此在排容原理的應用問題部分，本研究利用謝東育(2009)提出之「代數教材設計原則」，將教學內容結構化、教材呈現區塊化，並建立關連的訊息，希望能改善串流式訊息的呈現模式，藉以幫助學生學習。

除了教材設計與教學呈現外，為了瞭解教師的教學方法是否確實提高學習者的學習成效，必須透過測驗評量的方式，取得量化的數據，得到較客觀、公平的結果，因此我們必須先符合學習目標的測驗試題，同時具備信度與效度，才是良好的測量工具。傳統的測驗，通常是將一整份測驗題的分數加總，由總分的高低來判斷學習成效的高低，但一份完整的測驗題，包含了不只一道題目，涵蓋的概念也好幾個，因此即使測

驗題的總分相同，並不代表所學會的概念一樣。Nichols(1994) 結合認知科學(cognitive science)與心理計量學(psychometrics)，發展出認知診斷評量(cognitively diagnostic assessment)，以幫助教學目標的達成。本研究將透過認知診斷評量所得到的測驗結果，能夠使我們進一步瞭解，學生究竟是哪些概念較不清楚，以便未來進行補救教學，另一方面，亦可重新檢視在教材設計部分，哪些部分需要調整。而認知診斷評量的最終目標，在於將教學後診斷的結果，再設計補救的教學，再診斷、再教學，如此教學與診斷的循環進行，希望把每一位學生帶上來，達到一定的學習效果，這也是教學的最終目的。然而本研究在於完成第一階段的教學與診斷，將此模式建立後，便於日後教學與診斷的循環進行。

有鑑於上述之背景與動機，本研究希望透過激發式動態呈現的教學設計，針對高中排列組合單元中的排容原理，試圖降低學習者的認知負荷，以致於學習結束後，學習者面對相關概念或技能的測驗時，能有較佳的學習成果呈現，進一步的，透過認知診斷評量，我們可以較清楚的診斷出，在數個關於排容原理的概念中，是哪些地方學習成效良好，並針對學習成效不佳的概念，予以改善教學技巧，並在未來實施補救教學，達到適性學習，期許能達到「師生雙贏」的境界。



1.2 研究目的與待答問題

基於上述的研究背景與動機，本研究設定高中數學第四冊 2-1「集合的基本計數」為教學單元，當中以排容原理為教學重點，教材以多媒體設計原則為基礎，利用 PowerPoint 外掛 AMA 來設計，本研究的目的是如下：

1. 探討不同的教材呈現方式對學生在學習成效的影響。
2. 比較不同的教材呈現方式對學生在認知能力的差異。
3. 利用「認知診斷評量」分析不同的教材呈現方式對學生在學習排容原理的技能精熟程度。
4. 探討教學方法對排容原理試題難易度的影響。

基於上述的研究目的，本研究欲探討的研究問題如下：

1. 學生在實施不同教材設計下，學習成效是否產生影響？
 - (1) 實驗組與對照組學生的學習成效是否有影響？
 - (2) 實驗組與對照組中不同學習成就學生的學習成效是否有影響？
 - (3) 實驗組與全校其他班級學生的學習成效是否有影響？
 - (4) 實驗組與全校其他班級中不同學習成就學生的學習成效是否有影響？
 - (5) 對照組與全校其他班級學生的學習成效是否有影響？
 - (6) 對照組與全校其他班級中不同學習成就學生的學習成效是否有影響？
2. 學生在實施不同教材設計下，各認知能力的表現是否產生影響？
 - (1) 實驗組與對照組學生各認知能力的表現是否有影響？
 - (2) 實驗組與對照組中不同學習成就學生各認知能力的表現是否有影響？
 - (3) 實驗組與全校其他班級學生各認知能力的表現是否有影響？
 - (4) 實驗組與全校其他班級中不同學習成就學生各認知能力的表現是否有影響？
 - (5) 對照組與全校其他班級學生各認知能力的表現是否有影響？
 - (6) 對照組與全校其他班級中不同學習成就學生各認知能力的表現是否有影響？
3. 學生在實施不同教材設計下，各概念或技能精熟程度是否產生影響？
 - (1) 實驗組與對照組學生各概念或技能精熟程度是否有影響？
 - (2) 實驗組與全校其他班級學生各概念或技能精熟程度是否有影響？
 - (3) 對照組與全校其他班級學生各概念或技能精熟程度是否有影響？
4. 利用不同的教學方法，對學生試題難易度是否產生影響？

1.3 名詞解釋

1. 認知診斷評量

將認知科學(cognitive science)與心理計量學(psychometrics)結合，發展新的診斷評量方法，以幫助達成教學的目標。此種新的診斷評量方法，稱為認知診斷評量(cognitively diagnostic assessment, 簡稱為 CDA)(Nichols, 1994)。傳統測驗往往是將一份測驗題的分數加總，藉以判斷學習者在團體中的排名，而認知診斷評量是以概念作為診斷的目標，診斷學生對於某些概念是否精熟，因此在測驗的結果中，學生在各項技能被分類成精熟(masters)或不精熟(non-masters)，可推估受試者具備或缺乏哪些認知屬性的知識，了解受試者目前的學習狀況，進而針對受試者的迷思概念或學習盲點，進行進一步地補救教學，達到教學與評量的循環。

2. 數位教材設計

數位教材是以多媒體為呈現工具，配合教學目標所設計出的教學素材。本研究所使用的教材，是利用 Microsoft PowerPoint 外掛 AMA(Activate Mind Attention)系統，以多媒體學習理論、認知負荷理論為基礎，加入「適性指標設計原則(林煜庭，2008)」與「代數教材設計原則(謝東育，2009)」，作為實驗組的教材設計。

3. 排容原理

排容原理又稱為容斥原理，在組合數學裏，其說明若 A_1, \dots, A_m 為有限集合，則

$$n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m n(A_i) - \sum_{i,j;i \neq j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k;i \neq j \neq k \neq i} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \pm n(A_i \cap \dots \cap A_m)$$

其中 $n(A)$ 表示 A 的集合元素個數。例如在兩個集合的情況時，我們可以透過將 $n(A)$ 和 $n(B)$ 相加，再減去其「交集」的元素個數，而得到其「聯集」的元素個數。

1.4 研究範圍與限制

1.4.1 研究範圍

1. 研究樣本

本研究受限於實驗學校、資源以及人力等因素，只選定某高中高二的班級為研究對象，並非以隨機取樣的方式選擇研究對象。

2. 教學內容

本研究之教學內容是以排列組合中的排容原理為主題，探討高二學生的抽象邏輯思考能力，範圍限定在最多三個因素的排容原理。

1.4.2 研究限制

1. 研究內容

本研究主要是探討不同的教材呈現方式對學生在數學學習成效的影響，而其他科目的影響，並不包含在本研究當中。

2. 研究樣本數

本研究因人力、物力、時間等因素的限制，僅以某高中二年級的學生作為施測母群體，所能抽取的有效樣本為 300 位，其中實驗組與對照組二班數各為 39 位，其它組為 153 人，資優組為 69 人，易有代表性不足及統計樣本不足之疑慮。

3. 研究對象之起始行為

本研究因考量前測試題與後測試題若類似甚至相同，會使受測者因前測而預先學習，導致影響後測之結果，也就是避免混淆學習者的學習成效，是前測預先學習抑或教學活動帶來的影響，故本研究採在校之複習考數學成績，作為起始行為之依據，故與本研究教學內容的起始行為恐有誤差。

4. 補救教學

認知診斷評量旨在瞭解對個別的學習者而言，究竟是哪些概念或技能較薄弱，進而針對個別差異進行補救教學，達到教學與評量相輔相成的循環機制，但本研究礙於時間限制，並未完成補救教學的措施，若能繼續著手後續的補救教學，將能使認知診斷評量的功能發揮得更好。

5. 研究推論

本研究歷經教學活動與後測，前後約兩堂課，產生的學習效果限定在基本的排容原理，因此若要延伸研究結果於其他課程內容，則需再進行相關研究。

第二章 文獻探討

本章共分為三節，第一節為認知負荷理論，第二節為多媒體學習理論，第三節為適性指標與代數教材設計原則，第四節為認知診斷評量，第五節為排容原理相關研究。

2.1 認知負荷理論

認知負荷理論是由 Sweller 在 1988 年所提出，他認為學習認知的過程中，要先經過工作記憶區 (working memory) 的注意、組織、整合的處理後，才能將知識或技能存入長期記憶區 (long-term memory)。而在學習的過程中，一些與學習無關的訊息，將會分散學習者的注意力，佔用工作記憶區的容量，使認知負荷增加，影響學習效果。

2.1.1 認知負荷理論的基本假設

Sweller 提出四個認知負荷理論對認知架構(cognitive architecture)的基本假設 (Mousavi, Low, & Sweller, 1995; Sweller, Van Merriënboer, & Paas, 1998)，分述如下：

1. 工作記憶的容量有限

人類的工作記憶的容量是有限的，只能平均儲存約 7 ± 2 個元素 (element)，但是真正能進行操作處理的，只有 2~3 個單位 (Sweller, 1998)，且工作記憶運作或保留的時間極短，若未經複誦 (rehearsal)，大約 20 秒隨即消失。若是待處理的訊息內在關連性很強，元素間具有高度的互動性，需要互相參照才能了解，則工作記憶區的資源將耗費更多，產生更大的認知負荷，導致學習上的困難(郭璟諭, 2003)。因此，教材的設計若能作適當的切割、分段，使大量的訊息透過區塊化的呈現，避免工作記憶區超載，則學習效果會更佳。

2. 長期記憶的容量無限

人類的長期記憶區猶如一座龐大的資料庫，其儲存的訊息都是經過處理，有組織的知識基模 (schema)，基模愈大，能儲存的知識量便愈多；當之後進行新的學習活動時，學習者擁有愈大的基模，能愈迅速地在資料庫中找尋因應之道，完成新的學習任務；相反的，若學習者擁有的基模較少，便無法善加利用長期記憶區的資源，只能透過工作記憶區中的推理幫助理解，其承受的認知負荷相對增加，因此，專家 (expert) 學習的速度往往比新手 (novice) 快得多，承受的認知負荷自然較少。

3. 知識與技能以基模的型態儲存於長期記憶中

學習所得知識概念或技能會以基模的形式進行編碼，並儲存於長期記憶中，基模可以將多個訊息組合成一個複雜的單位，如此便能減少工作記憶的容量，作為日後面臨新的學習時的資料庫。

4. 基模運作自動化 (schema automation) 是基模建構的重要過程

人類處理訊息的模式有兩種，一種是透過意識 (conscious) 處理，一種是透過自動化 (automatic) 處理。透過意識處理會占用許多工作記憶的空間，而自動化的處理不太需要意識的控制，因此占用極少的記憶空間。當我們學習一項新的事物時，一開始是透過意識的處理方式，經過不斷的練習與操作，則可形成自動化的處理，構成基模。當基模的運作自動化後，便能節省工作記憶的空間，使我們能將較多的認知資源花在處理較深入的問題。

綜合上述的基本假定，工作記憶在運作過程中，需從長期記憶中檢索提取既有相關的知識基模，進行整合以解決問題。因此，若無法從長期記憶中有效、快速提取相關既有知識基模處理新訊息，可能會消耗過多的工作記憶之認知資源，將產生不同類型的認知負荷。



2.1.2 認知負荷的類型

Sweller (1998) 把認知負荷分為三種主要型式，分述如下：

1. 內在認知負荷 (Intrinsic Cognitive Load)

內在認知負荷來自於教材的特性 (內在元素間的關聯程度) 與學習者本身的程度 (先備知識)，以及兩者間交互作用的影響。

所謂教材的特性指的是教材本身的難易度，若教材本身是困難的，學習者便需要在工作記憶區中處理關聯性高的元素 (elements)，造成較高的內在認知負荷而阻礙學習；反之，若教材本身是簡單的，學習者便不需在工作記憶區中處理關聯性高的元素，即可對元素有所理解，故其內在認知負荷較低。

除了教材特性外，學習者本身的專門知能及先備知識也是影響內在認知負荷的因素。對於擁有完整的先備知識或與教材相關的基模的學習者而言，當訊息進入工作記憶區中，可以透過自動化的處理，迅速地將基模進行整合，大幅降低工作記憶中認知資源的消耗，降低內在認知負荷；反之，學習者若不具備相關先備知識，則所有訊息必須在工作記憶區中單獨處理，造成更大的認知負荷。而內在認知負荷不易由教學設計來降低，而是仰賴學習者本身基模的建立與自動化處理來降低。

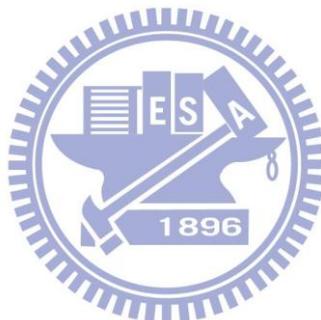
2. 外在認知負荷 (Extraneous Cognitive Load)

外在認知負荷來自於教材呈現的方式，與學習者的基模建構和自動化無關，也就是因教材設計和內容編排方式或教學活動，對學習者造成的負荷，此種認知負荷是額外增加的，因此可以藉由教材設計來降低認知負荷。透過多媒體學習理論的教材設計原則，可以改善教材的呈現方式，幫助學習者降低外在認知負荷。

3. 有效認知負荷 (Effective Cognitive Load)

此種負荷來自於教材設計者提供額外訊息或教學活動，協助學習者對學習內容建構基模與自動化時所產生的認知負荷。例如：教師在講解完一道數學例題後，提供概念相同的習題請學生練習。看似增加了學生的負荷，但學生在演練的同時，便是幫助其建構相關的基模與促進自動化，此種負荷並未干擾學習，反而使其更專注於所要習得的知識內容上，因此有效認知負荷是有助於學習的。

當以上三種認知負荷的總和超過工作記憶可以處理的最大極限時，學習將會是無效的。因此在教學設計中必須特別注意，使認知負荷不會超載(overloading)。



2.2.3 認知負荷效應

Sweller 等人歸納認知負荷理論在各學科領域的研究結果，提出七項的教學設計原則(Sweller, et al., 1998)；最近(Sweller, 2010)擴充成十四項教學設計原則，提供教材設計者和教學者作為準則，希望能引導學習者做快速而有效的學習。其教學設計原則所產生的效應 (effect) 如表 1：

表 1
認知負荷效應

認知負荷效應	效應內容
1. 開放目的效應 (Goal-free effect)	讓學習者在沒有具體的目標下，盡可能的表達自己思考過程中的步驟或結論。
2. 工作示例效應 (Worked example effect)	新手 (novices) 在學習程序性知識時，先給予完整的解題步驟，使其能研讀與參考。
3. 完成問題效應 (Problem completion effect)	先給定目標，提供學習者部分的解決方法，剩下的部分要求學習者繼續完成。
4. 分散注意力效應 (Split-attention effect)	若將教材中有關連的文字或圖像分開，則會使學習者分散注意力。
5. 重複效應 (Redundancy effect)	「圖像+口語」優於「圖像+口語+文字」的效果，多碼同時展演反而增加外在認知負荷。
6. 專業知識反轉效應 (Expertise reversal effect)	對於新手有用的教學設計或技術，對專家不見得有效，可能會適得其反。
7. 引導漸減效應 (Guidance fading effect)	隨者學習者專業知識的增長，給予的引導必須漸漸減少，以免產生專家知識反轉效應。
8. 獨立互動元素效應 (Isolated-interacting elements effect)	若教材包含許多高交互作用的元素，需先將一部份的互動元素獨立處理，之後再進行整合。
9. 整體—模組效應 (Molar-modular effect)	將複雜的解決方案分解成數個小步驟，再依照給定的程序解決，完成整體的任務。
10. 變化效應 (Variability effect)	提供不同狀態或情境的題目讓學習者練習，促使基模發展，強化學習轉化的能力。
11. 交互作用元素效應 (Element interactivity effect)	若教材的元素交互作用低，其內在認知負荷就低；而教材的元素交互作用高，其內在認知負荷就高。
12. 形式效應 (Modality effect)	「圖像+口語」的展演效果優於「圖像+文字」。
13. 想像效應 (Imagination effect)	在學習者具備相關知識的前提下，要求其想像一個過程或概念會優於研讀同樣過程或概念的表現。
14. 自我解釋效應 (Self-explanation effect)	要求學習者嘗試去解釋一個新的過程或概念，藉以引導認知資源去處理有關的互動元素。

資料來源：Sweller (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational psychology review*, 22(2), 123-138.

在認知負荷效應中，本研究教材設計主要的應用為工作示例效應(Worked example effect)、分散注意力效應(Split-attention effect)、獨立互動元素效應(Isolated-interacting elements effect)、整體－模組效應(Molar-modular effect)與交互作用元素效應(Element interactivity effect)，原因分述如下：

(1) 工作示例效應：

在排容原理的應用問題講解時，先示範如何將問題的文字敘述轉換成符號與文氏圖，展演完整的解題步驟後，學生才有整體的概念，當進行相關應用問題的測驗時，才易於順利解題。

(2) 分散注意力效應：

研究者在教材設計時，盡量排除與主要教學內容無關的圖像與文字，使畫面上的訊息盡量簡潔，避免學習者分心，尤其是實驗組的教材，在訊息安排上，盡量將相關的訊息對齊、接近，使學習者能輕易搜尋到講解的訊息，避免在視覺搜尋的過程分散注意力。

(3) 獨立互動元素效應、整體－模組效應、交互作用元素效應：

在排容原理概念介紹時，三個集合的排容原理對學習者而言較為複雜，屬於高交互作用的元素，因此在實驗組的教材設計上，先將文氏圖各區塊編號，並分別統計各區塊計算的次數，避免重複或缺漏計算，如此計數的動作，是由學習者抽象的心裡圖像，轉換成具體表格的呈現，待確定每區域都恰好計算一次時，便能確定排容原理加加減減的過程完畢。換言之，當教材元素的交互作用降低時，便能降低內在認知負荷。

2.2 多媒體學習理論

2.2.1 多媒體學習理論的基本假設

所謂的多媒體學習 (multimedia learning)，是利用文字(words)與圖像(pictures)交互使用的學習方式，其中文字包含了視覺上的印刷文字 (printed words) 與聽覺上的口述文字 (spoken words)；圖像包含了靜態的插圖 (illustrations)、圖片 (graphics)、照片 (photos)、地圖 (maps)，以及動態的動畫 (animation) 和錄影 (video) 等(Mayer, 2005)。

Mayer 與多位學者提出多媒體學習的認知理論(Mayer, 2005)，說明多媒體學習時，人類的認知系統如何分配與處理多媒體訊息。多媒體學習的認知理論有三個重要的認知假設：「雙通道假設」(Dual-Channel Assumption)、「有限容量假設」(Limited-Capacity Assumption) 和「主動處理假設」(Active-Processing Assumption)，分別說明如下：

1. 雙通道 (Dual channels)

人類在處理訊息時有兩種，分別是聽覺通道 (auditory/verbal channel) 和視覺通道 (visual/pictorial channel)，當訊息以聲音的形式出現，耳朵會將訊息接收至聽覺通道；若訊息以印刷文字或圖像的形式呈現，眼睛會將訊息接收至聽覺通道；學習者可以將兩個管道接收到的訊息相互轉換。如圖 1

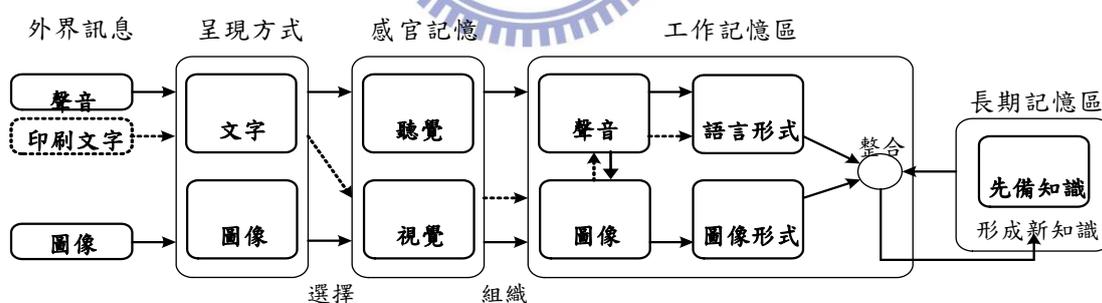


圖 1 多媒體學習理論的雙通道模型

資料來源：修改自 Mayer (2009). *Multimedia Learning* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.

2. 有限容量 (Limited capacity)

人類在每一個通道所能夠同時處理的訊息量是有限的(Clark & Mayer, 2008)。因此若有訊息大量湧入時，適度的切割、分段與控制訊息量，使學習者進行較有效的學習，便是設計多媒體教材時的重點。

3. 主動處理 (Active processing)

一個主動處理訊息的歷程包含「選擇相關訊息」、「組織已選擇的訊息」及「將新訊息與先備知識整合」三階段(Clark & Mayer, 2008)，藉以形成一個新的知識，進入長期記憶區 (Long-term memory)。

2.2.2 多媒體設計原則

Mayer 和多位學者經過多實驗研究，提出十二個多媒體學習的設計原則(Mayer, 2009)，可作為教材設計的重要參考，分別敘述如下：

1. 多媒體原則 (Multimedia Principle)

多媒體原則指的是學習者從「文字加圖像」學習的效果比「單獨從文字」學習的效果好。因為當文字與圖像同時呈現時，學習者有機會去建構語文與圖像的心智模式及兩者之間的關連。從多媒體學習的認知理論觀點而言，語文管道和圖像管道屬於不同的知識表徵系統，具有不同刺激的效果，同時呈現具有互補的效果，不能互相取代。

2. 形式原則 (Modality Principle)

形式原則指的是「動畫搭配口述文字」的效果比「動畫搭配印刷文字」效果好。因為動畫和印刷文字都屬於視覺的訊息，若同時經由視覺通道進入工作記憶區中，兩種訊息會彼此競爭視覺通道中的認知資源，而聽覺通道的資源卻沒有使用；反之，若口述文字經由聽覺通道、而動畫經由視覺通道，兩者便可達成平衡。

3. 重複原則 (Redundancy Principle)

重複原則指的是「動畫搭配口述文字」的效果優於「動畫同時搭配口述文字與印刷文字」。當動畫與印刷文字同時呈現時，在工作記憶區容量有限的情況下，兩種視覺的訊息會造成視覺通道的超載。若文字以口述方式呈現，聽覺訊息能分配至聽覺通道接收，則視覺通道的負荷便會減少，更多的認知資源可用於建立動畫與相對應文字之間的連結，亦即減少選擇的心力，而能將更多心利用於有效的組織和整合訊息上。在本研究的教學實驗中，教師對教材內容不作過多的詮釋，以引導方式說明畫面上的訊息。

4. 連貫原則 (Coherence Principle)

若能排除與主要學習目標無關的訊息或資料 (material)時，會有較佳的學習效果。因此在教學設計中加入不相關的文字、插圖、音樂或聲音時，反而對學習有所妨害。Mayer(2008)認為「少就是多 (less is more)」。

5. 空間接近原則 (Spatial Contiguity Principle)

空間接近原則指的是當相關的文字和圖像訊息，在空間上接近地呈現時，能產生較好的學習效果。當學習者在接收視覺訊息時，若文字說明與圖像在空間上的距離太遠，學習者必須使用較多的認知資源 (mental resources) 進行視覺搜尋，而在工作記憶區容量有限的情況下，較不可能同時將文字與圖像訊息容納於工作記憶中。因此在教材設計中上，應注意到相關文字、圖像的配置，尤其是高度複雜的畫面，應盡可能的將相關訊息接近，以減少認知資源的耗費，進而提高學習效果。在本研究中的教材部分，有不少較長敘述的數學文字型應用問題，如圖 2，因此將與題意對應的符號用表格的方式排在同一列，方便學生左右搜尋、比對相關訊息，容易建立訊息的關聯性。

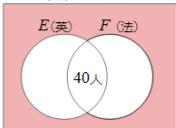
例題6

晶華飯店某日有 100 名外國旅客住宿，
調查結果發現：

能聽懂英語的旅客占 70%，
能聽懂法語的旅客占 60%，
兩種語言都能聽懂的旅客占 40%，
試問兩種語言都聽不懂的旅客有幾人？

集合名稱	符號	數量
英語	E	$n(E) = 70$
法語	F	$n(F) = 60$
兩種都聽懂	$E \cap F$	$n(E \cap F) = 40$
兩種都聽不懂	$(E \cup F)'$	$n(E \cup F)' = ?$

字集 U : 100 人



$$n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$$

$$= 70 + 60 - 40 = 90$$

即聽懂英語或法語的旅客有 90 人

$$n(E \cup F)' = n(U) - n(E \cup F)$$

$$= 100 - 90 = 10$$

兩種語言都聽不懂的旅客有 10 人

圖 2 空間接近原則範例

6. 時間接近原則 (Temporal Contiguity Principle)

時間接近原則指的是相關的文字和圖像同時呈現時，比間隔時間出現的效果好。當文字和圖形整合呈現時，學習者能將整合的訊息在工作記憶中暫存，結合視覺表徵與聽覺表徵的關聯性。

7. 個人化原則 (Personalization Principle)

個人化原則指的是在教學時採用對話式 (conversational style) 的效果優於形式化 (formal style)。教學過程中對話式用語盡量使用第一、二人稱，避免使用第三人稱，並增加與學習者的對話。

8. 信號原則 (Signaling Principle)

信號原則指的是教材中若含有可強調教材內容組織結構與重點的「提示」(cues)，學習效果較好。因為適當的提示可引導學習者的注意力，使其將注意力投注在重要的訊息上，避免學習者的注意力被轉移至不相關或不重要的訊息，而造成認知資源不必要的浪費。信號原則常用的方式為「突顯標題」(heading)與「強調關鍵訊息」(key information)(Mayer, 2005)；實際的呈現手法包括了標題、粗體、斜體、底線、放大、顏色、反白、箭號……等，如圖 3，標題部分用較大的自與粗體突顯，聯集與交集比較之相異處用紅色粗體凸顯。

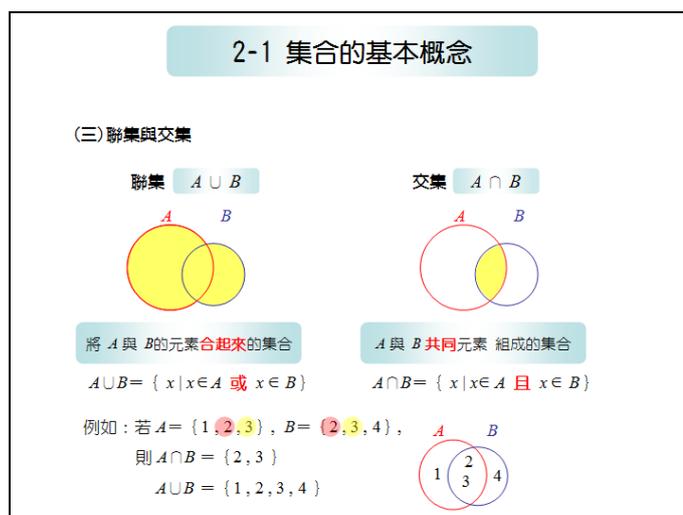


圖 3 信號原則範例

9. 分割原則 (Segmentation Principle)

分割原則指的是當教材被分割成數個小「片段」，並且能讓學習者自己控制片段的呈現，效果會優於連續播放的方式。因為當教材被分割成數個小片段時，學習者擁有較充裕的時間及能力，從每一個片段中選擇文字及影像，並加以組織及整合後，再進入下一片段。如圖 4，針對文字敘述較長的應用問題，可將每一個句子分開，建立訊息的獨立性，教師在講述過程中可以突破循序的藩籬，由淺入深的講解，避免串流式冗長的敘述，在解題列式時，可減少搜尋訊息所耗費的心力。



圖 4 分割原則範例

10. 事先訓練原則 (Pre-training Principle)

事先訓練原則指的是學習者若能在學習前，事先知道主要概念的名字和特徵，學習效果較佳。例如在應用問題中，要確定學生了解題目的專有名詞，如「且」、「或」、「至少」等；以及使用語法的一般性，情境要是學生所熟悉的。

11. 聲音原則 (Voice Principle)

聲音原則指的是講述的聲音對學習者而言，採用「人聲」的方式優於「機器音」的方式。

12. 圖像原則 (Image Principle)

圖像原則指的是當螢幕上有出現演講者的圖像時，不見得會得到較好的學習效果。因為學習者可能會分散注意力到演講者的圖像，而浪費部分認知資源。

基於多媒體學習理論的基本假設與教材設計原則，學習者在短時間之內只能處理有限的訊息，並且主動處理有感覺的訊息，因此在教材展演的過程中，必須將大量的訊息作切割、分段處理，達到空間接近與分割原則，以免因訊息量過大而耗費太多認知資源於視覺搜尋上，並且要利用信號原則，快速引導學習者的注意力到主要傳達之訊息上。而本研究實驗組的教材設計，便是應用空間接近與分割原則，改善應用問題串流式的敘述，以幫助學習者進行更有效的學習。

2.3 適性指標與代數教材設計原則

2.3.1 適性指標的定義

適性指標是(林煜庭, 2008)針對 AMA (Activate Mind Attention)系統特性所提出的一種視覺物件, 具有「協助視覺搜尋」以及「引導注意力」的特點。

其中 AMA 系統是由交通大學陳明璋教授策劃研發, 以微軟的「PowerPoint 簡報軟體」為平台, 改善原簡報軟體在數學教材製作上之不足, 使數學教材的設計更為方便(邱建偉, 2005)。陳明璋教授更進一步基於認知科學與多媒體學習理論, 提出激發式動態呈現 (Trigger-based Animation, TA), 配合視覺化 (visualization) 的方式降低教材的外在認知負荷, 協助學習者進行更有意義的學習。

而林煜庭提出的適性指標, 演講者在使用過程中能彈性地操控此物件, 透過觸發來改變物件的視覺特徵, 例如改變顏色、改變大小、改變形狀或是移動位置, 藉以吸引學習者的注意力, 引導學習者進行視覺搜尋, 達到更有效的學習。

2.3.2 適性指標教材設計原則

林煜庭(2008)將適性指標的相關設計原理彙整成七個原則, 整理如下表 2:

表 2

適性指標的教材設計原則表



原則	說明
標示原始位置原則	1.滑鼠啟動點應在目標物位置 2.直接與目標位置相同, 或是能指出目標物的所在位置 3.相同的物件在不同頁面出現時位置要相同(頁間定位)
特徵獨立原則	1.盡量用單一特徵設計 2.待搜尋物與干擾物的彈性指標特徵不同 3.避免使用前一個用來標示干擾物的特徵來標示目標物
通道原則	1.教材設計時, 對於畫面上的顏色應避免超過五種 2.當色彩使用過量, 需標示目標物時, 應採用不同類型特徵
群化原則	為區分干擾物與目標物: 1.目標物群化: 建立目標之間的關聯性 2.干擾物群化: 將干擾物整群忽略, 協助目標搜尋
明度差異原則	干擾物與目標物的明度差異越大, 突顯效果越好
引導原則	1.利用知覺由下而上的激發注意力、由上而下的抑制干擾物 2.將學習者的視覺避開不相干的刺激, 以特徵搜尋的方式找目標
觸發原則	適性指標必須要有動態視覺特徵以便激發注意力

資料來源: 整理自林煜庭(2008)適性指標: 多媒體學習中一種基於視覺認知理論的引導方式。

經過實驗證實，適性指標的教材設計原則與「視覺認知理論」、「類比遷移」(analogical transfer)、「基模理論」(schema theory)及「認知負荷理論」預期的結果一致，發現多媒體教材具有適當設計的適性指標會比沒有適性指標提供更好的學習效果，並突顯結構化關聯(schematic relations)，協助基模的形成(林煜庭，2008)。另外，李鈴茹(2008)也證實，在有適性指標的教學設計，無論解說的方式為何，都有助於提升學習過程的記憶表現，並減少視覺搜尋的時間，提高對適性指標區的注意力分佈，擁有有較多的視覺處理。

2.3.3 代數教材設計原則

在本研究的教學內容中，部分排容原理應用問題的文字敘述較長，尤其是牽涉到三個集合的排容原理，串流式的敘述往往使學習者感到視覺上壓力，因而影響學習的意願與成效，因此若能將訊息適當的結構化，並將串流訊息切割，作分段、區塊化的呈現，便能改善串流式呈現在視覺上的缺點。因此本研究在教材設計上，欲使用謝東育(2009)提出之「代數教材設計原則」以補足多媒體學習理論的不足。其四大原則分述如下：

1. 教學內容結構化

結構化是指先分析教材內容，依其概念或性質作適當的分段切割。代數教材內容往往是繁瑣而冗長，且缺乏視覺情境概念，例如：解方程式的過程、應用問題的文字敘述。因此，教材設計者必須針對授課內容進行結構性分析，將大量的訊息依主題或概念予以分段切割，統整歸納出教學順序，如此能減少工作記憶的負荷，此與 Mayer (2009)提出的分割原則(Segmenting Principle)類似。

2. 教材呈現區塊化

區塊化的概念是將已完成段落切割的訊息，打破由上而下的循序藩籬，由教材設計者依講解需求自行安排訊息的所在位置(謝東育，2009)。運用適性指標所設計的教材，在注意力的引導上有顯著效果，但在代數領域，算式展演若過長，易使學習者無法掌握主要的解題概念。因此藉由區塊化，可以將冗長的解題過程分成數個大區塊，每個區塊均有所屬的子目標，若各項子目標分別達成後，串連起來便是達成整體目標，如此對教師引導、講解，及學習者對訊息的選取、組織、整合都有所幫助。

3. 建立訊息關聯

代數運算的關鍵在於式子間的推演關係，建立訊息間的關聯，操作的方法有下述兩種：

(1) 對齊：

將算式中將相關的元素上下對齊，使學習者易於上下對照搜尋，觀察元素間的變化，減少不必要的搜尋，避免增生認知負荷。

(2) 二維圖像關係：

當教材結構化、區塊化後，由於區塊間未必是單一方向連貫式的排列，因此可利用曲線、線段搭配適性指標，串連區塊間的關連性。

4. 口語簡化解說

教師講解時應避免缺乏想像的代數符號及專業術語，若將所有算式中元素逐一唸出，效果反而不好。因此，搭配適性指標並口語描述適性指標的特徵（如：請看這個紅色的箭頭），明確引導學習者注意力聚焦在講解的訊息上，減少學生不必要的訊息轉換。此原則與 Mayer (2009) 提出個人化原則 (Personalization Principle) 有相似之處。

經實驗證實，代數教材設計原則結合圖像化運用在教學設計上，對需進行補救教學的學生，其學習成效有顯著差異，並有效地降低認知負荷(葉子榕，2010)。而本研究的對象，以兩個實驗組的學生而言，是屬於「社會組」的學生，其大部分學生對數學較不感興趣，相對在數學上的學業表現較不佳，因此在本研究的實驗設計上，實驗組在介紹排容原理概念時，會強化聯集文氏圖間「排除」與「容納」的過程，促使學生對其基模的建立及自動化的過程，待遇到排容原理的應用問題時，輔助的文氏圖將成為解題時的幫手。

2.4 認知診斷評量

2.4.1 認知診斷評量的定義

在教學的領域裡，教學後的評量是不可或缺的，透過教學評量的結果，可以瞭解學生的起點行為、作為改進教學的參考、確保教學目標的達成及評定學生的學習成果(余民寧, 2003)。藉由教學評量診斷學生的學習，其提供的回饋，可作為修正教學目標、進行補教教學的依據，因此教學評量引導著教學的發展，要不斷改進並科學地運用評量，才能提升教學與學習的成效。

檢視多元評量的實施，並沒有達到「診斷學習成效」的目標，探究其中的原因，可能是目前多元評量所隱含的測驗與評量理論，並未結合目前認知心理學與教學心理學的研究成果(涂金堂, 2003)。目前的教育評量在標準測驗理論(standard test theory)中關於人類能力的觀點，無法配合認知心理學與教育心理學的快速發展，因此面臨了一個可能危及基礎的危機(Mislevy, 1993)。

傳統評量主要是根據「邏輯分類」與「內容細目」來進行評量設計，但這些評量設計缺乏對該領域知識結構與歷程的詳細描述(Nichols, 1994)。傳統測驗的編製常根據Bloom等人提出的六個認知教學目標：知識、理解、應用、分析、綜合與評鑑(Bloom & Krathwohl, 1956)，然而這種方式的評量結果，往往是一些測驗分數，反映出學生答對與答錯的題數，瞭解該生在團體中的排名，似乎比較強調統計技術，而較忽略所欲評量的能力或特質，是否具有心理學上的意義(Anastasi, 1967)。但若只有總分的高低，並無法由總分看出學生是否精熟某種技能，倘若測驗結果能提供對各項技能的精熟程度，可以幫助學生或老師更加瞭解分數所代表的涵義，以及哪一類的學習可以增進學習成效(Sheehan, 1997)。

若要使評量發揮「診斷學習歷程」的功能，可以將教育評量結合認知心理學學(cognitive psychology)，因為認知心理學可以幫助瞭解測量背後所表徵的理論建構，並針對教學與學習歷程，提供更多的診斷和有用的訊息(余民寧, 1995)。

Nichols(1994)提倡將認知科學(cognitive science)與心理計量學(psychometrics)結合，發展新的診斷評量方法，以幫助教學目標的達成。Nichols 將這種新的診斷評量方法，稱為認知診斷評量(cognitively diagnostic assessment, 簡稱為CDA)。

一份教材往往包含了數個概念與技能，在本研究中，為了想進一步瞭解學生對排容原理各項技能的精熟程度，藉以診斷學生學習情況，並檢視教材或教學方法是否需要修正，因此採用認知診斷測驗作為評量依據。

2.4.2 認知診斷評量的模型

認知診斷評量主要在探討學生的潛在知識結構與其作答反應過程的關係，因此開發認知診斷模型(cognitive diagnostic models, CDMs)與測驗分析就顯得相當重要。

CDMs 是種可判斷受試者優勢與劣勢的心理計量學模式，透過其提供的測驗結果，可以有效測量學生的學習和進步(de la Torre, 2009a)。因此在過去幾年中許多的認知診斷模型迅速發展與開發，並應用於認知診斷上。(王文卿，2010)指出，只有建構出能融合不同認知變量的模型，並且模型中的參數能夠被很準確的估計出來，才能對各個認知變量進行量化的分析，進而了解受試者的認知結構。

在使用認知診斷評量模式時，首先要依據測驗的目的，選擇符合該知識領域的重要元素，訂為欲評量試題的概念。接下來要將概念組合成試題，每道試題至少必須包含一個概念。在試題的編製過程中，並不是任意將數個概念組合成試題，必須考量認知屬性的相似程度與難易程度，並經過適當的整合與編制。試題與概念的關係，大多數的認知診斷模型，藉由關聯矩陣(incidence matrix) 來表示每個試題所需要具備的概念，(Tatsuoka, 1995)。關聯矩陣通常又稱為「Q矩陣」(Q-matrix)。施測者藉由受試者的試題反應組型及Q矩陣之測驗結果，可推估受試者具備或缺乏哪些認知屬性的知識，了解受試者目前的學習狀況，進而針對受試者的迷思概念或學習盲點，進行進一步地補救教學，達到教學與評量的循環。

認知診斷評量模型是以概念作為診斷的目標，診斷學生對於某些概念是否精熟，因此在測驗的結果中，學生在各項技能被分類成精熟(masters)或不精熟(non-masters)，也就是認知診斷評量通常是二元的。對一個評估診斷K個技能的測驗，認知診斷評量模型會給予每位受試者一個二元精熟分數(binary mastery scores)向量，以 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ 表示。例如K=3，則一個受試者其 $\alpha = (1,0,1)$ 表示他精熟第1跟第3個技能，而對第2個技能不夠精熟。既然K個技能都可以對應到精熟與不精熟，則會有 2^K 個可能的反應組型。下列為當K=3時，所有可能的8種反應組型。

(0,0,0) (1,0,0) (0,1,0) (0,0,1) (1,1,0) (1,0,1) (0,1,1) (1,1,1)

由於每位受試者得到的反應組型不同，教師可針對個人的反應組型進行個別化的補救教學，甚至對於能力較佳者，提供更進階的教材或自學的方向。

而Q矩陣便可視為技能影響試題的對照表(Tatsuoka, 1995)，若一份測驗題有K個技能及J個試題，則對應的Q矩陣大小為 $J \times K$ ，其中 $q_{jk} = 1$ 代表要解決試題j，是否需具備認知屬性k，公式定義如下：

$$q_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{第 } j \text{ 個試題需要第 } k \text{ 個技能} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中， $j=1 \cdots J$ ， $k=1 \cdots K$

從上可知，每一個試題恰為Q矩陣中的一列，舉例來說，我們假設Q矩陣如下：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

表示第一題需要技能1及3，而第二題只需要技能4，第三題需要技能1、3及4，依此類推。Q矩陣通常是由學科專家(subject matter experts, SMEs)所建立。

2.4.3 DINA 模式

根據國外研究者統計，目前至少有十四種認知診斷模型被開發並應用於認知診斷上，其中最具代表為Junker和Sijtsma (2001)提出之 (Deterministic Input, Noisy “And” Gate model)，因其模式較簡單且較易於解釋，僅涉及粗心 (slip) 和猜測 (guess) 兩參數的影響，且近年來，又有許多學者投入此模型的探索與應用，使DINA模式被推廣。

DINA模式是許多認知診斷與評估方法的基礎(Doignon & Falgagne, 1999)。DINA模式是由Junker和Sijtsma(2001)所創立的，適用於對二元計分項目測驗進行認知診斷。模式假設具備解該題目所需之認知屬性時，即能答對該題，但試題答對的機率，會受到粗心 (slip) 及猜測 (guess) 兩個參數的影響，DINA的模式表示如下

$$P(X_{ij} = 1 | \alpha, s, g) = (1 - s_j)^{\xi_{ij}} g_j^{1 - \xi_{ij}} \equiv P_j(\alpha_i) \quad (2)$$

其中 $\xi_{ij} = \prod_{k: Q_{jk}=1} \alpha_{ik} = \prod_{k=1}^K \alpha_{ik}^{Q_{jk}}$ ，代表試題所需具備的認知屬性是否完全具備， α_{ik} 代表

受試者 i 是否具備認知屬性 k， Q_{jk} 表示認知屬性 k 與試題 j 是否有相關，而兩個參數的定義如下

$$\begin{aligned} s_j &= P(X_{ij} = 0 | \xi_{ij} = 1) \\ g_j &= P(X_{ij} = 1 | \xi_{ij} = 0) \end{aligned} \quad (3)$$

其中

X_{ij} ：第 i 個受試者在第 j 個試題的反應組型。

s_j ：受試者具有回答第 j 個試題所需的認知屬性，但卻因粗心答錯該題的機率。

g_j ：受試者不具有回答第 j 個試題所需的認知屬性，但卻因猜對該題的機率。

α_{ik} ：代表第 i 個受試者在第 k 個認知屬性的有無，具備該屬性其值為 1，無則為 0，

Q_{jk} ：受試者答對第 j 個試題是否需要第 k 個認知屬性，

如需要該屬性其值為 1，無則為 0。

ξ_{ij} ：代表受試者是否具有答對第 j 個試題所需的所有技能。若全部具備，則其值為 1，反之，受試者至少缺少 1 個答對第 j 個試題所需的技能，其值為 0。

從上面的式子可知，DINA 模式將學生分為兩種，一種是掌握所有該題需具備的認知屬性，另一種則是受試者至少缺乏一個必須的認知屬性。倘若少了一個解題所需的認知屬性，回答出正確答案的機率將大幅降低，即使答對也歸納於猜測的機率。

DINA 模式的圖形表示如下圖 5，就像圖中表示的能力反應組型 η_{ij} 是受試者技能 $\{\alpha_{ik}\}$ 和試題 $\{Q_{jk}\}$ 的方程式，如果 $\eta_{ij}=1$ ，則受試者答對第 j 題的機率就是 $1-s_j$ ，如果 $\eta_{ij}=0$ 則答對機率為 g_j 。

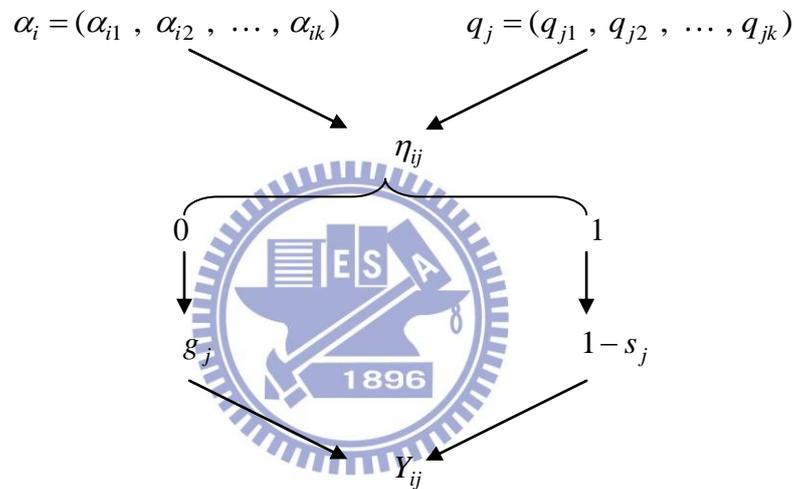


圖 5 受試者對試題 j 的反應程序圖(de la Torre, 2009b)

以 de la Torre (2009) 中的範例說明 DINA 模式的計算方法：

表 3 為分數的減法的認知屬性，表 4 為測驗學生是否具備這些認知屬性而設計的題目，表 5 為例題之 Q 矩陣。由表 5 可知，解此題目需具備認知屬性 1~3。

表 3

分數的減法認知屬性

認知屬性	敘述
1	從整數部分借 1
2	基本分數減法
3	化簡
4	將整數與分數部分分開
5	將整數變成分數

表 4

「分數的減法」選擇題型

$$2\frac{4}{12} - \frac{7}{12} =$$

A: $2\frac{3}{12}$ B: $2\frac{1}{4}$ C: $1\frac{9}{12}$ D: $1\frac{3}{4}$

表 5

例題之 Q 矩陣

試題 \ 屬性	K1	K2	K3	K4	K5
Item1	1	1	1	0	0

假設給定試題參數 $s_1=0.2$ 、 $g_1=0.2$ ，而今有三名受試者，其所具備的認知屬性如表 6 所示：

表 6

受試者的認知屬性狀態

受試者 \ 屬性	K1	K2	K3	K4	K5
學生 1	1	1	1	1	0
學生 2	0	1	0	0	1
學生 3	0	1	1	1	1

由表 6 可知：學生 1 具備解題所需的三個認知屬性，因此其 $\eta_{11}=1$ ，學生 2 及學生 3 都有缺少一個以上的認知屬性，因此其 $\eta_{21}=\eta_{31}=0$ ，則三位受試者的答對機率分別計算如下：

$$P(Y_{11}=1|\alpha_1, s_1, g_1) = (1-s_1)^{\eta_{11}} g_1^{1-\eta_{11}} = (1-0.2)^1 (0.2)^{1-1} = 1-0.2 = 0.8$$

$$P(Y_{21}=1|\alpha_2, s_1, g_1) = (1-s_1)^{\eta_{21}} g_1^{1-\eta_{21}} = (1-0.2)^0 (0.2)^{1-0} = 0.2$$

$$P(Y_{31}=1|\alpha_3, s_1, g_1) = (1-s_1)^{\eta_{31}} g_1^{1-\eta_{31}} = (1-0.2)^0 (0.2)^{1-0} = 0.2$$

學生 1 具備解題所需的三個認知屬性，因此答對機率最高，學生 2 及學生 3 都有缺少一個以上的認知屬性，因此在 DINA 模式下認為若答對，是屬於猜測的機率。

de la Torre (2009)對 DINA 的估計是採用 EM 演算法，程式碼是使用 Ox(Doornik, 2003)程式編寫的，該程式 5.1 之後的版本提供了可以編寫程式碼及執行環境的 OxEdit 編輯器，使用上更為便利。程式執行後提供了 G-DINA 的參數估計與標準誤還有認知屬性的後驗分配及受試者的分類情形。

綜合上述，DINA 模式是一個非常簡單且很好解釋的模式，因為它每個試題，僅包含粗心及猜測兩參數，且具有良好的模式適配度(de la Torre & Douglas, 2004)，也因此被應用在測驗的許多方面。相關的研究近年來也與日俱增。de la Torre 和 Douglas (2004)探討了 DINA 與 Linear logistic model(LLM)模式的比較，利用 Markov chain Monte Carlo(MCMC)來進行參數估計，研究結果顯示 DINA 的參數估計精準度相較之下比較穩定；Henson 和 Douglas (2005)提出 Kullback-Leibler Information (KL)在 DINA 下進行測驗編制；de la Torre (2009)更詳述了 DINA 參數估計的方法，如 joint maximum likelihood estimation 及 marginalized maximum likelihood estimation 等，降低 MCMC 參數估計的時間；de la Torre(2009)針對選擇題型，提出 multiple-choice DINA 的模式，試圖從選項中獲得更多的診斷訊息，達到更精準的估計。

本研究的認知診斷評量是採用 DINA 模型，根據受試者的認知屬性狀態，來判斷受試者在數個技能中，何者較為精熟，又何者較不精熟。



2.5 排容原理相關研究

2.5.1 何謂排容原理

在組合數學的領域中，常需討論有關集合元素個數的問題，而通常犯錯的原因往往是重複計數，因此需再進一步討論所有可能重複的情況，這時「排容原理」便是一個有效的方法，他可以解決多個非互斥集合間交集(intersection)與聯集(union)的計數問題，輕易地將重複計數的困擾排除；所謂「排」是排斥之意，也就是將重複計數的部分扣掉，「容」則是容納之意，意即將未計算到的不足之數補上，藉以計算所求集合的元素個數。

排容原理(The Principle of Inclusion and Exclusion)是個容易使用的計數方法，最早是以篩選方法(Sieve Method)或交叉分類法則(Principle of Cross Classification)等不同的名稱出現，而現今所闡述與使用的排容原理是由英國數學家Sylvester(1814-1897)所建立。但在早期排容原理這一種計數技巧並未獲得重視，一直到由Whitworth所撰寫的「選擇與機會(Choice and Chance)」這本大眾書籍問世後，才使得數學家開始注意到排容原理的用途，也因為排容原理簡單明瞭，所以在其他領域更是被廣泛的應用(張福春 & 洪偉誠, 2009)。

若 $n(A)$ 表示有限集合 A 的元素個數， $A \cup B$ 表示 A 與 B 兩集合的聯集， $A \cap B$ 表示 A 與 B 兩集合的交集，則排容原理以數學式表達如下：

(1) 針對兩個集合 A 、 B ：

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(2) 針對三個集合 A 、 B 、 C ：

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(3) 針對 m 個集合 A_1, A_2, \dots, A_m ：

$$n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m n(A_i) - \sum_{i,j;i \neq j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k;i \neq j \neq k \neq i} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \pm n(A_i \cap \dots \cap A_m)$$

為使排容原理抽象的代數式能有更具體的表達方式，常用表達集合抽象概念的文氏圖(Venn diagram)來詮釋。如圖 6的斜線區域表示 $A \cap B$ ，圖 7的斜線區域表示 $A \cup B$ 。

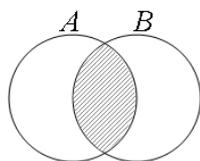


圖 6 兩個集合的交集文氏圖

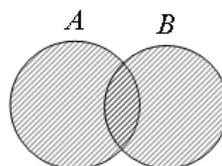


圖 7 兩個集合的聯集文氏圖

2.5.2 排容原理教材地位分析

排列與組合是學習統計學與機率論的基礎，重點在研究一些問題的計數方法。根據研究者在學習與教學的經驗，甚至從許多資深教師的分享中發現：有些學生的數學在高一學得不錯，但在高二學排列組合時卻顯得很吃力；也有些學生在高一學得不太理想，但在此單元卻茅塞頓開，進步神速。可見不少學生對排列組合單元的學習感到困難，因此若在排列組合單元學習的開始，能清楚瞭解重要的基本概念，對於日後更複雜的問題，才能減輕負擔，使學習過程更為順利。

根據民國九十四年一月教育部所修正發佈的普通高級中學數學課程暫行綱要，排容原理安排在第四冊第二章「排列與組合」，其中的第一節。而「集合元素的計數」教材內容是由集合的概念出發，包含集合的表示法、元素與集合的關係、子集合的概念、交集、聯集、差集、補集、空集合……等數學符號與對應的文氏圖，接著介紹集合元素的個數，進一步引入該小節的精髓——「排容原理」。

在高中數學排列組合單元中，部分的課程架構如圖 8：

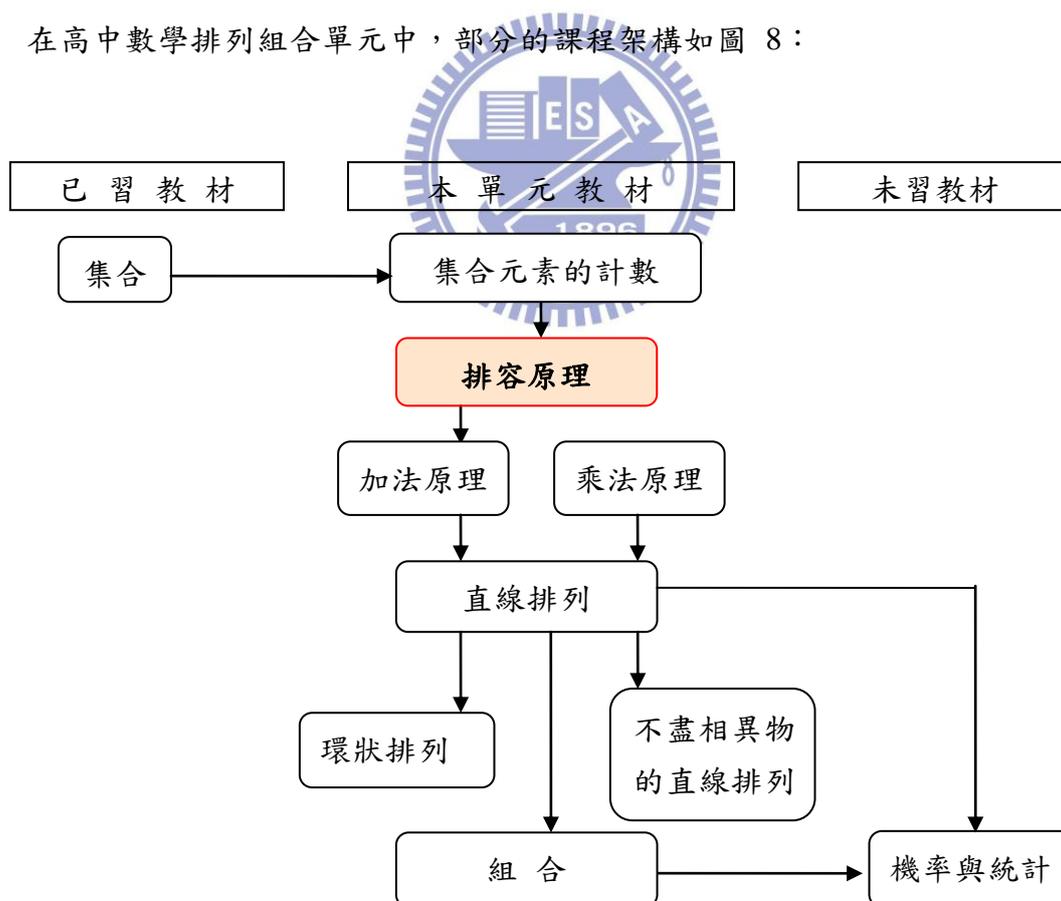


圖 8 排列組合單元部分課程架構圖

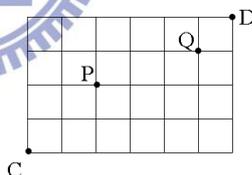
資料來源：修改自翰林版普通高級中學數學第四冊教師手冊(余文卿, 2011)

排容原理相關的應用問題很多，從基本的計數問題，延伸到排列、組合甚至是機率。排容原理是一個融合在諸多題型的思考模式與解題技巧，許多看似複雜的題目，其解題方法卻因排容原理而多元且巧妙精彩，但往往也因思考方式有時並非從題意的正面思考，必須加入排容原理概念的巧思，因此該類試題的答對率常常偏低。列舉幾個高中數學常見的問題如下表 7：

表 7

高中數學排容原理相關例題

題 目	題 型
1. 某班調查學生選修「第二外語」的情形，已知選修過日語、法語及西班牙語者分別有 20、10 及 5 人，且其中選修過日語及法語者有 6 人；選修過法語及西班牙語者有 3 人；選修過日語及西班牙語者有 3 人，而恰有 1 人曾選修過上述三種外語，試問班上同學至少選修過一種「第二外語」的人數為何？	集合的計數
2. 甲、乙、丙、丁、戊五個人排成一列，若甲不排第一個，乙不排中間，且丙不排最後，則方法幾種？	直線排列的
3. 五對夫婦在耶誕派對一起跳舞，若每位先生皆不是與自己的太太跳舞，則方法幾種？	錯排
4. 「 $aabbcc$ 」六個字母排成一列，若同字母不得相鄰，則方法幾種？	
5. 如右圖，由 C 到 D 走捷徑，(只能往→或↑)，若必經過 P 或 Q 點，則方法幾種？	不盡相異物的排列
6. 五本不同的書全分給三個人，若每人至少拿一本，則分法有幾種？	重複排列



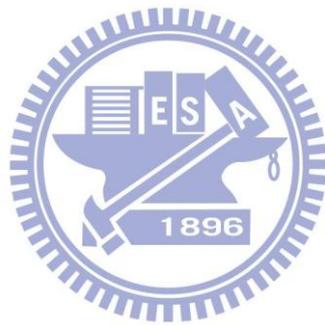
資料來源：修改自龍騰版普通高級中學數學第四冊(許志農，2010)及翰林高中互動式教學講義數學(四)(黃惟魯，2011)

有些排容原理的問題並不困難(如表之第1題)，但由於題目敘述過長而導致學生在看題意時，看了後一句就已忘了前一句，無法同時記住許多條件，因為每看一句就得思考這句話的意思，以致於工作記憶運作得十分忙碌，如此外在認知負荷過重，而無餘力思考彼此間的關係(張景媛，1994)。因此在此類敘述較長的應用問題，若能將問題透過適當的切割，減少視覺搜索的時間，便將較多的認知資源用於理解題意，並將文字轉換成符號表徵或文氏圖。

研究顯示，當應用問題需要使用排容原理時，學生的錯誤率明顯增高，且關於三個集合的排容原理錯誤率又更高(莊淑貞，2007)。分析學生的錯誤類型，包括了未弄清題意及未熟練基本計數概念，即學生解題時，對於排容原理的觀念不夠清楚，誤用其計數方法，忽略了使用具體的文氏圖來表示題意間的關係，因而造成計數錯誤。

基於排容原理的教材地位與學生的錯誤原因，本研究的教材內容將以從集合的基本概念出發，再介紹兩個集合的排容原理及應用問題，最後介紹三個集合的排容原理及相關應用問題，希望透過數位教材設計，提高學生的學習動機，並結合適性指標與代數教材設計原則，增加文字、符號與圖像表徵間的連結與轉換能力，使學生日後在遇到排容原理相關問題時，能夠更順利將其迎刃而解。





第三章 研究方法

本章共分成五節，分別就研究流程、研究設計、研究對象、研究工具設計及資料分析方法等作說明。

3.1 研究流程

本研究流程共分為整理準備階段、施測實驗階段與成效分析階段，研究流程如圖 9：

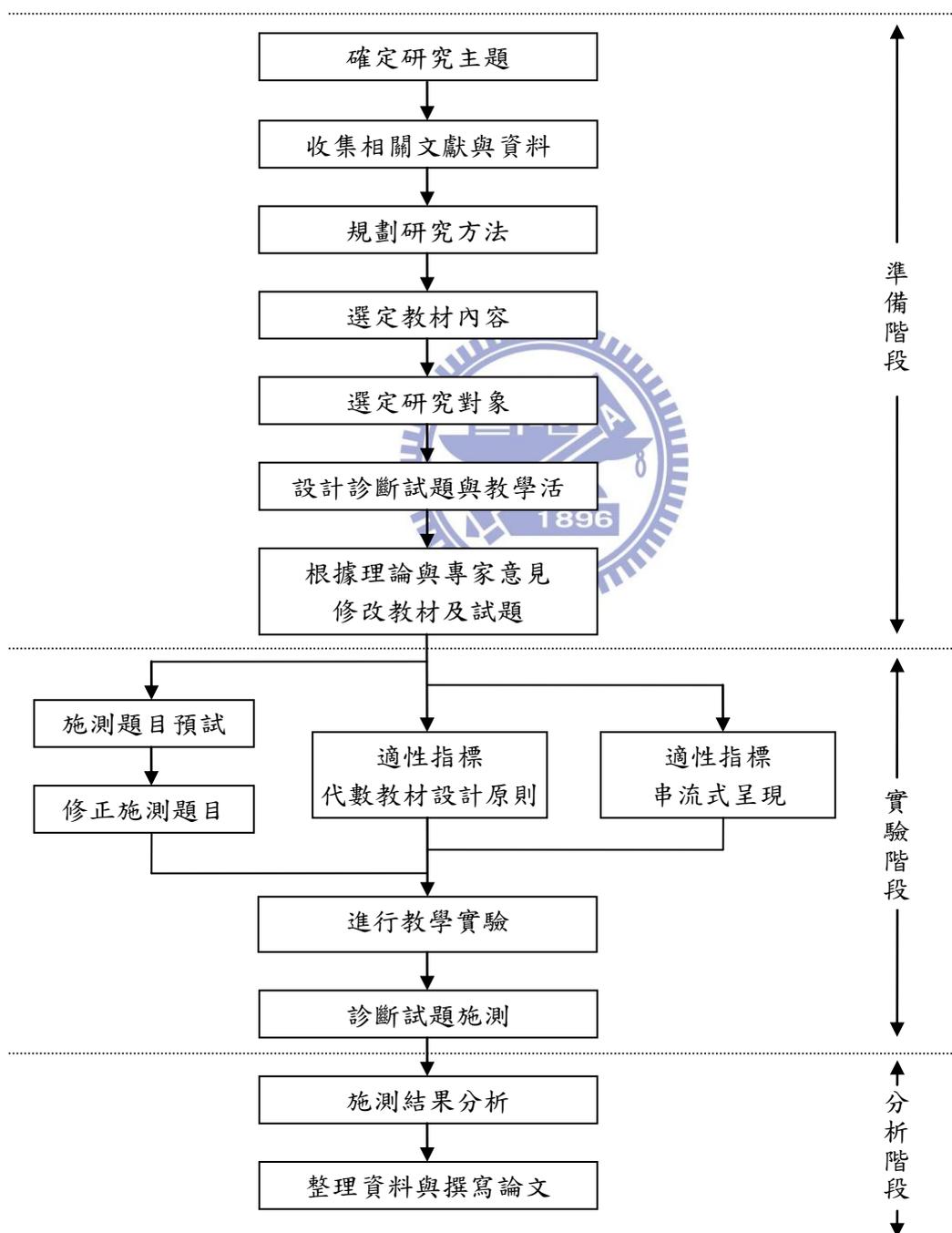


圖 9 研究流程圖

3.2 研究設計

本研究分成三項實驗，第一項實驗目的在探討適性指標設計原則結合代數教材設計原則，對學生的學習成效影響為何？並利用認知診斷評量，觀察不同的數位教材設計對學生概念或技能的精熟程度是否會產生影響？實驗設計以課堂授課為主，在不違反正常的教學進度與不破壞原授課班級的完整性下，盡可能避免其他干擾因素。本研究使用準實驗研究法。

就內在效度而言，本實驗設計主要有實驗組與對照組可供比較，藉由第一次複習考成績，顯示二組成績並無顯著差異，其他可能影響實驗的因素如：教學時間、教學內容、測驗工具與時間也妥善控制。

至於缺點方面，對照組非研究者原本任教之班級，心理、環境干擾因素較無法控制，但研究者在進行正式實驗之前，預先在對照組的班級先進行兩堂課的教學，且該班有部分學生曾被研究者教過，因此能盡量排除新奇效應，減少受測學生的心理干擾因素。

第二項實驗目的在探討實驗組的教材設計（適性指標＋代數教材設計原則）與傳統板書教學，對學生的學習成效影響為何？亦利用認知診斷評量，比較實驗組的教材設計與傳統板書教學，對學生概念或技能的精熟程度是否有所差異？進一步觀察，適性指標設計原則結合代數教材設計原則在某些認知能力或技能精熟程度，是否能使學生達到一定程度的進步？

第三項實驗目的在探討對照組的教材設計（適性指標＋串流式呈現）與傳統板書教學，對學生的學習成效影響為何？亦利用認知診斷評量，比較對照組的教材設計與傳統板書教學，對學生概念或技能的精熟程度是否有所差異？進一步觀察，適性指標設計原則在某些認知能力或技能精熟程度，是否能使學生達到一定程度的進步？

3.2.1 研究變項

1. 本研究的第一項實驗變項如下：

(1) 自變項

教材的設計方式：實驗組與對照組的教材設計比較如表 8：

表 8

第一項實驗教材設計比較表

	實驗組	對照組
適性指標	V	V
代數教材設計原則	V	X

說明如下：

① 實驗組：

教材為適性指標與代數教材設計原則的數學簡報教材，將教學內容結構化、教材呈現區塊化、建立關連訊息與口語簡化解說，畫面配合講解內容循序出現。

② 對照組：

加入適性指標與串流式的數學簡報教材，每張投影片內容多採一次出現或循序出現，以滑鼠為指標說明講解。

(2) 控制變項：授課教師、教學時間、教材內容、測驗試題和測驗時間。

(3) 依變項：

① 學習成效：

排容原理安排在高中課程第四冊第二章，在此單元前尚未出現正式的相關教材，故教學實驗後學生的受測成績，可視為學生經學習後的學習成效。

② 認知能力：

經過不同教材設計的教學後，學生對於「概念、理解」、「程序、執行」、「解題、思考」等認知能力的差異性。

③ 技能精熟程度：

本研究將於實驗後，利用認知診斷模型中的 DINA 模型，來探討教學內容概念及技能的精熟程度。



2. 本研究的第二項實驗變項如下：

(1) 自變項

教學的呈現方式：各組的教材設計比較如表 9：

表 9
第二項實驗教學呈現比較表

組別	設計原則	呈現方式
實驗組	適性指標＋代數教材設計原則	多媒體教學
其他組		板書教學
資優組		板書教學

說明如下：

① 實驗組：適性指標結合代數教材設計原則的數學簡報教材，使用多媒體教學。

② 其他組：該組學生的程度與實驗組相仿，使用板書教學。

③ 資優組：該組學生的程度顯著高於另外二組，使用板書教學。

(2) 控制變項：教學時間、教材內容、測驗試題和測驗時間。

(3)依變項：

①學習成效：

排容原理安排在高中課程第四冊第二章，在此單元前尚未出現正式的相關教材，故教學實驗後學生的受測成績，可視為學生經學習後的學習成效。

②認知能力：

經過不同的教學呈現方式後，學生對於「概念、理解」、「程序、執行」、「解題、思考」等認知能力的差異性。

③技能精熟程度：

本研究將於實驗後，利用認知診斷模型中的 DINA 模型，來探討教學內容概念及技能的精熟程度。

3. 本研究的第三項實驗變項如下：

(1)自變項

教學的呈現方式：各組的教材設計比較如表 10：

表 10

第三項實驗教學呈現比較表

組別	設計原則	呈現方式
對照組	適性指標 + 串流式呈現	多媒體教學
其他組		板書教學
資優組		板書教學

說明如下：

①對照組：適性指標加上串流式呈現的數學簡報教材，使用多媒體教學。

②其他組：該組學生的程度與實驗組、對照組相仿，使用板書教學。

③資優組：該組學生的程度顯著高於另外三組，使用板書教學。

(2)控制變項：教學時間、教材內容、測驗試題和測驗時間。

(3)依變項：

①學習成效：

排容原理安排在高中課程第四冊第二章，在此單元前尚未出現正式的相關教材，故教學實驗後學生的受測成績，可視為學生經學習後的學習成效。

②認知能力：

經過不同的教學呈現方式後，學生對於「概念、理解」、「程序、執行」、「解題、思考」等認知能力的差異性。

③技能精熟程度：

本研究將於實驗後，利用認知診斷模型中的 DINA 模型，來探討教學內容概念及技能的精熟程度。

3.2.2 研究假設

林煜庭（2007）的研究中，發現在課堂授課的環境下，具有適性指標的多媒體教材教學效果優於沒有適性指標的教材。謝東育（2009）的研究中，發現適性指標結合代數教材設計原則運用在教學設計上，對學生學習成效表現有顯著差異。在本研究中，欲了解「適性指標+代數教材設計原則」與「適性指標+串流式」，針對學生在排容原理問題的學習成效是否有顯著差異？進一步探討不同的數位教材設計與傳統板書教學，對學生的學習成效是否有顯著差異？並想瞭解多媒體教學與板書教學，對學生的哪些認知能力或技能精熟有所影響？本研究基於上述問題，並根據文獻探討、研究目的和研究問題，提出以下的假設：

假設 1 不同的教材呈現方式，對學生的學習成效表現會產生影響。

假設 1-1：實驗組與對照組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-2：實驗組與對照組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-3：實驗組與其他組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-4：實驗組與其他組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-5：對照組與其他組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-6：對照組與其他組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 2 不同的教材呈現方式，對學生的認知能力表現會產生影響。

假設 2-1：實驗組與對照組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-2：實驗組與對照組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-3：實驗組與其他組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-4：實驗組與其他組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-5：對照組與其他組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-6：對照組與其他組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 3 不同的教材呈現方式，對學生的技能精熟程度會產生影響。

假設 3-1：實驗組與對照組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。

假設 3-2：實驗組與其他組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。

假設 3-3：對照組與其他組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。

假設 4-1：不同的教學方法對排容原理試題難易度有所影響

3.2.3 實驗流程

本研究實驗共分為教學階段與測驗階段，茲將各階段之工作概述如下：

1. 教學階段：

進行教學的實驗，研究對象分為實驗組與對照，分別施與實驗教材，教學時間為 45 分鐘。其中前半段是介紹集合的基本概念，(5~10 分鐘)、說明三角形三中線經過同一點(15~20 分鐘)及重心與三頂點連線等分三角形面積(10~15 分鐘)。

2. 測驗階段：

主要為測驗進行，實驗組一及實驗組二皆為教學完後一天施測，而對照組也控制在教學完一~三天施測。預計測驗時間為 45 分鐘，分為兩部份：論證說明題—兩題共 15 分鐘，選擇測驗題—20 題 30 分鐘。

而正式的實驗流程與時間分配如下 圖 10：

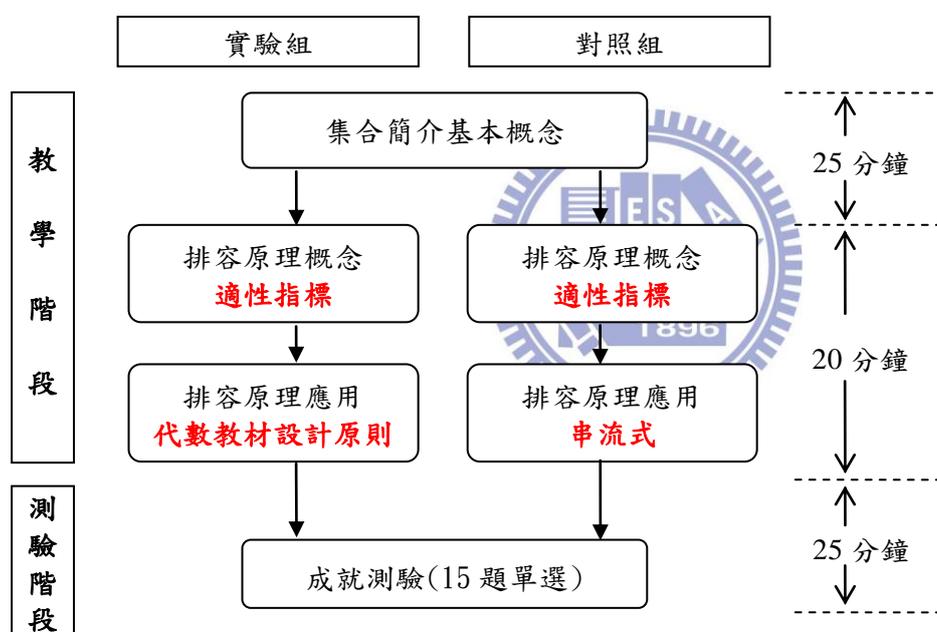


圖 10 實驗流程圖

至於在其他班級（其他組）方面，對於集合與排容原理的教學時間亦是一堂課，約 45~50 分鐘，教學的程序與實驗組、對照組相同，均是先介紹集合的基本概念，再介紹排容原理及相關的應用問題，而在其他班級上課前，研究者已事先將測驗試題交付至任課老師手中，待上完課後，進行 25 分鐘的測驗。

3.3 研究對象

為了在研究過程中不影響學校正常教學運作，且更貼近實際的課堂教學現場，本研究採便利抽樣方式，以研究者任教的學校中，兩個高二社會組的班級作為教學實驗的受測樣本。在第一項實驗中，依照教材設計的不同，區分為實驗組與對照組。為了比較數位教材設計之多媒體教學與板書教學對學生學習成效的影響，在第二項實驗共分為三組（實驗組、其他組與資優組），而在第三項實驗共分為三組（對照組、其他組與資優組）。

其中實驗組與對照組人數各為 39 人，而「其他組」是以同年級其中四個班，四班人數共計 153 人。另有 69 人是同年級兩個程度最好的班，在國中基測 PR 值均為 90 以上，明顯比其他班級程度好，故將此 69 人編為「資優組」。若實驗組或對照組的學習成效因本研究的教學實驗而提升，提升至與資優組的表現相似，則可顯示教學設計的效果達一定的水準，亦即原本程度有落差的兩組，實驗後可弭平落差，表示有一定程度的進步。此四組學生以本學期第一次複習考成績判斷各組的起始行為，其描述性統計如表 11 所示：

表 11
本學期第一次複習考數學成績之描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 39$)			對照組 ($n = 39$)		
	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI
第一次複習考成績	52.21	23.28	[44.66, 59.75]	50.46	20.62	[43.78, 57.14]

續表 11

變項	其他組 ($n = 153$)			資優組 ($n = 39$)		
	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI
第一次複習考成績	49.22	25.08	[45.22, 53.23]	75.04	14.55	[71.55, 78.54]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

由於實驗組、對照組與其他組的平均數都將近 50 分，三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = 1.606, p = .203 > .05$)，應接受虛無假設，表示三組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = .249, p = .780 < .05$ ，表示組間未達顯著差異，即三組之間的第一次複習考數學成績表現相似。檢定結果如表 12：

表 12

三組學生在第一次複習考成績之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p
第一次 複習考成績	組間	2	.249	.047	.780
	組內	228			
	總和	230			

另外，為了想探討不同的教學設計與呈現方式，對哪一種學習成就的學生有顯著影響，因此再將各組別區分為高、中、低學習成就。為此，研究者將實驗組、對照組與其他組總人數 231 人混合計算，將 231 人的前 27% 設定為高學習成就，後 27% 設定為低學習成就組，其餘的為中學習成就。分組如表 13：

表 13

實驗組、對照組與其他組不同學業成就分組之人數分配表

組別	學業成就			合計人數
	高	中	低	
實驗組	12 人	17 人	10 人	39 人
對照組	10 人	22 人	7 人	39 人
其他組	40 人	69 人	44 人	153 人
合計人數	62 人	108 人	61 人	231 人

在高學習成就部分，三組的平均數分別為 79.08、77.40 和 82.45。三組的描述性統計量如表 14：

表 14

三組高成就學生第一次複習考成績描述性統計摘要表

變項	實驗組 (n = 12)			對照組 (n = 10)			其他組 (n = 40)		
	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI
第一次 複習考成績	79.08	10.51	[72.41, 85.76]	77.40	11.15	[69.43, 85.37]	82.45	10.31	[79.15, 85.75]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = .114$, $p = .893 > .05$)，應接受虛無假設，表示三組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = 1.174$ ， $p = .316 > .05$ ，表示組間未達顯著差異。檢定結果如表 15：

表 15

三組高成就學生第一次複習考成績之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p
第一次 複習考成績	組間	2	1.174	.196	.316
	組內	59			
	總和	61			

在中學習成就部分，三組的平均數分別為 51.06、47.09 和 48.52。三組的描述性統計量如表 16：

表 16

三組中成就學生第一次複習考成績描述性統計摘要表

變項	實驗組 (n = 17)			對照組 (n = 22)			其他組 (n = 69)		
	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI
第一次 複習考成績	51.06	7.50	[47.20,54.92]	47.09	9.36	[42.94,51.24]	48.52	9.62	[46.21,50.83]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = 1.971$, $p = .144 > .05$)，表示三組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = .890$, $p = .414 > .05$ ，表示組間未達顯著差異。檢定結果如表 17：

表 17

三組中成就學生第一次複習考成績之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p
第一次 複習考成績	組間	2	.890	.129	.414
	組內	105			
	總和	107			

在低學習成就部分，三組的平均數分別為 21.90、22.57 和 20.11。三組的描述性統計量如表 18：

表 18

三組低成就學生第一次複習考成績描述性統計摘要表

變項	實驗組 (n = 10)			對照組 (n = 7)			其他組 (n = 44)		
	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI
第一次 複習考成績	21.90	8.23	[16.02,27.78]	22.57	6.35	[16.70,28.44]	20.11	9.27	[17.30,22.93]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = 1.588$, $p = .213 > .05$)，表示三

組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = .345$ ， $p = .710 > .05$ ，表示組間未達顯著差異。檢定結果如表 19：

表 19

三組低成就學生第一次複習考成績之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	<i>df</i>	<i>F</i>	η	<i>p</i>
第一次 複習考成績	組間	2	.345	.108	.710
	組內	58			
	總和	60			

綜合以上資料可知：實驗組、對照組與其它組在各學習成就學生的程度相當。



3.4 研究工具設計

1. 教材製作：

本研究以高中數學第四冊排列組合中的「排容原理」為範圍，利用 Microsoft Office 中的 Powerpoint 外掛 AMA 程式為設計軟體，設計相關教材。實驗組和對照組的教材內容相同，皆依照多媒體設計原則及適性指標設計原則進行設計，但教材呈現方式中有所差異；實驗組的教材在排容原理的部分，加入代數教材設計原則，將訊息結構化、區塊化並建立關連訊息的方式呈現，而對照組的教材訊息則為依循教科書步驟串流式出現，因為大量訊息連續出現，預期將造成較大的認知負荷，影響學習成效。

教學內容分為兩階段，第一階段是介紹集合的基本概念，像是元素與集合的關係，子集合的概念，集合間的交集、聯集等基本性質，而此階段兩個班級的簡報內容及教學方式一樣。第二階段是在學習過集合基本相關內容後，介紹排容原理，此時分成兩種層次，分別是「兩個集合的排容原理及其應用問題」與「三個集合的排容原理及其應用問題」。將兩份教材設計於各階段設計比較如表 20：

表 20
教學各階段兩份教材設計比較

各階段教學內容	實驗組教材	相對應投影片編號	對照組教材	相對應投影片編號
集合簡介	集合表示法	第 1~9 頁	集合表示法	第 1~6 頁
	子集	第 10~20 頁	子集	第 7~11 頁
	聯集與交集	第 22~35 頁	聯集與交集	第 12~18 頁
	差集與補集	第 36~40 頁	差集與補集	第 19~21 頁
	綜合性例題	第 41~51 頁	綜合性例題	第 22~29 頁
集合元素的計數	集合元素的個數	第 53~55 頁	集合元素的個數	第 31~33 頁
	二個集合的排容原理	第 56~65 頁	二個集合的排容原理	第 34~39 頁
排容原理	應用問題 (代數教材設計原則)	第 66~78 頁	應用問題 (串流式呈現)	第 40~50 頁
	三個集合的排容原理	第 79~92 頁	三個集合的排容原理	第 51~56 頁
	應用問題 (代數教材設計原則)	第 93~108 頁	應用問題 (串流式呈現)	第 57~68 頁

其中實驗組與對照組的教材範例如表 21：

表 21

實驗組與對照組的教材範例

實驗組教材範例

◎三個集合的排容原理
如何計算集合 A, B, C 聯集的元素個數 $n(A \cup B \cup C)$?

	(1)	(2)	(3)	
p	+1			1
q	+1			1
r	+1			1
x	+2	-1		1
y	+2	-1		1
z	+2	-1		1
w	+3	-3	+1	1

說明：
由於三個集合的排容原理較複雜，因此利用「代數教材設計原則」，將訊息區塊化，將各區域的排除、容納過程，輔以表格方式作具體的計數。

對照組教材範例

◎三個集合的排容原理
如何計算集合 A, B, C 聯集的元素個數 $n(A \cup B \cup C)$?

說明：
將三個集合的排容原理訊息用串流式呈現，而各區域的排除、容納過程，使用滑鼠指出搭配口語講解。

例題5
學校舉辦班際籃球及排球賽，已知甲班有12名參加籃球比賽，10名參加排球比賽，而兩種球類比賽均參加的有4人，試問至少參加一種球類比賽的有幾人？

集合名稱	符號	數量
籃球	A	$n(A) = 12$
排球	B	$n(B) = 10$
兩種均參加	$A \cap B$	$n(A \cap B) = 4$
至少一種	$A \cup B$	$n(A \cup B) = ?$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 12 + 10 - 4$$

$$= 18$$

故有 18 位同學 至少參加一種 比賽

例題5
學校舉辦班際籃球及排球賽，已知甲班有12名參加籃球比賽，10名參加排球比賽，而兩種球類比賽均參加的有4人，試問 至少參加一種 球類比賽的有幾人？

解：
設 A 是參加 籃球賽 學生組成的集合
 B 是參加 排球賽 學生組成的集合

$$n(A) = 12, \quad n(B) = 10$$

$$n(A \cap B) = 4,$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 12 + 10 - 4$$

$$= 18$$

故有 18 位同學 至少參加一種 比賽

例題7
某班舉行數學測驗，測驗分成 A, B, C 三題，結果答對 A 題者有 15 人，答對 B 題者有 19 人，答對 C 題者有 20 人，其中 A, B 兩題都答對者有10人， B, C 兩題都答對者有12人， A, C 兩題都答對者有 8 人，三題都答對者有 3 人，試問 A, B, C 三題中至少答對一題 者有幾人？

集合名稱	符號	數量
答對 A 題	A	$n(A) = 15$
答對 B 題	B	$n(B) = 19$
答對 C 題	C	$n(C) = 20$
A, B 都對	$A \cap B$	$n(A \cap B) = 10$
B, C 都對	$B \cap C$	$n(B \cap C) = 12$
A, C 都對	$A \cap C$	$n(A \cap C) = 8$
A, B, C 都對	$A \cap B \cap C$	$n(A \cap B \cap C) = 3$
至少對一題	$A \cup B \cup C$	$n(A \cup B \cup C) = ?$

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 15 + 19 + 20 - 10 - 12 - 8 + 3$$

$$= 27$$

例題7
某班舉行數學測驗，測驗分成 A, B, C 三題，結果答對 A 題者有15人，答對 B 題者有19人，答對 C 題者有20人，其中 A, B 兩題都答對者有10人， B, C 兩題都答對者有12人， A, C 兩題都答對者有8人，三題都答對者有3人，試問 A, B, C 三題中至少答對一題者有幾人？

解：
設 A, B, C 分別表示答對 A, B, C 三題的人組成的集合
由題意知： $n(A) = 15, n(B) = 19, n(C) = 20,$
 $n(A \cap B) = 10, n(B \cap C) = 12, n(A \cap C) = 8,$
 $n(A \cap B \cap C) = 3,$

利用排容原理：

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 15 + 19 + 20 - 10 - 12 - 8 + 3 = 27$$

說明：
針對大量文字敘述的應用問題，利用「代數教材設計原則」，將大量訊息結構化，並以表格的方式對齊，加強訊息的關連性，將能減少在訊息搜尋所耗費的認知資源，而將心力花在訊息的整合與理解上。

說明：
針對大量文字敘述的應用問題，將訊息用串流式呈現，學習者將耗費較多的認知資源於訊息的搜尋與比對上，因此在有限的時間內，較無法將心力專注於訊息的整合與理解上。

2. 預試試題編製：

預試設計 16 題單選題，首先制訂此份預試試題之雙向細目表，如表 22：

表 22

預試試題雙向細目表

能力指標	概念理解	程序執行	解題思考	合計 題數
	題目	題目	題目	
1. 能正確使用「屬於」與「包含」的符號	1,2			2
2. 能了解子集合的概念，並計算子集合的個數		4	6	2
3. 能理解聯集、交集、差集、宇集、補集的意義，並正確使用其符號	3,7	5		3
4. 能運用排容原理作集合元素的計數	8	10,11,13,14	9,12,5,16	9
合計	5	6	5	16

根據試題之雙向細目表進行測驗試題的編製，完成預試試題編製後，進行信度、效度、與。分述如下：

(1) 專家效度：

請本校兩位老師進行審題，教學年資分別為為 26 年與 6 年，依據其教師的教學經驗，對題目的適切性提供專業的判斷與建議，故本分試題具有專家效度。

(2) 信度、難度、鑑別度分析：

將預試的試題，以研究者任教學校高三的兩個班級作為受測對象，在回收的 80 份試卷中，內部一致性信度 Cronbach's α 值為 0.65，顯示信度尚佳，但最好再修訂試題(吳明隆, 2010)。最後分析題目的難度及鑑別度，將鑑別度較低(<0.2)的試題刪除，或是調整部分誘答選項，藉以提高鑑別度。結果如表 23：

表 23

預試試題結果修改表

題號	答對率	難度	鑑別度	結果	原因	新題號
1	.10	.15	.30	刪除	答對率太低，鑑別度不高	
2	.26	.35	.30	保留	鑑別度不高，修改選項	1
3	.90	.85	.20	修改	鑑別度過低，修改選項	2
				保留	基本概念，可作診斷依據	
4	.43	.43	.45	保留		3
5	.49	.50	.70	保留		4
6	.21	.23	.05	刪除	答對率不高，鑑別度太低	
7	.88	.78	.45	修改	將選項交換位置及修改敘述	5
				保留		
8	.68	.58	.65	保留		6
9	.51	.58	.65	保留		7
10	.95	.93	.15	刪除	過於簡單，鑑別度太低	
11	.79	.73	.45	保留		9
12	.86	.75	.40	刪除	與前題有重複的概念	
13	.71	.68	.35	修改	鑑別度不高，與其他題有重複的敘述，但要修改題目敘述，用其他包裝呈現	
14	.56	.53	.65	刪除	與前題有重複的概念	11
15	.73	.63	.65	保留		12
16	.23	.18	.25	刪除	鑑別度偏低，雖與前題有重複的概念，但因為有「陷阱」，而陷阱本身並不屬於本單元的主要概念	

將預試成績分為高、中、低三組，從最高分者向下取27%為高分組，由最低分者向上取27%為低分組(吳明隆，2010)。難度分析採高分組及低分組通過率之平均值，計算公式(4)如下：

$$P = \frac{P_H + P_L}{2} \quad (4)$$

(P ：難度指數； P_H ：高分組某題的答對率； P_L ：低分組某題的答對率)

難度數值介於0~1之間，一份較佳的成就測驗題，應是大部分試題的難易度介於0.2至0.8之間，數值愈高表示題目難度愈低，高於0.8則太簡單，低於0.2則太難(吳明隆，2010)。

鑑別度為高分組的答對率減去低分組的答對率所得之值(郭生玉, 1999), 計算公式(5) 如下:

$$D = P_H - P_L \quad (5)$$

(D : 鑑別度指數; P_H : 高分組某題的答對率; P_L : 低分組某題的答對率)

鑑別度數值介於-1~1 之間, 數值為負值為不具鑑別度, 相關試題應刪去; 當鑑別度數值為正時, 數值愈大表示鑑別度愈高, 較佳試題的鑑別度, 其鑑別度 D 值最好達0.3以上(吳明隆, 2010)。

本研究受測題目選擇以先選出鑑別度較高(0.3以上)的題目, 再從中選出難度指數較適合(0.2~0.8 之間)的題目依實際應用做部分修改。

3. 後測試題

預試試題經過修改後, 成為正式實驗施測的試題, 共有 15 題單選題, 由於試題有增減及題號有變更, 因此列出修改後的雙向細目表, 如表 24:

表 24
後測試題之雙向細目表

能力指標	概念理解	程序執行	解題思考	合計 題數
	題目	題目	題目	
1. 能正確使用「屬於」與「包含」的符號	1			1
2. 能了解子集合的概念, 並計算子集合的個數		3		1
3. 能理解聯集、交集、差集、宇集、補集的意義, 並正確使用其符號	2, 5, 8	4	15	5
4. 能運用排容原理作集合元素的計數	6	9, 10, 11, 13	7, 12, 14	8
合 計	5	6	4	15

後測試題經施測後, 內部一致性信度 Cronbach's α 值為 0.71, 而 α 值介於 0.70 至 0.80 之間, 表示信度相當好(吳明隆, 2010)。

根據本研究目的欲利用認知診斷評量來探討各概念或技能的精熟程度，而在進行認知診斷評量前，必須要分析試題所需的觀念或技能，並建構 Q 矩陣 (Q-matrix)，將其結果說明如下：

(1) 技能表

根據試題分析及教學目標，本實驗之施測試題將會運用到六項技能，列於表 25：

表 25
排容原理技能表

技能	敘述
技能 1	能認識集合中「屬於」與「包含」的符號
技能 2	能理解子集合的概念並計算子集合的個數
技能 3	能用文氏圖表示聯集、交集、差集、字集、補集的關係，並正確使用其符號
技能 4	能知道 $n(A)$ 表示 A 集合的元素個數
技能 5	能將文字敘述轉換成文氏圖或集合符號
技能 6	能運用排容原理作集合元素的計數

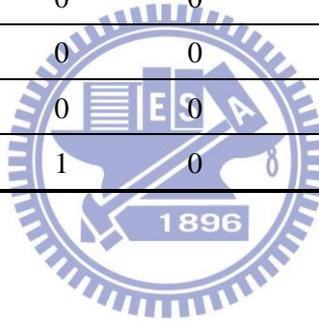
(2) Q 矩陣

在建構 Q 矩陣前，需根據上述技能表分析解決各題所用到的概念或技能。研究者與其他四位數學教師 (教學年資為 6~26 年)，根據研究者所提供之施測題目技能分析表，勾選解決各題所需之概念或技能，當同一題中有三位 (含) 以上勾選需要某技能，則此技能視為解決該題所需之技能。

根據統計結果，技能表與對應的試題，以橫軸為六項會用到的技能，縱軸是試題編號，列出對應的問題矩陣 (Q-matrix)，每一題所運用到的技能可能是一個或兩個以上，列於表 26：

表 26
排容原理之 Q 矩陣

題號	技能 1	技能 2	技能 3	技能 4	技能 5	技能 6
1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	1	0	0
7	0	0	1	1	0	1
8	0	0	1	0	1	0
9	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	1
11	0	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1	1
13	0	0	0	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1
15	0	0	1	0	0	0



4. 資料分析軟體：

(1) SPSS：

本研究採用量化分析，將收集的各項統計資料輸入 SPSS 中文視窗版，便可進行資料處理與統計分析。

(2) Ox 軟體：

Ox 是一個目標指向的統計系統。它的核心是一個有效率的矩陣語言，矩陣可以直接表示及運算，例如：矩陣相乘、計算反矩陣。這是一個相輔相成的綜合統計資料庫。它的特色是運算速度快、可延伸的資料庫及設計良好的語法與編輯器，使得程式很容易撰寫、維護及圖形繪製。Ox 可以讀寫相當多不同的資料格式，包含了電子表格 (EXCEL) 和 OXMETRIC 檔。Ox 也可以執行大部份的計量經濟學的高斯方程式 (Doornik, 2003)。

Ox 分為二個版本：專業版和簡易版。簡易版以命令行執行程式，Ox 程式使用編輯器 (例如：OXEDIT) 撰寫程式碼，然後在 MS-DOS 下執行或直接在編輯器下執行。相

對於專業版，簡易版無法顯示圖形及使用圖形使用者介面(graphical user interface, GUI)。

本研究利用此軟體，並以 de la Torre (2008, 2010)撰寫之 DINA 模式程式，估計作答反應組型內之各項試題參數及受試者的知識狀態。

(3) ConQuest 軟體：

Dr. Margaret Wu 亦是著名的測驗軟體 ConQuest 的作者，ConQuest 的理論基礎是試題反應模式(Item Response Modelling, IRM)，Acer ConQuest 2.0 適用於 Rasch 家族模式上，可應用於單向度、多向度 IRT 模式。本研究使用 Acer ConQuest 2.0 軟體進行單向度試題參數估計。

3.5 資料分析方法

本研究採用 Microsoft Excel、Tester For Windows 2.0、SPSS 12.0 中文視窗的統計軟體，進行資料整理、傳統測驗試題分析、資料統計分析。收集的數據之資料包含有本學期第一次數學複習成績(作為起始行為的依據)、成就測驗成績、受試者對各項學習技能達成的情況…等，而使用統計分析方法為單因子變異數分析 (ANOVA)、獨立樣本 t 檢定，分別敘述如下：

1. 單因子變異數分析

本研究實驗分組為三組(實驗組、對照組、其他組)，為比較三組學生是否程度相當、及比較三組在不同的教材設計下，是否影響學生的學習成效，主要拿來分析成就測驗成績與技能經熟程度的數據資料，分析教學實驗後的表現是否有顯著差異。若檢定結果有顯著差異，則需進行事後比較；當變異數同質性檢定未達顯著時，採用 Scheffe 法進行事後比較；當變異數同質性檢定達到顯著時，則採 Games-Howell 檢定。

2. 獨立樣本 t 檢定

為了觀察本研究實驗組與對照組的教學實驗是否有一定程度的效果，在技能精熟程度部分，實驗組與資優組進行獨立樣本 t 檢定，分析其技能精熟程度是否有顯著性差異；同樣地，將對照組與資優組進行獨立樣本 t 檢定，分析其技能精熟程度是否有顯著性差異。

本研究進行資料分析所採用的統計檢定顯著水準分為兩個等級，當顯著水準 p -value 達 0.05 時以*表示；顯著水準 p -value 達 0.01 時以**表示，顯著水準 p -value 達 0.001 時以***表示，虛無假說的顯著水準 α 設定為 0.05。

3. Effect Size 分析

為了比較兩組運用不同原則設計的教材是否有差異，可透過計算 Effect size (效果值) 在共同的標準下，來互相比較這些實驗設計的效應大小，確認教學方法是否有效。Mayer (2009) 使用 Cohen's d 值來當作 Effect size，計算公式(6)如下：

$$\text{Cohen's } d = \frac{M_1 - M_2}{\sigma_{\text{pooled}}} \quad (6)$$

$$(\sigma_{\text{pooled}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}, M_1 - M_2: \text{實驗組平均} - \text{對照組平均}, \sigma: \text{標準差})$$

Effect Size 的值若小於 0.2 則是小效果，若為 0.5 左右為中效果，如果值約為 0.8 則為大效果，倘若值大於 1 則為強效果(Mayer, 2009；王文科&王智弘，2009)

4. 單參數對數形模式(one-parameter logistic model) 試題分析

現代測驗理論發展至今，已有許多試題反應理論(IRT)模式被發展出來，本研究測驗的內容皆是四選一的單選選擇題，且採用二元計分(答對為 1，答錯為 0)，因此利用 1-PL 模式來分析試題。

1-PL 模式相通於 Rasch 模式，因此又可稱為 Rasch 模式，Rasch 認為受試者的潛在能力 θ 與受試者對試題 i 的反應可以用以下之試題特徵函數(7)表示：

$$P_i(\theta) = \frac{\exp(\theta - b_i)}{1 + \exp(\theta - b_i)} \quad (7)$$

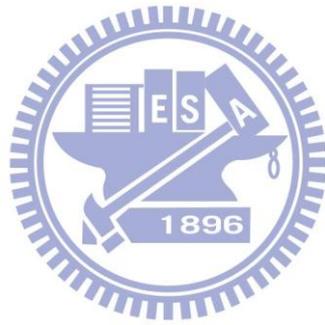
(θ 表示考生的能力， b 代表題目的難度)

若在 Rasch 模式中加入常數 D ，通常 D 值為 1.7，則原來的 Rasch 模式則稱為 1-PL 模式，其試題特徵函數(8)表示為：

$$P_i(\theta) = \frac{\exp D(\theta - b_i)}{1 + \exp D(\theta - b_i)} \quad (8)$$

(θ 表示考生的能力， b 代表題目的難度)

其中， $P_i(\theta)$ 表示任何一位能力為 θ 的學生答對試題 i 的機率為一種 S 形曲線，其值介於 0 與 1 之間； b_i 表示試題難度(difficulty)參數，其值通常介於 +3~-3 之間，值越大代表試題難度越大。



第四章 研究結果與討論

本章將針對受試學生在課程教學後，進行認知診斷測驗，將蒐集到的成績數據進行資料分析，以驗證本研究十六項假設。本章共分四節，第一節為學習成效部分的資料分析與假設說明，第二節為認知能力部分的資料分析與假設說明，第三節為技能精熟部分的資料分析與假設說明，第四節為試題難易度分析，第五節為研究結果摘要。

4.1 學習成效部分的資料分析與假設說明

4.1.1 整體學生在學習成效的假設與檢定

假設 1-1：實驗組與對照組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-3：實驗組與其他組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-5：對照組與其他組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。

將實驗組、對照組與其他組在排容原理課程教學後所得的學習成就測驗成績，進行單因子變異數分析。三組樣本中，測驗總分最高的是實驗組，平均數為 9.90；最低的是其他組，平均數為 7.85。三組的描述性統計量如表 27：

表 27

三組整體學生成就測驗總分描述性統計摘要表

變項	實驗組 (n = 39)			對照組 (n = 39)			其他組 (n = 153)		
	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI
成就測驗 總分	9.90	2.54	[9.07, 10.72]	8.74	2.09	[8.07, 9.42]	7.85	2.78	[7.41, 8.29]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著($F = 2.922, p = .056 > .05$)，表示三組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = 9.921, p = .000$ ，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較，檢定結果如表 28。經過 Scheffe 法的事後比較顯示，實驗組的成就測驗總分測驗成績顯著高於其他組，其他組間則沒有顯著差異；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.75，接近大效果，檢定結果如表 29：

表 28

三組整體學生成就測驗總分之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p	事後比較 Scheffe 法
成就測驗 總分	組間	2	9.921	0.283	.000***	實驗組 > 其他組
	組內	228				
	總和	230				

註：*** $p < .001$

表 29

三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異 (I-J)	顯著性	95% 信賴區間		Effect size Cohen's <i>d</i>
					下界	上界	
成就測驗 總分	實驗組	對照組	1.154	.156	-0.32	2.62	
	實驗組	其他組	2.048	.000***	0.88	3.21	0.75
	對照組	其他組	0.894	.169	-0.27	2.06	

註：*** $p < .001$

以上的成就測驗資料分析結果：假設 1-1 不成立，即「實驗組與對照組的教學，對整體學生的學習成效表現無顯著差異」；假設 1-2 成立，即「實驗組的教學對整體學生的學習成效表現顯著優於其他組」；假設 1-3 不成立，即「對照組與其他組的教學，對整體學生的學習成效表現無顯著差異」。

由以上實驗結果可知，適性指標結合代數教材設計原則對整體學生而言，有一定程度的效果，可以幫助學生對於複雜訊息的處理更為順利，比起板書教學，更能讓學習者快速聚焦，並對突顯過的訊息，留下深刻的印象。

4.1.2 不同學業成就學生在學習成效的假設與檢定

假設 1-2：實驗組與對照組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-4：實驗組與其他組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。

假設 1-6：對照組與其他組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。

1. 高學業成就

將實驗組、對照組與其他組之高學業成就學生在排容原理課程教學後所得的學習成就測驗成績，進行單因子變異數分析。三組樣本中，平均數分別為 11.08、9.40 及 9.55，三組的描述性統計量如表 30：

表 30

三組高學業成就學生成就測驗總分描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 12$)			對照組 ($n = 10$)			其他組 ($n = 40$)		
	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI
成就測驗 總分	11.08	1.78	[9.95, 12.22]	9.40	2.46	[7.64, 11.16]	9.55	2.33	[8.80, 10.30]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著($F = 2.072$, $p = .135 > .05$)，表示三組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = 2.334$, $p = .106$ ，表示組間未達顯著差異，即三組之高學業成就學生的表現相似。檢定結果如表 31：

表 31

三組高學業成就學生成就測驗總分之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	<i>df</i>	<i>F</i>	η	<i>p</i>
成就測驗 總分	組間	2	2.334	0.271	.106
	組內	59			
	總和	61			

2. 中學業成就

將實驗組、對照組與其他組之中學業成就學生在排容原理課程教學後所得的學習成就測驗成績，進行單因子變異數分析。三組樣本中，平均數分別為 10.41、8.86 及 8.09，三組的描述性統計量如表 32：

表 32
三組中學業成就學生成就測驗總分描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 17$)			對照組 ($n = 22$)			其他組 ($n = 69$)		
	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI
成就測驗 總分	10.41	1.70	[9.54, 11.28]	8.86	1.58	[8.16, 9.57]	8.09	2.41	[7.51, 8.66]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = 2.657$, $p = .075 > .05$)，表示三組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = 8.051$, $p = .001 < .05$ ，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較。檢定結果如表 33：

表 33
三組中學業成就學生成就測驗總分之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p	事後比較 Scheffe 法
成就測驗 總分	組間	2	8.051	0.365	0.001**	實驗組 > 其他組
	組內	105				
	總和	107				

註：** $p < .01$

經過 Scheffe 法的事後比較顯示，實驗組中學業成就學生的成就測驗總分測驗成績顯著高於其他組，其他組間則沒有顯著差異。針對 Effect Size 分析，對於中學業學生成就測驗總分的 Effect Size = 1.06，為強效果。檢定結果如表 34：

表 34
三組中學業成就學生成就測驗總分之事後比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異 (I-J)	顯著性	95% 信賴區間		Effect size Cohen's d
					下界	上界	
成就測驗 總分	實驗組	對照組	1.548	0.091	-0.19	3.28	
	實驗組	其他組	2.325	0.001**	0.87	3.78	1.06
	對照組	其他組	0.777	0.346	-0.54	2.09	

註：** $p < .01$

3. 低學業成就

將實驗組、對照組與其他組之低學業成就學生在排容原理課程教學後所得的學習成就測驗成績，進行單因子變異數分析。三組樣本中，平均數分別為 7.60、7.43 及 5.93，三組的描述性統計量如表 35：

表 35
三組低學業成就學生成就測驗總分描述性統計摘要表

變項	實驗組 (n = 10)			對照組 (n = 7)			其他組 (n = 44)		
	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI
成就測驗 總分	7.60	3.17	[5.33, 9.87]	7.43	2.64	[4.99, 9.87]	5.93	2.57	[5.150, 6.71]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

三組進行變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = 0.528, p = .593 > .05$)，表示三組樣本的變異數差異均未達顯著。而三組進行變異數分析， $F = 2.185, p = .122$ ，表示組間未達顯著差異，即三組之低學業成就學生的表現相似。檢定結果如表 28：

表 36
三組低學業成就學生成就測驗總分之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η^2	p
成就測驗 總分	組間	2	2.185	0.265	.122
	組內	58			
	總和	60			

綜合以上的後測成績資料分析結果：假設 1-2 不成立，即「實驗組與對照組的教學，對各學業成就學生的學習成效表現均無顯著差異」；假設 1-4 部分成立，即「實驗組的教學對中學業成就學生的學習成效表現顯著優於其他組」；假設 1-6 不成立，即「對照組與其他組的教學，對各學業成就學生的學習成效表現均無顯著差異」。

依據單因子變異數分析和 Effect Size 所得，代數教材設計原則對於中學業成就學習者，有明顯的影響，但對高、低學業成就學習者並沒有明顯的差異，推論因代數教材設計原則能提供中學業成就學習者，更快速的搜尋資料，藉以組織、理解、整合與應用，使學習過程更流暢、順利，但由於教材本身的訊息量多，對低成就學生的幫助仍有限。

適性指標設計原則可降低學生在視覺搜尋上所耗費的認知資源，達到降低外在認知負荷的效果，對高學業成就學生而言，可能因教材本身對其而言不難，教材的輔助設計對高學業成就學生可有可無；但對低學業成就學生而言，可能因教材本身對其而

言有一定的難度，其學習意願本身亦不高，此時教材的輔助設計對低學業成就學生也沒有實質的幫助。

綜合以上關於學習成效的分析可知：以整體學生而言，學習成效最好的是實驗組，其次是對照組，最差的是其他組，可見在集合與排容原理單元，「適性指標結合代數教材設計原則」優於「適性指標結合串流式呈現」，而多媒體的教學，均比傳統的板書教學效果佳，此結果與多媒體學習理論相符，亦與林煜庭(2008)提出的適性指標原則相呼應，因為適性指標提供的視覺引導功能，能吸引學習者的注意力，使學習者更有效地學習或進行視覺搜尋，且元素交互作用高的教材內容，往往有較高的認知負荷量，而適性指標便可降低外在認知負荷，加強學習者對元素交互作用高的教材內容之理解；除了適性指標外，代數教材設計原則的輔助，使訊息能結構化、區塊化，並透過對應的表格建立關連訊息，如此相輔相成的效果，使得實驗組的學習成效是三組中最好的。

但若將學生以學業成就分成高、中、低的話，主要對中成就的學生較有顯著影響，對高、低成就各組間則是均無顯著影響，推測是教材本身對各組高成就而言不難，因此教材的設計與呈現方式並不構成學習成效的太大影響，但中成就學生卻剛好是需要輔助學習的一群，也佔了各組將近一半的學生，至於低成就者，其學習意願本身便不高，在實際的教學現場，低成就的學習意願與態度本身便十分不佳，因此若要專門設計給低成就者學習的教材，可能要將教材作更細緻的處理，包含設計與展演時的流暢性，甚至更富趣味性與吸引力，才能達到一定的效果。

4.2 認知能力部分的資料分析與假設說明

4.2.1 整體學生在認知能力的假設與檢定

假設 2-1：實驗組與對照組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-3：實驗組與其他組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-5：對照組與其他組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

利用單因子變異數分析三組全體學生在各認知能力的表現成績，將分為「概念理解」、「程序執行」和「解題思考」，分述如下：

1. 整體學生在「概念理解」的表現

三組樣本的平均分數各為 4.23、4.23 及 3.58，其描述性統計量表如表 37，而變異數同質性檢定 Levene 檢定達到顯著($F = 12.612, p = .000$)，表示三組樣本的變異數差異達到顯著。三組進行變異數分析考驗之 $F = 8.239, p = .000 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較。其檢定結果摘要如表 38。

2. 整體學生在「程序執行」的表現

三組樣本的平均分數各為 4.26、3.49 及 3.19，其描述性統計量表如表 37，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.632, p = .533$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 7.421, p = .001 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較。其檢定結果摘要如表 38。

3. 整體學生在「解題思考」的表現

三組樣本的平均分數各為 1.41、1.03 及 1.08，其描述性統計量表如表 37，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.453, p = .636$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 2.401, p = .093 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「解題思考」認知能力表現並無顯著差異。其檢定結果摘要如表 38。

表 37

三組整體學生各認知能力描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 39$)			對照組 ($n = 39$)			其他組 ($n = 153$)		
	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI
概念理解	4.23	0.84	[3.96, 4.50]	4.23	0.78	[3.98, 4.48]	3.58	1.30	[3.37, 3.78]
程序執行	4.26	1.68	[3.71, 4.80]	3.49	1.39	[3.04, 3.94]	3.19	1.55	[2.94, 3.44]
解題思考	1.41	0.82	[1.15, 1.68]	1.03	0.96	[0.71, 1.34]	1.08	0.89	[0.94, 1.23]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

表 38

三組整體學生各認知能力之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	<i>df</i>	<i>F</i>	η	<i>p</i>	事後比較 Games-Howell 檢定	事後比較 Scheffe 法
概念理解	組間	2	8.239	0.260	0.000***	實驗 > 其他	
	組內	228				對照 > 其他	
	總和	230					
程序執行	組間	2	7.421	0.247	0.001***		實驗 > 其他
	組內	228					
	總和	230					
解題思考	組間	2	2.401	0.144	0.093***		
	組內	228					
	總和	230					

註：** $p < .01$, *** $p < .001$

在概念理解部分，經過 Games-Howell 檢定的事後比較顯示，實驗組的得分顯著高於其他組，且對照組的得分顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.53，對照組與其他組的 Effect Size 值為 0.54，皆屬於中效果。檢定結果如表 39。

在程序執行部分，經過 Scheffe 法的事後比較顯示，實驗組的得分顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.68，屬於中效果。檢定結果如表 39：

表 39

三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異 (I-J)	顯著性	95% 信賴區間		Effect size Cohen's <i>d</i>
					下界	上界	
概念理解	實驗組	對照組	0.000	1.000	-0.44	0.44	
	實驗組	其他組	0.656	0.001**	0.25	1.06	0.53
	對照組	其他組	0.656	0.000***	0.27	1.04	0.54
程序執行	實驗組	對照組	0.769	0.092	-0.09	1.63	
	實驗組	其他組	1.067	0.001**	0.38	1.75	0.68
	對照組	其他組	0.298	0.564	-0.39	0.98	

註：** $p < .01$, *** $p < .001$

以上的認知能力資料分析結果：假設 2-1 不成立，即「實驗組與對照組的教學，對整體學生在各認知能力的表現均無顯著差異」；假設 2-3 部分成立，即「實驗組的教

學對整體學生在『概念理解』、『程序執行』的表現顯著優於與其他組」；假設 2-5 部分成立，即「對照組的教學對整體學生在『概念理解』的表現顯著優於與其他組」。

依據單因子變異數分析和 Effect Size 所得，代數教材設計原則對整體學生而言，有一定程度的效果，可以幫助學生對於複雜訊息的處理更為順利。在概念理解部分的試題，對應的教材內容大多屬於集合的基本概念，該部分實驗組與對照組的教材設計與呈現方式相同，均是以適性指標引導相關元素，而兩組的起始行為相同且接受的教學方式一樣，經測驗後兩組表現平均分數相同，結果如當初所預期，然而實驗組和對照組的教學均優於其他組的板書教學，表示適性指標對視覺搜尋與注意力引導的效果，比板書教學更容易讓學生對教學內容印象深刻，尤其在排容原理介紹時使用的教材結構化、區塊化，更能使學生在短時間對文氏圖各區塊加減減的計數明確。

在程序執行部分的試題，對應之教材內容多屬排容原理的相關問題，實驗組使用了代數教材設計原則，將問題結構化、區塊化，清楚地建立訊息間的關連性，但對照組卻使用串流式呈現，學習者必須花較多的認知資源以尋找相關訊息，導致實驗組的學習成效優於板書教學，而對照組串流式的多媒體教學，與板書教學的效果相似。然而解題思考部分，屬於層次較高的問題，其教材的內在認知負荷相對較高，本實驗的教材設計對此部分幫助有限。



4.2.2 不同學業成就學生在認知能力的假設與檢定

假設 2-2：實驗組與對照組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-4：實驗組與其他組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

假設 2-6：對照組與其他組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。

1. 高學業成就

利用單因子變異數分析三組高學業成就學生在各認知能力的表現成績，將分為「概念理解」、「程序執行」和「解題思考」，分述如下：

(1) 高學業成就學生在「概念理解」的表現

三組樣本的平均分數各為 4.50、4.40 及 4.20，其描述性統計量表如表 40，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.617, p = .543$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 0.722, p = .490 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「概念理解」認知能力表現並無顯著差異，其檢定結果摘要如表 41。

(2) 高學業成就學生在「程序執行」的表現

三組樣本的平均分數各為 4.75、3.90 及 3.95，其描述性統計量表如表 40，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.209, p = .812$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 1.692, p = .193 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「程序執行」認知能力表現並無顯著差異，其檢定結果摘要如表 41。

(3) 高學業成就學生在「解題思考」的表現

三組樣本的平均分數各為 1.83、1.10 及 1.40，其描述性統計量表如表 40，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 1.344, p = .269$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 1.739, p = .185 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「解題思考」認知能力表現並無顯著差異，其檢定結果摘要如表 41。

表 40

三組高學業成就學生各認知能力描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 12$)			對照組 ($n = 10$)			其他組 ($n = 40$)		
	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI	M	SD	95% CI
概念理解	4.50	0.67	[4.07, 4.93]	4.40	0.70	[3.90, 4.90]	4.20	0.88	[3.92, 4.48]
程序執行	4.75	1.14	[4.03, 5.47]	3.90	1.52	[2.81, 4.99]	3.95	1.40	[3.50, 4.40]
解題思考	1.83	0.72	[1.38, 2.29]	1.10	1.20	[0.24, 1.96]	1.40	0.93	[1.10, 1.70]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

表 41

三組高學業成就學生各認知能力之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p
概念理解	組間	2	0.722	0.155	0.490
	組內	59			
	總和	61			
程序執行	組間	2	1.692	0.233	0.193
	組內	59			
	總和	61			
解題思考	組間	2	1.739	0.236	0.185
	組內	59			
	總和	61			

2. 中學業成就

利用單因子變異數分析三組中學業成就學生在各認知能力的表現成績，將分為「概念理解」、「程序執行」和「解題思考」，分述如下：

(1) 中學業成就學生在「概念理解」的表現

三組樣本的平均分數各為 4.41、4.27 及 3.70，其描述性統計量表如表 42，而變異數同質性檢定 Levene 檢定達到顯著($F = 7.767, p = .001$)，表示三組樣本的變異數差異達到顯著。三組進行變異數分析考驗之 $F = 4.626, p = .012 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較，其檢定結果摘要如表 43。經過 Games-Howell 檢定的事後比較顯示，實驗組的得分顯著高於其他組，且對照組的得分顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.63，對照組與其他組的 Effect Size 值為 0.51，皆屬於中效果，檢定結果如表 44。

(2) 中學業成就學生在「程序執行」的表現

三組樣本的平均分數各為 4.76、3.55 及 3.30，其描述性統計量表如表 42，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.688, p = .505$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 7.313, p = .001 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較，其檢定結果摘要如表 43。經過 Scheffe 法的事後比較顯示，實驗組的得分顯著高於對照組，且實驗組的得分顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.95，對照組與其他組的 Effect Size 值為 1.01，皆屬於大效果，甚至是強效果，檢定結果如表 44。

(3) 中學業成就學生在「解題思考」的表現

三組樣本的平均分數各為 1.24、1.05 及 1.09，其描述性統計量表如表 42，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.042, p = .959$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 0.250, p = .779 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「解題思考」認知能力表現並無顯著差異，其檢定結果摘要如表 43。

表 42

三組中學業成就學生各認知能力描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 17$)			對照組 ($n = 22$)			其他組 ($n = 69$)		
	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI
概念理解	4.41	0.62	[4.09, 4.73]	4.27	0.70	[3.96, 4.58]	3.70	1.22	[3.40, 3.99]
程序執行	4.76	1.30	[4.10, 5.43]	3.55	1.26	[2.99, 4.11]	3.30	1.48	[2.95, 3.66]
解題思考	1.24	0.83	[0.81, 1.66]	1.05	0.90	[0.65, 1.44]	1.09	0.89	[0.87, 1.30]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

表 43

三組中學業成就學生各認知能力之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p	事後比較	事後比較
						Games-Howell 檢定	Scheffe 法
概念理解	組間	2	4.626	0.285	0.012**	實驗 > 其他	
	組內	105				對照 > 其他	
	總和	107					
程序執行	組間	2	7.313	0.350	0.001**		實驗 > 對照
	組內	105					實驗 > 其他
	總和	107					
解題思考	組間	2	0.25	0.069	0.779**		
	組內	105					
	總和	107					

註：* $p < .05$, ** $p < .01$

表 44

三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異 (I-J)	顯著性	95% 信賴區間		Effect size Cohen's <i>d</i>
					下界	上界	
概念理解	實驗組	對照組	0.139	0.790	-0.38	0.66	
	實驗組	其他組	0.716	0.004**	0.21	1.22	0.63
	對照組	其他組	0.577	0.021*	0.07	1.08	0.51
程序執行	實驗組	對照組	1.219	0.031*	0.09	2.35	0.95
	實驗組	其他組	1.460	0.001**	0.51	2.41	1.01
	對照組	其他組	0.241	0.784	-0.62	1.1	

註：* $p < .05$, ** $p < .01$

3. 低學業成就

利用單因子變異數分析三組低學業成就學生在各認知能力的表現成績，將分為「概念理解」、「程序執行」和「解題思考」，分述如下：

(1) 低學業成就學生在「概念理解」的表現

三組樣本的平均分數各為 3.60、3.86 及 2.82，其描述性統計量表如表 45，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.564$, $p = .572$)，則三組假設變異數相等。三

組進行變異數分析考驗之 $F = 2.830$ 、 $p = .067 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「概念理解」認知能力表現並無顯著差異，其檢定結果摘要如表 46。

(2) 低學業成就學生在「程序執行」的表現

三組樣本的平均分數各為 2.80、2.71 及 2.32，其描述性統計量表如表 45，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 1.181$ ， $p = .314$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 0.533$ 、 $p = .589 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「程序執行」認知能力表現並無顯著差異，其檢定結果摘要如表 46。

(3) 低學業成就學生在「解題思考」的表現

三組樣本的平均分數各為 1.20、0.86 及 0.80，其描述性統計量表如表 45，而變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.229$ ， $p = .796$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 1.087$ 、 $p = .344 > .05$ ，未達顯著水準，代表三組間在「解題思考」認知能力表現並無顯著差異，其檢定結果摘要如表 46。

表 45

三組低學業成就學生各認知能力描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 10$)			對照組 ($n = 7$)			其他組 ($n = 44$)		
	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI
概念理解	3.60	1.08	[2.83, 4.37]	3.86	1.07	[2.87, 4.85]	2.82	1.40	[2.39, 3.24]
程序執行	2.80	2.04	[1.34, 4.26]	2.71	1.50	[1.33, 4.10]	2.32	1.39	[1.89, 2.74]
解題思考	1.20	0.79	[0.64, 1.76]	0.86	0.90	[0.03, 1.69]	0.80	0.77	[0.56, 1.03]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

表 46

三組低學業成就學生各認知能力之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	<i>df</i>	<i>F</i>	η	<i>p</i>
概念理解	組間	2	2.830	0.298	0.067
	組內	58			
	總和	60			
程序執行	組間	2	0.533	0.134	0.589
	組內	58			
	總和	60			
解題思考	組間	2	1.087	0.190	0.344
	組內	58			
	總和	60			

綜合以上的資料分析結果：假設 2-2 部分成立，即「實驗組的教學對中學業成就學生在『程序執行』部分的表現顯著優於對照組」；假設 2-4 部分成立，即「實驗組的教學對中學業成就學生在『概念理解』與『程序執行』部分的表現顯著優於其他組」；假設 2-6 部分成立，即「對照組的教學對中學業成就學生在『概念理解』部分的表現顯著優於其他組」。

綜合以上關於認知能力的分析可知：代數教材設計原則與串流式呈現方式對學習者而言，主要的效果差異在於程序執行部分的問題，而程序執行試題部分對應的教材單元，大多屬於排容原理的相關應用問題，在教學活動時，實驗組運用了代數教材設計原則，將題目訊息切割、分段，加強訊息的結構化，而訊息間有對應表格作關連訊息的連結，使得學習效果提升，此與謝東育(2009)提出的代數教材設計原則相呼應。

而實驗組與其他組(板書教學)相比，在概念理解與程序執行部分均有顯著差異；對照組與其他組只在概念理解部分有顯著差異，可見適性指標的引導對集合基本概念的認識有顯著幫助，但若要進行更深入的層次學習，除了適性指標外，代數教材設計原則亦有相輔相成的效果。

但若將學生以學業成就分成高、中、低的話，主要對中成就的學生的「概念理解」或「程序執行」較有顯著影響，對高、低成就在各認知能力則是均無顯著影響，推測是教材本身對各組高成就而言不難，因此教材的設計與呈現方式並不構成學習成效的太大影響，因此各組在各認知能力的表現相似。而中成就學生較需要輔助學習，概念理解與程序執行的問題，較容易透過教材設計和教學者展演的方式，降低其外在認知負荷，使學習者在短時間之內，進行更有效的學習，因此學習效果能予以提升；但中成就學生對解題思考如此較高層次的部分，其教材的內在認知負荷相對較高，可能較難以突破。至於低成就者，其學習意願本身便不高，在實際的教學現場，低成就的學習意願與態度本身便十分不佳，因此若要專門設計給低成就者學習的教材，可能對教材設計的要更精緻，展演的過程要更符合低成就者的步調，甚至更富趣味性與吸引力，並加強學習者自我實際演練、親自練習，才能達到一定的效果，絕非僅止於課堂上看老師講解。

4.3 技能精熟部分的資料分析與假設說明

假設 3-1：實驗組與對照組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。

假設 3-2：實驗組與其他組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。

假設 3-3：對照組與其他組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。

本研究的教學內容會用到六項主要的技能，分述如下：

技能 1：能認識集合中「屬於」與「包含」的符號

技能 2：能理解子集合的概念並計算子集合的個數

技能 3：能用文氏圖表示聯集、交集、差集、宇集、補集的關係，並正確使用其符號

技能 4：能知道 $n(A)$ 表示 A 集合的元素個數

技能 5：能將文字敘述轉換成文氏圖或集合符號

技能 6：能運用排容原理作集合元素的計數

在技能 1 部分，三組的平均達成率分別為 0.64、0.55 及 0.48；在技能 2 部分，三組的平均達成率分別為 0.92、0.90 及 0.65；在技能 3 部分，三組的平均達成率分別為 0.83、0.84 及 0.56；在技能 4 部分，三組的平均達成率分別為 0.79、0.57 及 0.59；在技能 5 部分，三組的平均達成率分別為 0.80、0.53 及 0.48；在技能 6 部分，三組的平均達成率分別為 0.81、0.65 及 0.55。其描述性統計量表如表 47：

表 47
三組整體學生各技能達成率描述性統計摘要表

變項	實驗組 ($n = 39$)			對照組 ($n = 39$)			其他組 ($n = 153$)		
	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI	<i>M</i>	<i>SD</i>	95% CI
技能 1	.64	.26	[0.56, 0.72]	.55	.25	[0.46, 0.63]	.48	.25	[0.44, 0.52]
技能 2	.92	.27	[0.84, 1.01]	.90	.31	[0.80, 1.00]	.65	.48	[0.58, 0.73]
技能 3	.83	.35	[0.71, 0.94]	.84	.26	[0.76, 0.93]	.56	.44	[0.49, 0.63]
技能 4	.79	.22	[0.72, 0.87]	.57	.33	[0.46, 0.67]	.59	.25	[0.55, 0.63]
技能 5	.80	.29	[0.71, 0.89]	.53	.35	[0.42, 0.65]	.48	.30	[0.43, 0.53]
技能 6	.81	.27	[0.72, 0.90]	.65	.25	[0.57, 0.73]	.55	.27	[0.51, 0.59]

註：CI=信賴區間(Confidence Interval)

利用單因子變異數分析來考驗實驗組、對照組與其他組在各項技能的精熟程度，將各技能檢定情況分述如下：

1. 「技能 1」：

三組變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.197, p = .821$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 6.449, p = .002 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較，其檢定結果摘要如表 48。經過 Scheffe 法的事後比較顯示，實驗組的技能達成率顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.63，屬於中效果。檢定結果如表 49。

2. 「技能 2」：

三組變異數同質性檢定 Levene 檢定達到顯著($F = 66.286, p = .000$)，表示三組樣本的變異數差異達到顯著。三組進行變異數分析考驗之 $F = 9.499, p = .000 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較。其檢定結果摘要如表 48。經過 Games-Howell 檢定的事後比較顯示，實驗組的技能達成率顯著高於其他組，且對照組的技能達成率顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.61，對照組與其他組的 Effect Size 值為 0.54，皆屬於中效果。檢定結果如表 49。

3. 「技能 3」：

三組變異數同質性檢定 Levene 檢定達到顯著($F = 36.573, p = .000$)，表示三組樣本的變異數差異達到顯著。三組進行變異數分析考驗之 $F = 12.752, p = .000 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較。其檢定結果摘要如表 48。經過 Games-Howell 檢定的事後比較顯示，實驗組的技能達成率顯著高於其他組，且對照組的技能達成率顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.65，對照組與其他組的 Effect Size 值為 0.70，皆屬於中效果。檢定結果如表 49。

4. 「技能 4」：

三組變異數同質性檢定 Levene 檢定達到顯著($F = 8.835, p = .000$)，表示三組樣本的變異數差異達到顯著。三組進行變異數分析考驗之 $F = 10.844, p = .000 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較。其檢定結果摘要如表 48。經過 Games-Howell 檢定的事後比較顯示，實驗組的技能達成率顯著高於對照組，且實驗組的技能達成率顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與對照組的 Effect Size 值為 0.81，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.85，皆屬於大效果。檢定結果如表 49。

5. 「技能 5」：

三組變異數同質性檢定 Levene 檢定達到顯著($F = 3.092, p = .047$)，表示三組樣本的變異數差異達到顯著。三組進行變異數分析考驗之 $F = 16.755, p = .000 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較。其檢定結果摘要如表 48。經過 Games-Howell 檢定的事後比較顯示，實驗組的技能達成率顯著高於對照組，且實驗組的技能達成率顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與對照組的 Effect Size 值為 0.83，屬於大效果，而實驗組與其他組的 Effect Size 值為 1.07，屬於強效果。檢定結果如表 49。

6. 「技能 6」：

三組變異數同質性檢定 Levene 檢定未達顯著($F = 0.407, p = .666$)，則三組假設變異數相等。三組進行變異數分析考驗之 $F = 15.626, p = .000 < .05$ ，達到顯著水準，表示組間達到顯著差異，應進行事後比較，其檢定結果摘要如表 48。經過 Scheffe 法的事後比較顯示，實驗組的技能達成率顯著高於對照組，且實驗組的技能達成率顯著高於其他組；針對 Effect Size 分析，實驗組與其他組的 Effect Size 值為 0.97，屬於大效果。檢定結果如表 49。

表 48
三組整體學生各技能達成率之變異數分析摘要表

檢定變項	變異來源	df	F	η	p	事後比較 Scheffe 法	事後比較 Games-Howell 檢定
技能 1	組間	2	6.449	0.231	0.002**	實驗 > 其他	
	組內	228					
	總和	230					
技能 2	組間	2	9.499	0.277	0.000***	實驗 > 其他 對照 > 其他	
	組內	228					
	總和	230					
技能 3	組間	2	12.752	0.317	0.000***	實驗 > 其他 對照 > 其他	
	組內	228					
	總和	230					
技能 4	組間	2	10.844	0.295	0.000***	實驗 > 對照 實驗 > 其他	
	組內	228					
	總和	230					
技能 5	組間	2	16.755	0.358	0.000***	實驗 > 對照 實驗 > 其他	
	組內	228					
	總和	230					
技能 6	組間	2	15.626	0.347	0.000***	實驗 > 對照 實驗 > 其他	
	組內	228					
	總和	230					

註： ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 49

三組整體學生成就測驗總分之事後比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異 (I-J)	顯著性	95% 信賴區間		Effect size Cohen's <i>d</i>
					下界	上界	
技能 1	實驗組	對照組	0.093	0.265	-0.05	0.23	0.63
	實驗組	其他組	0.159	0.002**	0.05	0.27	
	對照組	其他組	0.066	0.352	-0.05	0.18	
技能 2	實驗組	對照組	0.026	0.919	-0.13	0.18	0.61
	實驗組	其他組	0.269	0.000***	0.13	0.41	
	對照組	其他組	0.244	0.001**	0.09	0.39	
技能 3	實驗組	對照組	-0.014	0.978	-0.18	0.15	0.65
	實驗組	其他組	0.274	0.000***	0.11	0.43	
	對照組	其他組	0.288	0.000***	0.16	0.42	
技能 4	實驗組	對照組	0.228	0.002**	0.07	0.38	0.81
	實驗組	其他組	0.208	0.000***	0.11	0.31	
	對照組	其他組	-0.020	0.932	-0.16	0.12	
技能 5	實驗組	對照組	0.270	0.001**	0.09	0.45	0.83
	實驗組	其他組	0.322	0.000***	0.20	0.45	
	對照組	其他組	0.052	0.678	-0.10	0.20	
技能 6	實驗組	對照組	0.159	0.032	0.01	0.31	0.97
	實驗組	其他組	0.262	0.000***	0.14	0.38	
	對照組	其他組	0.103	0.100	-0.01	0.22	

註： ** $p < .01$, *** $p < .001$

綜合以上的資料分析結果：假設 3-1 部分成立，即「實驗組的教學對技能 4、5 的精熟程度顯著優於對照組的教學」；假設 3-2 成立，即「實驗組對所有技能的精熟程度顯著優於其他組的教學」；假設 3-3 部分成立，即「對照組的教學對技能 2、3 的精熟程度顯著優於其他組的教學」。

另外，資優組的程度原本明顯高於實驗組，經過本研究的教學實驗後，在技能 2、3、4 部分的表現，此兩組已無顯著差異。檢定資料如表 50：

表 50

實驗組與資優組整體學生各技能達成率獨立樣本 t 檢定摘要表

變項	實驗組 (n = 39)		資優組 (n = 69)		t(106)	p	95% CI		Cohen's d
	M	SD	M	SD			LL	UL	
技能 1	.64	.26	.76	.14	-2.67	.010*	-0.21	-0.03	-0.57
技能 2	.92	.27	.91	.28	0.18	.858	-0.10	0.12	0.04
技能 3	.83	.35	.90	.28	-1.12	.268	-0.21	0.06	-0.22
技能 4	.79	.22	.84	.27	-0.85	.399	-0.14	0.06	-0.20
技能 5	.80	.29	.91	.20	-2.17	.034*	-0.22	-0.01	-0.44
技能 6	.81	.27	.92	.18	-2.31	.025*	-0.21	-0.01	-0.48

註：CI=信賴區間(Confidence Interval) ，* $p < .05$

而資優組的程度原本明顯高於對照組，經過本研究的教學實驗後，在技能 2、3 部分的表現，此兩組已無顯著差異。檢定資料如表 51：

表 51

對照組與資優組整體學生各技能達成率獨立樣本 t 檢定摘要表

變項	對照組 (n = 39)		資優組 (n = 69)		t(106)	p	95% CI		Cohen's d
	M	SD	M	SD			LL	UL	
技能 1	.55	.25	.76	.14	-4.87	.000***	-0.30	-0.13	-1.04
技能 2	.90	.31	.91	.28	-0.27	.790	-0.13	0.10	-0.03
技能 3	.84	.26	.90	.28	-1.10	.275	-0.17	0.05	-0.22
技能 4	.57	.33	.84	.27	-4.34	.000***	-0.40	-0.15	-0.90
技能 5	.53	.35	.91	.20	-6.22	.000***	-0.51	-0.26	-1.33
技能 6	.65	.25	.92	.18	-5.99	.000***	-0.36	-0.18	-1.24

註：CI=信賴區間(Confidence Interval) ，* $p < .05$

綜合以上關於技能精熟程度的分析可知：代數教材設計原則對技能 4、5 有明顯的效果，而技能 4（能知道 $n(A)$ 表示 A 集合的元素個數）和技能 5（能將文字敘述轉換成文氏圖或集合符號）皆牽涉到文字表徵與符號表徵的轉換，而代數教材設計原則將訊息結構化、區塊化，並透過「對齊」來建立訊息的關連性，對學習者而言，可以減少訊息搜尋與選取的時間，而將認知資源集中在組織、轉換與整合上。實驗組在技能

4 (能知道 $n(A)$ 表示 A 集合的元素個數) 和技能 5 (能將文字敘述轉換成文氏圖或集合符號) 皆顯著優於對照組。

另外，以多媒體教學和板書教學相比，實驗組的適性指標結合代數教材設計原則，其教學效果對於六項技能均顯著優於其它組的板書教學，甚至在技能 2 (能理解子集合的概念並計算子集合的個數)、技能 3 (能用文氏圖表示聯集、交集、差集、宇集、補集的關係，並正確使用其符號)、技能 4 (能知道 $n(A)$ 表示 A 集合的元素個數) 的表現已與資優組無顯著差異，可見教學效果可弭平原本程度的落差，達到一定的水準。對照組在技能 3 顯著優於其它組的板書教學，甚至在技能 2、3 的表現已與資優組無顯著差異。其中技能 2、3 對應的教學內容，實驗組與對照組均是採用適性指標引導教材元素，步驟化地呈現，可見適性指標對學習者在圖像與符號的辨識與記憶、轉換有一定的影響。



4.4 試題難易度分析

假設 4-1：不同的教學方法對排容原理試題難易度有所影響。

考驗假設 4-1 的虛無假設 H_0

H_0 ：不同的教學方法對排容原理試題難易度沒有影響。

本研究針對集合概念及排容原理，設計 15 題單選題，依據不同組別在各題的平均答對率顯示，資優組在大部分的試題答對率是四組中最高的，但在第 2、9 題，答對率最高的是對照組，而在 3、5、6 題，答對率最高的是實驗組。不同組別各題之答對率如表 52：

表 52

整體學生排容原理測驗題各題平均答對率摘要表

題號	實驗組 ($n = 39$)		對照組 ($n = 39$)		其他組 ($n = 153$)		資優組 ($n = 69$)	
	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>
1	0.95	0.22	0.85	0.37	0.77	0.42	0.97	0.17
2	0.77	0.43	0.95	0.22	0.69	0.46	0.93	0.26
3	0.92	0.27	0.90	0.31	0.65	0.48	0.91	0.28
4	0.67	0.48	0.79	0.41	0.78	0.42	0.84	0.37
5	0.92	0.27	0.74	0.44	0.68	0.47	0.87	0.34
6	0.87	0.34	0.69	0.47	0.68	0.47	0.86	0.36
7	0.59	0.50	0.46	0.51	0.60	0.49	0.86	0.36
8	0.64	0.49	0.64	0.49	0.53	0.50	0.87	0.34
9	0.74	0.44	0.79	0.41	0.50	0.50	0.75	0.43
10	0.77	0.43	0.33	0.48	0.46	0.50	0.90	0.30
11	0.64	0.49	0.56	0.50	0.42	0.50	0.87	0.34
12	0.79	0.41	0.31	0.47	0.39	0.49	0.91	0.28
13	0.33	0.48	0.36	0.49	0.34	0.48	0.64	0.48
14	0.21	0.41	0.28	0.46	0.27	0.44	0.36	0.48
15	0.08	0.27	0.08	0.27	0.09	0.29	0.22	0.42

除了由各題的答對率分析外，本研究亦使用試題反應理論中的 Rasch model 計算試題的難度值，難度值通常介於+3 與-3 之間，難度值越高表示對受試學生而言越困難，若難度值為負，則表示受試者認為較容易。而透過難度值的比較，可以判斷同一份試題對不同組別的程度，例如本實驗的資優組屬於程度很好的組別，其起使行為（複習考

成績)顯著高於其他三組,若實驗組或對照組經過教學活動後,所作驗題的難度值與資優組拉近,則可推論因為教學法而降低試題的難易度,達到提升學習成效的功用。不同組別各題之難度值如表 53:

表 53
整體學生排容原理測驗題各題難度值摘要表

題號	實驗組	對照組	其他組	資優組	平均
1	-2.42	-1.06	-0.55	-3.05	-1.77
2	-0.56	-2.33	-0.11	-2.05	-1.26
3	-1.97	-1.55	0.10	-1.83	-1.31
4	0.03	-0.68	-0.60	-1.08	-0.58
5	-1.97	-0.37	-0.04	-1.34	-0.93
6	-1.36	-0.09	-0.04	-1.21	-0.68
7	0.41	0.99	0.35	-1.21	0.14
8	0.16	0.17	0.68	-1.34	-0.08
9	-0.40	-0.68	0.83	-0.47	-0.18
10	-0.56	1.59	0.98	-1.65	0.09
11	0.16	0.53	1.19	-1.34	0.14
12	-0.73	1.72	1.35	-1.83	0.13
13	1.62	1.47	1.57	0.16	1.21
14	2.37	1.86	1.96	1.48	1.92
15	3.58	3.52	3.36	2.29	3.19
平均	-0.11	0.34	0.74	-0.96	0.00

綜合各題答對率與難度值的數據顯示:在第2題中,主要是測驗交集、聯集與差集的文氏圖,屬於概念、理解的認知能力,對照組與資優組的答對率分別是0.95和0.93,而實驗組和其他組均未滿0.8。該題實驗組與對照組的教學方式皆是以適性指標引導學生學習,一般的教學往往快速帶過此概念,而在教學中加入適性指標可使學生在短時間內快速聚焦,獲得較好的學習表現。

第2題

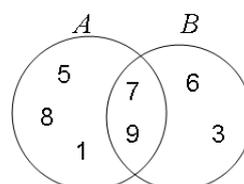
右圖為 A 與 B 兩個集合及其元素,試問下列敘述何者正確?

(A) $A \cup B = \{7, 9\}$

(B) $A - B = \{6, 3\}$

(C) $B \cap A = \{7, 9\}$

(D) $B - A = \{1, 5, 8\}$



在第3題中，主要是測驗子集合的個數，屬於程序、執行的認知能力，實驗組、對照組與資優組的答對率分別是0.92、0.90和0.91，三組表現相仿，明顯高於其他組的0.65；該題實驗組與對照組的教學方式皆是使用列表輔以適性指標引導。而實驗組的難度值-1.97，低於資優組的-1.83，可見本題對實驗組而言比對資優組簡單。

第3題

若集合 $S = \{x, y, z, w\}$ ，請問集合 S 共有幾個子集？
 (A) 4 個 (B) 10 個 (C) 15 個 (D) 16 個

在第5題中，主要是測驗集合交集、聯集、差集符號與其文氏圖的對應關係，屬於概念、理解的認知能力，實驗組的答對率0.92，高於資優組的0.87，該題實驗組的教學方式是用適性指標引導，使集合所表示的區域突顯；另外，實驗組的難度值-1.97，低於資優組的-1.34，可見本題對實驗組而言比對資優組簡單。由答對率與難度值顯示，實驗組的教學效果不錯，能使原本與資優組程度有落差的情況，經教學後能超越資優組。

第5題

下圖為集合 A 與 B 的文氏圖，斜線區域與所代表的集合符號，哪一個選項為正確的？

(A) $A \cup B$ (B) $B - A$ (C) $(A - B) \cap (B - A)$ (D) $B \cap A$

在第6題中，主要是測驗三個集合排容原理的概念，屬於概念、理解的認知能力，實驗組的答對率0.87，略高於資優組的0.86，甚至是高於對照組與其他組將近0.2；另外，實驗組的難度值-1.36，低於資優組的-1.21，可見本題對實驗組而言比對資優組簡單。該題實驗組的教學方式是利用區塊化，將各集合區域分別計數，確認每塊區域只能算一次，不能重複或是遺漏計算，此種區塊化的方式，可以幫助學生釐清概念，避免抽象圖形因重疊而混淆。

第6題

右圖為集合 X, Y, Z 的文氏圖，設 $n(X)$ 表集合 X 的元素個數斜線區域所代表的元素個數，下列哪一個選項為正確的？

(A) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z)$
 (B) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - n(X \cap Z)$
 (C) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - n(X \cap Y \cap Z)$
 (D) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - 2n(X \cap Y \cap Z)$

第9、10是題組，主要是測驗三個集合排容原理的應用問題，屬於程序、執行的認知能力，在第9題部分，實驗組、對照組與資優組答對率分別是0.74、0.79和0.75，此三組表現相仿，都高於其他組的0.50，形成一段差距；第10題則是資優組答對率0.90，實驗組0.77，但對照組只剩下0.46，推測是第9題的題目文字敘述雖然長，但若熟練排容原理的公式，題目條件中的數字依序做加減運算，便可求出答案，但第10題卻要透過文氏圖輔助較易解題，而實驗組的教學在排容原理概念介紹時，利用區塊化的方式強調圖形各元素的關係，對照組則用串流式呈現，推測兩份教材的差異導致兩組答對率相差0.31，因此適性指標結合代數教材設計原則中的結構化、區塊化，能讓學習者的學習更順利，當遇到富有變化的問題時，能有更高層次的解決辦法。

第 9、10 題

9. 某班調查學生選修「第二外語」的情形，已知選修過日語、法語及西班牙語者分別有 20、10 及 5 人，且其中選修過日語及法語者有 6 人；選修過法語及西班牙語者有 3 人；選修過日語及西班牙語者有 3 人，而恰有 1 人曾選修過上述三種外語，試問班上同學至少選修過一種「第二外語」的人數為何？
- (A) 23 人 (B) 24 人 (C) 25 人 (D) 26 人
10. 承第 9 題，請問只修過西班牙語，但卻沒修過日語及法語的有幾人？
- (A) 0 人 (B) 1 人 (C) 2 人 (D) 3 人

第12題主要是測驗兩個集合排容原理的應用問題，屬於解題、思考的認知能力，實驗組的答對率為0.79，超出對照組的0.39許多，而其他組的答對率僅0.31。針對排容原理的應用題，實驗組的教學策略是將題目的文字敘述分段，在題目敘述右方列出對應的表格，如此結構化、區塊化的設計，目的在使學習者快速瞭解訊息間的關連性，使更多的認知資源用於理解和整合上，而由答對率顯示，此種設計方式有不錯的效果。

第 12 題

- 老師想要調查班上訂速食的情況，全班共 46 人，登記要買漢堡的有 30 人，同時買漢堡和薯條的有 15 人，若已知兩者皆不買的有 5 人，則買薯條的共有幾人？
- (A) 15 人 (B) 21 人 (C) 25 人 (D) 26 人

4.5 研究結果摘要

將以上資料分析的重點與結果摘要列表如表 54、表 55、表 56：

1. 學習成效部分研究結果

表 54

學習成效部分研究結果摘要表

研究假設	結果
假設 1-1： 實驗組與對照組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。	無顯著差異
假設 1-2： 實驗組與對照組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。	無顯著差異
假設 1-3： 實驗組與其他組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。	實驗組顯著優於其他組
假設 1-4： 實驗組與其他組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。	1. 實驗組中成就學生顯著優於其他組 2. 高、低成就學生均無顯著差異
假設 1-5： 對照組與其他組的教學，對整體學生的學習成效表現有顯著差異。	無顯著差異
假設 1-6： 對照組與其他組的教學，對不同學業成就學生的學習成效表現有顯著差異。	無顯著差異

2. 認知能力部分研究結果

表 55

認知能力部分研究結果摘要表

研究假設	結果
假設 2-1： 實驗組與對照組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。	無顯著差異
假設 2-2： 實驗組與對照組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。	1. 實驗組之中成就學生在程序執行顯著優於對照組 2. 其餘部分無顯著差異
假設 2-3： 實驗組與其他組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。	1. 實驗組在概念理解、程序執行顯著優於其他組 2. 解題思考無顯著差異
假設 2-4： 實驗組與其他組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。	1. 實驗組之中成就學生在概念理解、程序執行顯著優於其他組 2. 其餘部分無顯著差異
假設 2-5： 對照組與其他組的教學，對整體學生在不同認知能力的表現有顯著差異。	1. 對照組在概念理解顯著優於其他組 2. 其餘部分無顯著差異
假設 2-6： 對照組與其他組的教學，對不同學業成就學生在不同認知能力的表現有顯著差異。	1. 對照組之中成就學生在概念理解顯著優於其他組 2. 其餘部分無顯著差異

3. 技能精熟部分研究結果

表 56

技能精熟部分研究結果摘要表

研究假設	結果
假設 3-1： 實驗組與對照組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。	1. 實驗組在技能 4、5 的精熟程度顯著優於對照組 2. 其餘技能無顯著差異
假設 3-2： 實驗組與其他組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。	實驗組在 6 項技能的精熟程度均顯著優於其他組
假設 3-3： 對照組與其他組的教學，對整體學生在不同的技能精熟程度有顯著差異。	1. 對照組在技能 2、3 的精熟程度顯著優於其他組 2. 其餘技能無顯著差異



第五章 研究結論與建議

本研究是以高二排容原理單元進行教學設計，在激發式動態呈現教學環境下，融合適性指標原則，針對常態教學學生探討在教材設計不同前提下，其學習成效及技能精熟程度所造成的影響。以下根據研究結果與分析，歸納出結論與建議，以作為後續研究的參考。

5.1 研究結論

1. 學習成效部分結論

「適性指標結合代數教材設計原則」對中學業成就學生顯著優於「板書教學」。

2. 認知能力部分結論

(1) 「適性指標結合代數教材設計原則」對中學業成就學生在「程序執行」部分顯著優於「適性指標結合串流式呈現」。

(2) 「適性指標結合代數教材設計原則」對中學業成就學生在「概念理解」與「程序執行」部分顯著優於「板書教學」。

(3) 「適性指標結合串流式呈現」對中學業成就學生在「概念理解」部分顯著優於「板書教學」。



3. 技能精熟部分結論

(1) 「適性指標結合代數教材設計原則」對整體學生在技能4（能知道 $n(A)$ 表示A集合的元素個數）、技能5（能將文字敘述轉換成文氏圖或集合符號）的精熟程度顯著優於「適性指標結合串流式呈現」。

(2) 「適性指標結合代數教材設計原則」對整體學生在技能1（能認識集合中「屬於」與「包含」的符號）、技能2（能理解子集合的概念並計算子集合的個數）、技能3（能用文氏圖表示聯集、交集、差集、宇集、補集的關係，並正確使用其符號）、技能4（能知道 $n(A)$ 表示A集合的元素個數）、技能5（能將文字敘述轉換成文氏圖或集合符號）與技能6（能運用排容原理作集合元素的計數）的精熟程度顯著優於「板書教學」。

(3) 「適性指標結合串流式呈現」對整體學生在技能2（能理解子集合的概念並計算子集合的個數）、技能3（能用文氏圖表示聯集、交集、差集、宇集、補集的關係，並正確使用其符號）的精熟程度顯著優於「板書教學」。

4. 「適性指標結合代數教材設計原則」與「適性指標結合串流式呈現」的教學方法可以降低部分試題的難易度。

5.2 建議

回顧整個研究過程與結論，提出對教學的建議與對研究的建議：

1. 對教學的建議：

(1) 適性指標

對於圖像或符號較多的教材內容，除了板書的教學外，可以輔以多媒體呈現，加強視覺效果與教學的流暢性，而在多媒體教材設計上，可以利用適性指標設計原則，突顯重要的訊息，甚至利用動態的視覺特徵，激發注意力，讓學習者可以主動處理該訊息，並控制訊息量，以免學習者的負荷超載，如此在有限的教學時間內，可以快速讓學習者進行更有效的學習。

(2) 結構化與區塊化

對於訊息量較大的教材內容，串流式的呈現對於學習能力較弱者會造成較大的負荷，因此可將教材進行結構化，將訊息作適當的切割、分段、對齊，可以減少視覺的搜尋，使學習者將較多心力用於訊息的理解與整合，藉以在短時間內達到較佳的學習成效。



2. 對研究的建議：

(1) 增加延後測

排容原理的應用問題在排列組合單元會陸續出現，但本研究在介紹完排容原理後便予以施測，無法判斷教學效果是否能延續至日後面對相關問題的處理能力，若能於排列組合單元介紹完後，施以綜合題型的施測，如此便能再次驗證教學效果是否有延續性。

(2) 增加試題的數量與難度

由於本研究的教學單元範圍不大，因此測驗的試題份量與整體難度並不高，若再增加試題的深度與廣度，能避免有些認知能力或技能對應的試題只有一題，進而作試題分析時能更客觀呈現。

(3) 增加樣本數的選取

由於研究者任教學校的規模不大與學生的整體差異極大，同年級各班的程度並非完全相似，因此在實驗對象與施測對象的選取備受限制，針對兩種多媒體教學設計的樣本，本研究在實驗組與對照組各選39人，若再依學業成就區分成高、中、低，其各組的樣本數更少，因此在數據分析上易產生誤差；另外，使用認知診斷模型分析的樣本數愈大愈準確，但本研究也只能取到300份。因此若能增加樣本數，對各類分析的誤差將愈小，結果會愈客觀。

(4) 增加質化分析

教學效果雖然可以用收集到的測驗結果作量化分析，但學生對教材及教學過程的感受卻無法從測驗題完全觀察出，因此若增加小組晤談（以學習成就分組），便能更清楚學習者的感受，做為教材設計或教學展演的改進參考，如此應能使本研究更完整。

(5) 教材的難度

由於集合與排容原理的教材相較於其他高中數學內容，並不是非常困難，因此本研究之多媒體教材設計所發揮的效果，較難顯現出來，對高成就學習者都沒有顯著差異，效果均集中在中學習成就者，因此若選定難度較高的教材作教學實驗，較容易顯現出不同教學方式產生的效應。

5.3 未來研究

1. 擴大教學活動的範圍

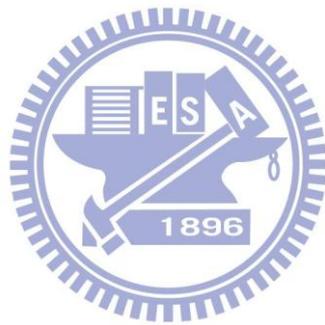
本研究選定的教學單元僅止於集合概念與排容原理，並未針對其他單元作研究，因此未來可選擇其他排列組合的單元，參考本研究的實驗方法與流程，進行認知診斷評量，再依據診斷結果，實施補救教學，達到教學與評量的循環。

2. 擴大研究對象的範圍

本研究僅限於某高中二年級學生，其學生程度無法代表其他學校，因此可以將研究對象擴大至某地區或某縣市的學校，甚至是提前為高一或國三學生的進行實驗，可能會有不一樣的效果產生。

3. 加入認知負荷量表

本研究製作之多媒體教材，無非是希望藉由教材的設計與展演，能降低學習者的認知負荷，達到更好的學習成效，但本研究關於認知負荷尚未做量化的分析，因此未來可以加入認知負荷量表，測量學習者的認知負荷量，藉以瞭解不同的教學方式對學生的認知負荷量為何。



參考文獻

1. 中文部分

- 王文科、王智弘 (2009)。教育研究法。台北市：五南圖書。
- 王文卿 (2010)。DINA 模式與 G-DINA 模式參數估計比較。碩士論文，國立臺中教育大學，台中市。
- 余文卿 (2011)。普通高級中學數學 4 教師手冊。台北：翰林出版社。
- 余民寧 (1995)。認知診斷測驗的發展趨勢。教育研究雙月刊，第 45 期，頁 14-22。
- 余民寧 (2003)。教育測驗與評量—成就測驗與教學評量。台北：心理出版社。
- 吳明隆 (2010)。SPSS 操作與應用—問卷統計分析實務 (2 ed.)。台北：五南圖書。
- 吳帝瑩 (2008)。激發式動態呈現教學設計之研究-以一個排列組合問題為例。碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 李吉彬 (2005)。資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究。碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 李鈴茹 (2008)。教材設計與解說方式對於學習表現和眼動影響之初探-以三角形內角題目為例。碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 林煜庭 (2008)。適性指標：多媒體學習中一種基於視覺認知理論的引導方式。碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 林麗娟 (2000)。電腦視覺設計：動態性因素與學生特質探討。輔仁大學出版社。
- 邱建偉 (2005)。在數學簡報系統上設計數學教材之研究。碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 洪榮忠 (2008)。激發式動態呈現教學設計之研究—以二元一次方程式的圖形為例。碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 涂金堂 (2003)。認知診斷評量的探究。南師學報，37(2)，67-97。
- 張景媛 (1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究。教育心理學報，27 期，175-200。
- 張福春、洪偉誠 (2009)。排容原理。數學傳播，33(3)，44-71。

- 教育部 (2002)。國民中小學九年一貫課程正式綱要。台北：教育部。
- 教育部 (2009)。97 年國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。
- 莊淑貞 (2007)。高中生排列組合單元錯誤類型分析研究—以台南市三所高中為例。碩士論文，高雄師範大學，高雄市。
- 許志農 (2010)。普通高級中學數學 4。台北：龍騰出版社。
- 郭生玉 (1999)。心理與教育測驗。台北縣：精華書局。
- 陳明璋 (2008)。一個以授課為導向之數位教材設計及展演環境簡介。國民教育，48(6)，57-63。
- 郭璟諭 (2003)。媒體組合方式與認知型態對學習成效與認知負荷之影響。碩士論文，國立中央大學，桃園縣。
- 黃惟魯 (2011)。翰林高中互動式教學講義數學 (四)。台北：翰林出版社。
- 葉子榕 (2010)。激發式動態教學對學習成效與認知負荷影響之研究。碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 謝東育 (2009)。激發式動態呈現教學設計之研究—以代數為例。碩士論文，國立交通大學，新竹市。



2. 英文部分

- Anastasi, A. (1967). Psychology, psychologists, and psychological testing. *American Psychologist*, 22(4), 297.
- Bloom, B. S., & Krathwohl, D. R. (1956). Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain.
- Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2008). E-learning and the science of instruction: proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning (2 ed.). San Francisco, CA Hoboken, NJ: Pfeiffer ; Wiley.
- de la Torre, J. (2009a). A cognitive diagnosis model for cognitively based multiple-choice options. *Applied Psychological Measurement*, 33(3), 163.
- de la Torre, J. (2009b). DINA model and parameter estimation: A didactic. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 34(1), 115.
- de la Torre, J., & Douglas, J. A. (2004). Higher-order latent trait models for cognitive diagnosis. *Psychometrika*, 69(3), 333-353.
- de la Torre, J., & Douglas, J. (2008). Model evaluation and multiple strategies in cognitive diagnosis: An analysis of fraction subtraction data. *Psychometrika*, 73(4), 595-624.
- de la Torre, J., & Lee (2010). A note on the invariance of DINA model parameters. *Journal of Measurements*, 47, 115-127.
- Doignon, J. P., & Falmagne, J. C. (1999). *Knowledge spaces*. New York: Springer.
- Doornik, J. (2003). Object-oriented matrix programming using Ox (Version 3.1)[Computer software]. London: Timberlake Consultants.
- Henson, R., & Douglas, J. (2005). Test construction for cognitive diagnosis. *Applied Psychological Measurement*, 29(4), 262.
- Junker, B. W., & Sijtsma, K. (2001). Cognitive assessment models with few assumptions, and connections with nonparametric item response theory. *Applied Psychological Measurement*, 25(3), 258.
- Mayer, R. E. (2005). *The Cambridge handbook of multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.

- Mayer, R. E. (2009). *Multimedia Learning* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.
- Mislevy, R. J. (1993). Foundations of a new test theory. In N. Frederiksen, R. J. Mislevy, I. I. Bejar.(eds.), *Test theoryfor a new generation of tests*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mousavi, S. Y., Low, R., & Sweller, J. (1995). Reducing cognitive load by mixing auditory and visual presentation modes. *Journal of Educational Psychology*, 87(2), 319-334.
- Nichols, P. D. (1994). A framework for developing cognitively diagnostic assessments. *Review of Educational Research*, 64(4), 575.
- Sheehan, K. M. (1997). A Tree Based Approach to Proficiency Scaling and Diagnostic Assessment. *Journal of Educational Measurement*, 34(4), 333-352.
- Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, 22(2), 123-138.
- Sweller, J., Van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251-296.
- Tatsuoka, K. K. (1995). Architecture of knowledge structures and cognitive diagnosis: A statistical pattern recognition and classification approach. In P. Nichols, S. F. Chipman, & P. L. Brennan (Eds.), *Cognitively Diagnostic Assessment* (pp. 327-359), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

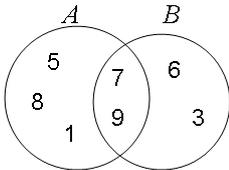
附錄一 預試試卷

集合計數與排容原理

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

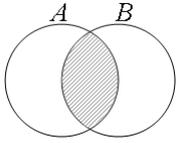
單一選擇題：

【備註：若解題過程中有計算過程，請寫在該題空白處。】

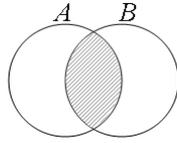
- 關於集合的敘述，下列何者錯誤？
 - 擲一粒骰子所有可能出現的點數，組成的集合 $A = \{2, 4, 6, 1, 3, 5\}$
 - 所有 10 的正因數，組成的集合 $B = \{1, 1, 2, 2, 5, 10, 10, 10\}$
 - 用列舉法表示所有 1 到 100 的正奇數，組成的集合 $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, \dots\}$
 - 用描述法表示所有小於 200 且被 4 除餘 1 的正整數，組成的集合 $D = \{4k-3 \mid 1 \leq k \leq 50, k \text{ 為整數}\}$
- 集合 $S = \{2, 3, 5\}$ ，則下列敘述何者錯誤？
 - $\emptyset \subset S$
 - $2 \subset S$
 - $\{3, 5\} \subset S$
 - $S \subset S$
- 右圖為 A 與 B 兩個集合及其元素，試問下列敘述何者正確？
 - $A \cup B = \{7, 9\}$
 - $A \cap B = \{7, 9\}$
 - $A - B = \{6, 3\}$
 - $n(B - A) = 3$
- 若集合 $S = \{x, y, z, w\}$ ，請問集合 S 共有幾個子集？
 - 4 個
 - 10 個
 - 15 個
 - 16 個
- 若 A, B, C 為字集 U 的子集合， $A \cup B \cup C = U$ 且 A, B, C 兩兩不相交，已知 $n(A) = 10$, $n(B) = 5$, $n(C) = 3$ ，則 $n(U)$ 之值為何？
 - 10
 - 18
 - 30
 - 150
- 設 U 為字集，A, B 為子集，則下列敘述何者正確？
 - 若 $n(A) = n(B)$ ，則 $A = B$
 - 若 $n(A) + n(B) = n(U)$ ，則 A, B 不相交
 - 若 $A \cup B = U$ ，則 A, B 不相交
 - 若 A, B 不相交，則 $n(A) + n(B) \leq n(U)$

7. 下圖為集合 A 與 B 的文氏圖，斜線區域與所代表的集合符號，哪一個選項為正確的？

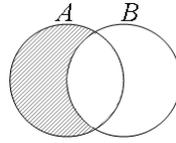
(A) $A \cup B$



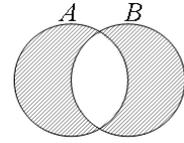
(B) $A \cap B$



(C) $B - A$



(D) $2(A - B)$



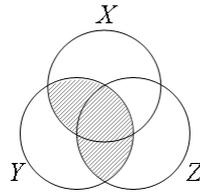
8. 右圖為集合 X, Y, Z 的文氏圖，設 $n(X)$ 表集合 X 的元素個數斜線區域所代表的元素個數，下列哪一個選項為正確的？

(A) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z)$

(B) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - n(X \cap Z)$

(C) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - n(X \cap Y \cap Z)$

(D) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - 2n(X \cap Y \cap Z)$



9. 設 $n(A)$ 表集合 A 的元素個數，若 $n(A) = 6$ ， $n(B) = 9$ ，則 $n(A \cup B)$ 之最大值為 x ，最小值為 y ，

$n(A \cap B)$ 之最大值為 z ，最小值為 u ，

請問下列之值何者 **錯誤**？

(A) $x = 15$

(B) $y = 9$

(C) $z = 9$

(D) $u = 0$



10. 某班舉行親師會，已知班上 40 位同學中，父親出席者有 20 位，母親出席者有 30 位，父母親皆出席者有 15 位，試問班上有家長出席親師會的同學有幾位？

(A) 30 位

(B) 15 位

(C) 10 位

(D) 35 位

11. 某班調查學生選修「第二外語」的情形，已知選修過日語、法語及西班牙語者分別有 20、10 及 5 人，且其中選修過日語及法語者有 6 人；選修過法語及西班牙語者有 3 人；選修過日語及西班牙語者有 3 人，而恰有 1 人曾選修過上述三種外語，試問班上同學至少選修過一種「第二外語」的人數為何？

(A) 23 人

(B) 24 人

(C) 25 人

(D) 26 人

12. 班上 45 位同學進行學習興趣調查，其中喜歡國文、英文及數學的人數分別有 30、28 及 25 人，喜歡國文及英文者有 20 人，喜歡英文及數學者有 16 人，喜歡國文及數學者有 17 人，而三科都喜歡者有 10 人，試問班上同學對國、英、數皆不喜歡的人數為何？
- (A) 30 人
(B) 40 人
(C) 5 人
(D) 15 人
13. 在 1 到 100 的正整數中，是 2 的倍數但不是 3 的倍數者共有幾個？
- (A) 34 個
(B) 67 個
(C) 33 個
(D) 16 個
14. 有自然數若干個，其中 2 的倍數有 52 個，6 的倍數有 23 個，2 或 3 的倍數有 60 個，則其中 3 的倍數有幾個？
- (A) 15 個
(B) 8 個
(C) 89 個
(D) 31 個
15. 老師想要調查班上訂速食的情況，全班共 46 人，登記要買漢堡的有 30 人，同時買漢堡和薯條的有 15 人，若已知兩者皆不買的有 5 人，則買薯條的共有幾人？
- (A) 40 人
(B) 21 人
(C) 26 人
(D) 20 人
16. 在 1 到 600 的正整數中，是 4, 5 和 6 中某一個數的倍數者共有幾個？
- (A) 300 個
(B) 290 個
(C) 280 個
(D) 270 個



附錄二 成就測驗試卷

集合計數與排容原理

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

作答區：

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
答案															

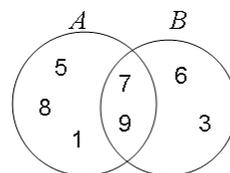
單一選擇題：

1. 集合 $S = \{2, 3, 5\}$ ，則下列敘述何者**錯誤**？

- (A) $\emptyset \subset S$ (B) $2 \subset S$ (C) $\{3, 5\} \subset S$ (D) $S \subset S$

2. 右圖為 A 與 B 兩個集合及其元素，試問下列敘述何者正確？

- (A) $A \cup B = \{7, 9\}$
 (B) $A - B = \{6, 3\}$
 (C) $B \cap A = \{7, 9\}$
 (D) $B - A = \{1, 5, 8\}$



3. 若集合 $S = \{x, y, z, w\}$ ，請問集合 S 共有幾個子集？

- (A) 4 個 (B) 10 個 (C) 15 個 (D) 16 個

4. 若 A, B, C 為宇集 U 的子集合， $A \cup B \cup C = U$ 且 A, B, C 兩兩不相交，

已知 $n(A) = 10, n(B) = 5, n(C) = 3$ ，則 $n(U)$ 之值為何？

- (A) 10 (B) 18 (C) 30 (D) 150

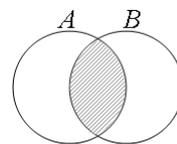
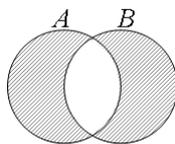
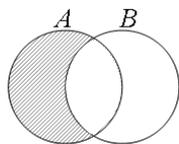
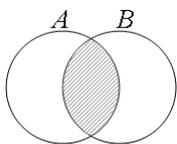
5. 下圖為集合 A 與 B 的文氏圖，斜線區域與所代表的集合符號，哪一個選項為正確的？

(A) $A \cup B$

(B) $B - A$

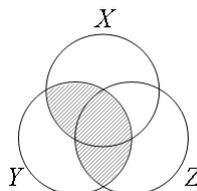
(C) $(A - B) \cap (B - A)$

(D) $B \cap A$



6. 右圖為集合 X, Y, Z 的文氏圖，設 $n(X)$ 表集合 X 的元素個數斜線區域所代表的元素個數，下列哪一個選項為正確的？

- (A) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z)$
 (B) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - n(X \cap Z)$
 (C) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - n(X \cap Y \cap Z)$
 (D) $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) - 2n(X \cap Y \cap Z)$

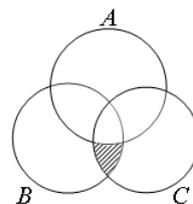
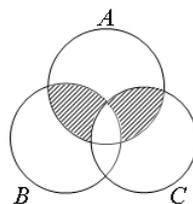
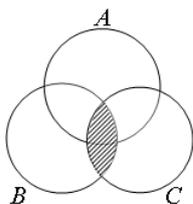
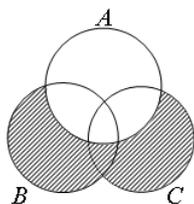


7. 設 $n(A)$ 表集合 A 的元素個數，若 $n(A)=6$ ， $n(B)=9$ ，則 $n(A \cup B)$ 之最大值為 x ，最小值為 y ， $n(A \cap B)$ 之最大值為 z ，最小值為 u ，請問下列之值何者**錯誤**？

- (A) $x = 15$ (B) $y = 9$ (C) $z = 9$ (D) $u = 0$

8. 輔導室對班上同學進行學習興趣調查，假設 A 、 B 、 C 分別表示喜歡國文、英文及數學的人所組成的集合，下列哪一個文氏圖表示「同時喜歡數學和英文，但不喜歡國文」？

- (A) (B) (C) (D)



9. 某班調查學生選修「第二外語」的情形，已知選修過日語、法語及西班牙語者分別有 20、10 及 5 人，且其中選修過日語及法語者有 6 人；選修過法語及西班牙語者有 3 人；選修過日語及西班牙語者有 3 人，而恰有 1 人曾選修過上述三種外語，試問班上同學至少選修過一種「第二外語」的人數為何？

- (A) 23 人 (B) 24 人 (C) 25 人 (D) 26 人

10. 承第 9 題，請問只修過西班牙語，但卻沒修過日語及法語的有幾人？

- (A) 0 人 (B) 1 人 (C) 2 人 (D) 3 人

11. 有自然數若干個，其中 2 的倍數有 52 個，6 的倍數有 23 個，2 或 3 的倍數有 60 個，則其中 3 的倍數有幾個？

- (A) 8 個 (B) 29 個 (C) 31 個 (D) 37 個

12. 老師想要調查班上訂速食的情況，全班共 46 人，登記要買漢堡的有 30 人，同時買漢堡和薯條的有 15 人，若已知兩者皆不買的有 5 人，則買薯條的共有幾人？

- (A) 15 人 (B) 21 人 (C) 25 人 (D) 26 人

13. 在 1 到 630 的正整數中，是 3 或 5 或 7 的倍數者共有幾個？

- (A) 330 (B) 336 (C) 342 (D) 426

14. 在 1 到 630 的正整數中，是 5 或 7 的倍數，但不是 3 的倍數者共有幾個？

- (A) 132 (B) 180 (C) 192 (D) 210

15. 設 A, B, C 為三個集合，下列敘述何者正確？

- (A) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ (B) 若 $A \subset B$ ，則 $A' \cap B = U$ (U 表宇集)
 (C) $A \cup (A \cap B) = A$ ， $A \cap (A \cup B) = A$ (D) 若 $A \cap B = \emptyset$ ，則 $A' \cap B' = \emptyset$

附錄三 實驗教材設計

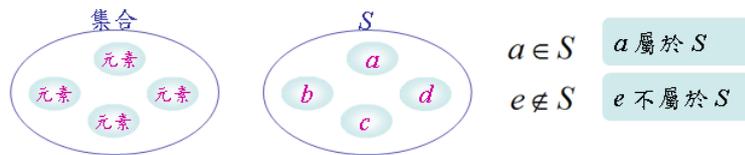
實驗組與對照組共同內容教學投影片1

2-1 集合的基本概念

甲 集合簡介

(一) 集合表示法

集合：由一些滿足 某些條件 的 元素 所組成的整體



空集合：不包含任何元素的集合，記作 \emptyset

集合的例子：

(1) 一粒骰子的點數之集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 所有12的正因數之集合 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(3) 小於10的正奇數之集合 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{2k+1 \mid 0 \leq k \leq 4, k \text{ 為整數}\}$

形式 屬性

列舉法

描述法

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。

實驗組與對照組共同內容教學投影片2

例題1

(1) 利用 列舉法 表示所有 18的正因數 組成的集合

解： $18=1 \times 18$
 $=2 \times 9$
 $=3 \times 6$ 列舉法：{1, 2, 3, 6, 9, 18}

(2) 利用 描述法 表示所有 小於100且被3除餘1的正整數 組成的集合

解： 1, 4, 7, 10, …, 97
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 $3 \times 0 + 1$ $3 \times 1 + 1$ $3 \times 2 + 1$ $3 \times 3 + 1$ $3 \times 32 + 1$
形式： $3k+1$
屬性： $0 \leq k \leq 32, k$ 為整數
描述法： $\{3k+1 | 0 \leq k \leq 32, k$ 為整數}

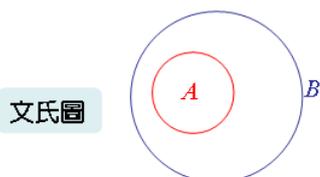
※ 集合的元素 不考慮 順序 或 重複次數
例如： $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 1, 2, 3, 3\}$

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 利用箭號來連結訊息的關連性。
4. 利用紅色方框將重要訊息突顯。

2-1 集合的基本概念

(二)子集

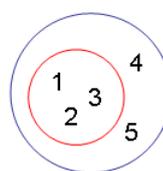


當集合 A 的每個元素都是集合 B 的元素時，稱 A 是 B 的一個子集

$A \subset B$ A 包含於 B

$B \supset A$ B 包含 A

例如： $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$



※ 規定：空集合 \emptyset 是任一集合 A 的子集，即 $\emptyset \subset A$

※ 當兩個集合 A 與 B ，滿足 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 時，則 $A=B$

教材設計分析

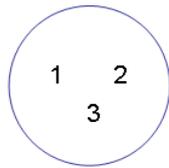
1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 利用紅色方框將重要訊息突顯。

實驗組與對照組共同內容教學投影片4

例題2

列出集合 $S = \{1, 2, 3\}$ 的所有子集

解：



元素個數	子集
0	\emptyset
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$
2	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
3	$\{1, 2, 3\}$

S 共有 8 個子集

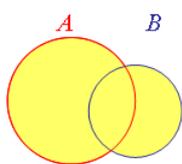
教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用表格相互對應的方式，使訊息具有引導性及累積性，將題目層次化處理。

2-1 集合的基本概念

(三) 聯集與交集

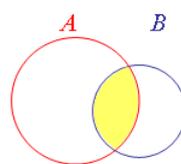
聯集 $A \cup B$



將 A 與 B 的元素合起來的集合

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \}$$

交集 $A \cap B$



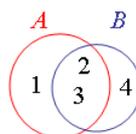
A 與 B 共同元素組成的集合

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \}$$

例如：若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$,

$$\text{則 } A \cap B = \{2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$



教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 將對比訊息置於左右兩邊，以供比較。

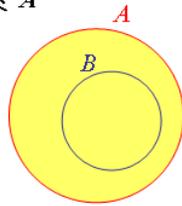
2-1 集合的基本概念

(三) 聯集與交集

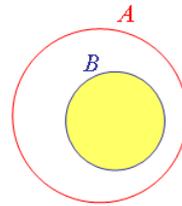
聯集 $A \cup B$

交集 $A \cap B$

若 B 包含於 A
即 $B \subset A$



$$A \cup B = A$$

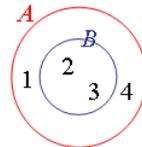


$$A \cap B = B$$

例如：若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$,

則 $A \cup B =$

$A \cap B =$



教材設計分析

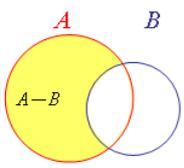
1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 將對比訊息置於左右兩邊，以供比較。

2-1 集合的基本概念

(四) 差集與補集

差集

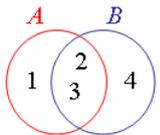
A對B的差集



元素在A集合中，但不在B集合中

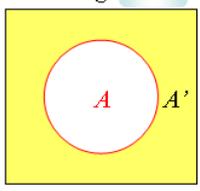
$$A-B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

例如：若 $A = \{1, 2, 3\}$ ，
 $B = \{2, 3, 4\}$ ，
則 $A-B = \{1\}$



宇集與補集

U 宇集



A的補集 (或餘集)

$$A' = \{x | x \notin A\}$$

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 將對比訊息置於左右兩邊，以供比較。

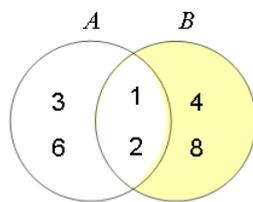
例題3

設 A 為所有 6 的正因數 組成的集合， B 為所有 8 的正因數 組成的集合，
求 (1) $A \cap B$ (2) $A \cup B$ (3) $A - B$ (4) $B - A$

解：

$$A = \{ 6 \text{ 的正因數} \} = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

$$B = \{ 8 \text{ 的正因數} \} = \{ 1, 2, 4, 8 \}$$



$$(1) A \cap B = \{ 1, 2 \}$$

$$(2) A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8 \}$$

$$(3) A - B = \{ 3, 6 \}$$

$$(4) B - A = \{ 4, 8 \}$$

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 依照不同小題，所突顯的集合區域隨之由上而下「擦去」顯現。

2-1 集合的基本概念

動動腦...

交集與聯集，符號分別是什麼呢？

$A \cup B$

聯集

$A \cap B$

交集



聯

交

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用觸發按鈕，請學生回答交集、聯集符號與文字的對應關係，增加互動性。
3. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。

2-1 集合的基本概念

乙 集合元素的計數

(一) 集合元素的個數

有限集合 A 的元素個數： $n(A)$

例如： $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，則 $n(A) = 6$

例題4

設字集 U 為1到100的正整數組成的集合， A 為1到100間3的倍數組成的集合， A' 為 A 的補集，求 $n(A')$

解：

$$\because 100 \div 3 = 33 \dots 1$$

$$\therefore n(A) = 33 \quad \leftarrow \text{1到100間，3的倍數有33個}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } n(A') &= n(U) - n(A) \\ &= 100 - 33 \\ &= 67 \end{aligned}$$

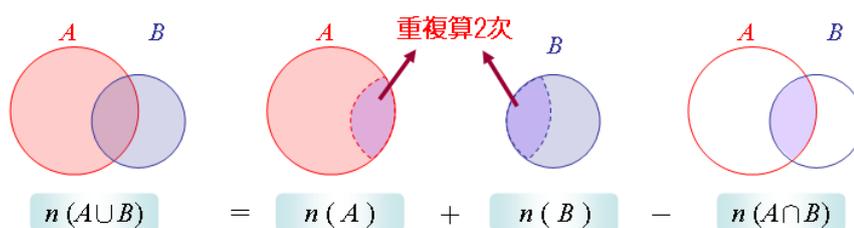
教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 利用箭號來連結訊息的關連性。

2-1 集合的基本概念

(二)排容原理

如何計算集合 A 與 B 聯集的元素個數 $n(A \cup B)$?



教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 利用醒目顏色將重點訊息突顯。
3. 利用箭號來連結訊息的關連性。

實驗組教學投影片2

例題5

學校舉辦班際籃球及排球賽，

已知甲班有

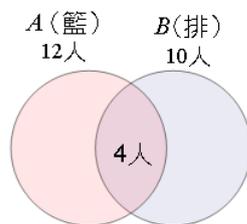
12 名參加籃球比賽，

10 名參加排球比賽，

而兩種球類比賽均參加的有 4 人，

試問至少參加一種球類比賽的有幾人？

集合名稱	符號	數量
籃 球	A	$n(A) = 12$
排 球	B	$n(B) = 10$
兩種均參加	$A \cap B$	$n(A \cap B) = 4$
至少一種	$A \cup B$	$n(A \cup B) = ?$



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 12 + 10 - 4 \\ &= 18 \end{aligned}$$

故有 18 位同學 至少參加一種 比賽

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 將串流式的題目敘述作分段切割，並利用表格相互對應的方式，加強文字與符號的對應與連結，使訊息具有引導性及累積性，將題目層次化處理。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。

實驗組教學投影片3

例題6

晶華飯店某日有 100 名外國旅客住宿，
調查結果發現：

能聽懂英語的旅客占 70%，

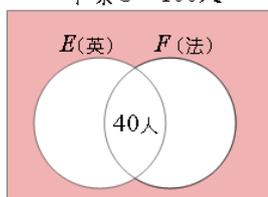
能聽懂法語的旅客占 60%，

兩種語言都能聽懂的旅客占 40%，

試問兩種語言都聽不懂的旅客有幾人？

集合名稱	符號	數量
英 語	E	$n(E) = 70$
法 語	F	$n(F) = 60$
兩種都聽懂	$E \cap F$	$n(E \cap F) = 40$
兩種都聽不懂	$(E \cup F)'$	$n(E \cup F)' = ?$

字集 U : 100 人



$$\begin{aligned} n(E \cup F) &= n(E) + n(F) - n(E \cap F) \\ &= 70 + 60 - 40 = 90 \end{aligned}$$

即聽懂英語或法語的旅客有 90 人

$$\begin{aligned} n(E \cup F)' &= n(U) - n(E \cup F) \\ &= 100 - 90 = 10 \end{aligned}$$

兩種語言都聽不懂的旅客有 10 人

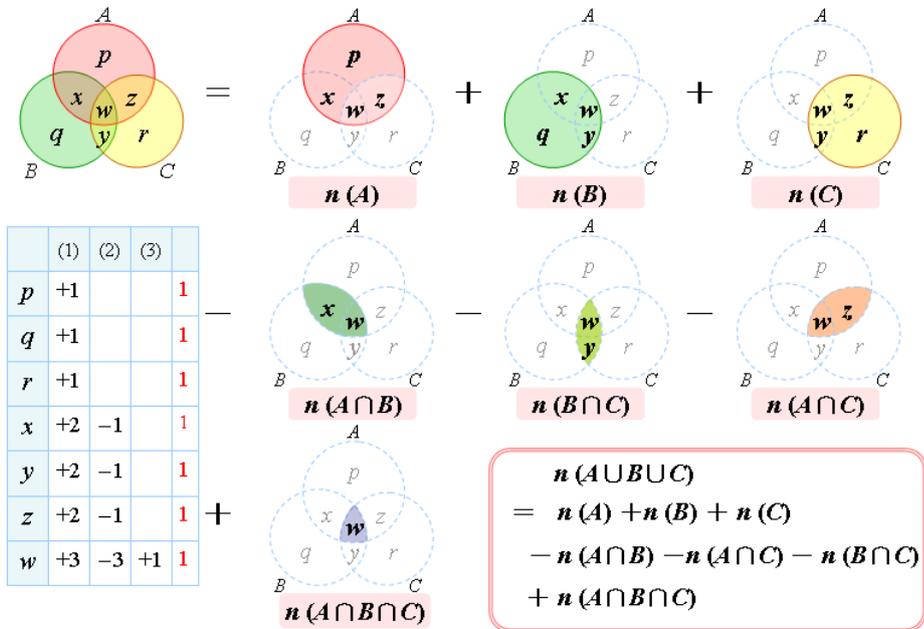
教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 將串流式的題目敘述作分段切割，並利用表格相互對應的方式，加強文字與符號的對應與連結，使訊息具有引導性及累積性，將題目層次化處理。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。

實驗組教學投影片4

◎ 三個集合的排容原理

如何計算集合 A, B, C 聯集的元素個數 $n(A \cup B \cup C)$?



教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 將各區域利用編號方式加強教學者與學習者的溝通性。
3. 將各區域的計算次數用對應的表格獨立呈現。
4. 利用紅色方框將結論突顯。

實驗組教學投影片5

例題7

某班舉行數學測驗，測驗分成 A, B, C 三題，

結果答對 A 題者有 15 人，

答對 B 題者有 19 人，

答對 C 題者有 20 人，

其中 A, B 兩題都答對者有 10 人，

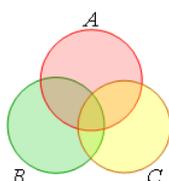
B, C 兩題都答對者有 12 人，

A, C 兩題都答對者有 8 人，

三題都答對者有 3 人，

試問 A, B, C 三題中至少答對一題者有幾人？

集合名稱	符號	數量
答對 A 題	A	$n(A) = 15$
答對 B 題	B	$n(B) = 19$
答對 C 題	C	$n(C) = 20$
A, B 都對	$A \cap B$	$n(A \cap B) = 10$
B, C 都對	$B \cap C$	$n(B \cap C) = 12$
A, C 都對	$A \cap C$	$n(A \cap C) = 8$
A, B, C 都對	$A \cap B \cap C$	$n(A \cap B \cap C) = 3$
至少對一題	$A \cup B \cup C$	$n(A \cup B \cup C) =$



$$\begin{aligned}
 n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\
 &= 15 + 19 + 20 - 10 - 12 - 8 + 3 \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

教材設計分析

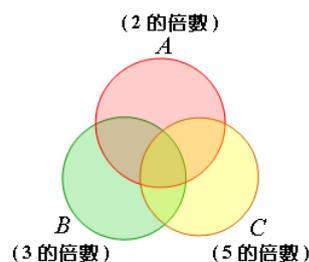
1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 將串流式的題目敘述作分段切割，並利用表格相互對應的方式，加強文字與符號的對應與連結，使訊息具有引導性及累積性，將題目層次化處理。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。
4. 利用箭號來連結訊息的關連性。
5. 利用紅色的運算符號突顯加、減號的標示。

實驗組教學投影片6

例題8

在 1 到 300 的正整數中，是 2 或 3 或 5 的倍數者共有幾個？

集合名稱	符號	數量
2 的倍數	A	$n(A) = 150$
3 的倍數	B	$n(B) = 100$
5 的倍數	C	$n(C) = 60$
2, 3 的公倍數 (6)	$A \cap B$	$n(A \cap B) = 50$
3, 5 的公倍數 (15)	$B \cap C$	$n(B \cap C) = 20$
2, 5 的公倍數 (10)	$A \cap C$	$n(A \cap C) = 30$
2, 3, 5 的公倍數 (30)	$A \cap B \cap C$	$n(A \cap B \cap C) = 10$
2 或 3 或 5 的倍數	$A \cup B \cup C$	$n(A \cup B \cup C) = ?$



$$\begin{aligned}
 & n(A \cup B \cup C) \\
 &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\
 &= 150 + 100 + 60 - 50 - 20 - 30 + 10 \\
 &= 220
 \end{aligned}$$

故所求為 220 個

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 將串流式的題目敘述作分段切割，並利用表格相互對應的方式，加強文字與符號的對應與連結，使訊息具有引導性及累積性，將題目層次化處理。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。
4. 利用紅色的運算符號突顯加、減號的標示。

對照組教學投影片1

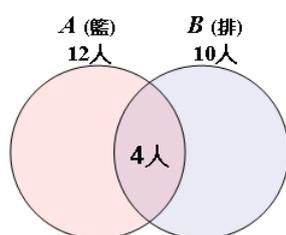
例題5

學校舉辦班際籃球及排球賽，已知甲班有12名參加籃球比賽，10名參加排球比賽，而兩種球類比賽均參加的有4人，試問至少參加一種球類比賽的有幾人？

解：

設 A 是參加 籃球賽 學生組成的集合

B 是參加 排球賽 學生組成的集合



$$n(A) = 12, \quad n(B) = 10$$

$$n(A \cap B) = 4,$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 12 + 10 - 4 \\ &= 18 \end{aligned}$$

故有 18 位同學 至少參加一種 比賽

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 題目敘述猶如一般教科書的串流式呈現。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。

對照組教學投影片2

例題6

晶華飯店某日有 100 名外國旅客住宿，調查結果發現：能聽懂英語的旅客占 70%，能聽懂法語的旅客占 60%，兩種語言都能聽懂的旅客占 40%，試問兩種語言都聽不懂的旅客有幾人？

解：

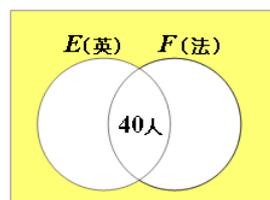
設 E 是聽懂 英語 旅客組成的集合

F 是聽懂 法語 旅客組成的集合

$$n(E) = 100 \times 70\% = 70$$

$$n(F) = 100 \times 60\% = 60$$

$$n(E \cap F) = 100 \times 40\% = 40$$



$$\begin{aligned} \text{而 } n(E \cup F) &= n(E) + n(F) - n(E \cap F) \\ &= 70 + 60 - 40 \\ &= 90 \end{aligned}$$

即聽懂英語或法語的旅客有 90 人

兩種語言都聽不懂的旅客有 $100 - 90 = 10$ 人

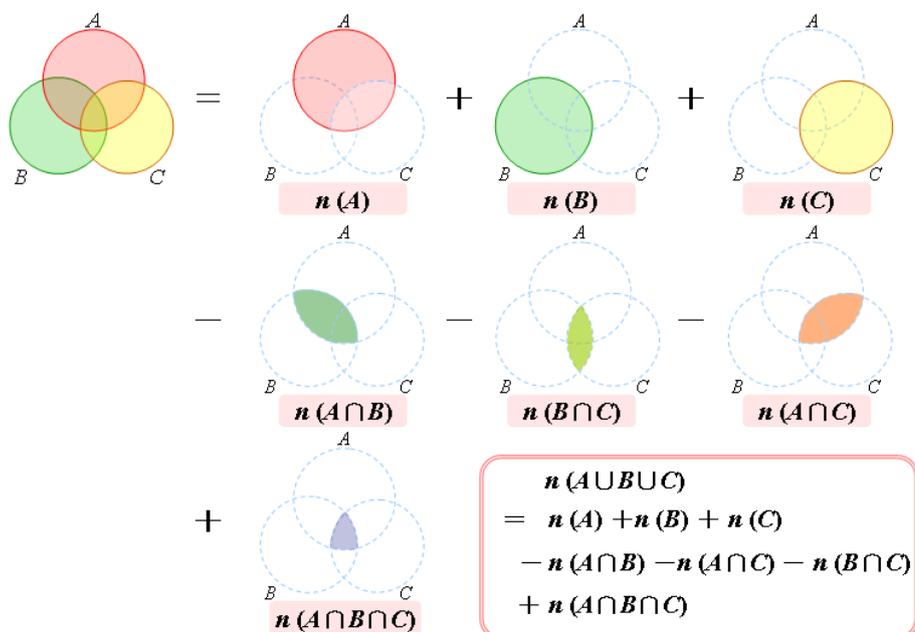
教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 題目敘述猶如一般教科書的串流式呈現。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。

對照組教學投影片3

◎ 三個集合的排容原理

如何計算 集合 A, B, C 聯集的元素個數 $n(A \cup B \cup C)$?



教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 將各部分集合的文氏圖串流式呈現。
3. 利用紅色方框將結論突顯。

對照組教學投影片4

例題7

某班舉行數學測驗，測驗分成 A, B, C 三題，結果答對 A 題者有15人，答對 B 題者有19人，答對 C 題者有20人，其中 A, B 兩題都答對者有10人， B, C 兩題都答對者有12人， A, C 兩題都答對者有8人，三題都答對者有3人，試問 A, B, C 三題中至少答對一題者有幾人？

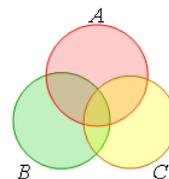
解：

設 A, B, C 分別表示答對 A, B, C 三題的人組成的集合

由題意知： $n(A) = 15$ ， $n(B) = 19$ ， $n(C) = 20$ ，

$n(A \cap B) = 10$ ， $n(B \cap C) = 12$ ， $n(A \cap C) = 8$ ，

$n(A \cap B \cap C) = 3$ ，



利用排容原理：

$$\begin{aligned}n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 15 + 19 + 20 - 10 - 12 - 8 + 3 = 27\end{aligned}$$

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 題目敘述猶如一般教科書的串流式呈現。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。
4. 利用紅色的運算符號突顯加、減號的標示。

對照組教學投影片5

例題8

在 1 到 300 的正整數中，是 2 或 3 或 5 的倍數者共有幾個？

解：

設 A, B, C 分別表示在 1 到 300 的正整數中，2, 3, 5 的倍數組成的集合

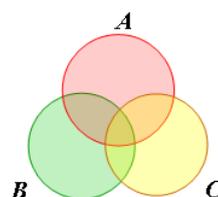
由題意知： $n(A) = 150$ ， $n(B) = 100$ ， $n(C) = 60$ ，

又因為 $A \cap B$ 是 2 與 3 的公倍數，

即 6 的倍數組成的集合，所以 $n(A \cap B) = 50$

同理： $n(B \cap C) = 20$ ， $n(C \cap A) = 30$ ，

$$n(A \cap B \cap C) = 10,$$



利用排容原理：

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 150 + 100 + 60 - 50 - 20 - 30 + 10 \\ &= 220 \end{aligned}$$

故所求為 220 個

教材設計分析

1. 教學過程訊息呈現步驟化，引導學生注意力。
2. 題目敘述猶如一般教科書的串流式呈現。
3. 利用醒目顏色將欲表達的文氏圖區域突顯。
4. 利用紅色的運算符號突顯加、減號的標示。