國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩士論文

動態幾何系統*GeoGebra*
運用於高中數學教育之策略探討

The Study on the Strategies of Integrating GeoGebra into the Education of High School Mathematics

研 究 生：游正祥

指導教授：李榮耀　教授

中華民國 一百 年六月

動態幾何系統*GeoGebra*運用於高中數學教育之策略探討

The Study on the Strategies of Integrating GeoGebra into the Education of High School Mathematics

研 究 生：游正祥　　Student：Cheng Hsiang Yu

指導教授：李榮耀　　Advisors：Dr. Jong Eao Lee

國 立 交 通 大 學

理學院科技與數位學習學程

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 一百 年六月

動態幾何系統*GeoGebra*運用於高中數學教育之策略探討

研究生：游正祥　　　　　　　　　　　指導教授：李榮耀　博士

理學院科技與數位學習學程

摘要

資訊融入是現代教育發展的趨勢，有許多的研究結果指出將動態幾何系統融入中學的數學教育，可以有效的協助提升學生的學習成效，在教學實務上有很多的優勢，但是實際上在課程中融入技術的過程卻是緩慢而複雜。

“ *GeoGebra*”是一項專門針對中學數學教育所設計的開放性教學軟體，在幾何、代數、微積分及統計等數學課程，提供使用者方便易用、簡單易學的軟體環境，不僅協助教師在教學過程更順利的進行，而且透過圖像輔助學生更輕鬆的學習數學相關課程。由於它是開放性的軟體，讓世界各地的學生、教師及對於動態幾何系統有興趣的人員，可以在教室、家裡、在任何環境中自由的使用，而不用擔心其它額外的負擔，而且有一個論壇空間，透過它可以和全世界的人們共同討論疑難問題，因此值得大力的推廣。

本研究是一項長期的教學實驗，探討教師如何將動態幾何系統融入學校正規課程的過程；並探討在*GeoGebra*融入課程的學習環境中，學生的學習態度、短期與長期的學習成效和傳統教學方法的差異性。

關鍵字：動態幾何系統、*GeoGebra*、數學教育

The Study on the Strategies of Integrating GeoGebra into the Education of High School Mathematics

Degree Program of E-Learning
College of Science
National Chiao Tung University

Student：Cheng Hsiang Yu　　　　Advisors：Dr. Jong Eao Lee

ABSTRACT

The integration of technology has become the trend of modern education development. Many studies indicate that the integration of dynamic geometry system into high school math curriculum can highly enhance students' learning efficiency. Though it does offer a lot of advantages in teaching, the process of technology integration into curriculum is slow and complicated in practice .

"GeoGebra" is an open teaching software designed for high school math education.　It provides user-friendly, easy-learning software environment in math curriculum, such as geometry, algebra, calculus and statistics. That is, it not only helps teachers to carry out their teaching smoothly, but also helps students to learn math related curriculum easily through graphical aids. Because it is an open software, it allows the students, teachers and those who are interested in DGS worldwide to use it in classrooms, at home or anywhere without worrying about any burden. Besides, a forum is provided for users to discuss any problems ith people around the world. Therefore, it's highly recommended.

The study is a long-term teaching experiment. It focuses on how a teacher integrates DGS into the formal curriculum at school, and what is the difference between GeoGebra integration teaching approach and traditional approach in students' learning attitudes, and their short-term, long-term learning efficiency.

Keywords：*dynamic geometry system,GeoGebra , mathematics education*

誌謝

這份論文能夠順利完成，要感謝許多人的幫忙。首先要感謝李榮耀教授的指導，在教授熱心的指導及鼓勵下，我才得以完成這份論文。每當實驗設計遇到了瓶頸，教授馬上以其豐富的教學經驗指引我往正確的方向前進，若沒有教授的協助，我想現在我還在摸索著論文的方向，遲遲無法完成這份研究吧！在做研究的路上，教授展現出身為一位學者的風範，在解決問題、思考答案以及研究態度上，都是值得我學習的楷模；在專班兩年的課程，李教授擔任碩二時的導師，和我們分享了很多生活經驗，讓我在這兩年的學生生涯裡，不僅獲得很多學術方面的知識，亦獲得了很多寶貴的經驗。另外還要感謝帶領我進入動態幾何系統教學的黃大原教授，讓原本對這方面毫無概念的我，在這兩年投入了全部的心力，也從教學中領悟到有意義學習的概念。

其次要感謝建功高中李玉美校長對於教學實驗的認同與支持、教務主任世欣對於實驗課程需求的大力配合、圖書館主任川益協助借用電腦教室讓我可以進行整學期的教學實驗，在各位長官的全力支援下，讓我有這麼棒的環境來從事教學實驗研究；還有一位功不可沒的人是實習老師旭正，透過他在數位教育專業上的協助，讓整個研究進行更順利,最後還有可愛的高一四班學生,在知道自己是被實驗的白老鼠狀況下仍然全心投入，讓我能有豐富的資料來完成本篇論文。

最後要感謝的是我的老婆雅惠，在這二年當中，給我最大的支持，尤其晚上兩個小孩上才藝班的接送，以及作業都要寫到10~11點，讓老婆每個晚上都過得非常充實。每當夜深人靜我埋頭設計教案、分析資料寫論文時,她總會說:「身體比較重要、早點睡，不要忘了自己有高血壓！」。

其實一路上貴人很多，無法一一答謝，專班同學、交大教授、工作夥伴，任教班級的學生及家長，謝謝各位讓我這兩年的學生生活過得充實、愉快。沒有大家的支持、付出與配合，我一定無法順利完成這本論文，感恩你們。

游正祥 謹誌

中華民國一百年六月

目錄

圖目

表目

一、 緒論

1.1 研究動機

在校園中老師很認真的運用板書、教具及教學媒體來說明一些數學概念及現象，可是對於多數的學生而言，數學課程就像是”天書”，不但與學生的日常生活不太相關，學生也不容易理解與觀察，許多老師都曾經遇到以下的狀況。

學：「老師，學數學有什麼用。」

師：「學數學可以訓練你的邏輯思考，增進你的推理能力呀！」

學：「可是在日常生活當中什麼時候才用的到多項式函數、指數與對數函數、三角函數、圓錐曲線、空間向量、…？」

師：「某些單元你現在或許覺得沒有用，可是日後你念大學時，尤其是理工科系，你就可能需要這些知識背景，才能繼續做研究喔！」

學：「可是我以後想念的是法律或外文，應該用不到這些東西吧！我上街買衣服也只要會跟老闆殺價及加、減、乘、除就好，為什麼要學這麼多用不到的數學啊！」

師：「嗯、……」(老師無言中……)

類似這樣的論點經常出現在校園師生的對話中，於是乎『數學無用論』及『數學只是升學考試的工具』，這樣的論點瀰漫在整個校園中超過二分之一的學生，尤其是在中、低學習成就的學生族群當中，甚至於高學習成就者，有時候也不知所學爲何？學生只是依照老師上課所講解的公式代入而已，但是其實學生並不了解問題的核心意義是什麼？許多老師雖然都發現了這個問題，但是大都只是告訴學生題目做得不夠多，多做自然就懂了，老師以前都除了課本之外，還買了好幾本參考書及講義做很多題目才比較清楚喔，所以要多做題目，多做題目以後自然就會了解了。但是實際上真的是如此嗎？做很多題目真的就會比較清楚課程內容嗎，還是只是把方法硬記下來而已。許多學生就在渾渾噩噩中，盲目的學習老師所講授的數學課程，對於數學這個學科並沒有任何好感及興趣。雖然學生的生活周遭有一大堆的數學問題，譬如各項費率問題、分配問題、信用卡循環利息問題、時間問題，利潤問題、……等，可是多數學生卻不知道如何利用所學過的數學知識來解決問題！爲什麼會這樣呢？其實最大的問題是學生的思考能力在教學實務上慢慢的被剝奪了。學生不需要會思考問題，只要會代入公式即可，因爲生活周遭的問

題沒有特定的公式，所以學生就不會做了。

許多老師都了解「數學可以訓練學生的邏輯思考，增進學生的推理能力！」但是常常希望為了快速的提升學生的學習成效，多數選擇”軍事化”的方式教學，學生只能遵循這樣的遊戲規則，按表操課，模仿老師的做法，缺乏思考，因為這樣做家長的壓力才不會降臨到老師及學生身上。只有少數認真學習的學生會主動尋求老師的協助，了解課程的內涵，多數的學生只有做機械式的演算，其實無法達到老師所說的「學數學可以訓練學生的邏輯思考，增進學生的推理能力！」在 2010 年 11 月份的行政院科技顧問會議中討論如何培育台灣的創造文化。成功大學校長賴明詔認為台灣教育極需創新能力，他舉例日前有美國學者來台觀察中小學科學教育，發現學生做的火箭模型都非常好，美國學生比不上，這是台灣教育成功的一部分；但是「大家設計得都一樣。」卻是台灣教育最大的缺點，學生只會制式的概念，跳脫出框框，學生就無所遵循，手足無措。導演賴聲川認為創意就是一種「問問題的能力」。他觀察很多台灣學生不知如何問問題；然而應在聽講時提問，才有助思考。他也指出，創意需要跨領域學習，「從別的領域『偷』東西過來」，別人的垃圾可能是你的寶藏。台灣教育過於重視標準答案的考試，也是扼殺學生創意的幫兇。

在某次的學校的親師座談會中，家長曾經提出下面的質疑。

家長：「為什麼學校買了課本老師卻不用，還花錢買講義上課！既然課本不用，乾脆就不要買算了。」

師：「課本的講解很清楚，但是題目太少，給學生的刺激恐怕不夠，所以需要另外買講義上課，課本就請同學回家自修。」

研究者從事數學教育工作超過二十年，曾經在公、私立國中及私立高職從事教職，目前在公立高中任教，根據研究者的教學經驗，不同階段的學生族群在學習數學課程的時候有一個共通的特點，那就是多數學生在上課的時候對於老師講解的內容其實並不清楚？尤其是老師講得越快樂、越投入的時候，學生聽得越模糊，學生只是坐在教室裡聽老師的講課，比較認真的學生會把老師上課的內容”抄起來”、”記起來”、”背起來”，學生的筆記做的很漂亮，內容背的也很熟，測驗的成績也不差，但是並不清楚學習該單元課程的目的及意義為何？學生的學習過程是不快樂的，甚至是痛苦的，因此造成許多學生對於數學具有恐懼感。為什麼會這樣呢？

研究者認爲這是因爲每位老師受到完整的專業訓練，備課時會擬訂完整的教學計畫，上課時根據教學計畫執行課程，在教學的過程當中老師的腦海裡有個課程架構的完整圖像，老師根據圖像一步一步的建構課程內容，在整個教學歷程老師建構知識的過程中，學生只有被動的聽講與抄寫，過程中老師爲什麼要這樣做、爲什麼要那樣做，學生並不清楚；就好像我們看到拼圖高手很快的完成拼圖，我們讚嘆不已，可是在過程中爲什麼他知道這一片拼圖要放在這裡，另一片拼圖要放在那裡，我們心中是有個問號的？就算我們想要模仿卻無法模仿，最後只有想辦法把它的位置背起來，因爲我們對於整幅圖畫的圖像的概念是非常薄弱。學生聽老師講解課程也是一樣的道理，在整個的教學過程中，學生的腦海裡從一張白紙，沒有任何圖像，到最後被貼上了許多的圖像及文字，多數學生對於教學過程一知半解，只有注意到最後的結論，多數學生搞不清楚，於是只有把它背起來。所以有些老師規定學生要回家看書、寫作業，複習老師上課所講的內容，就像是要學生回家自己練習拼圖一樣，把課程架構弄清楚；其實學生的程度是有落差的，少數學生回家自己練習是可以的，可是多數學生在沒有圖像輔助之下是無法自主學習的，最後也淪爲”背多分”。所以學生的成績不佳研究者認爲不單只是學生回家不看書，不夠認真，而是學生對於課程的架構不清楚。所以如果老師可以讓學生在學校就把圖拼起來，對於學生的學習成效是不是更好呢？

研究者認爲整個教育的問題就在知識建構的方式應該要以學生爲中心，慢慢的引導學生建構屬於他個人完整的”學習圖像”，而不是以教師爲中心直接將”課程圖像”繪製完成給學生使用，孔子說：「因材施教。」所以我們應該配合不同學生程度去調整學習內容，設定不同的學習目標。相信有許多人玩過”數獨”這項益智遊戲，許多學生也喜歡玩這項益智遊戲，其實玩這項遊戲的時候需要使用許多的數學概念，有許多的研究就是以這個主題做爲研究探討的內容，但是學生並不認爲在遊戲中所使用的概念是數學，只是推理而已，學生不認爲邏輯推理就是一項數學學問，在學生的認知中所謂的數學就是方程式。配合不同程度的學生設定學習目標，有些學生可以學習比較深入的知識，解決比較困難的問題，例如：最少要給幾個點，數獨遊戲就會有唯一解；可是有另一批學生，他只要能夠知道游戲規則，他會做最基本的問題就可以了，他不需要做到太艱深的問題，使得每個人在相同領域都有基本知識，這就是個別設定學習目標的意義。

現階段國內所推行的許多教育改革就是爲了解決上述的問題所制定出來的，不過其中有些方法是把歐、美國家的實施多年的教育政策直接引進到我國教育體制當中，許多在歐、美各國看起來很合理、執行也很順利的教育政策，在國內實施的時候都引發了一

些後遺症，這是因爲”民族習性”問題，當教育部推行一個新政策的時候，許多家長所想到的第一個問題是”對我的小孩的升學有什麼影響”？而學校受到來自於家長的壓力，尤其在少子化的狀況下，爲了學校的永續發展也開始思考因應對策，在”上有政策、下有對策”的情況下，政策很難確實落實，許多的教育改革面臨到相當大的衝擊，令人不禁懷疑難道是歐、美的教育理念有問題嗎？還是第一線的教育執行者不夠認真教學呢？我個人認爲都不是，而是歐、美國家與亞洲國家的教育觀念不同、教育體制不同、家長要求不同、學生學習態度不同，嚴格來說就是教育的根本本質不同。因此若要從事教育改革，必須要從培養學生”正確的學習態度”及”家長的教育觀念再教育”著手。歐、美各國的學生並沒有太大的升學壓力，因爲行行出狀元，而家長及學校教育也認爲學生”學的會”比”成績高”重要，因此學生在學習的態度上與我國的學生的學習態度有相當大的不同。

從許多針對中學數學教育研究的文獻中發現，教師嘗試各種不同的教學方法，來提升學生的學習成效，許多的研究探討的重心也都放在探討不同的教學方法是否能夠確實提高學生的學習成效，關注的焦點都集中在學習成效，很少有人將重心放在有”有意義的學習”。在”有意義的學習”教育理念下，”數學建模”及”資訊融入”因此逐漸發展成爲教育改革的主流趨勢，身處第一線的教師也因此面臨了如此的重大變化，如何才能讓多數學生的學習到活的知識是教師的一項重大課題。

數學建模的教學成效早已受到肯定，將生活當中實際遇到的問題轉換成數學符號，讓學生不再覺得數學與現實生活脫節，學生學習如何將實際上的問題以數學模式呈現，這其實是一個極具發展性的數學教育方向；不過在實際上數學建模概念還是需要學生具有一定程度的想像能力，在多數學生缺乏想像力的情況下，並非多數學生能夠馬上切入，多數學生爲了成績還是無法跳脫傳統”講光抄”與”背多分”的思維模式，學生較難舉一反三將所學到的數學知識應用在實際生活當中，學生畢業後就將所學到的數學知識全部還給老師。曾經有學生跟我說：「我終於不用再念數學了！實在太高興了！」。如果大學推甄可以調整選才方式，各大學同一科系或相近科系採取聯合甄選，由各大學教授聯合命題，除了紙筆測驗之外，也可以測驗學生動手操作的創造、思考能力，其中紙筆測驗的成績視爲門檻，依照學生的綜合表現，各校按照學校本位課程特色依序錄取學生，譬如目前台灣聯大系統一樣。如此做法，學生、家長與老師對於學生的學習成就才有機會調整成”學的會”比”分數高”重要，教育方向也不會過於偏於紙筆測驗，有助於增加學生的實驗操作，補習班因爲很難讓人人都可操作實驗，因此補習風氣也會下降，果

真如此，那教育改革又往前邁進一大步。

資訊融入教育是教師透過媒體來輔助教學，使老師的教學過程更順利，同時協助學生透過教學媒體，更容易理解數學知識。其中動態幾何系統是藉由幾何物件動態呈現的方式讓學生進行觀察學習，目前動態幾何系統融入課程的方式以老師操作、學生觀察為主，不過運用動態幾何系統輔助中學數學課程教學的策略，一直被多數從事數學教育的第一線教育人員視為離經背道的教學方式，是一項非常不嚴謹的教學模式，就數學要求嚴謹證明的觀點來看容易照成學生以偏概全的觀念，會對學生的學習數學的邏輯推理產生障礙，所以被認為不是一個合適的數學教育模式，因此資訊融入中學數學教育應用在實際的教學環境中的問題，除了硬體設備問題之外，教師的信念亦是一項重大挑戰。其實教師應該要有認知，並非所有學生將來都需要具備高深的數學知識，大多數的學生其實只需要具備基本邏輯推理能力，做為日後協助他利用所學過的基本觀念處理相關問題就好，當老師在講解基礎的定義、定理的時候，如果可以簡單明瞭的介紹方式，讓各類學生都能有所收穫，我想這才是將資訊融入教育的真正目的，至於對數學有濃厚興趣的學生，也可以藉DGS的觀察學習，觸發學生去學習嚴謹的數學證明及更深入的數學問題探索。

中學的基礎數學教育主要分成代數與幾何兩部分，其實這兩個層面是密不可分的，可是許多學生處理數學問題的時候往往是將兩部分視為不同概念，好像兩部分是楚河漢界彼此互不相干，導致學生的想像力不足，推理能力薄弱，因此如果可以讓學生將代數與幾何相對應的關係結合，對於學習應該更有幫助。其實透過 DGS 引發學生的學習動機，藉由圖像的動態變化與相對應的數學符號結合，再配合老師講解及同學討論的過程，使學生更能感受到數學不再是遙不可及的學問，學生更容易理解數學概念，進而引起學生想去檢驗他們利用觀察學習所進行”有意義的猜測”之正確性，如此可以引起學生的學習數學課程的動機。

1.2　研究背景

研究者利用教學研究會的時間與同事討論到將動態幾何系統融入正式課程的可能性時，老師們分享他們的看法，多數老師覺得如果要將動態幾何系統融入正式課程中，執行時會遭遇許多困難，窒礙難行，而且效果不彰，還不如傳統的教學方式來得好，以

下將老師們的疑慮詳述如下：

1. 教師整節課在教室操作電腦時，教室前方需要關燈，此時燈光美，氣氛佳，正是學生補眠的好時間，學習效果差。
2. 若不是整節課使用電腦，那電腦開開關關太麻煩了，上課時間已經不夠用了，無法再浪費時間與精力。
3. 資訊融入就是放一堆投影片給學生看，教師播放投影片的時候速度是非常的快，雖然老師講解的很清楚，可是學生根本的思考跟不上教師講解的速度，所以還不如寫黑板，學生慢慢抄有效果。
4. 多數的課程不需使用軟體上課，就有很好的效果，不知其利基點在何處？紙筆就很成功了。
5. 軟體很好用，但是還要學太麻煩了！而且現在學了，二、三年後又會有新軟體出現，到時候又要學新的，負擔太沉重，我想我這樣上就很棒了，不需要電腦輔助我的教學計畫。
6. 學校硬體不足，等到所有的學生都配備一部電腦，讓學生可以實際動手操作，學習效果才會比較好，到時候資訊融入才可執行。
7. 數學課程一星期只有4~5節課，要拿1~2節課讓學生動手操作學習，慢慢觀察，會造成老師上課的進度壓力大。
8. 圖形不是證明(*proof without word*)，只能說是證實(*verify*)，會讓學生的數學觀念錯誤，以爲這樣就是數學證明！

以下爲研究者詢問學生之前數學課程使用動態幾何系統融入課程的學習經驗：

1. 以前國中老師曾經用過，不過上課時大家都睡成一片。
2. 高二時老師曾經秀過一次拋物線的製圖過程(*GeoGebra*)，但是"咻”一下子就結束了，沒有什麼感覺。
3. 老師用*Cabri* 3D製圖，圖形很漂亮啦，不過不要整節課都用，每節課一部分就好了啦，免得都睡死了。

綜合上述老師與學生共同的疑慮，研究者認爲重點就是軟體操作問題。老師很辛苦的製作教材，上課時講的口沫橫飛，學生上課時也點頭如搗蒜，教學過程看起來沒有其

它的問題，又是一次完美的教學。問學生會不會？聽懂嗎？學生都說：「會啊！很簡單阿！」可是測驗之後成績卻是一蹋糊塗，研究者認爲癥結就在於學生沒有動手操作，記憶力不佳，圖像來的快、也去得快，學生只有短暫的記憶，如同老師所說的「還不如寫黑板，學生慢慢抄有效果。」因此要解決老師的問題，研究者想到的是直接讓學生動手操作 *GeoGebra*，在 *GeoGebra* 的環境學習數學課程，

1.3 研究目的與問題

由於許多的因素，我國學校教育目前很難採取像歐、美國家較開放式的學習方式，數學教師受限於課綱實施及授課時數上的限制問題，平時忙於拚命的趕課，更遑論要將資訊融入課程，而學生的學習經驗普遍也是不佳的。同校的數學科教師在教學教研會時曾談論到關於資訊融入的認知:「資訊融入就是放一堆投影片給學生看，效果是很差的，因爲放投影片的時候速度非常的快，學生根本跟不上教師講解的速度，所以還不如寫黑板，學生慢慢抄有效果；再加上教室昏暗，學生更是睡成一片，如果學生可以動手操作可能好一點，學校硬體也不足，等到所有的學生都配備一部電腦，或許就可能執行，但是一星期只有 4~5 節課，要拿 1~2 節課讓學生動手操作學習，那更可怕。因爲課程上進度的壓力會更大。」的確資訊融入課程是很棒的教學模式，從許多的文獻結果都可以證明，可是如果學生的成績會相對落後於傳統教法的學生，我想來自學生及家長的壓力是第一線的教師難以承受的，因爲在現在教育的氛圍底下，如果在學生一開始就落後的情況下，你很難說服家長與學生這樣的教學方法對於學生的長期學習是正面的，未來的學習成效將會得到豐碩的果實。數學教師從另一種角度來思考，”師父領進門，修行在個人”，如果上課跟不上的學生，回家後願意透過電腦操作學習老師上課的內容，是不是比去補習班好呢？

因此本研究不以學生的學習成就視爲唯一的觀察重點，但是爲了解學生的學習，學生的”學習成就”會當作是教師評估計畫的參考值，評估標準在於只要學生短期的學習成就不落後，就視爲完成階段性目標，就可以進行下一階段的實驗，研究的重點將放在學生長期學習的表現。藉由三階段的實驗探討學生對於 *GeoGebra* 輔助教學的接受程度、透過 *GeoGebra* 的幾何視窗介面，觀察學生對於圖像的表徵是否能夠透過觀察、討論、歸納、分析來學習數學概念。來探討學生對於將動態幾何系統 *GeoGebra* 引進高中數學教育是否可以提高學生的學習興趣，引發學生的學習動機並進而提高學生的學習效率，

教導學生一項活的知識。因此本篇論文主要的研究問題是：

1. 在課程綱要進度及授課時數的限制下，數學教師將動態幾何系統*GeoGebra*引入高中數學課程的策略為何？
2. 探討在動態幾何系統*GeoGebra*的環境中，對於學生的學習態度、學習成效與傳統教學的學習方式的差異性。
3. 探討在動態幾何系統*GeoGebra*的環境中，對於老師的命題的方向與傳統教學命題的方向是否有差異性。

1.4 研究限制與範圍

1. 本研究針對新竹市某市立高中一年級的學生為教學實驗對象，學生屬中上程度學習成就的族群，國中基測PR85~PR90之間，實驗課程內容配合高一上學期數學課程而設計，所有實驗組學生於實驗期間皆接受動態幾何系統*GeoGebra*基本的指令操作教學。
2. 本校位於新竹市區清華大學對面，交通便利，再則新竹市、新竹縣平均家庭年收入高居全國第二及第三名，家長對於學校及班級事務不僅參與度高且主動協助提供各項教育資源，因此各校受到學校地理位置、交通便利性、學生家庭經濟狀況及社區文化背景等不同因素，研究結果無法類推套用於所有學校。

1.5 名詞解釋

1. *Dynamic Geometry System*動態幾何系統(簡稱DGS)：數學軟體，提供學習者製作動態幾何物件的建構，例如：*Gsp*、*Cabri* 3D、*GeoGebra*、……等，可以讓幾何物件動態呈現，幫助學生學習數學。
2. 免試實驗班：教育部致力推行十二年國教，希望學生能夠快樂的學習各種課程，不要學生將學習的重心放在升學考試科目中，所推行的免試升學的教育政策，國中學生依照國中在校成績申請高中入學，高中學校為鼓勵優秀學生入學所成立之特殊班級。目前許多明星高中紛紛成立科學班亦是如此。

二、　文獻探討

將動態幾何系統介由學生動手操作融入學校教育，有許多的層面需要考量；因此在文獻探討中將分成教師信念、DGS融入教育的研究探索及*GeoGebra*的優勢探索等三大類別分別討論：

2.1　教師信念

數學是一種觀念、而不是用鉛筆或粉筆來標示的知識，學生應該是瞭解數學而做數學（Hersh , 1986）。

許多人都聽過「數學爲科學之母」。何謂科學之母呢？當然就是建構出一個強大而基礎的觀念，提供給其它學科一個理論的基礎去發展不同的學科知識。前幾年有一次的親師座談會，曾經有家長反應爲何老師不用課本上課？而用市售講義上課！那學生爲什麼要買課本呢？老師回答雖然課本講解的很清楚，但是例題太少，對於學生的刺激恐怕不夠，無法應付大考，所以選擇市面上的講義是情非得已，課本就請學生回去自修來輔助學習。其實這是一個完全顛倒的概念，主要上課的課本與輔助學習的講義角色交換了，數學課程偏重在紙筆計算，造成學生的思考時間被大量的計算占掉了，學生根本就不瞭解數學，在學生不瞭解數學的情況下做數學，對於基礎觀念的傳遞當然是薄弱的。這可以從市面上充斥各家出版社的講義觀察而得知，當老師或學生捨棄課本選擇出版社的講義上課時，數學對於學生而言就不是一個知識與觀念的傳遞與學習，而是一種機械式的訓練與操作。

數學是一項活的主題，目的在透過我們尋找周圍世界的模型及瞭解我們心靈成長的模式（Schoenfeld , 1992）。

因此老師必須修正課程內容和教學方式，上課的重點放在協助學生：

- 尋求解決方案，而不僅僅記憶過程；
- 探索模式不只記憶公式；
- 大膽猜想，不只做練習。

數學是一項活的知識，生活週遭的事物無時無刻不在變化，培養學生思考如何以數學模式來了解生活週遭的世界，這是一門重要的課程。可是以往數學教育過於強調計算

的結果，卻讓學生無法學習思考將兩者連結在一起的方法，導致學生認爲數學是一門日常生活無關的學科。

Ernest（1989）認爲影響數學教師教學實務最主要的因素之一爲教師個人對於數學本質、數學教學、學生數學學習的觀點。Thompson（1992）研究發現，若要增進數學教學與學習的效果，則必須要針對教師的數學信念、教學信念、學習信念三方面作更深入的探討與研究。

研究者從小到大的學習過程中，受到許多的老師的教學指導，在工作環境中也與許多的老師有所接觸，觀察到每個老師都有其一套教學理論，因此對於Ernest的說法感受特別深刻。有些老師教學要求嚴謹，學生書寫的過程一步一步都要按照老師上課的內容才給分，輔以軍事化管理，譬如：罰寫、藤條伺候，…等，學生訓練出來的結果成績當然嚇嚇叫，可惜缺乏想像力，創意不足，難怪歐、美學者認爲亞洲的教育模式可以培養企業優秀的中堅幹部，可是無法培養領導者。而這些老師共同的特徵是普遍認爲學生的學習低落的原因，都是因爲學生不夠認真所造成的，因此採取鐵血策略企圖來修正學生的學習態度，最後希望提升學生的學習成就。

不過教學現場，學生學習成就低落其實並非學生單獨的問題，有時候可能是老師的因素，可能是老師的教學策略不適合這一批學生，需要調整教學策略而老師不自覺，老師認爲每年我都這樣教，學生都沒有問題，學生的學習成就都很好啊，所以問題是在學生不是我。研究者認爲針對不同的學生應該要制訂不同的教學策略，來達成教學目標，孔子說：「因材施教。」就是這個道理。

Cooney（1994）亦指出，學生數學學習成就的高低受到許多因素的影響，教師是其中相當重要的因素之一。陳彥廷（民91）指出教師是教室中的靈魂人物，對於學生學習的影響是無庸置疑的

我們常聽到學生受到任課老師的影響，而對於某些學科產生特別的興趣，進而決定將來的學習方向，在高中校園中經常出現這種現象，可是學生實際去念了之後，發現課程與他想像的不同，於是又有了興趣不合的感受而念得很辛苦或者是轉系，對於人才的培養時間成本是一大損失。老師對於學生的影響應該要以啓發學生的視野爲主，而不是追隨老師的腳步。

王郁華（1994）的研究發現，對於數學課程的教學，有些老師認爲要幫助學生思考，有些老師則認爲要幫助學生統整數學觀念。可是多數老師受到升學主義的影響，教學行

爲著重在內容意義和規則的解說。

其實整個教育的問題就是理解與統整，這兩部分應該是整個教育執行的核心工作，也是主要的教學問題所在，如果這兩部分老師都已經幫學生做好了，那學生剩下來的工作只有記憶而已。研究者認爲現在學生所缺乏的能力是由於老師的教學策略所造成，應該要回到教學原點，多讓學生有思考的時間，培養學生具有統整的能力，而不是幫學生做完所有的工作。

謝豐瑞（民87）認爲教師的信念影響其是否願意吸收教學內容知識、從哪方面吸收等等；教學內容知識豐富後，教師的信念也會跟著改變；如此不斷的循環，教師自我也不斷成長，這種成長也同時影響其信念及吸收知識的向度。

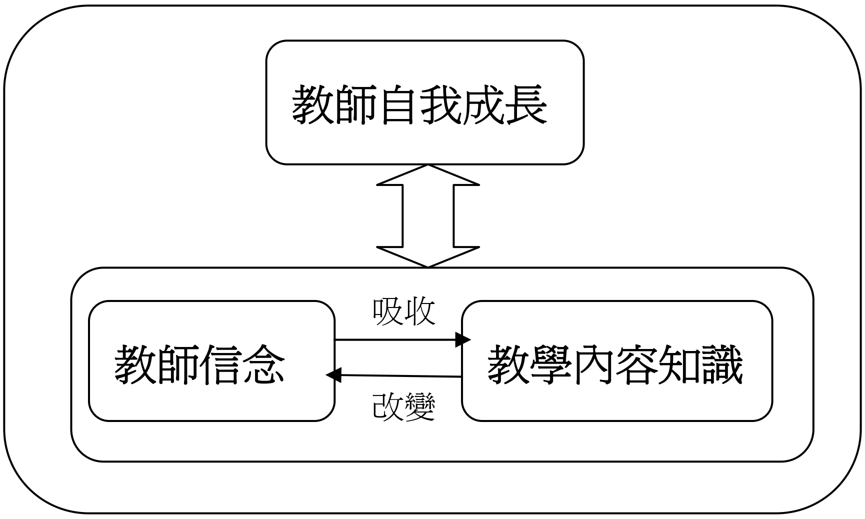


圖2-1-1　教師信念關係圖　(擷取自謝豐瑞)

在 2010 年 10 月 9 日的一場演講當中，白啓光教授提到一項國外相關的教學實驗的課程設計，教師將課程資訊及課程內容透過網路平台提供給學生，請學生在家事先預習，然後利用課堂上課時間，實施討論課程讓學生的想法相互激盪，實驗研究的的結果發現討論式的學習對於學生的學習成果影響是非常巨大的。

在研究者的教學歷程當中，最近這幾年也開始朝合作學習發展，這是因爲就現行的教育體制，社會氛圍及家長的資源，許多的學生白天在學校上課，放學後幾乎都到補習班上課，回到家之後又忙於應付學校的家庭作業及隔天的考試準備，幾乎沒有時間去思考教師的授課內容，我想這並不是教育該有的本質。因此，我開始合作學習的教學實驗，在第一次的教學實驗是在 2009 年 11 月開始直到 2010 年 6 月，對象爲兩個班的高三學

生，一個爲文組，一個爲理組，兩班皆實施包含週考、復習考等一般性的測驗都讓學生藉由小組討論後共同做答，上課時也請學生透過小組討論回答即時的問題，研究者只在旁邊觀察及記錄學生的討論情形，並適時給予提示。剛開始實施的時候其實遇到了一些阻力，這阻力來自哪裡呢？

1. 學生：成績較好的學生其實並不認同這樣子的學習模式，因爲他們認爲在小組討論的過程中，他們只有付出，很難從同儕中得到回饋，因此開始時的參與度並不高，但是也因爲學生有這樣的想法，所以激發研究者思考如何讓這類學生認同此項做法，並且也從其中得到了相當的回饋，如此經過了八個月的長期實驗，從剛開始的不熱衷參與，到後來的熱烈討論，平常下課時也常看到學生在教室討論數學問題，分享彼此的心得，學生的想法不再侷限於只要算出答案就好，而是開始思考什麼方法求解比較好，研究者深深感覺到這應該是一條正確的道路，甚至班上的物理老師也來跟我說，你們班的學生對於物理的課程討論與學習態度比其他班的同學積極，可能是因爲你的數學課的實施小組討論，因而帶動班級的讀書氣氛，最後該班學生在學測與指考成績也都有相當不錯的成績。
2. 實驗過程的常出現狀況：透過小組討論學生會有下列情形：
   學生 A：「你看，我是對的，你都不相信我。」
   學生 B：「討論的時候，你也說我的是對的阿！」
   師：「如果討論的時候，你能夠勇敢的表達你的想法，與大家共同討論，那妳們這組就有機會答對這一題了。這已經不是第一次了喔，切記！要記取教訓。」
3. 同儕壓力：因爲實施小考討論課程，小考成績由小組成員共享，引發其他班級任課教師的種種質疑成績計算的公平性，
   (1) 影響其他班級學生的成績計算：由於最近幾年教育部實施繁星計畫，採計學生在校成績，因此學生對於成績的計算非常在乎，因此老師認爲如此的方式會影響其他班級授課老師的壓力。
   (2) 班級內的成績計算：許多老師認爲有些學生學習狀況好，有些人的學習狀況不好，小考時個人的成績差距頗大，可是如果兩人分在同一組的時候，兩個人的成績相同是不公平的制度。

研究者認爲這是一項教育實驗必定會有的小問題，所以研究者選擇先忽視這項因素，避免此項教育實驗無法執行。讓學生共同討論學習，多多欣賞同學的優點，也鼓勵學生勇敢的表達內心的想法，刺激彼此的共同成長，如果教師過於注重某些因素，那就會有許多的教育實驗無法執行。而且研究者認爲學生的評量有許多的方式，紙筆測驗並

非唯一選項，平時測驗的目的研究者認爲只是評估學生的學習是否有跟不上的狀況，提供老師修正教學策略的工具罷了。

在99年12月4日的一場演講當中，交大教授徐朗認爲現在學生不會思考和老師有很大的關係。在學生求學的歷程中，老師不斷的給學生一個標準答案，最後訓練出來的學生分析、思辨及創意能力薄弱。而在演講中也提到最近一篇有關美國史丹福大學校長漢尼斯說「中國要建成世界一流大學，最快還需要二十年。」的報導。報導中提到漢尼斯認爲，當前中國大學有二大問題，其中第一點就是課程設置以講座爲主，小組討論很少，這嚴重影響學生的收穫。另外牛津大學校長漢密爾頓也表示，中國學生與歐美學生最大的差異是，中國學生缺乏自主性和創造性思維，缺乏挑戰學術權威的勇氣。他認爲，要鼓勵學生成爲更加主動的研究者、挑戰者，而不是被動的接受者和傾聽者。此外美國耶魯大學校長理查德·萊文則認爲，與一流的歐美大學不同的是，中國的教學法是一種生搬硬套的模式，學生總是被動的傾聽者、接受者，他們把注意力放在對知識要點的掌握，不去開發獨立和評判性思維的能力，這種傳統亞洲教學標準模式，對培養流水線上的工程師或者是中層管理幹部可能有用，但如果要培養具有領導力和創新精神的人才，就不行了。

上述內容雖然是描述的是中國大陸的大學及學生現況，但是仔細思量台灣的學校教育及學生求學的態度，不也是有著同樣的問題嗎？成大校長賴明詔行政院科技顧問會議日前有美國學者來台觀察中小學科學教育，發現學生做的火箭模型都非常好，美國學生比不上；但缺點是：「大家設計得都一樣。」 賴明詔引用導演賴聲川的說法，認爲創意就是一種「問問題的能力」。他觀察很多台灣學生不知如何問問題；然而應在聽講時提問，才有助思考。他也指出，創意需要跨領域學習，「從別的領域『偷』東西過來」，別人的垃圾可能是你的寶藏。此外，賴明詔覺得台灣重視標準答案的考試，也是扼殺學生創意的幫兇。(擷取自聯合報)台灣是一個缺乏天然礦產資源的小島，人才就是我們最大的資源，如何培養人才？研究者認同漢尼斯所提”討論”可以讓學生有更大的收穫，老師應該在課堂中讓學生有討論的空間及時間。

2.2 DGS融入教育的研究

儘管許多的研究結果指出將動態幾何系統嵌入中學的數學教育，在教學實務上有

很多的優勢，它可以協助學生提高學習成效，但是實際上在教室中嵌入的技術的過程是緩慢而複雜（***L. Cuban et al.* 2001**）。套裝軟體應用於輔助學生觀察學習，在課堂上的數學實驗使學生受到視覺化圖像變化的刺激，進而協助學生在觀察學習過程中做出有意義的猜測（***Lavicza* 2006 , *Kreis* 2004**）。DGS一個最重要特點是拖動模式，引發老師，學生和數學課程素材的交互作用（***Jones* , 2000**）。

台大的洪蘭教授在 99 年 9 月 16 日的 IC 知音早晨的廣播節目上說：「國外的研究機構曾經做過一個記憶的實驗，有人拿了 2500 張圖片給學生看，每張看 10 秒鐘，然後就收起來。等到隔天，除了原來的 2500 張圖片之外另外加了 2500 張圖片混合在一起，測試人們對於圖像的記憶印象，研究的結果顯示測試者對於圖片是否已經看過的判斷，測試者的回答有 90%的正確性，甚至有些還可以利用圖片的特徵來判斷是否看過。隔了一個星期之後再做測是，仍然有 60% ~ 70%的正確性。」這個研究結果證實圖像對於人腦部的記憶的確會有很大的影響，而研者也認爲的確是如此，相信許多人都曾經擁有過這樣的的經驗，那就是當你看到一張 10 年前的旅遊照片，你除了照片之外，當時拍照的情景也會突然豐湧上來，形成親友之間共同的討論話題。因此如果可以將這樣的實驗結果應用在教學實務上，相信應該可以提高學生的學習成效。不過如果學生只是看著老師操作，沒有親自實際操作，就好像看著別人的照片一般，是不會有印象的。

在 99 年 10 月 16 日前瞻科技的課程中，許元春教授講了一個例子，有一次他開車載小孩出去玩，車子沿著道路前進，正準備從匝道入口進入高速公路的時候，他的小孩突然說：「世界像迷宮一樣，道路彎來彎去。」由此可知小孩子正以圖像在思考所看到的景象。我想很多人也是一樣的，當我們第一次到一個新地點去玩的時候，道路是陌生的，開車時都小心翼翼的前進，隨時注意何時該左轉，何時該右轉，但是當我們第二次去該地點的時候，以前的圖像突然全都浮現在眼前，看到熟悉的建築物就知道該轉彎了，一切都是這麼的自然，所以圖像對於人的學習影響是非常大的。

在現代教育中教師所扮演的角色不再只是傳統的"知識講述者"，而是帶領學生學習與觀察推演的"引導者"。資訊融入課程已經成爲現代教育發展的趨勢，研究者觀察到許多的學科課程包括國文、英文、歷史、地理、物理、化學、……等也多以資訊融入的方式在教學，但是很可惜的數學課程的融入狀況並沒有其他科目興盛，這當然是由於許多的因素造成，同時間學生由其它學科的學習經驗認爲所謂資訊融入課程只是播放一堆投影片，感受並不深刻、也不踴躍，甚至還有學生說老師用電腦上課就是最好的睡覺時間，

因爲燈都會關掉。因此導致有許多數學教師認爲資訊融入課堂中是事倍功半，還不如傳統教學方便。其實就傳統的輔助教材而言，學生的確是只能單向思考，對於學生的啓發效果有限，不過近年來動態幾何系統已被開發出來，例如：*Gsp*、*Cabri* 3D、*GeoGebra*，因此研究者想探討將動態幾何系統嵌入學校課程的方法;並探討在*GeoGebra*融入課程的學習環境中，學生的學習態度、學習成效與傳統教法的差異性。

在各種教學軟體中，動態幾何系統軟體當然位居中心的地位。在許多致力於研究在協助幾何推理方法的研究論文中，一般的共識是動態幾何系統對於幾何理解和試探法提供了大變革。例如：學生在 *Cabri* 3D 環境中學習歐氏空間的幾何結構，學生觀察到一般板書無法呈現的畫面，*Cabri* 3D 協助學生更容易去做幾何構造的探索和做有意義的猜想。

Bartolini Bussi（1996）認爲教學活動的核心是產生在‘數學討論’時，透過發現學習的教學活動設計的目的，是將課程學習的經驗轉換爲數學知識的建構。

合作學習活動最讓人擔心的問題，就是並非每個小組成員都是努力貢獻、共同學習的，總是會有學生在一旁「搭便車」，因此，讓學生進行討論活動時，教師也不得閒，必須要時時觀察小組討論的狀況，瞭解小組成員是否都有熱烈參與討論。另一方面，教師採取以合作討論進行評量的一個主要目的，在於讓每位學生都能實際寫過題目，即使是能力較不足的學生，若有程度較好的同儕或是教師在一旁支援，便有機會能展現出較佳的學習表現，而不至於早早放棄。所以教師在觀察學生討論時，同時鼓勵小組成員教導其他組員，或是適時給予提示，讓學生在遇到挑戰性較高而自身技能不足以處理的題目時，使其面對的挑戰符合自身的技能，才能讓學生沉浸在解題的活動中。

NCTM (1989)在「中小學數學課程及評量標準」中，對各年級數學課程都列出了問題解決的能力標準，其中提到目標蘊含：學生應該”會閱讀”、”會寫作”以及”具有討論數學”的能力；我國九年一貫的課程也列出了很多能力指標，但是到底實際面的執行成效是如何？其實是有待考驗的！因爲實際上許多學生並沒有達到上述的能力指標，學生不會閱讀題目，不了解題目的意思，因此在課堂上與同學討論的狀況並不踴躍；加上家長過於在乎成績，於是就把學生往補習班送，學生爲了成績只想學習到速成的計算技巧，也不太積極想去了解背後的知識背景，因爲學生認爲知識背景的理解與否，對於成績沒有更多的幫助。這就是爲什麼儘管許多研究指出在數學教育應用軟體有很多優勢，但是實際在課程中嵌入的技術的過程是緩慢而複雜（*L. Cuban et al.* 2001），由此可知利用動

態幾何系統教學，教師必須跟著調整其數學信念及角色扮演才能成功，若能將評量的方式加以修正，也有機會刺激學生去探索數學知識。

研究者依照學生學習的情況將學生分成四類：

第一類就是「了解學習的主題並能融會貫通，解題時能舉一反三的學生。」

此類學生能夠明確理解定義,亦能夠從定義中推演其各種性質,解題時能利用定義、定理或各種性質去解題,解題的概念及技巧非常流暢與巧妙。少數頂尖學生屬於此類。參考歷年來的學測成績，數學滿級分與頂標分數的差距爲各科之最大，顯示學生在數學概念的融會貫通落差頗大。

第二類就是「不太了解學習的主題，解題時利用嘗試錯誤的學生。」

此類學生對於學習主題的數學理論雖然不明瞭，但是閱讀能力尚可，可以藉由基本公式及推理把答案找出來。因爲數學課程太重視理論基礎而與現實脫節，某些學生無法完全理解授課的內容，只好生吞活剝的把公式給吞了進去，考試的時候就把公式代入，雖然成績還不錯，但是不知道爲什麼要這樣做？也不知道學這些東西有何用處，厭惡數學的心已在心裡滋生。

第三類就是「了解學習的主題，但是不知道該如何解題者。」

此類學生上課聽得懂教師授課內容，但是缺乏創造推理能力，學生只能針對教師授課的內容學習，導致遇到生活上的一些數學問題的時候，通常腦海裡浮現的第一個東西就是這題要用什麼公式，這是因爲學生被老師從小學訓練到中學的結果，老師常常爲了速成只教學生代公式，看到任何問題，代公式就對了。如果老師教學內容及方式不調整，教學心態度不修正，日後當學生遇到不同於課本或講義的數學問題時，就只會回答:「老師沒教過，所以我不會。」學生只是枯坐在一旁而不會思考，只是在等待他人的救援而已。因爲學生不會應用上課學過的知識去解決,學生不知道該如何下手，學生基本的解決問題的能力都被摧毀了。

第四類就是「不了解學習的主題，也不想了解學習的主題放棄學習的學生。」

此類學生從小學開始數學課程就受到極大的挫折，導致到國中、高中上課時對於教師授課內容不清楚，無法理解老師授課內容，也無法利用學習的主題去解決問題，本身也不願積極去解決問題，上課時態度懶散學習意願低落。

上述這四類學生，除了第一類之外，其餘的學生多數是急待教師們努力補救的，只可惜學校所謂的補救教學其實是針對後 5%的學生，大家發現努力補救的結果，學生的學習破洞卻越來越大，所以與其教學生公式，代公式，不如調整教學方式，引導學生

自主性的學習，許多的研究指出利用 DGS 可以有效的提升學生的學習成效，教學生如何利用 DGS 從觀察中學習歸納分析或許可以改善此一現象。

2.3 *GeoGebra* 的優勢探索

目前較常被教師使用的動態幾何系統如下：*Gsp*、*GeoGebra*、*Cabri* 3D、*Maple*…等。在眾多的動態幾何系統當中，根據下列幾個重要的因素，本篇論文選擇探討學生在*GeoGebra*的環境中的學習情形：

1. 它是一個免費的開放性軟體：

 世界各地的教師及學生可以自行下載後，在教室或者是在家中自由的操作學習數學概念，不會因爲軟體費用過高而無法負擔，因此容易推廣於各級學校進而擴大使用。 Markus Hohenwarter 設計 *GeoGebra* 的基本精神就是”***KISS***”原則(‘**Keep It Short and Simple**’)，研究者實際使用後發現軟體的入門門檻的確不難，因此使用者容易切入使用做觀察學習。

2. 它提供一個Wiki論壇：

 世界各地的*GeoGebra*使用者，都可以在論壇上發表言論及提出問題尋求協助，全世界的*GeoGebra*使用者在不同的時間，在論壇上發言提供教材設計新的想法，協助教師在軟體的使用及教材設計上得到許多幫助，不會因爲軟體操作問題，不知道如何解決而半途而廢，這或許也是因爲它是一項免費軟體，因此大家更願意提供新的想法，使得軟體的使用更完備，因此每隔一段的時間就會更新軟體，使軟體更符合多數使用者的需求，不會因爲免費而功能過少。

3. 它是一個雙向的軟體：

 數學軟體依照其特性可分爲下列三種：

 (1) 強大的代數及繪圖功能爲主：

 Maple是功能非常強大的數學軟體，提供許多強大的數學運算功能，例如產生亂數多項式、求根、解微分方程、求微分或積分等各種代數運算功能，也具有不錯的繪圖功能。不過對於中學生而言實在是不需要用到如此強大功能的數學軟體，只需要建構基本觀念即可，更何況費用頗高，很難大量推廣應用。

 (2) 幾何建構爲主：

 建構在歐氏幾何基本觀念當中，學生從圖形當中得到的不只是幾何圖形而已，連帶的幾何的觀念藉由建構也逐漸在加強當中；以幾何建構爲主的軟體爲何它沒

有方程式的編輯系統，因為從方程式來畫圖形，無法凸顯出學生應該學習的幾何概念，學生學到的只有片段的知識，較難理解整個建構的觀念及其完整的意義。以歐氏空間的物件建構為主的軟體，協助學生依原理建構幾何圖形，但是實務上只有少數頂尖學生經過培訓之後幾何建構的概念會非常強，但是因為缺乏代數運算觀念的配合，多數學生很難自行設計學習素材，但是對於教師等專業人士運用於教學實務上，應該是有很大的幫助。只是學生無法親自思考設計，就學生學習成效的提升而言，就會有些許的落差。例如：*Gsp*、*Cabri* 3D。

(3) 代數運算與幾何建構並列：

*GeoGebra*是雙向的溝通軟體，當使用者對於幾何視窗做修正時，代數視窗也會隨之而改變；反之亦然，當使用者對於代數視窗修正時，幾何視窗也會隨之而改變。藉由雙向溝通使得使用者更容易藉由圖形、文字之相關性，搭配滑竿做動態學習，有助於使用者做觀察學習，所以 GeoGebra 功能更為強大。使用 GeoGebra 可以瞭解在學習過程中，學生透過雙向溝通來描述代數的運算結合幾何圖形的動態改變，使學生的學習效果更佳。

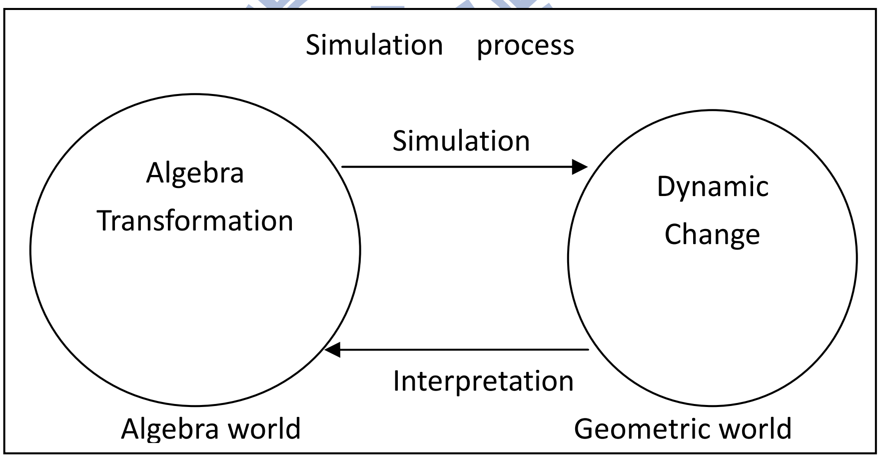


圖2-3-1 GeoGebra 雙向溝通圖示 （**節取自Stefan Halverscheid**）

2.3.1 ***GeoGebra* 介面介紹**

*GeoGebra*是一項結合多元平臺開放性資源的動態數學軟體，它嘗試讓動態幾何軟體的使用更方便，因此結合多用途的代數電腦系統（Hohenwarter & Preiner 2007）。

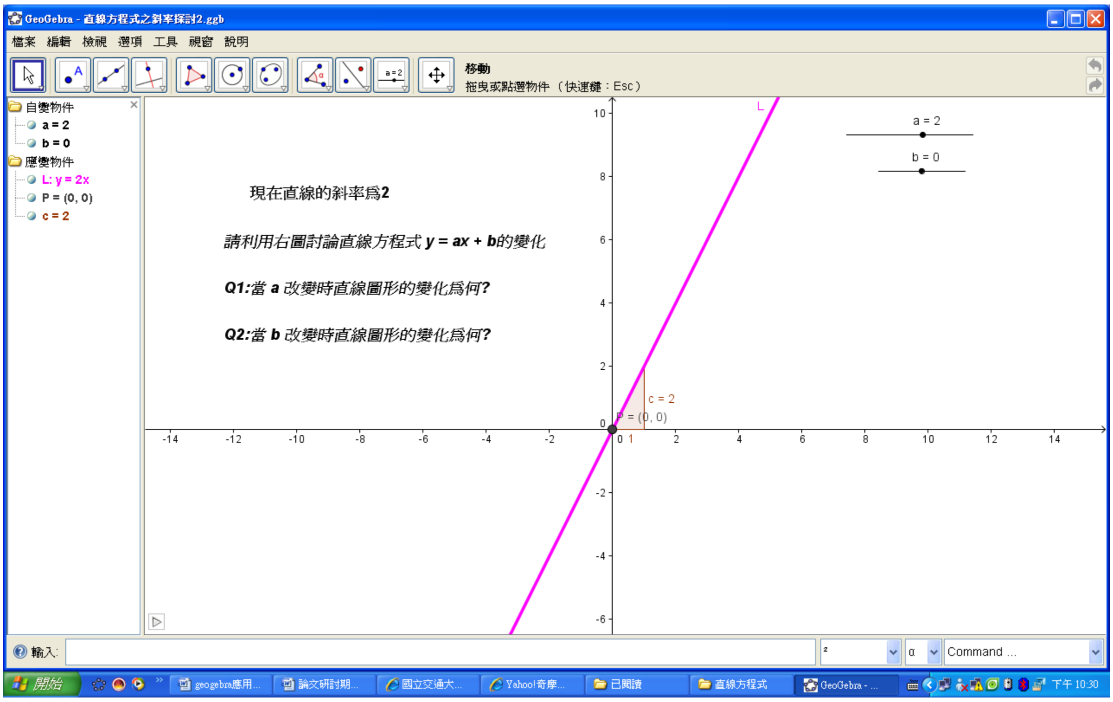


圖2-3-2　*GeoGebra*的視窗介面

在研究者的教學經驗中，有許多的數學課程是需要學生有觀察及想像力的，例如：當我們在教微積分課程，介紹到黎曼和的時候，我們使用傳統的板書做圖，耗費非常多的時間，才能完成一個圖形，可是學生並沒有什麼感受，對於黎曼和的概念非常模糊。這其實是可以理解與想像的，通常要找出規律是需要數個圖形來做配合觀察，可是多數老師畫完一個就要花許多時間，所以不太可能多畫幾個圖給學生觀察，多數學生無法只從一個圖形去想像數學概念，所以只好把它背了下來，可是一點意義也沒有，學生無法理解概念的結果是只知道使用時機，但是為何可以使用它卻一無所知，因此對於後續的課程就更難接受了。學生常講說:「老師，直接講公式就好了嘛，這樣我們就會算了呀！」當老師聽到這句話的時候，其實老師心理面的想法是：「學生真的了解嗎？」。我們所要教給學生的是數學概念，而不是訓練學生成為一個會算數學的機器。

因此研究者曾經透過動態幾何系統*GeoGebra*的協助設計了微積分的基礎課程，透過其動態呈現，協助學生藉由觀察與模擬，了解黎曼和的概念。下面為討論$f(x)=3x^3+x^2-3x+1$，在$x=-1$，$x=1$之間的黎曼上和與切割的長方形塊數的情形，n表示分割的塊數。藉由滑桿n的變化學生觀察到黎曼上和的極限概念，同時也引導學生寫出數學表示式。然後請同學反向觀察黎曼下和，多數學生都能順利寫出黎曼下和表示法，也發現上下和會趨近於一特定值。

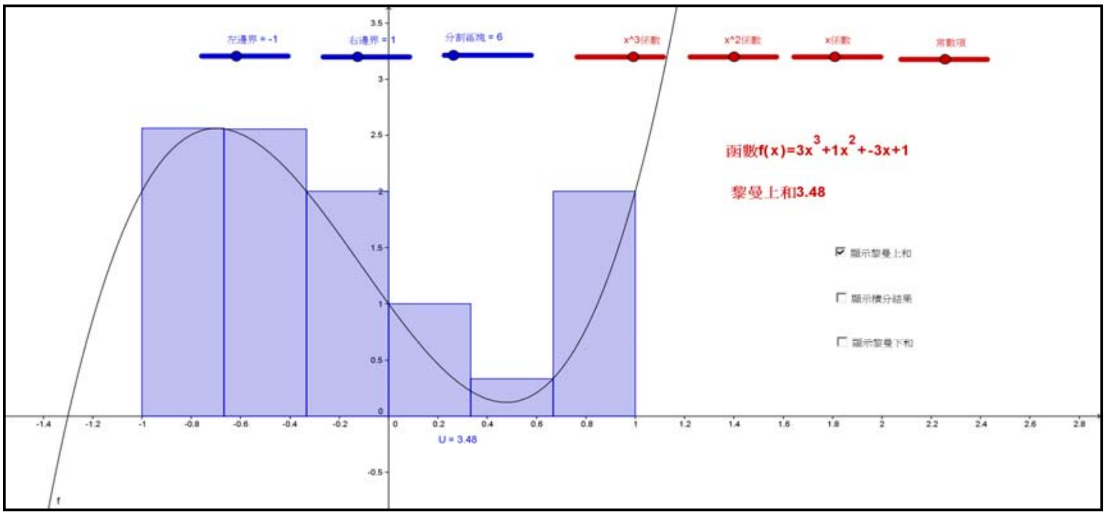


圖2-3-3　*GeoGebra*微積分動態演示(一)　$n=6$

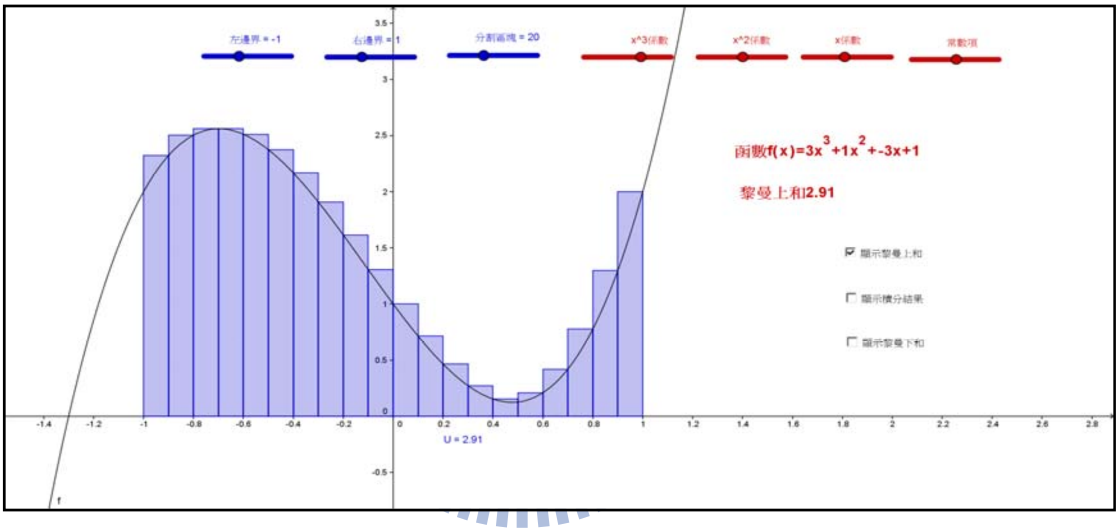


圖2-3-4　*GeoGebra*微積分動態演示(二)　$n=20$

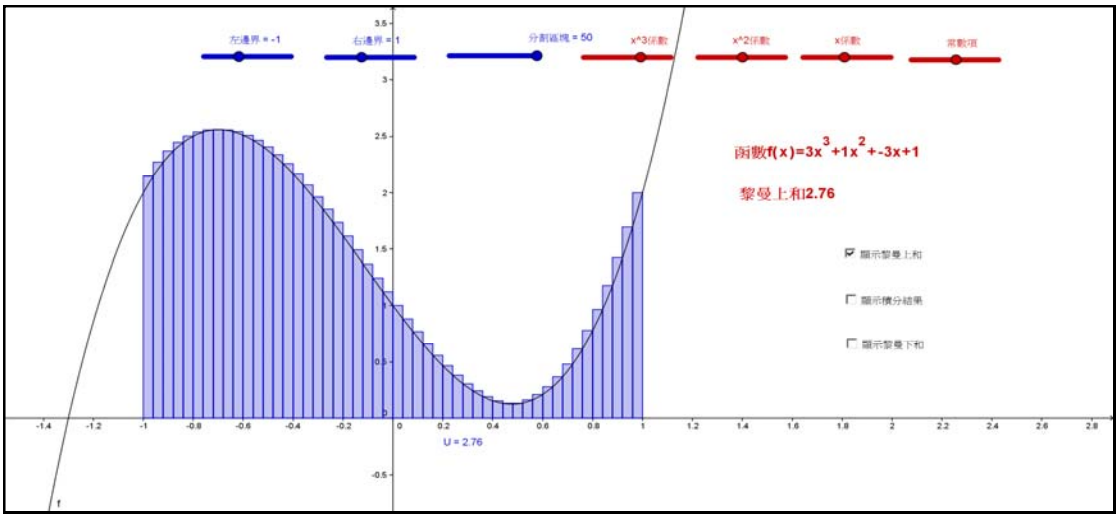


圖2-3-5　*GeoGebra*微積分動態演示(三)　$n=50$

學生透過觀察可以理解到當n愈來愈大的時候，由圖形觀察黎曼上和會愈來愈接近實際的答案，學生雖然不知道理論基礎爲何？但是可以理解也可以接受此概念，此時再將黎曼上和的數學關係式引入介紹給學生，發現學生的接受度頗高，也較能理解。這時候再介紹黎曼下和時發現已有部分學生能自行推導過程，透過*GeoGebra*的協助，學生同時發現一項最重要的結論，當n愈來愈大的時候，黎曼上和與下和會愈來愈接近，我想這就是我們想教給學生的極限概念，透過GGB由學生所觀察到的結論，學生較能理解，因此當老師引進梯形法，中點法，……多數學生都能夠接受其極限值會相等，只是使用的方法不同而已，也較能激發學生大膽的做另類的嘗試。

劉志紅(2008)說作圖是一項技能，但是技能形成後，若離開了思維的發展，其生命力是脆弱的。因此應該重視學生作圖過程的發展，來挖掘作圖的思維價值。所以說做圖與邏輯思考兩者相輔相成，若能將兩者結合在一起，對於學習將會有重大突破。

概念形成的過程就是數學建模的過程，在這個過程中，應注重培養學生的以下兩種能力：

(一) 數學洞察力：以數學的視角審視不同背景下的問題，把握問題的數學本質。

積累和發現函數應用的實例，認真研究課程標準，用好教材，結合學生實際適當取捨，把難理解、喧賓奪主的內容捨去，多舉生活中的實例。

(二) 數學概括和表達能力：引導學生用簡潔而精確的語言將自己的感性認識表達出來，從而使得自己的活動從一個層次上到另一個層次。

2.3.2 *GeoGebra* 獲獎紀錄

GeoGebra 截至目前已經獲得十三項國際教育軟件獎，詳述如下：

(1) EASA 2002：European Academic Software Award (Ronneby, Sweden)

(2) Learnie Award 2003：Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria)

(3) Digita 2004：German Educational Software Award (Cologne, Germany)

(4) Comenius 2004：German Educational Media Award (Berlin, Germany)

(5) Learnie Award 2005：Austrian Educational Software Award for Andreas Lindner (Vienna, Austria)

(6) Les Trophées du Libre 2005：International Free Software Award, Category Education (Soisson, France)

(7) eTwinning Award 2006：1st prize for "Crop Circles Challenge" with GeoGebra (Linz, Austria)

(8) Learnie Award 2006: Austrian Educational Software Award for "Wurfbewegungen mit GeoGebra" (Vienna, Austria)

(9) AECT Distinguished Development Award 2008: Association for Educational Communications and Technology (Orlando, USA)

(10) SourceForge.net Community Choice Awards 2008: Finalist, Best Project for Educators

(11) Tech Award 2009: Laureat in the Education Category (San Jose, California, USA)

(12) BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award

(13) NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award 2010 (Washington D.C., USA)

三、 研究方法

3.1 研究設計

本文描述是以10年級的學生爲對象所進行長期教學實驗。研究方法爲準實驗設計法，實驗組學生於實驗期間都接受動態幾何系統*GeoGebra*基本的指令操作教學，實施DGS輔助教學課程，而對照組則採取傳統的教學方式。資料收集方式包含個別訪談、問卷填寫、學習單撰寫內容、學生上台報告、……等型式進行資料分析。

本研究是一項長期的教學實驗，希望藉由學生一人一機的操作方式，探討在教學現場數學教師如何將動態幾何系統*GeoGebra*引進教室中協助學生學習，及教師對於將資訊融入課堂上的疑慮，實務上的問題及其解決的方式，藉此來了解既然資訊融入教學成效不錯，但是爲何在教室中教師的使用率卻不高呢？

分析數學教師對於資訊融入的疑慮與學生過往資訊融入學習的經驗，研究者認爲是老師與學生已習慣傳統的板書教學，因此對於資訊融入課程抱持著懷疑的態度，老師與學生在不熟悉的環境學習，學習效果當然是不佳的。因此本實驗的研究目的爲找到資訊融入高中數學課程的最佳模式，透過此種模式，學生在動態幾何環境中學習，能夠有最佳的學習效果。本教學實驗預計從 2010 年 9 月 1 日起至 2011 年 1 月 20 日止爲期五個月，實驗分三階段進行，研究者依照學生定期考試成績、後測成績、*GeoGebra* 作業繳交及小組合作討論的情形，與對照組比較決定進行下一階段的實驗計畫、或者是修正教學策略，維持原階段計畫繼續進行教學實驗，期望最後能夠將資訊融入正課中執行。茲將各個階段的實驗方式及實驗目的分述如下：

1. 第一階段：採取每周二節課到電腦教室一人一機實際操作，結合小組合作學習，課程設計以輔助數學課程之學習爲主。實驗目標如下：
   (1) 協助學生融入*GeoGebra*的學習環境。
   (2) 學生主要學習目標爲軟體指令學習，熟悉課程活動，觀察數學現象，驗證數學概念，學習如何與同儕合作討論。
   (3) 學生次要學習目標爲觀察、討論、歸納與分析能力的培養。

2. 第二階段：學生已熟習及認同*GeoGebra*的學習環境，因此採取每周一節課到電腦教室實際操作，引入*Moodle*教學平台，課程設計原則仍以輔助學習數學課程爲主，但是開始增加課外的活動，刺激學生創造力及思考力之發揮，鼓勵學生利用動態幾何系統結合已知的數學概念發揮創意。實驗目標如下：
   (1) 培養學生從學校的*Moodle*數位教學平台下載教師所製作的學習檔案或指定的家庭作業在家學習的習慣，以期達到延長學生的學習時間的目的。
   (2) 引導學生融入*Moodle*教學平台學習各式課程，並分享彼此的設計成果。
   (3) 加強學生合作討論、觀察、討論、歸納與分析能力。
   (4) 學生解決問題、探索現象、統整歸納、創造思考的能力之培養。

3. 第三階段：學生已完全融入*GeoGebra*的學習環境，因此每周利用一節正課到電腦教室實際操作。動態幾何系統最主要的功能是強調學生從幾何物件的建構當中學習數學概念，因此課程設計的原則以課外的活動啓發學生的創意爲主，數學課程學習爲輔。實驗目標如下：
   (1) 素材設計競賽：舉辦融入最多的數學概念的素材競賽，觀察學生的創造力及想像力。
   (2) 加強學生解決問題、探索現象、統整歸納、合作討論、創造思考的能力之培養。
   (3) 期末作品發表會，學生學習簡報製作，並刺激學生表達及批判的能力。

	第一階段：融入	第二階段：歸納	第三階段：應用
課程目標	學習指令 熟悉活動 觀察現象 驗證概念 學習合作討論	探索現象 統整歸納 合作討論 創造思考	探索現象 統整歸納 合作討論 創造思考 問題解決
活動時間逐漸融入正課、增加 *Moodle* 平台的使用頻率			
實施時間	一~二節班級時間	一節班級時間	隔周一節班級時間或是正課

表3-1-1 各階段課程目標及計畫表

3.1.1 實驗預視

在本實驗課程執行前的一個學期，研究者針對高一下的學生開設了一門名稱爲數學實驗的選修課程，引導學生藉由動態幾何系統*GeoGebra*針對平移、對稱、伸縮、週期等數學概念進行觀察學習。研究者透過初步的實驗課程設計，觀察記錄學生的學習狀況後，進行實驗課程設計之修正，如此進行長達一整個學期實驗設計的預視，實驗課程結束後以問卷方式詢問學生關於選修課程的建議事項與滿意程度，雖然學生的回答都是正面的，但是經過實驗預視發現學生的學習效果並未符合研究者的預期，不過實驗的過程提供研究者一些進行實驗時該注意的地方，確實達到預視的效果。以下爲實驗預視時所遇到的一些問題：

1. 由於是選修課程，學生認爲課程爲電腦課程而非數學課程，所以一到電腦教室就馬上打開電腦上網聊天，寫網誌、玩電動，班級秩序不易控制。
2. 由於是下學期才開設的課程，而且課程設計從最基本的直線開始，學生因爲從國中開始就已經有了許多相關課程的學習經驗，代數的觀念非常強烈不容易突破，因此想要引導學生重新從幾何方向思考，學生的興趣並不高。
3. 由於研究者希望學生的思考方式能夠跳脫傳統制式想法，開發學生的潛能，因此學習單的設計是開放式的，不過從學生的回答中發現學生的思考模式像是工廠製造一樣毫無創意，雖然學生的答案是正確的，不過學生的想法有如”訓練有素的國軍！”並不令人驚艷。

從學生的表現，研究者得到一些心得：

1. 認爲實驗的成功與否與學生融入的情況習習相關，學生必須習慣於*GeoGebra*的環境學習才可以。
2. 課程設計須搭配上課課程，學生才會有學習的動機，學生可以從中獲得好處，學習意願就有機會提高。
3. 作業或活動的設計須活潑、有趣，學生才會樂於學習，避免局限於制式的數學課程。
4. 讓學生在遊戲活動當中學習數學概念，學生的答案才有機會跳脫制式框框，才能夠獲得活的知識。

3.2 研究對象

本實驗樣本取自新竹市某公立高中一年級全體七個班級共280名學生。其中一個班級爲實驗組，另外六個班級爲對照組，研究者教導實驗組及一個對照組共兩個班級，另五個班級分別由林老師及陳老師所負責。學校實施常態編班，本校學生程度約略落在國中基測PR85~PR90之間，爲新竹地區的前三志願。因爲學校爲完全中學，所以除了申請及登記分發的學生之外，有部分的學生來自國中部直升，此部分的學生國中基測約落在PR75~PR80之間。由於學生基測的數學成績相近，不易採取異質分組，因此分組由學生自行組織，研究者只限制每組不得超過6人，最後全班共組成8個學習小組，各組的人數約爲4~6人不等；然後在第一次期中考後，實施第二次的分組，此次的分組，研究者依照期中考的成績，將學生分成高學習成就族群(前25%)、中學習成就族群(25%~75%)、低學習成就族群(後25%)等三類進行異質分組，將學生分成8個學習小組，每組均爲5人。

3.2.1 參與人員

本研究對象因爲計畫包含全校高一全體學生，因此研究者告知任教高一的數學教師（林老師、陳老師）此項研究計畫後，二位教師也都表示願意參與此項研究計畫，過程中也經常會彼此討論各班學習情況，以下爲二位老師的簡介。

陳老師：任教的年資約 7 年，屬於年輕有活力，與學生互動十分良好，負有教學熱誠型的老師，，經常給予學生課後輔導。授課班級有對照組 A、對照組 B、對照組 D 及對照組 E 等 4 個班級。陳老師對於研究者的實驗計畫十分感興趣，因此一個星期當中有三節課會進入實驗組聽課，雖然他上課的時候沒有使用資訊融入上課，但是他會將實驗組的實驗結果融入他的上課教材中，因此教學方式屬於傳統教學中較創新的，經常會在辦公室與研究者討論學生上課情形與 *GeoGebra* 的操作問題。

林老師：任教的年資約 6 年，屬於年輕有活力，與學生互動十分良好，負有教學熱誠型的老師，授課班級爲對照組 C，林老師屬於完全傳統式教學，教學嚴謹。

呂老師：實習老師，由研究者負責教學指導，交通大學教育所數位學習組畢業，每節課都會進入實驗組班級聽課，雖然之前沒有學過 *GeoGebra*，但是由於 *GeoGebra* 設計的原則爲"KISS"，而且呂老師是數位教材設計這方面的專家，很快就進入了狀況，許多實驗課程的設計就在研究者與呂老師討論之下，共同設計討論出來的。本實驗研究若沒有呂老師的協助，不會進行的如此順利。

3.3 研究流程

3.3.1 實驗流程

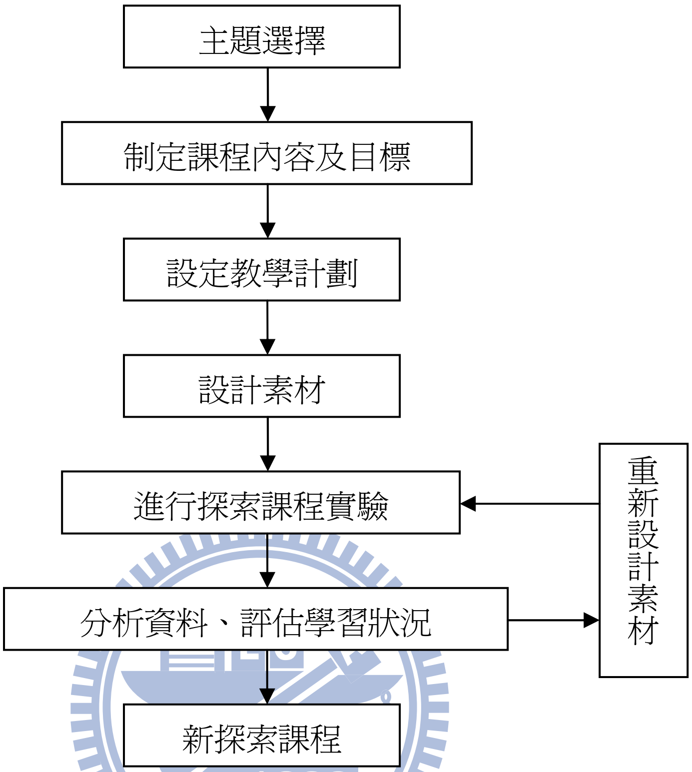


圖 3-3-1 課程設計流程與步驟

3.3.2 課程內容

本研究計畫探索的課程以99數學課綱爲主，在高中一年級上學期的數學課程當中嵌入*GeoGebra*課程爲探索內容，課程設計先由各章節中選擇一個主題做爲主要探索方向，然後設定內容及課程目標，依據課程目標設定每個小階段的教學計畫，然後依據每個小階段的教學計畫，設計素材引導學生進行觀察學習，與參與研究的呂老師討論學生的學習情況後，再決定要進行新的探索課程，或者是要修正原來所設計的素材再一次探索原來的主題。課程內容包含下列各單元：

1. 第一章數與式：以第二節”數線上的幾何”爲主題，挑選絕對值函數做深入且詳細的探討，期望學生能將絕對值函數的幾何意義與函數圖形做結合思考，輔以代數計算，對於絕對值函數及不等式有不同於傳統單純的代數計算，學生能夠從*GeoGebra*操作過程中產生新的解題概念。
2. 第二章多項式中：以第四節”多項式函數圖形”爲主要討論內容。學生藉由一次

函數，二次函數、三次函數及四次以上之函數圖形做歸納、分析，期望學生對於函數圖形的基本架構有基本的認識。

3. 第三章指數與對數：從指、對數圖形之觀察，加入平移、對稱、凹凸性、遞增、遞減等概念，特別強調平移與對稱概念之探討。

3.3.3 上課方式

圖3-3-2 學生小組合作觀察與設計學習

圖3-3-3 老師引導小組進行合作學習

圖3-3-4 學生上台發表

圖3-3-5 學生上機情形

3.3.4 研究計畫

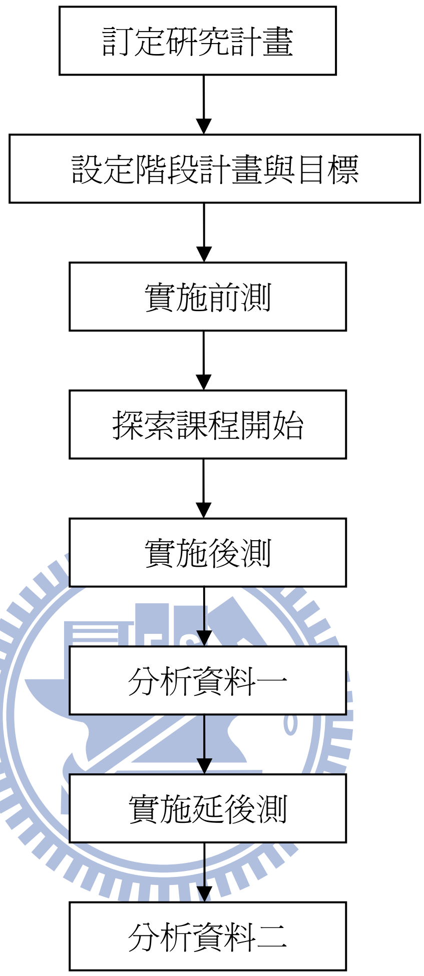


圖 3-3-6 研究流程與步驟

3.4 設備介紹

本實驗研究計畫透過本校的*Moodle*平台，與學生建立溝通管道，*Moodle*平台介面設計除了有每個星期的學習單、作業之外，還有學生的作品分享，由學生票選當週做的最好的作品，研究者提供星巴克飲料當作獎勵，期望提高學生融入*GeoGebra*環境的意願，而本校長官也希望發展*Moodle*平台，因此對於本教學實驗提供充分的資源，讓研究者無後顧之憂。下圖爲*Moodle*教學平台介面。

圖3-4-1 *Moodle*平台介面介紹之作品分享區

本校有兩間電腦教室，實驗預視因為只有 30 名學生，所以於小電腦教室進行實驗。而教學實驗進行的地點在本校 A 棟 3 樓之大電腦教室，裡面配有 48 部個人電腦提供學生使用，另外有 2 部教師用的電腦及前、後兩部單槍。實驗時學生在電腦教室分成八組進行小組討論及觀察學習。

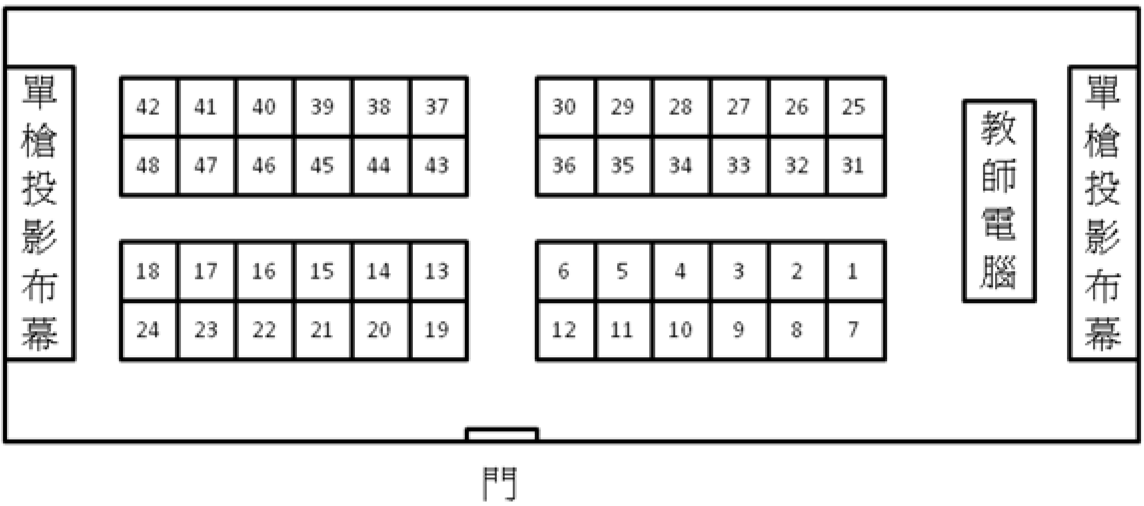


圖 3-4-2 電腦教室配置圖

四、　研究結果與討論

本研究計畫之教學實驗，預計從2010年9月1日起至2011年1月20日止，實驗期爲一整個學期，實驗分成三階段進行，探討數學教師將動態幾何系統*GeoGebra*融入數學課程的教學策略，然後藉由學生操作動態幾何系統*GeoGebra*階段性的學習成果，探討策略的可行性，學習成果包含各項測驗成績及學生作品。以下分別就各階段的實驗過程、實驗結果及學生的學習迷失分別說明與討論。

本研究計畫第一階段的實驗課程，執行自2010年9月1日起至2010年10月14日爲止，第一階段的實驗課程設計，學生每個星期利用兩節班級時間到電腦教室，透過一人一機操作*GeoGebra*的方式，老師引導學生做小組觀察學習，除了期中考前的二個星期因爲各學科需要利用班級時間幫學生做複習測驗沒有操作之外，其餘四個星期學生都到電腦教室實際操作，每個星期有二節課，總共上機操作8節課。以下爲第一階段的課程內容、實驗過程中的問題及後測與延後測的結果分析與探討。

4.1　第一階段的實驗過程與結果

4.1.1　第一階段的實驗主題及探索課程內容

在99新課綱第一章的第二節數線上的幾何，主要在探討與數線相關的概念，譬如：分點公式；其中絕對值的問題爲單元的課程重心，學生處理此類問題時，往往只是存粹在做代數運算，而不太會從幾何概念或者是函數圖形的方向思考，學生解題時只重複的根據正、負號的判斷來拆解絕對值，然後計算出答案，雖然會做，但是對於題目的內涵，單元主題所傳達概念的認知是脆弱的。因此研究者首先選定這個主題，當做將動態幾何系統*GeoGebra*運用於高中數學教育之策略探討的第一階段實驗的學習內容。

當老師問學生：「什麼是絕對值？」。多數學生的都是回答：「絕對值是正的。」老師再問學生：「絕對值的幾何意義是什麼？」，少數學生就會回答：「絕對值代表距離。」老師又問學生：「誰和誰的距離？」，學生：「……」學生沉默的原因是他們突然不知道該如何回答這個問題，多數學生只記得絕對值是正的，至於「誰和誰的距離？」

以前很少運用，雖然好像知道但是卻又不是很清楚。「絕對值是正的！」這句話並不是幾何意義，而是代數運算的結果而已，從學生回答的答案中可以了解學生並不是不知道絕對值的真正含意，而是因爲在他學習的歷程中一直在運用代數結果，很少運用幾何意義去思考問題罷了。因此學生在處理這類問題的時候，很習慣的純粹因正、負號的判斷而拆解絕對值，然後計算出其結果，最後得到答案，但是答案所代表的涵意爲何？該如何解釋他所算出來的答案？就學生的認知而言，答案就只是答案而已，沒有其它意義。因此當老師問學生：「你知道它代表什麼意思嗎？」學生的反應通常是：「……」，許多學生在解數學問題時，看到題目根據學習經驗開始計算，只是反射動作而已，所以我們常聽到學生說：「這題老師沒有教，那題老師沒有教，所以我不會算。」從這些對話中我們可以了解學生並不是真正明白爲何要這樣去處理問題，只是把過程默寫出來而以，對於整個數學概念一知半解，所以要求學生將生活當中所遇到的問題轉換成數學式，對於多數中等程度以下的學生而言是一件非常困難的工作。老師必須多引導學生將日常生活當中的問題轉換成數學式，讓學生感覺到原來日常生活當中除了買東西付錢是數學之外，生活週遭到處都是數學問題。

因此本研究第一階段實驗之課程設計從探索絕對值函數圖形開始，藉由絕對值函數圖形的觀察學習所得到的圖像概念，引導學生一步一步的推演下列各項探索主題，最後再利用絕對值函數的幾何意義做課程做結論。各項探索主題：

(1) 絕對值函數圖形的基本判斷
(2) 將絕對值函數以條件函數型式呈現
(3) 絕對值方程式根個數的判斷
(4) 解絕對值方程式的計算
(5) 絕對值不等式的解的範圍
(6) 絕對值函數極值的發生處與極值的計算
(7) 絕對值極值發生處與極值的幾何意義探索

4.1.2　第一階段的實驗過程

1.　單項式絕對值函數的圖形討論：$y=|ax+b|$

(1)　單項式絕對值函數基本圖形的判別：

研究者請學生在紙上畫出二元一次方程式$y=x+2$的圖形，並請一位同學在黑板上畫，由於國中的學習經驗，學生很快的就完成了。學生先畫出坐標平面，然後利用代入法找出位於直線上的兩個點，多數學生皆取兩軸上的點，再將兩點連線畫出一直線，但是問學生爲什麼圖形是一條直線呢？有些學生的回答很妙:「國中老師就是這樣教的呀，我也不知道爲什麼。」。接著研究者請學生互相討論關於 $y=|x+2|$ 的圖形，並在紙上畫出，結果出現了下面兩種不同的答案。

第一類學生認爲圖形應該如右圖4-1-1，此類學生根據以往的學習經驗，了解絕對值的結果一定不是負的，但是卻誤以爲是定義域的x須爲正數(雖然他不清楚定義域的概念)，因此學生認爲直線應位於在X軸正向，所以圖形的左半部不見了，學生就畫出如圖4-1-1的圖形。

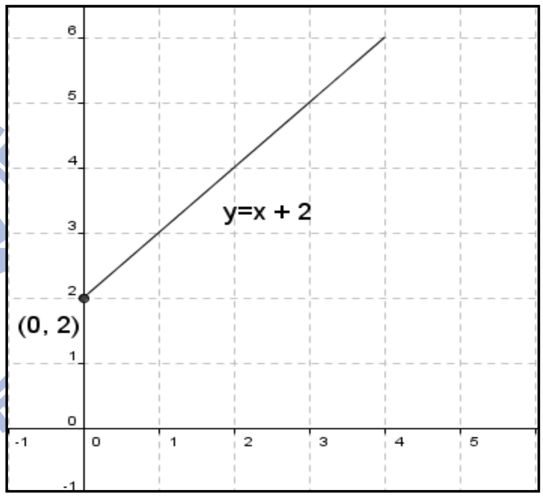


圖4-1-1　圖形迷失類型(一)

第二類學生認爲圖形應該如圖4-1-2，同樣的此類學生根據以往的學習經驗，了解絕對值的結果一定不是負的，因此他認爲值域 y 的值必須爲正數，因此學生認爲直線應位於在Y軸正向，所以圖形在Y軸負向的部分被擦掉了，學生就畫出如圖4-1-2的圖形。

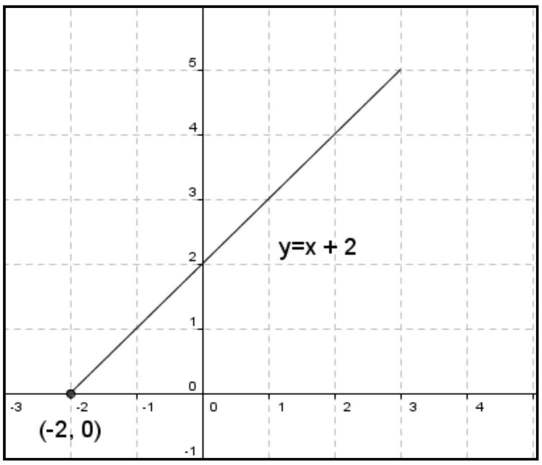


圖4-1-2　圖形迷失類型(二)

這二類的同學很明顯的是對於定義域與值域的觀念是不清楚的，一知半解的結果把

兩種概念混在一起，在沒有仔細思考的情況下，才會畫出上述的圖形，如果養成學生多動腦思考，許多這類的問題應該很容易被解決。

老師透過*GeoGebra*幾何視窗，指導學生設計目標函數，透過滑桿引導學生觀察函數圖形之變化，學生看到函數圖形之後一陣詫異，如圖4-1-3，經過混亂的討論之後，每個學生有如大夢初醒，不用老師講解都很了解自己剛才的問題在哪裡！

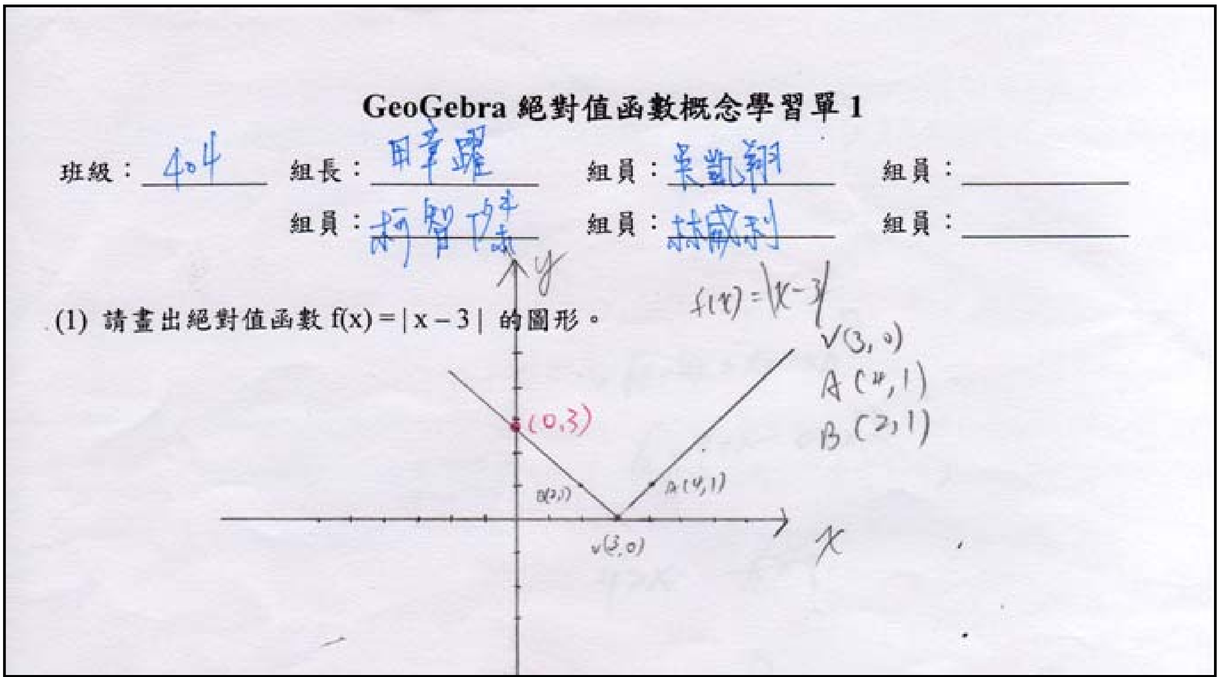


圖4-1-3 學生觀察學習歷程一

師：「你們想想看，圖形為什麼是這樣呢？」

學生TB：「嗯，因為絕對值的結果是正的，所以原來的值如果是負的，加上絕對值之後就會變成正數。」

師：「不錯喔！清楚了嘛！那剛才的問題在哪裡？」

學生TB：「忘記加絕對值，所以少了另一半的圖形。」

師：「Good！你們看到這個圖形，有沒有感覺圖形像什麼英文字母呢？」

學生TB：「像英文字母的V。」

學生已經知道單項式絕對值函數的圖形長的像英文字母V，接下來的研究者想要引導學生觀察函數圖形當中的轉折關鍵點的座標該如何計算或觀察，以及V字的左、右兩條射線的方程式為何？還有左、右兩條射線與轉折關鍵點的關係為何？最後引導學生以

條件函數的型式表現出他看到的情形。藉此加強學生對於定義域與值域的概念，使得學生對於函數的對應關係及觀念更清楚。

師：「大家既然都已經知道$f(x)=|x+2|$的圖形長的像英文字母的V，請利用剛才的檔案，移動數值滑桿a，觀察轉折點的座標該如何計算呢？」

學生KB：「令$x+2=0$，$x=-2$，就可以得到轉折點的座標為（-2，0）。」

師：「很好，只要解$f(x)=0$，就可以得到轉折點。」

以上記錄擷取自99/09/06

師：「大家都已經了解$f(x)=|x+2|$的圖形長的像英文字母的V，也知道轉折點的座標，圖形看起來很像是由兩條射線所組成的，請你們寫出這兩條射線的方程式？並寫出其定義域x的範圍？也就是說當x的範圍是…時，$f(x)=$…？」

研究者發現，全班只有極少數的學生可以馬上在學習單上作答回答問題，多數學生對此問題是感到困惑的。

師：「同學可以利用*GeoGebra*指令列”點”的工具，在射線上任取相異兩點，利用*GeoGebra*指令列”直線”的工具，畫出直線，再從代數視窗觀察直線的方程式，如此找出兩條射線方程式，注意觀察兩條線的關係！」

實驗之後約有三分之二的學生可以自行利用*GeoGebra*順利完成觀察並寫下直線方程式，約三分之一的學生因為指令操作問題，須協助後才能完成觀察。但是對於定義域x的範圍，五分之四的同學皆無法明確指出，甚至其中約有五分之一的學生對於定義域的概念是非常薄弱的。

師：「請同學觀察右側這條射線的方程式與函數的關聯性？。」

學生CB：「把函數的絕對值符號直接去掉，就可以得到右邊的直線方程式。」

師：「漂亮！不過如果x項的係數是負的，你剛才的結論還是對的嗎？。」

學生LB：「嗯，因為右邊直線的方向都是從左下到右上，所以斜率都是正的，因此x項的係數必須為正的，只要想辦法讓x項的係數為正的，所以如果x項的係數是負的，只要方程式右側同時乘一個負號，使得x項的係數變正的就對了。」

師：「很棒喔！請觀察左、右這兩條射線的方程式有何關係？」

學生WG：「左、右兩支剛好差一個正負號，只要把右邊的射線方程式乘上一個負號就會得到函數圖形左邊的射線方程式。」

(正確的說法應該是將$y=ax+b$改成$y=-(ax+b)$，學生口語表達不是很精準，但是從言行中可以知道學生是理解的，因此沒有予以修正。)

師：「漂亮喔!觀察得很仔細！那請你們再討論看看定義域的範圍呢？」

學生WB：「老師!什麼是定義域？」

師：「就是當x的範圍是…時，$f(x)=\ldots$？」

對於老師的這個題目多數的學生是停滯的，因爲學生不太了解何謂定義域與值域，雖然國中學過函數，但是對於定義域與值域的感覺是很陌生的，教師解釋說自變數的範圍稱做定義域，應變數的範圍稱爲值域，學生還是不太清楚，於是教師又解釋說x的限制範圍稱做定義域，y的範圍稱爲值域，學生才開始作答。

師：「請你們觀察看看，左、右那兩條射線與關鍵點的關係為何？」

學生WG：「關鍵點右邊的直線斜率為正，關鍵點左邊的直線斜率為負。」

師：「很好喔，如果用關鍵點的x座標來描述兩射線方程式，你要怎麼形容呢？」

學生MG：「當$x\geqq 2$，$y=x+2$，當$x<2$，$y=-x-2$」

以上記錄擷取自99/09/09

當學生按照老師的指示設計他所要觀察的射線方程式時，許多同學都遇到了相同的問題，當他移動數值滑桿觀察射線方程式的時候，他所畫的射線會跑掉，導致影響到觀察的結果，研究者要學生想想射線爲什麼會跑掉，學生互相討論後還是想不出來原因，研究者告訴他們，是射線建構方式的問題，請他重新建構射線，提示他其中一個點必須是轉折點，學生操作後發現問題果真不見了，射線變正常了。研究者要學生想想兩種建構方式的差別，學生依舊想不出來，研究者告訴他因爲有滑桿，才可以用動態的方式觀察函數圖形及射線方程式的變化，但是也因爲如此，他原來所選取的兩個固定點位置會因爲函數圖形位置改變而改變，導致圖形與他的想像不同，但是選取轉折點時，轉折點原本就是動態的，所以只要慎選另一固定點就可以了。研究者認爲這是學生不熟習環境的問題，當學生熟悉*GeoGebra*時，這些問題將會消失。數學是一門注重邏輯分析的課程，透過建構的過程學生可以學習嚴謹的概念。現在許多的數學軟體都是注重學生在幾何物件建構的過程當中學習數學概念，例如：*Cabri* 3D、*Gsp*……等數學軟體。比起傳統的

軟體輸入後即得到答案，學生不清楚做圖過程一知半解好太多了。這也是近年來有許多的研究探討動態幾何系統融入課程的主要原因之一。

這個單元學完之後，隔天上課時研究者對學生做了一個小測驗，出了四道題目想了解學生對於將絕對值函數轉換成條件函數，是否會有學習上的問題，其中一個題目如下：

設$f(x)=|x-2|$，請畫出$f(x)$的圖形，並在圖形上標示轉折點座標，寫出左右半部的射線方程式，並寫下其x的範圍。

結果發現一個很有趣的現象，那就是基本上90%的學生皆可完成小測驗，其中約有50%的學生是依照前一天的學習經驗，很快的完成兩條射線方程式如圖4-1-4，但是約有40%的學生，是先利用觀察法找出位於右側射線上的兩個格子點，然後再利用$y=ax+b$，將兩個點的座標代入方程式，解出a、b，然後寫出右側的射線方程式，將方程式右側乘上負號，再寫出左側的射線方程式如圖4-1-5。看到這個現象，令人哭笑不得，但也感受到要學生學習新的方法，取代已沿用許久的方法是不容易的，而且也發現學生的觀察、歸納、分析的能力有待加強，因爲有高達40%的學生有如此的問題，比例比研究者想像中的高，原先研究者認爲如此簡單易懂的觀察學習法，學生應該印象深刻，馬上就能舉一反三，但是事實並非如此，要學生接受新的東西是需要時間去磨的。

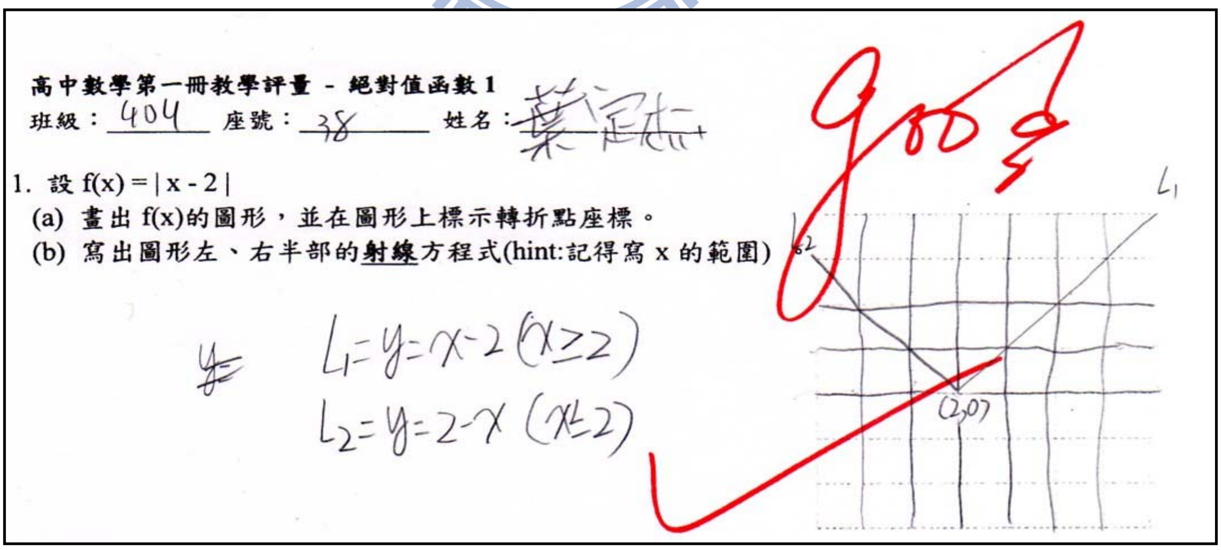


圖4-1-4　學生將絕對值函數以條件函數表示法之類型一

關於定義域的部分，超過半數的學生無法用數學符號表示定義域與射線的關係是原本就是在研究者的判斷當中，因此又利用一節課的時間去電腦教室請學生重新操作一次，

研究者再次對定義域與值域的概念解說一次。經過此次再學習的結果，90%的學生都能順利快速的完成任務，但是仍有極少數學生排斥它。

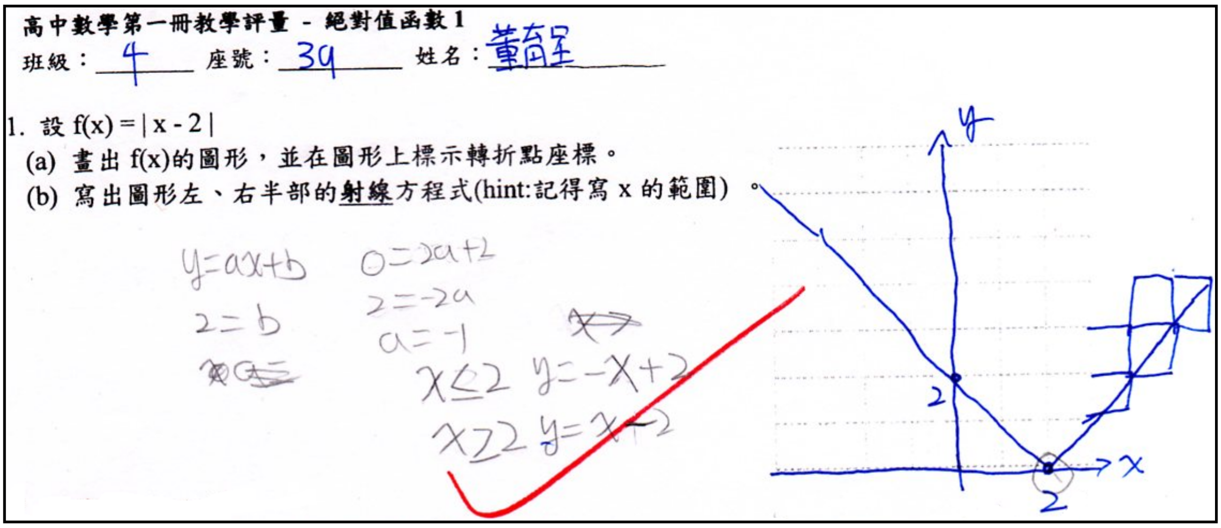


圖4-1-5　學生解題方法之類型二

師：「請設計二個數值滑桿a、m，其中$m>0$，指令列輸入$f(x)=abs(mx+a)$，移動數值滑桿m，觀察兩射線的變化為何？」

學生CB：「m愈大，兩射線的開口就愈小；m愈小，兩射線的開口就愈大。」

師：「如果只單看右側的直線呢？」

學生CB：「m愈大，直線越陡；m愈小，直線越平緩。」

師：「good！m代表斜率，斜率愈大，直線越陡；斜率愈小，直線越平緩。」

以上記錄擷取自99/09/13

(2) 單項式的絕對值方程式解的個數討論：$|ax+b|=k$

師：「有沒有人知道絕對值方程式的解到底有多少個呢？例如：$|x+2|=3$、$|x+2|=0$、$|x+2|=-3$。」

學生KB：「這太簡單了，我還可以告訴你它的答案喔。」

當學生KB要說下去的時候，馬上就被教師制止了。

師：「你們都很厲害，不過我目前只想要知道它的答案個數就好了喔。」

學生CB：「去掉絕對值後等號右邊會有正負號，所以有兩組解。」

師：「很棒喔，有沒有其他的解釋呢？」

學生WG：「$|x+2|=|x-(-2)|=3$，表示x到-2這個點的距離等於3，所以x可能在-2的左、右兩邊，所以有兩組解。」

師：「太棒了！」

師：「根據剛才的說法，假設$|x+2|=k$，我們現在利用*GeoGebra*觀察一下，當k改變時$y=|x+2|$及$y=k$兩個圖形的交點個數與數值k的關係，請將你看到的結果記錄下來，寫在學習單上。」

學生CB在學習單寫下如下之紀錄：

$k<0$，無交點

$k=0$，有一個交點

$k>0$，有兩個交點

從學生的回答可以看出來學生CB只是在做純代數計算，雖然學習單上的答案是正確的，可是老師感覺到CB並沒有將兩個觀念統合在一起，而是在學習單上寫一個老師要的答案而已，對於絕對值的概念仍然停留在絕對值的代數結果；而學生WG已經會將絕對值的幾何意義引入解題當中，是研究者期望學生擁有的多元化思考解題模式與技巧。因爲學生要融入*GeoGebra*的環境學習，學生須要具備多元思考的能力，建構幾何物件要有豐富的想像力，觀察圖形要有邏輯推理與歸納分析能力，學生具備上述能力學習效果才會提升，而上述能力是需要時間慢慢養成的，並非一蹴可及，因此資訊融入教學實務的過程與技術是緩慢的。

(3) 單項式的絕對值方程式解法討論：解$|ax+b|=k$

藉由上面的討論，學生對於方程式解的個數與常數k的關係有初步的概念，至於要如何才能得到單項式絕對值方程式的解？學生在國中時就會利用代數方法及絕對值的幾何意義得到答案了！所以研究者想要引導學生從函數圖形方向切入。

師：「我們現在用另一種觀點來看這個問題，各位記得國中的時候解二元一次聯立方程式嗎？二元一次聯立方程式的圖形是二條直線，聯立方程式的答案（x，y）在圖形上代表什麼意思呢？」

學生WB：「答案就是這兩條直線的交點座標。」

師：「漂亮！所以要解｜$x+2$｜$=3$，我們可以假設$y=$｜$x+2$｜及$y=3$，然後解聯立方程式的答案，對不對？」

學生WB：「……」

經過學習單的檢驗，同學多數都能寫下正確的結論。不過從學習單的內容觀察到一些特殊現象，可能是因爲單項式絕對値這個主題學生之前已經學過了，或者是題目太簡單，學生認爲老師的方法太麻煩了，因此多數學生只是將舊經驗記錄下來，並非真正去落實老師要求觀察圖形特徵的指令，因此並非真正執行老師想要學生學習的概念，是一件比較可惜的事情，不過研究者從中也得到一些回饋，那就是素材的設計須有些許的挑戰性學生學習新概念的意願才會提高。學生從小到大因爲家長的工作時間的關係，很多人都在補習班或安親班待過，也有許多人從小學補習到現在，所學到的數學，許多都是速成的，學生及家長要求要越快解出越好，分數越高越好，爲什麼要這樣解題，並不在他們的思考當中。以下是研究者用配方法教學生求二次函數的頂點、極値時，有位學生與研究者的一段對話、

學生YB：「媽媽教我用微分的方法求二次函數的頂點，我覺得很方便、好用、快速，配方法太慢了不好用。」

師：「那媽媽有告訴你為什麼可以這樣做嗎？」

學生YB：「我有問過，媽媽說不用知道為什麼！會算就好！這樣最快喔！」

師：「方法是很棒啦，不過，你可以告訴老師媽媽大學是念什麼科系呢？」

學生YB：「我媽媽是念商科的。」

師：「哇！媽媽好厲害喔！」

從上面的教學經驗中可以知道，想要藉由學生操作*GeoGebra*，透過小組合作觀察學習，建構屬於學生自己的知識庫，以這個方向將DGS融入高中的數學課程，是一件蠻負有挑戰性的任務，它會面臨許多層面的挑戰，學生的學習習慣、家長的認知與期待、學校同事所賦予無形的壓力。每項因素都有不可忽略的重要性，其中以學生很容易就將既有的學習經驗引入教師所設計的學習單中，覺得重新學習新方法很麻煩，而不願嘗試新的觀點導致學生會因爲學習過程緩慢而顯得不耐煩，對於整個實驗課程的執行影響最大，教師在設計教案時應該盡量避免讓學生有直接利用舊經驗的機會，素材盡量生活化，否則老師必須有心理準備因爲學生上課不專心，使得學習效果大打折扣。

範例：解｜$x+5$ ｜$=4$

i. 傳統解法：純代數計算，學生只是拆解絕對值，然後計算出結果而已，對於答案所代表的意義不清楚，很難將所學融會貫通於生活當中。

$x+5=4$或-4，

$x=4-5$或$-4-5$，

$x=-1$或-9

ii. 幾何意義解法：連結幾何意義，學生解題時，比較具有想像力，可以理解答案的內涵，但遇到複雜一點的問題，學生就難以應付。

｜$x+5$ ｜$=4$，

｜$x-(-5)$ ｜$=4$，

數線上一點 x到-5的距離爲4，

$\therefore$ x可能在-5的左方，$x=-5-4=-9$

或右方，$x=-5+4=-1$

$\therefore$ $x=-1$或-9

iii. 函數圖形解法：以函數圖形觀點切入，學生解題時較具有想像力，可以理解答案在圖形上的意義，對於較複雜的題型，學生也可以輕鬆解出。

右側交點$\begin{cases} y = x+5 \\ y = 4 \end{cases}$，得 $x+5=4$，$x=-1$，

左側交點$\begin{cases} y = x+5 \\ y = -4 \end{cases}$，得 $x+5=-4$，$x=-9$，

$\therefore$ $x=-1$或-9

師：「我們現在繼續用剛才的學習檔案來看這個問題，我們發現當$k>0$時，圖形有兩個交點，也知道絕對值函數是由兩條射線所組成，妳們覺得怎樣可以得到交點座標呢？」

學生WB：「右邊交點 $x+5=4$，$x=4-5=-1$，左邊交點 $x+5=-4$，$x=-4-5$，$x=-9$，$\therefore$ $x=-1$或-9。」

師：「漂亮！你要記得這個方法喔！」

學生MG：「這樣太麻煩了，我覺得原來的方法比較簡單。」

師：「嗯！目前看起來是這樣沒錯，不過解題概念及想法不同，過一段時間妳就會了解的，無論如何就請妳們先記得有這個方法囉。」

由於現階段課程的內容比較簡單，研究者觀察到素材設計時隱含的概念學生不易感受。因此建議有意願實施DGS融入數學課程的教師，最基礎的課程概念除非學生完全沒有學習經驗，宜由教師講解帶過即可，否則如果教師想從最基礎的部分做開始，可能會面臨學生學習意願打折扣的挑戰，而且學習效果不佳的情況。

(4) 單項式的絕對值不等式討論：解 $|ax+b|\geqq k$ & $|ax+b|<k$

當學生已經了解如何得到絕對值方程式的解時，接下來我們想討論的是如何解不等式？所以老師在黑板上出了一個不等式的題目，請同學討論後將答案寫下來。觀察學生的討論情形，發現有幾組學生寫下如此的答案：

範例：解 $|x+5|\geqq 4$

解(1)：$x+5\geqq 4$，$x\geqq 4-5$，$x\geqq -1$

$x+5\geqq -4$，$x\geqq -4-5$，$x\geqq -9$

$\therefore$ $x\geqq -1$，$x\geqq -9$

解(2)：$x+5\geqq 4$，$x\geqq 4-5$，$x\geqq -1$

$x+5\geqq -4$，$x\geqq -4-5$，$x\geqq -9$

$\therefore x\geqq -9$

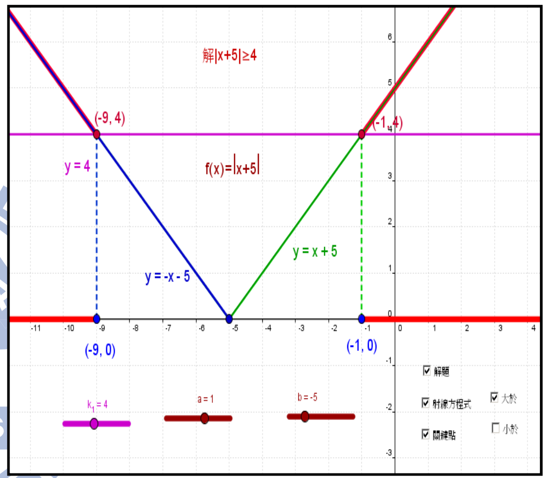


圖 4-1-6 絕對值不等式的圖解概念

從解(1)與解(2)來觀察，很明顯的發現學生在不等式的統整觀念上產生了一些迷失問題，傳統教法中許多學生的認為不等式的解法與方程式是一樣，以為去掉絕對值後等號另一邊直接加上正、負號即可，於是產生上述的問題，學生也檢查不出自己到底是錯在哪裡？解(1)的同學計算出兩組答案後，不知道該取聯集還是交集，於是兩個答案都寫了。解(2)的同學計算出兩組答案後，將兩個答案取了交集。但是研究者發現，利用函數圖形解題的學生如圖4-1-6，對於不等式方向的迷失概念，除了端點可能忘記考慮的問題，在解題想法的概念上比傳統解法的學生有比較好的表現。不過從學生的基礎計算能力來觀察，能力都差不多，因此傳統教法中如果可以引導學生做觀念澄清的思考，而不是只有把結果記下來，相信學生的表現會是一樣的。研究者相信只要學生能夠結合三種概念解題，融會貫通，數學是一門很快樂而且很好玩的學科。

以上記錄擷取自99/09/17及99/09/20

學生MG是一位數學程度很好、又認真的學生，但是她喜歡傳統的代數解法更甚於*GeoGebra*，於是老師在電腦課時，經常會特別走到學生MG旁邊，指導她操作觀察學習檔案，並與她進行討論。

師：「MG妳可以告訴我們，$|x+5|\geqq 4$的解嗎？」

學生MG：「$x\geqq -1$，或$x\leqq -9$。」

師:「嗯！很好！有沒有覺得圖形觀察不等式的解變容易的。比純代數計算有感覺！」

學生：「……」

現階段的學習主題學生是不容易感覺到*GeoGebra*的優勢，因為課程內容不難，且學生已習慣傳統解法，因此學生的接受度並不高，學生只是因為老師目前上這個內容所以跟著學而已，從學生的解題可以發現多數學生還是習慣於傳統教法。

實驗到目前為止，主要的目的為加強學生對於單項式絕對值函數$f(x)=|ax-b|$圖形的想像力，並強化$|x-a|$所表示的幾何意義是數線上P(x)到座標A(a)的距離，希望學生解題時能夠盡量利用這兩個方向思考，而非單純的代數計算。以下為學生目前對於$f(x)=|ax-b|$圖形特徵的已有的基本概念：

(一) $f(x)=|ax-b|$的圖形像英文字母V，轉折點的x座標為令$ax-b=0$，$x=\frac{b}{a}$。

(二) $f(x)=|ax-b|$的圖形中左、右的二射線方程式。

(三) $|ax-b|=k$，兩射線與水平線的交點，隨著k值改變，答案的個數就會改變。

(四) $|ax-b|\geqq k$，解的範圍為圖形交點之上半部。

(五) $|ax-b|\leqq k$，解的範圍為圖形交點之下半部。

討論完單項式的絕對值函數的概念之後發現，學生對於老師想傳達的想法理解程度不高，或者是說學生覺得很麻煩，畢竟單項式絕對值的問題國一就學過了，某些觀念根深蒂固，突然要他們用另一種方式思考，就單項式的絕對值函數而言，實在是"殺雞用牛刀"多此一舉。但是課程接下來將延伸到二項以上的絕對值函數，學生將會發現遵照著既有的做法是很辛苦的，改變思考方向，原來題目是如此的容易，也觸發學生開始對於*GeoGebra*課程的興趣。

2. 二項式的絕對值函數圖形討論：$y=|x-a|+|x-b|$

(1) 二項式絕對值函數基本圖形及條件函數：

師：「大家都已經知道$f(x)=|x-1|$的函數圖形像英文字母的V，你們認為$f(x)=|x+1|+|x-2|$的函數圖形會是什麼樣子呢？」

研究者觀察發現，全班只有少數的學生馬上在學習單上作答回答問題，也發現這些學生都是用傳統的討論方式做答，表示學生在補習班已經學過了，但是這些學生分段討論之後就停了下來，因爲題目要學生畫圖，而他分段討論後得到三個函數，因此他不知道圖形與函數之間的關聯性，因此畫不出圖形。但是多數學生對此問題是感到困惑的，也沒有學生企圖用*GeoGebra*找出答案。

師：「利用*GeoGebra*，模仿單項式的絕對值函數的指令，試試看！」

師：「你們看到這個圖形，有沒有感覺圖形像什麼呢？」

學生LB：「像倒過來的ㄇ。」

學生CB：「像臉盆。」

師：「都很棒，很好的觀察。那你們有沒有注意到轉折的位置？」

學生KB：「跟之前一樣，只要分別假設兩個絕對值等於0，就得到兩個x了。」

師：「很好，我們就把這兩個點稱為關鍵點吧。」

由於先前討論過單項式的絕對值函數圖形，學生已經初步的了解類似的概念，所以進行的速度非常的快且順利。

師：「你們認為圖中的三條直線的方程式為何？請利用*GeoGebra*指令列”點”與”線”的工具來協助觀察。」

師：「看出來三條直線的方程式了嗎？」

學生：「……。」

師：「有沒有發現最右側的直線方程式剛好是$y=(x+1)+(x-2)$，$\therefore y=2x-1$，也就是絕對值去掉後直接相加呢！」

學生CB：「對ㄟ。」

師：「那左側的直線方程式呢！」

學生TB：「$y=-2x+1$，$y=-(2x-1)$，剛好與右邊差一個負號。」

師：「右邊跟左邊的射線方程式與單項式函數的做法是一樣的，對吧！那中間那條直線的方程式呢？」

學生：「……」

師：「嗯，你們觀察左、右兩個關鍵點的y座標有什麼關係？」

學生CG：「兩個關鍵點為$(-1，3)$、$(2，3)$，y座標相同。」

師：「所以關鍵點的連線與y軸會垂直嗎？」

學生CG：「會啊。」

師：「關鍵點的連線垂直y軸，所以直線方程式是？」

學生CG：「$y=3$。」

師：「嗯！很好，所以中間的直線為關鍵點的y座標，對吧！」

以上記錄擷取自 99/09/23

隔天研究者對學生做了個小測驗，看看學生是否能夠畫出正確的函數圖形，研究者在旁觀察記錄，發現多數學生雖然可以畫出正確圖形，但是感覺學生只是把印象當中的圖畫出來，實際上不是很清楚圖形的由來？研究者發現許多學生在解題時還是使用傳統分段討論的模式，表示學生並沒有注意到函數圖形與分段討論的結果兩者之間的關聯性，所以沒有將兩者的關係串連起來。因此研究者花了一節課的時間，將傳統分段討論的方式與函數圖形做對照比較，將兩者串在一起，以左、右關鍵點將函數區分成兩部分。學生突然發現畫函數圖形的做法等同於傳統的分段討論方式，只是以圖像方式呈現而已，而且解題速度比傳統討論的方式快，更明確。

研究者建議學生希望學生除了以代數方式來解題之外，也能從幾何概念及函數圖形的方向來思考問題的解決方式，相信學生會有不一樣的解題模式，對於解決問題的能力一定會有所提升。花了二節課的時間，學生終於知道老師的目的，上電腦課時終於比較積極的參與討論。比較圖4-1-7及圖4-1-8二位學生的寫法，在圖4-1-7中發現學生遵循前一天老師講解後的結果，中規中矩的將圖形完整的畫了出來，但是內容比較缺乏想像力，而在圖4-1-8中發現學生已經完整的融會貫通，很快的將圖形完整的畫了出來。比較兩位同學的做法及研究者在旁觀察的結果，研究者認爲第二位同學比第一位同學具有豐富的想像力，繼續學習*GeoGebra*、引發潛能將來應該會有很好的收穫。

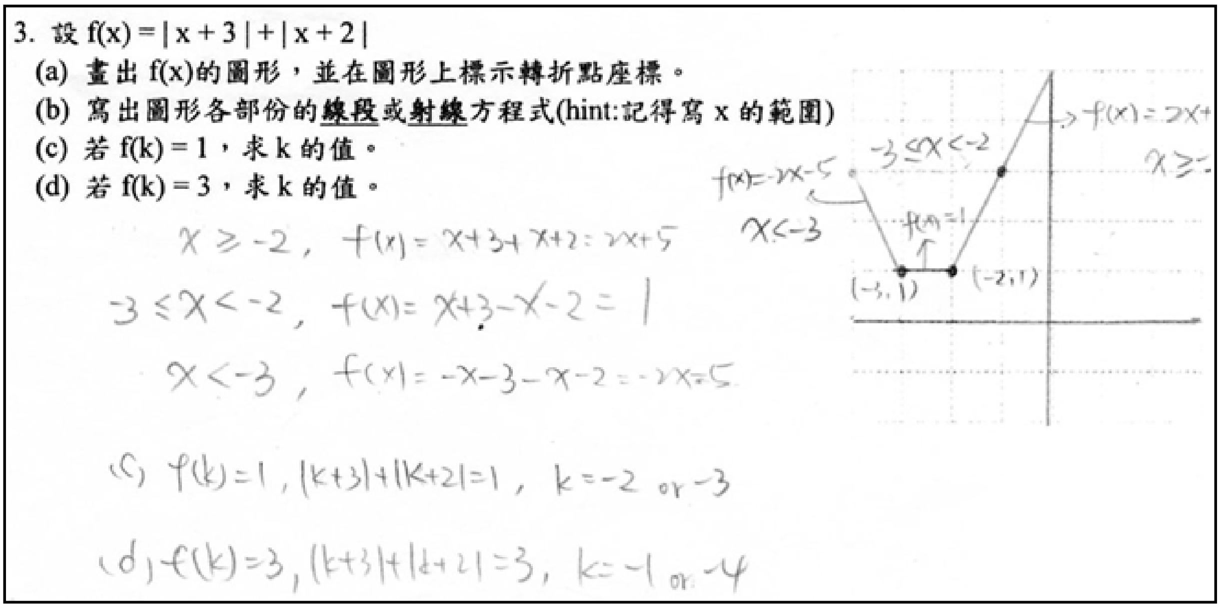


圖4-1-7　二項式絕對值函數圖形(一)

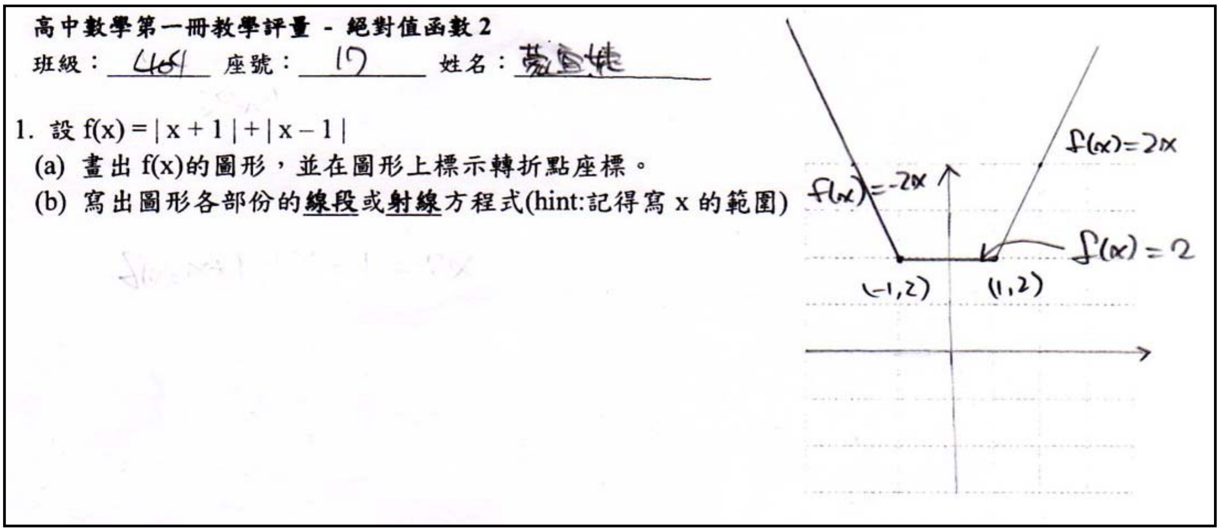


圖4-1-8　二項式絕對值函數圖形(二)

(2) 二項式絕對值方程式解的個數及解法：

師：「我們已經知道｜x＋2｜＝3有兩組解，那有沒有人知道｜x＋4｜＋｜x−2｜＝8有幾組解呢？」

學生TB：「2組。」

師：「不錯喔！那你知道為什麼嗎？」

學生TB：「因為去掉絕對值就有正、負兩個答案呀！。」

師：「哈！哈！那｜x＋4｜＋｜x−2｜＝3也是有2組解，對嗎？」

學生TB：「對ㄚ！」

我們可以發現學生對於絕對值方程式的解有錯誤的解釋，如果只單純從學生的答案來看學生是否已經學會？是很難看出他們的問題，學生必須等到做到複雜一點的問題時才會發現問題，等到老師發現學生整個觀念有問題時，往往已經來不及補救了，除非再花時間處理，可是課程授課時間是不允許的。

師：「你先畫出$y=|x+4|+|x-2|$，再畫出$y=8$，兩個圖形有幾個交點，就有幾組解？」

學生TB：「有兩個交點，所以有兩組解。」

師：「那要怎麼找出答案呢？」

學生TB：「解聯立方程式就可以了。」

師：「Good！」

範例：解：$|x+4|+|x-2|=8$

i. 傳統解法：

第一步先找到關鍵點-4、2

(1) 若$x\geqq 2$，則$(x+4)+(x-2)=8$，$2x+2=8$，$x=3$

(2) 若$-4\leqq x<2$，則$(x+4)-(x-2)=8$，$6=8$(不合)

(3) 若$x<-4$，則$-(x+4)-(x-2)=8$，$-2x-2=8$，$x=-5$

$\therefore x=3$或$x=-5$

ii. 函數圖形解法：

第一步先找到關鍵點-4、2，

$F_1(x)=x+4$，$F_2(x)=x-2$，

(1) 右射線$f_R(x)=F_1(x)+F_2(x)=2x+2$

(2) $f_M(x)=F_1(x)-F_2(x)=6$

(3) 左射線$f_L(x)=-f_R(x)=-2x-2$

$y=8>6$，$\therefore$與$f_R(x)$、$f_L(x)$有交點

$\therefore 2x+2=8$或$-2x-2=8$

$\therefore x=3$或$x=-5$

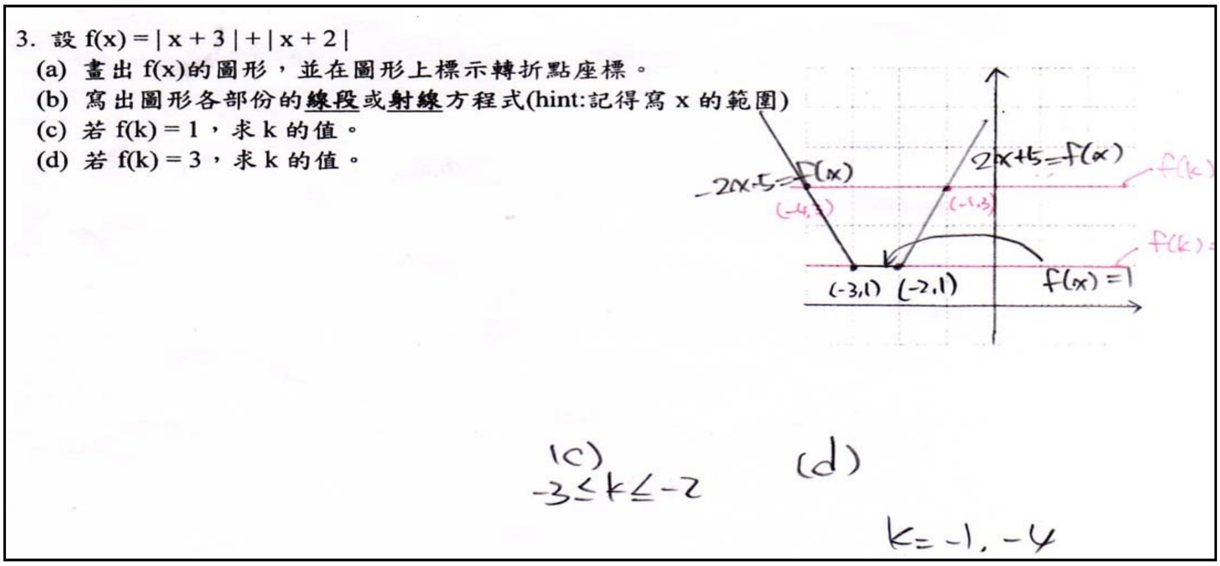


圖4-1-9　　二項絕對值方程式學生之函數圖形解法

兩種方法的差異在於使用傳統解法時，學生只是單純的在做代數運算，對於整個題目的缺乏完整性的概念，學生分段討論後，須再將各分段的解答統整後才會知道答案為何？不過邏輯分析的部分就是學生最弱的地方，學生多數是因為不會統整，不知道該取交集或聯集，所以無法寫出正確答案！由其是有增根的時候。而使用動態幾何解題的學生可以很明確的指出答案會落在哪二個區塊，可以很快的解出答案，尤其是不等式的問題或者是較複雜的題型差異更是明顯。由圖4-1-10可以看到學生分段討論後，並沒有再將答案整合，對於答題的完整性稍有瑕疵，重點是學生的統整能力薄弱，對於學生將來更進一步的學習是有妨礙的。

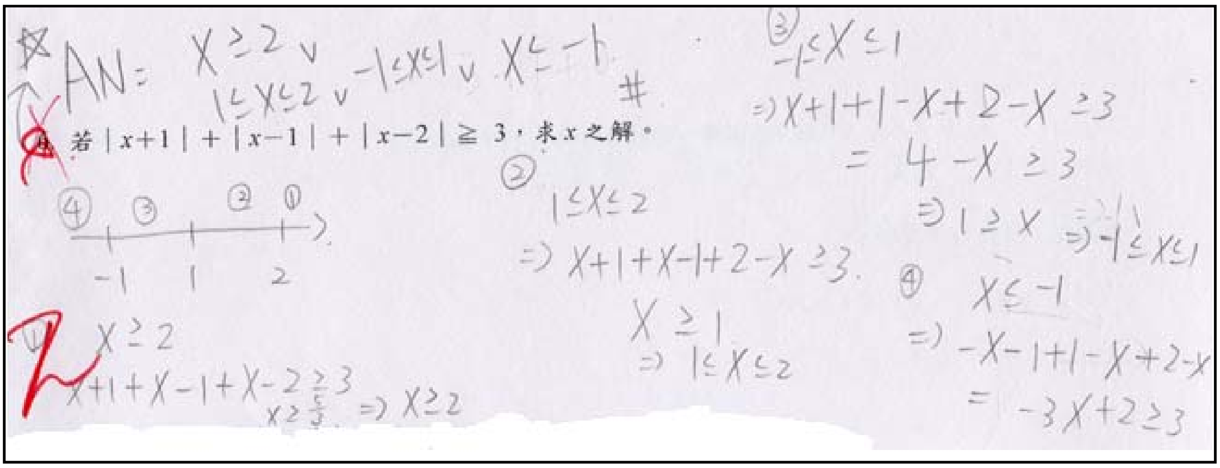


圖4-1-10　　三項絕對值不等式討論式的傳統解法

(3) 二項式的絕對值不等式討論：解｜$x+a$｜＋｜$x+b$｜$\geqq k$

師：「我們現在已經解出｜$x+4$｜＋｜$x-2$｜$=8$，$x=3$或$x=-5$。

那｜$x+4$｜＋　｜$x-2$｜$\geqq 8$的解為何？」

學生WG：「在$y=8$的上方，∴ $x\geqq 3$，$x\leqq -5$。」

師：「很好。那｜$x+4$｜＋｜$x-2$｜$\leqq 8$呢？」

學生WG：「在$y=8$下方，∴ $3\leqq x\leqq -5$。」

師：「嗯，Good，很棒喔。」

範例：解：｜$x+4$｜＋｜$x-2$｜$\geqq 8$

i. 傳統解法：

第一步先找到關鍵點-4、2

(1) 若$x\geqq 2$，則$(x+4)+(x-2)\geqq 8$，$2x+2\geqq 8$，$x\geqq 3$

(2) 若$-4\leqq x<2$，則$(x+4)-(x-2)\geqq 8$，$6\geqq 8$(不合)

(3) 若$x<-4$，則$-(x+4)-(x-2)\geqq 8$，$-2x-2\geqq 8$，$x\leqq -5$

由(1)、(2)、(3)　∴$x\geqq 3$或$x\leqq -5$

ii. 函數圖形解法：

(1) 先畫出$y=$｜$x+4$｜＋｜$x-2$｜

(2) 再畫出$y=8$

計算交點

右側交點：$(x+4)+(x-2)=8$，$2x=6$，$x=3$

左側交點：$-(x+4)-(x-2)=8$，$-2x=10$，$x=-5$

∵圖形在$y=8$上方　∴$x\geqq 3$或$x\leqq -5$

龍騰版課內範例：

郊區一筆直的道路上設有水廠與電廠各一座，有一盞紅綠燈介於水-4與2，如果水廠與電廠的基本費計算方式為「住家到電廠距離的兩倍加上住家到水廠的距離和即為該住家水費及電費之基本費用。」試求住家水費及電費之基本費用大於15元之區域。

傳統解法：課本解法

首先假設住家的位置在數線上的x座標，

因此住家到水廠的距離為｜$x-(-4)$｜＝｜$x+4$｜，

因此住家到電廠的距離爲 $|x-2|$，

基本費用爲住家到電廠距離的兩倍加上住家到水廠的距離和

$\therefore f(x)=2|x+4|+|x-2|$

求基本費用大於15元之區域 ➔ 解 $f(x)\geqq 15$

$\therefore 2|x+4|+|x-2|\geqq 15$

(1) 若 $x\geqq 2$，$\because x+4\geqq 0$，$x-2\geqq 0$，

則 $f(x)=2(x+4)+(x-2)=3x+6\geqq 15$，$x\geqq 3$

(2) 若 $-4\leqq x<2$，$\because x+4\geqq 0$，$x-2<0$，

則 $f(x)=2(x+4)-(x-2)=x+10\geqq 15$，$x\geqq 5$(不合)

(3) 若 $x<-4$，$\because x+4<0$，$x-2<0$，

則 $f(x)=-2(x+4)-(x-2)=-3x-6\geqq 15$，$x\leqq -7$

$\therefore x\geqq 3$ 或 $x\leqq -7$

根據研究者的觀察發現，中等程度以下的學生在解這個問題的時候，對於過程中情況(2)的解不合，並沒有發現到，因爲他已經被繁雜的計算與整理過程搞到昏頭轉向，無暇再思考答案的正確性，所以他最後寫答案的時候，經常會將答案寫成 $x\geqq 5$ 或 $x\leqq -7$，爲何會發生這樣的錯誤呢？這是因爲學生只是純粹在做代數運算而已，缺乏完整的數學概念。

函數圖形解法：

(1) 先畫出 $y=2|x+4|+|x-2|$，找出關鍵點爲2與 -4

(2) 再畫出水平線 $y=15$

學生發現兩個圖形的交點爲3、-7，

要找的答案在 $y=15$ 的上方，$\therefore x\geqq 3$ 或 $x\leqq -7$

學生經過多次操作之後，有少數學生已經可以將圖像記憶在腦海裡，然後用圖形來思考問題，也會將之前的學習經驗轉移到新的課程，研究者感覺到這類學生的學習成效是可以被期待的，但是仍有部分學生習慣於傳統解法，對於新的技術接受度並不是很高。也觀察到學生解不等式的時候，圖形思考比傳統方法更容易被學生接受。學生解不等式問題的時候，藉由圖像的呈現更能理解題目本身的義涵。

研究者有一次下課時間看到學生MG很認真的拿著補習班數學講義在算，研究者覺

得”機會教育”的機會來了，因爲她是一位非常用功的學生，程度也不錯，可是對於*GeoGebra*卻不感興趣，習慣於傳統做法，因此研究者站在一旁觀察學生的做法，等到學生做完之後，再跟學生聊聊，然後開始引導她以圖形的觀念解題，學生當時所做的題目及其做法如下：

範例：解 $|x|+|x-2|+|x-4|=10$ (北一女)

i. 學生解法：

第一步先找到關鍵點由左至右依序爲0、2、4

(1) 若 $x \geqq 4$，則 $x+(x-2)+(x-4)=10$，$3x=16$，$x=\frac{16}{3}$

(2) 若 $2 \leqq x < 4$，則 $x+(x-2)-(x-4)=10$，$x=12$(不合)

(3) 若 $0 \leqq x < 2$，則 $x-(x-2)-(x-4)=10$，$x=-4$(不合)

(4) 若 $x<0$，則 $-x-(x-2)-(x-4)=10$，$-3x=4$，$x=-\frac{4}{3}$

$\therefore x=\frac{16}{3}$ 或 $x=-\frac{4}{3}$

ii. 函數圖形解法：

(1) 先畫出 $y=|x+2|+|x-3|+|x+1|$

(2) 再畫出 $y=10$

發現交點在左、右兩支射線

右端射線 $f_{RR}(x)=(x+2)+(x-3)+(x+1)=3x$，$3x=10$，$x=\frac{10}{3}$

左端射線 $f_{LL}(x)=-f_{RR}(x)=-3x$，$-3x=10$，$x=-\frac{10}{3}$

$\therefore x=\frac{10}{3}$ 或 $x=-\frac{10}{3}$

學生做完之後很驚訝，原來這麼快就解出了她剛才花了一段時間才做出來的題目，這時候MG才開始感覺到原來平常去電腦教室操作*GeoGebra*原來對於解題是有用的，這個題目帶給她的蠻大的刺激，因爲學生經過一個月的操作觀察，多數都能很快的畫出圖形及寫出射線方程式，所以解題速度就很快了。於是她又選了一個她覺得很複雜得題目來問研究者，研究者請她先按照自己的想法做一次，題目及過程如下：

範例：解｜$x-7$｜＋｜$2x+6$｜＝｜$x+13$｜　(97.中一中)

i.　學生解法：

第一步先找到關鍵點 7、-3、-13

(1)　若$x\geqq 7$，則$(x-7)+(2x+6)=x+13$，$2x=14$，$x=7$

(2)　若$-3\leqq x<7$，則$-(x-7)+(2x+6)=x+13$，$0=0$

(3)　若$-13\leqq x<-3$，則$-(x-7)-(2x+6)=x+13$，$-4x=12$，$x=-3$(不合)

(4)　若$x<-13$，則$-(x-7)-(2x+6)=-(x+13)$，$-2x=-14$，$x=7$ (不合)

$\therefore x=7$

ii.　函數圖形解法：

(1)　先畫出$y=$｜$x-7$｜＋｜$2x+6$｜

(2)　再畫出$y=$｜$x+13$｜

將關鍵點及函數寫完後，學生發現兩個圖形在轉折點-3和7之間重疊，所以答案為$-3\leqq x\leqq 7$。

學生看完之後發現與剛才所做的答案不同，研究者問:「妳認為哪個答案才是對的？」學生遲疑了一下：「嗯，第二個」。研究者問：「那妳知道妳剛才哪裡做錯了嗎？」學生看了一下算式搖搖頭，看不出錯在哪裡？於是研究者提示她問題出在$-3\leqq x<7$時，學生突然笑了說：「$0x=0$，x應該是任意數，$\therefore -3\leqq x<7$也是答案，所以正確的答案是$-3\leqq x\leqq 7$。」。從此之後學生MG在上機操作時都很努力學習，因為她發現了更有效的解題方式；同時研究者發現原來學生MG在解題時很習慣用傳統方式解題，現在的她會使用多元的方式來思考問題，這正是研究者期待的一個結果。其實這是多數學生會錯的問題，解題複雜時想法就會不周全，尤其MG已經算是程度不差的學生都還會犯這的的錯誤，更何況是多數中等程度以下的學生。

以下為最近幾年來各校期中考有關於絕對值方程式的考題

1.　試寫出滿足 $|2x-1|<3$ 之所有整數 x 為＿＿＿＿＿＿.　(北一女)

2.　解 $3<|-3x+8|\leqq 6$.　(豐原高中)

3.　a、$b\in R$，若$|ax+1|\leq b$ 之解集合為$\{x\,|-2\leq x\leq 12\}$，則 $2a+b=$＿＿＿＿.　(南一中)

4.　設 a、$b\in R$，若$|2x-a|>b$ 之解為 $x>7$ 或 $x<1$，則 $a+b=$＿＿＿＿＿.　(南一中)

5.　｜$x-8$｜＋｜$x+2$｜＝12　(96.中一中)

6.　$x\in R$，｜$x+5$｜+｜$x-3$｜$=8$ 之解為＿＿＿＿＿＿.　(建中)

7. 解方程式｜$x-2$｜＋｜$x+3$｜$=6$，則 x 的值爲＿＿＿＿＿＿＿． (成功)

8. 已知數線上有相異四點 $A(x)$、$B(2x)$、$C(0)$、$D(3)$，若 $\overline{AC}+\overline{BD}=6$ ，則 x 所有可能值爲 ＿＿＿＿＿＿． (師大附中)

9. 設 $f(x)=|x+2|+|x-5|$ ，若 x 爲整數且使 $f(x)$的值最小，則此種數共有 m 個，此 m 個數的總和 $S=$＿＿＿＿＿＿＿． (南一中)

10. 設 x 爲實數，求 $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$ 的最小值=＿＿＿ (中一中)．

11. ｜$x+3$｜－｜$x-2$｜$\geqq 3$ (99.中一中)

12. 不等式｜$x-3$｜＋｜$x+4$｜< 11 的解爲＿＿＿＿＿． (建中)

13. 若方程式｜$x+1$｜+｜$x-3$｜$=k$ 無實數解，則 k 之範圍爲＿＿＿＿＿＿． (建中)

14. (1)作圖 $y=|x-4|+2|x-2|+|x-3|$（請用尺，否則不予計分） (雄中)

(2)設 k 爲實數，若不等式｜$x-4$｜$+2$｜$x-2$｜＋｜$x-3$｜$<k$ 無解，求 k 的範圍．

從上面的考試題目當中可以發現，有些老師在設計考題的時候，很明顯的已經受到動態幾何系統的影響，融入了函數圖形的概念，設計了一些更具有思考性與以往不同的考試題目，如同謝豐瑞教授所說，對於教師的自我成長產生了良性循環；而學生解題時利用多元思考，解題想法上相較於以往靈活。

(4) 函數的極值探討：$f(x)=|x+a_1|+|x+a_2|+\ldots\ldots+|x+a_n|$

下面這個問題常出現在測驗的題目當中，由其是在級數和的時候，題目如下：

$f(x)=|x-1|+|x-2|+\ldots\ldots+|x-99|$ ，當$x=$＿＿，$f(x)$有最小值＝＿＿

這個的問題多數老師的教法是從幾何方向切入，在黑板上畫出一條數線，然後從二項開始、三項、四項、五項、……，慢慢的以絕對值的幾何意義來解釋數線上最小值發生的位置，最後引導學生了解最小值出現在x爲關鍵點中位數的時候，針對少數比較具有想像力的學生這樣的做法是恰當的，可是多數的學生當老師在黑板上畫圖時，因爲整個黑板只看到一大堆線條，畫面是混亂的，在不太容易觀察的狀況下，學生後續的作法就產生了差異，學生只記得要找關鍵點之間的關係，卻忘記是什麼關係，因此有些學生認爲是找中位數、有些學生認爲要找算數平均數，尤其是我們發現很多考試的題目，不管學生使用什麼方法他們都可以得到正確答案，因此錯誤的觀念就這樣被一直沿用下去，甚至有學生認爲兩個種解法所得到的答案都一樣。可是很明顯的用算數平均數的觀點來解題是錯誤的作法，學生並不知道，所以老師應該要注意觀念澄清；其實甚至連用中位

數解題的同學，爲何要用中位來計算，他並不清楚，反正老師講了一大堆的結論說是中位數就對了。爲了澄清學生的觀念，研究者設計了以下的課程。

師：「有沒有人知道$f(x)$=｜x－1｜＋｜x－6｜最小值是多少？」

學生：「……。」

師：「把函數圖形畫出來觀察看看！」

學生WG：「我覺得是5」

師：「你可以解釋一下為什麼是5嗎？」

學生WG：「因為圖形像臉盆，下面是平的，把關鍵點帶進去答案都是5，∴我認為最小值等於5。」

師：「很棒喔，那你可不可以用幾何的概念解釋一下這個函數嗎？」

學生WG：「｜x－1｜＋｜x－6｜就是x到1的距離與x到6的距離和。」

師：「現在有沒有人已經確定$f(x)$=｜x－1｜＋｜x－6｜最小值是多少？」

學生KB：「應該是5。」

師：「為什麼呢？」

學生K：「因為當x介於1、6之間的時候，兩線段沒有重疊，其餘不管x在哪邊，兩線段都會重疊，所以我確定兩線段長的和最小值是5。」

師：「漂亮喔！所以最小值出現在函數圖形最低點的位置，也是關鍵點的中位數。」

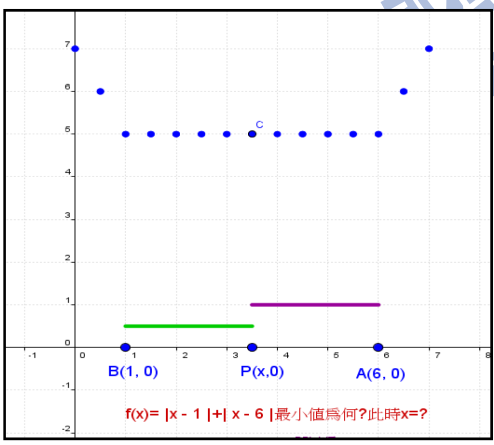


圖4-1-11 二項式絕對值和最小值觀察(一)

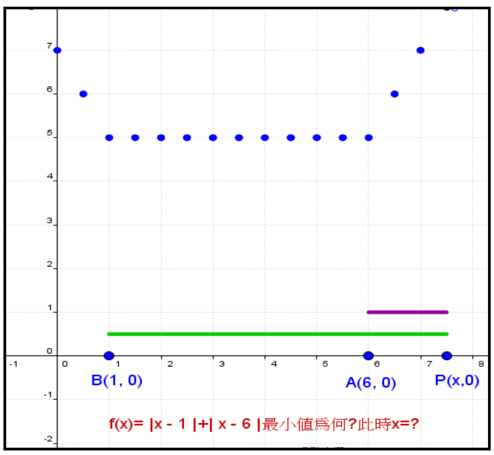


圖4-1-12 二項式絕對值和最小值觀察(二)

同樣的請學生觀察三項、四項、五項、六項絕對值的函數圖形，討論其函數圖形的特徵與極值發生的位置。

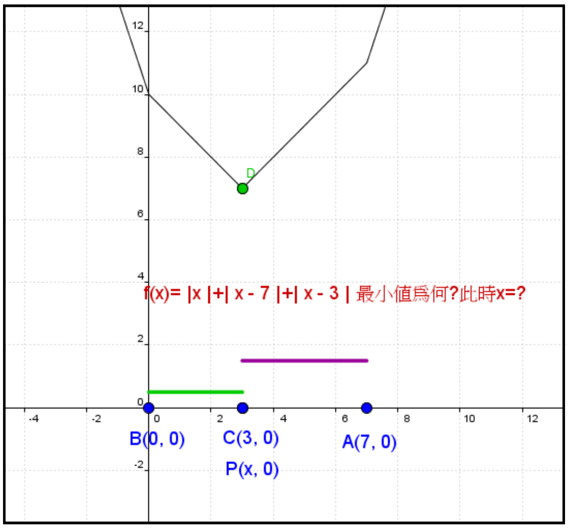


圖4-1-13 奇數項式絕對值和最小值觀察

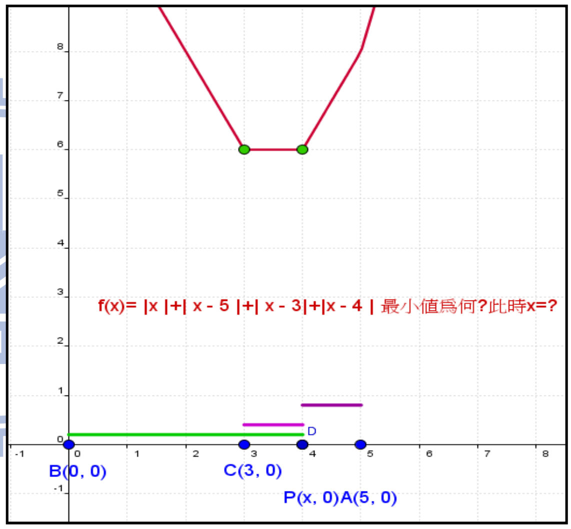


圖4-1-14 偶數項式絕對值和最小值觀察

師：「n＝3、4、5、6的時候，$f(x)$的圖形有何共同的特徵？」

學生：「……。」

師：「譬如說當n是奇數的時候，$f(x)$的圖形是尖尖的，還是平平的？」

學生CB：「n是奇數的時候，$f(x)$的圖形是尖尖的，像鉛筆一樣；n是偶數的時候，$f(x)$的圖形是平平的。」

師：「很好，當n是奇數的時候，$f(x)$的極值發生在哪裡呀？當n是偶數的時候，$f(x)$的極值又發生在哪裡呀？」

學生LB：「n是奇數的時候，$f(x)$的極值剛好發生在尖尖的地方；n是偶數的時候，$f(x)$的極值發生在平平的地方。」

師：「Good！妳們可以用國中學過的數學名詞來形容一下極值發生的位置嗎？」

學生：「……。」

師：「譬如說算數平均數、中位數、眾數、第一四分位數、第三四分位數或者是其它？你覺得答案是哪一個？」

學生LB：「中位數。」

師：「Good！你可以解釋一下嗎？」

學生CB：「$n=3$的時候，尖尖的位置是第二個關鍵點；$n=5$的時候，尖尖的位置是第三個關鍵點；$n=4$的時候，平平的位置介於第二、三個關鍵點之間；$n=6$的時候，平平的位置介於第三、四個關鍵點之間，所以極值發生在關鍵點中位數。」

師：「太棒了！很漂亮的結論，要記得喔！」

師：「那請你們認為$f(x)=|x-2|+2|x-5|$的極值是多少？發生在何處？」

學生MG：「我覺得應該把$f(x)$拆開來想，也就是$f(x)=|x-2|+2|x-5|=|x-2|+|x-5|+|x-5|$，所以共有三個關鍵點；$x=2$、5、5，那中位數就是5；所以極小值發生在$x=5$，且最小值為3。」

師：「那$f(x)=4|x-1|+3|x-9|$的極值是多少？發生在何處？」

學生MG：「$f(x)=4|x-1|+3|x-9|$，有七個關鍵點，4個1，3個9；關鍵點的中位數就是1；所以極小值發生在$x=1$，且最小值為24。」

師：「太棒了！」

4.1.3　第一階段實驗的後測與延後測結果探討

許多老師不太想讓學生到電腦教室操作的主要原因之一是秩序很難維持，學生一看到電腦就不自覺得想上網聊天、打電動、種菜、……等等，不專心於老師所要求學生觀察學習操作的重點，實務上這的確是一個蠻大的問題，因此老師必須確實做好把關的工作，否則學生如脫韁野馬很難掌控；有些老師說用中央管控機器就好，由教師端控制學生的電腦，學生操作的時間由教師掌握，嚴格管理使用電腦的情形，或者是要求先完成作業後才可以使用網路，因爲這兩項做法會影響到學生的學習態度與學習方式，學生很可能隨便寫一寫就交差，無法達到老師想要達成的學習目標，因爲第一階段主要的學習目標爲融入。研究者認爲使用資訊融入的目的在於協助學生跳脫傳統的思維，如果採取高壓政策效果一定不佳，因此研究者認爲如果有兩位教師協同教學，由一位老師主講，另一位老師巡視學生上機情形，針對學生的不同狀況馬上給予不同的回饋，例如指令不熟悉者告知應該如何使用指令，針對學生討論的狀況給予適當的提示，順便記錄學生的學習盲點，採取柔性勸導方式，對於融入環境的效果應該比較好。

由於研究者原本是希望針對動態幾何系統*GeoGebra*融入課程對於學生的學習影響做深入的質性分析，不涉及班級之間的比較，但是在實驗的過程中研究者重新評估，如果能有相對應成績的佐證，學生的學習意願比較容易提高，實驗結果也會更具有說服力。然而因爲學生爲高一新生，開學時的情況較爲混亂，難以找到統一時間做起點行爲的測驗，又因本校爲常態編班，因此初步假設每個班的起點行爲是相同的。因此第一階段的實驗一開始的時候並沒有做前測評估班級之間的差異。

1　第一階段實驗的後測結果探討

第一階段的實驗課程，從9月1日~10月7日總共實施了六個星期，在10月19日進行第一階段實驗的後測，然後再經過一個半月後，在12月1日進行第一階段實驗的延後測，藉此探討學生透過操作動態幾何系統*GeoGebra*對於學生學習的成效是否有所提升。以下就第一階段，實驗組班級與六個對照組班級各項的測驗包括後測、延後測、及第一次期中考等成績做分析比較，藉由學生操作動態幾何系統*GeoGebra*探討實驗組與對照組學習成效之差異，在此學習成效包含短期與長期之學習成效，並探討差異性產生的原因。

表4-1-1呈現各班級後測成績之基本分析，除了比較各班級平均成績及標準差差異之

外，並將各班級學生依照學習成就高低，分成*High*、*Average*、*Low*三部分，每部分占各班參與測驗人數的三分之一。而由變異數同質性檢定中的p值＝.523＞.05，表示各班的後測平均成績的變異數是同質的，也就是說各班後測成績常態分佈的情形與性質大致是雷同的，換句話說各班學生成績的結構相似。

	N	*M*	*SD*	*High*		*Average*		*Low*	
				M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
實驗組	40	15.6	3.747	18.8	0.8	16.5	1.29	11.4	3.4
對照組A	38	15.29	2.967	18.4	1.26	15.4	1.04	11.8	1.53
對照組B	41	11.9	3.767	16.2	1.91	11.7	1.33	7.8	2.03
對照組C	40	12.18	3.169	15.5	0.97	12.4	1.09	8.6	2.22
對照組D	36	14.03	3.509	17.8	1.36	14.2	0.94	10.2	2.25
對照組E	36	12.42	4.245	16.8	1.48	12.8	1.36	7.8	2.99
對照組F	43	14.12	3.692	18.2	1.41	14.3	0.8	9.9	2.23
總和	274	13.65	3.829						

N：樣本數　M：平均數　SD：標準差

表4-1-1　第一階段實驗後測成績描述統計量

變異來源	SS	df	MS	F
組間	535.719	6	89.287	6.876***
組內	3466.941	267	12.985	
總和	4002.661	273		

***$p < .001$

表4-1-2　第一階段實驗後測ANOVA分析摘要表

從表4-1-2可看出7個班級在第一階段實驗的後測平均成績有顯著的差異存在，也就是學生動手操作*GeoGebra*對於短期的學習成就與傳統教學比較是有顯著差異的。但是仔細探討各班級之間的差異性，發現只有對照組B、對照組C、對照組E等三個班級在後測當中與實驗組的差異非常的顯著，而對照組A、對照組D、對照組F等三個班級在後測當

中與實驗組的差異其實並不顯著，所以研究者認爲只能說實驗組班級的成績些微領先對照組班級的成績，因此研究者認爲在後測當中實驗組與對照組的成績差異不明顯。研究者認爲這是一個正常的教學結果，從這現象點出傳統教學方式具有提升短期學習成效的優勢，這也是爲什麼許多數學教師對於將動態幾何系統融入課程的興趣不高的原因之一，因爲已經習慣用傳統教學方式的老師，根據其教學經驗並不認爲使用資訊融入課程有助於提升學生的學習成效，甚至於他花了更多力氣與時間，但是學生的學習成效反而更低落。因此除非能夠舉證將動態幾何系統融入數學課程，雖然對於學生的短期學習成效不一定馬上看到成果，但是對於學生長期的學習成效的確具有高度的影響力，否則很難有足夠的誘因可以促使老師花大量的時間投入課程之設計。

從實驗初步的結果可發現與實驗組成績差異較不顯著的班級，老師的教學策略可以區分成兩類：

第一類老師雖然沒有使用動態幾何系統教學，但是個人會使用動態幾何系統備課，並將個人使用動態幾何系統實驗的結果融入在其教學方法當中。此類老師會幫學生觀察、歸納、統整、最後做成結論，因此學生會知道最後的結論，學生覺得解法很漂亮，他會應用漂亮的結論快速解決數學問題，所以彼此間的短期學習成績自然不會差異太大！但是因爲沒有動手操作，因此漂亮的結論可能容易遺忘了。

第二類老師是完全傳統教學方式，不使用動態幾何系統，但是對於學生的短期學習成效採取緊迫釘人的態度，增加了平時測驗的次數，學生由於精熟學習的成果，所以短期的學習成績很棒。但是因爲學生是精熟練習，學生的學習過程並不快樂，很容易產生排斥數學的心態。

由各班學生後測成績的同質子集分析來觀察，發現依照成績結構可以將實驗組與對照組班級分成三個族群，第一族群爲（對照組B、對照組C、對照組E、對照組D、對照組F），第二族群爲（對照組E、對照組D、對照組F、對照組A），第三族群則爲（對照組D、對照組F、對照組A、實驗組），三個族群之間學生的成績差異非常明顯，對照組A學生成績的標準差表現的比實驗組學生的成績更好，顯示使用動態幾何系統融入教學對於學生的短期學習成就，未必一定優於傳統教學法，此結果符合不願意使用動態幾何系統教學的老師的想法，就算不用資訊融入教學法，只要採取合適的教學策略，學生成績一樣很優秀。針對*High*、*Average*、*Low*層級的學生成績探討，對照組A的學生成績不管是在*High*、*Average*、*Low*哪一層級的學生，短期的學習成就都與實驗組不相上下，而其它對照組班級在*Average*、*Low*二層級的學生成績與實驗組班級的差異比*High*層級的學

生成績差異更明顯，表示透過動手操作*GeoGebra*對於*Average*、*Low*程度學生的短期學習成就確實是有提升能力。

2　第一階段實驗的延後測結果探討

第二階段實驗結束後，也就是在第一階段實驗結束後的六個星期，研究者在12月1日利用早自修的時間進行第一階段實驗的延後測，經過了一個半月的時間而且剛考完第二次期中考，大部分的同學對於第一階段的上課內容多數已經忘光了，都只能憑藉印象來解題，可想而知學生作答的狀況並不理想，但這正式研究者想要研究的重點，到底透過操作動態幾何系統學生的長期學習成效與傳統教學方式是否有所差異？延後測的測驗結果顯示如下表4-1-3。表4-1-3呈現各班級延後測成績之基本分析，而由延後測平均成績的變異數同質性檢定中的p值＝.217＞.05，表示各班的延後測平均成績的變異數是同質的，也就是說各班延後測成績常態分佈的情形與性質大致是雷同的，換句話說各班學生成績的結構相似，這表示各班學生的整體成績表現隨著時間的增加並沒有造成右偏或左偏傾向，學生整體的成績表現仍然呈現常態分佈。

	N	*M*	*SD*	*High*		*Average*		*Low*	
				M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
實驗組	40	13.83	3.210	17.0	0.71	14.5	1.16	9.9	1.89
對照組A	31	9.74	4.359	14.5	1.65	9.9	1.58	4.8	2.35
對照組B	39	9.85	4.004	14.0	1.41	10.5	1.13	5	1.68
對照組C	37	9.97	4.705	14.9	1.56	10.4	0.77	4.6	3.29
對照組D	38	11.71	3.834	15.8	1.54	12.2	1.05	7.1	2.07
對照組E	36	8.58	4.959	14.1	2.23	8.5	1.83	3.2	2.21
對照組F	43	10.93	4.002	15.1	1.35	11.3	1.23	6.3	2.40
總和	263	10.73	4.421						

N：樣本數　M：平均數　SD：標準差

表4-1-3　第一階段實驗延後測成績描述統計量

變異來源	SS	df	MS	F
組間	669.247	6	111.541	6.434***
組內	4455.117	257	17.335	
總和	5124.364	263		

***p＜.001

表4-1-4　第一階段實驗延後測ANOVA分析摘要表

從摘要表可看出7個班級在第一階段實驗的延後測平均成績有顯著的差異存在，表示各班長期的學習成就的差異性是非常明顯的。由各班延後測成績的同質子集分析發現，可將各班成績分成三個族群（對照組E、對照組A、對照組B、對照組C、對照組F）、（對照組A、對照組B、對照組C、對照組F、對照組D）及(對照組D、實驗組），表示除了對照組D之外，其餘各班與實驗組的成績差異是非常明顯的，尤其是對照組A的成績退步的情形令人訝異，在後測當中對照組A是優於其他對照組班級的成績，而且與實驗組的成績是旗鼓相當、不分軒輊的。在延後測當中實驗組的平均成績、標準差皆為最小的，成績明顯的優於所有對照組班級。由事後檢定中可以發現實驗組與全部的對照組班級在延後測的平均成績的差異性非常的顯著。原來在後測中對照組A、對照組D、對照組F的成績表現與實驗組的成績差異並不顯著的，但是在延後測當中這三個班的表現與實驗組的差異一樣是非常顯著。表示將動態幾何系統融入課程透過學生實際操作對於學生長期的學習成就有具有非常大的學習影響力。

就各班*High*、*Average*、*Low*三層級學習成就的學生表現而言，如表4-1-3，實驗組學生在各種程度的表現都明顯的優於對照組學生。其中*High*層級不僅平均成績最高，而且標準差最小，而在*Average*、*Low*層級實驗組學生平均成績不僅皆優於對照組班級，而且就長期學習成就而言，實驗組學生與對照組學生的平均成績比較的結果，實驗組學生的程度上幾乎皆往上提升了一個層級，表示操作動態幾何系統是全面式的提升學生成績，而不是只有少數人進步，印證了操作動態幾何系統*GeoGebra*確實對於各層級的學生的長期學習成就是正面的，與後測的結果是相同的，對於*Average*、*Low*程度的學生的學習影響是最大的。

從第一階段的後測及延後測成績而言，從短期的學習成就來觀察，實驗組與對照組班級的差異並不大，但是就長期的學習成就來看，實驗組班級很明顯的領先對照組班級，這點其實就是研究者想要探討將動態幾何系統融入課程的重要原因，學生透過動手操作、觀察、歸納、分析及討論得到的結論，對於學生的長期學習的確具有重大的影響，可以改變學生的學習方式與思考模式，並提升學生的學習成效。與接受傳統教法的學生的學習方式及思考方式做比較，實驗組的學生較能夠接受不同題型的挑戰，對於解題方法也比一般學生多元化，除了基本的代數解題之外，並能夠從幾何圖形或函數圖形的觀點切入，解題的想法上是活的知識而不是死的知識，研究者認為最重要的是學生在學習過程中是主動的、積極的、快樂的。

3 第一次期中考成績的結果探討

由於後測日期為第一次期中考後的第一個上課日，因此研究者認為期中考整體的成績表現應該與後測成績表現相仿。表4-1-5呈現各班級第一次期中考平均成績之基本分析，而由第一次期中考的變異數同質性檢定中的p值＝.342＞.05，表示各班第一次期中考的平均成績的變異數是同質的，也就是說各班延後測成績常態分佈的情形與性質大致是雷同的。

	N	*M*	*SD*	*High*		*Average*		*Low*	
				M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
實驗組	42	87.90	11.287	97	2.53	92	2.24	75	9.53
對照組A	39	81.03	7.809	88.8	3.61	81.9	1.44	72.4	5.60
對照組B	42	76.93	11.534	88.8	3.81	78.5	3.50	64.7	5.17
對照組C	41	81.90	11.313	93.4	3.86	83.3	2.66	68.8	8.44
對照組D	39	81.15	10.487	92.5	4.84	81.1	1.93	69.9	6.78
對照組E	37	77.03	12.988	88.5	3.73	78.9	1.89	63.5	13.67
對照組F	43	80.37	10.107	91.3	4.81	80.5	3.25	69.3	5.90
總和	281	81.13	11.138						

N：樣本數　M：平均數　SD：標準差

表4-1-5　第一次期中考成績描述統計量

不過由於期中考的範圍比較大，而實驗課程只針對其中一個單元做課程設計，因此雖然由各班期中考成績的事後檢定來看，發現實驗組的期中考成績與對照組的期中考成

績有明顯的差異，對照組落後實驗組約一個標準差，這是蠻大的差距，但是如果以此結果解讀爲實驗課程的成果，研究者認爲並不恰當。研究者寧可相信實驗組學生經過實驗課程之後，解題的技巧較傳統教法靈活，實驗組學生將觀察、歸納的能力類推到其它單元，因此比起傳統教法，學生有較佳的學習成果。再則研究者認爲在實驗進行的初期，對於學生及家長信心的建立頗爲重要，至少在課業成績上應該要保持不落後對照組班級的狀態，學生的參與度才會提高，因此在期中考的考題中將實驗課程的單元比重由原本設定的30%提高到35%，題目分配的比重對於實驗組是比較有利的，才造成成績差異明顯的狀態。但是由於在本教學實驗當中期中考成績只是影響學生參與實驗進行的因素之一，爲了實驗進行的順利，研究者認爲這是不得不採取的策略。因此本教學研究以後測成績爲一個課程階段融入判斷的重要依據，而實驗計畫主要的成果研究者認爲應該注重後測及延後測的結果。

變異來源	SS	df	MS	F
組間	3333.487	6	555.581	4.695***
組內	32657.085	276	118.323	
總和	35990.572	282		

***p＜.001

表4-1-6　第一次期中考ANOVA分析摘要表

從摘要表可看出7個班級在第一次期中考平均成績有顯著的差異存在。由各班期中考成績的同質子集分析發現，成績區分成兩個子集（對照組B、對照組E、對照組F、對照組A、對照組D、對照組C）與（對照組A、對照組D、對照組C、實驗組），顯示動態幾何融入課程的教法對於學生的學習成就具有高度的影響力。實驗組學生經過實驗課程之後，解題的概念較傳統教法的學生靈活；從成績發現對照組A的標準差比實驗組的成績更好，此項結果也與後測的結果相吻合，顯示傳統教法對於學生短期的學習成就，其實教師只要教學方法與策略搭配的宜，再加上密集的測驗，透過精熟學習，學生的成績具有一定的水準。

就各班*High*、*Average*、*Low*三種學習成就的學生表現而言，如表4-1-5，實驗組學生

在各層級平均成績都是最高，再次證實透過實際操作*GeoGebra*，確實全面性的提升學生成績，而不是只有少數人進步。對於本實驗的持續進行將是一大助力，因為研究者開始時擔心若學生期中考成績不佳，學生及家長對於實驗的參與度將會下降，因此看到這樣的結果頓時壓力減少了許多。但是也從結果當中證實將動態幾何系統融入課程對於學生的學習成效是正面的，也增加了研究者及學生的信心。

3　後測與延後測學生綜合表現之探討

經過後測與延後測成績ANOVA分析之後，對於實驗的結果，我們有了一個初步的結論，動態幾何系統可以確實有效的提升學生長期的學習成效，短期的學習成效並不顯著。但是接下來我們要比較的是學生學習的差異到底在哪裡？

從事後分析比較後，發現在後測（參考附錄）當中差異最顯著的試題是Q6&Q8，以下針對這兩個問題，就學生所發生的認知問題分別做探索：

Q6. 若 $|x+1|+|x-1|+|x-2|\geqq 3$，求 x 之解。

甲、傳統解法：

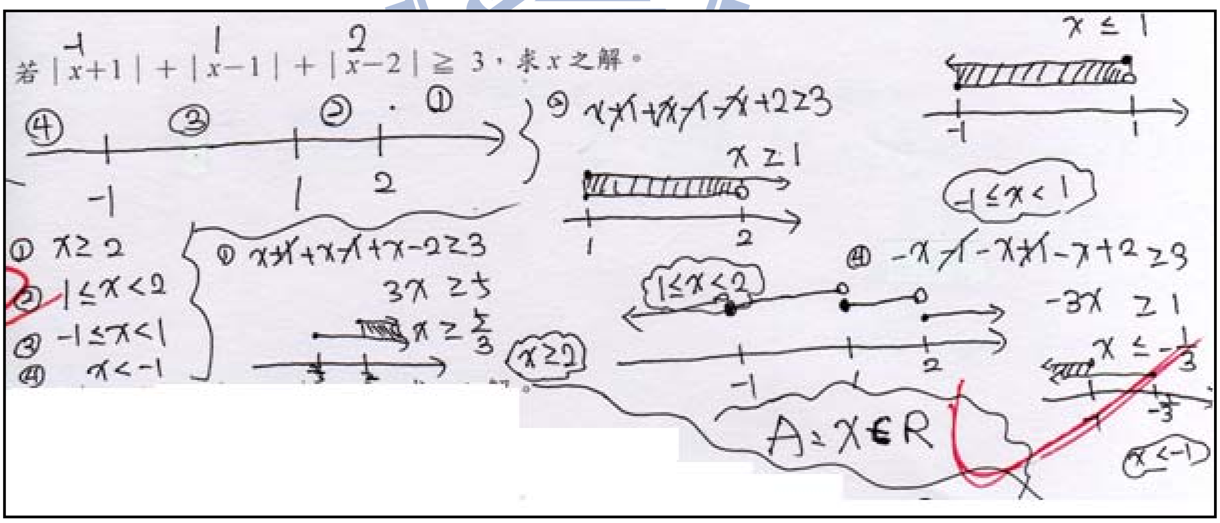


圖4-1-15 傳統教學模式下學生的正確解法

但是從學生的答案當中，分析發現傳統教學方式下學生的錯誤答案可以區分成以下幾種類型：

(a) $x\geqq 2$或$1<x\leqq 2$或$-1<x\leqq 1$或$x\leqq -1$：這種寫法的學生其實是會算的，但是只是分段解出答案，分段統整答案，不會再各分段做統整或者是不知道還要

整合答案，如果老師針對這樣的學生多做訓練，其邏輯推理的能力將會提升。

(b) $x \geq 1$或$x \leq 1$：與(a)相同，缺乏統合的能力。

(c) $x = 1$：解法的過程與(b)相同，但是最後統合錯誤，應該要取聯集，結果取成交集。

(d) 無限多解：解法的過程與(b)相同。最後的統合是正確的，但是結論犯了一個邏輯的問題，∵$x \in R$表示答案為任意實數，的確有無限多組解，但是無限多組解不代表$x \in R$，例如：$x \geq 1$。

(e) $x \geq 1$、甚至有人寫$min = 3$：完全不知道題意為何？

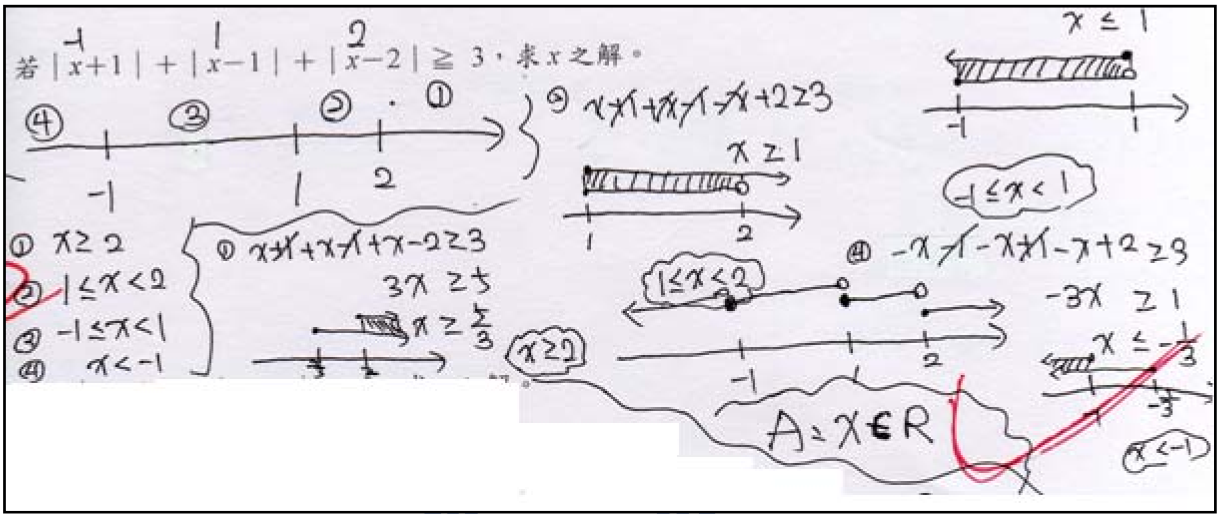


圖4-1-16 傳統教學模式下學生常犯的錯誤（一）

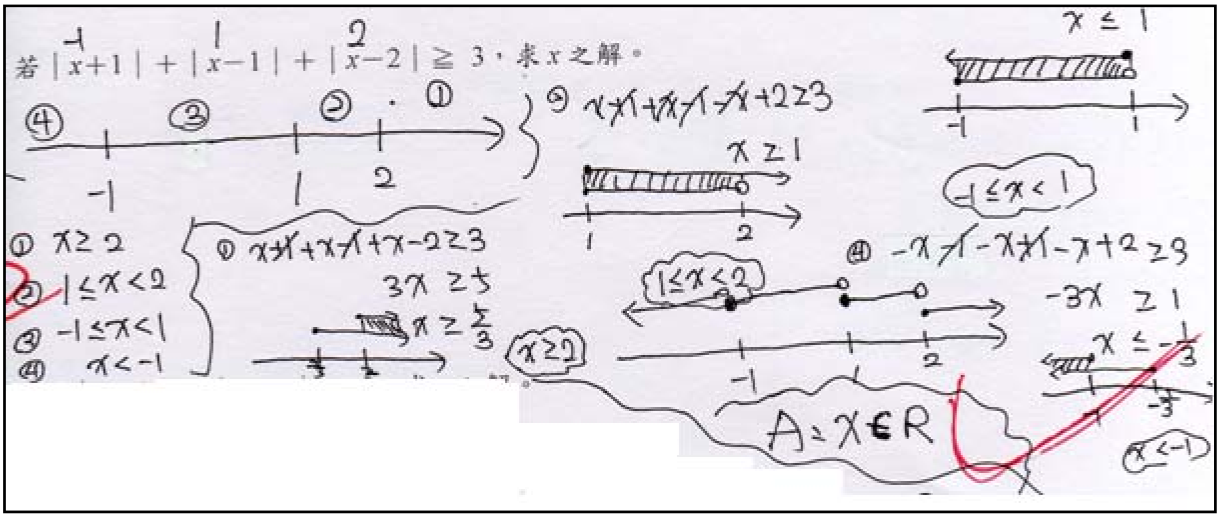


圖4-1-17 傳統教學模式下學生的常犯錯誤（二）

乙、 函數圖形解法：

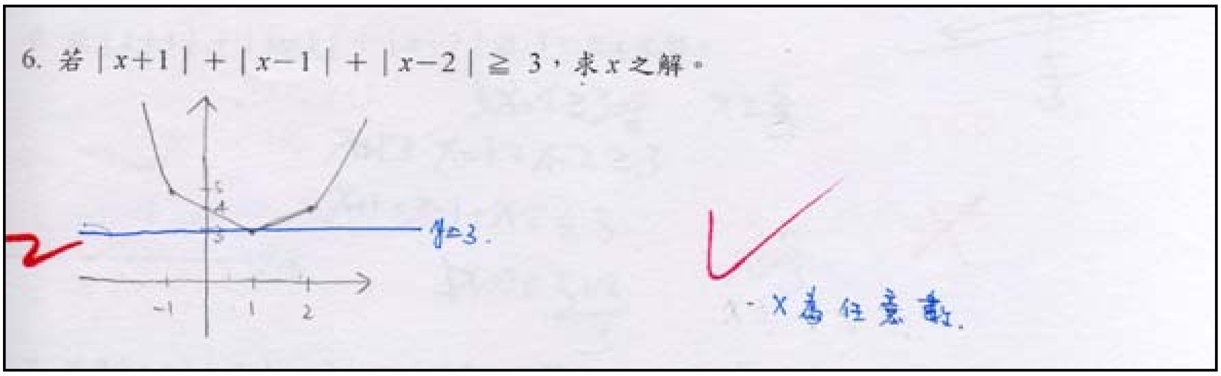


圖4-1-18 動態幾何教學模式下學生的解題模式(一)

從學生的答案當中，分析發現使用動態幾何系統學習的學生答案可以區分成以下幾種類型：

(a) $x \geqq 1$或$x \leqq 1$：這種寫法的學生只有注意到左右兩支都是答案，但是缺乏統整的概念，針對這樣的學生多做觀察學習，其邏輯推理的能力將會提升。

(b) $x \geqq \frac{5}{3}$或$x \leqq -\frac{1}{3}$：這種學生對於函數圖形的概念一知半解，只是硬把它記下來，而且誤認爲交點必在最外側兩支，解出錯誤的答案。很明顯學生是將傳統”背多分”的精神加了進來，而不是用觀察法。

(c) $min=3$：完全不知道題意爲何？

將兩種學生的學習迷失概念分析後發現，接受動態幾何系統教學的學生，學習迷失的點較少，透過圖像的刺激，學生的認知負荷較輕；而傳統教學法當中，學生對於某些透過文字的邏輯推理部分的認知負荷較大，較容易產生學習迷失。

下面這個問題是所有問題中差異最顯著的，讓我們以一起來探索一下。

Q8. 若 $f(x)=|x+2|+|x+1|+|x-1|+|x-2|=k$ 恰有兩解，求 k 的範圍。

甲、傳統解法：

第一步先找到關鍵點由左至右依序爲-2、-1、1、2

(1) 若$x \geqq 2$，則$(x+2)+(x+1)+(x-1)+(x-2)=k$，$4x=k$，$x=\frac{k}{4}$，

$\because x \geqq 2$，$\therefore k \geqq 8$

(2) 若$1\leqq x<2$，則$(x+2)+(x+1)+(x-1)-(x-2)=k$，$2x+4=k$，$x=\frac{k-4}{2}$，

$\because 1\leqq x<2$，$\therefore 6\leqq k<8$

(3) 若$-1\leqq x<1$，則$(x+2)+(x+1)-(x-1)-(x-2)=k$，$k=6$

(4) 若$-2<x<-1$，則$(x+2)-(x+1)-(x-1)-(x-2)=k$，$-2x+4=k$，$x=\frac{4-k}{2}$，

$\because -2\leqq x<-1$，$\therefore 6\leqq k<8$

(5) 若$x\leqq -2$，則$-(x+2)-(x+1)-(x-1)-(x-2)=k$，$-4x=k$，$x=\frac{-k}{4}$，

$\because x<-2$，$\therefore k>8$

由(1)、(2)、(3)、(4)、(5)得知當 $k\geqq 6$ 時，方程式有解

當 $k\geqq 8$ 時，方程式在(1)、(5)各有一組解。

當 $6<k<8$ 時，方程式在(2)、(4)各有一組解。

當 $k=6$ 時，方程式的解爲$-1\leqq x\leqq 1$，有無限多組解。

$\therefore$當$k>6$時，方程式恰有兩組解

以下三種爲學生最常犯的錯誤類型，如圖4-1-19、圖4-1-20、圖4-1-21。

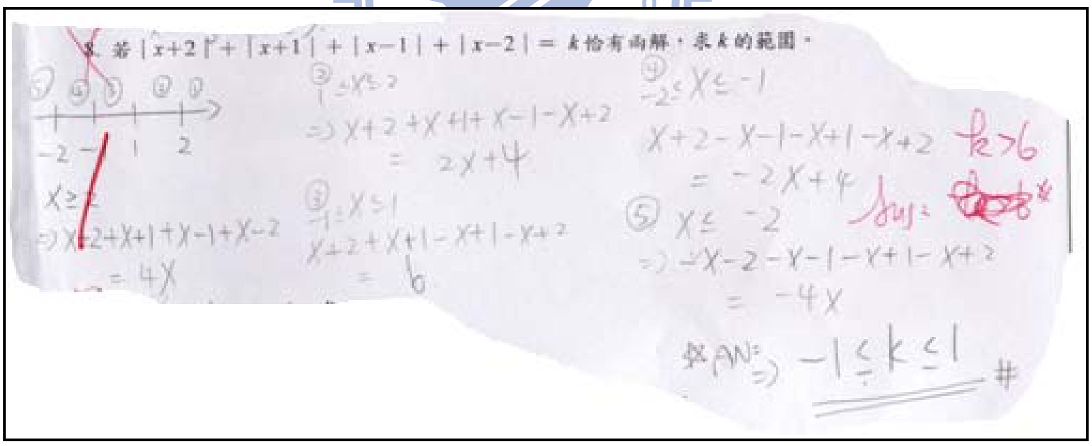


圖4-1-19 傳統教學模式下學生的常犯錯誤類型（三）

關於這個問題，從學生的答案當中發現對於接受傳統教學方式的學生而言蠻困惑的，因爲他們沒有做過類似的問題，以致於做答的情形不佳，有些同學用分段討論的方式，可是內容卻是不知所云學生的答案有$k\geqq 6$、$k=6$、$k\neq 6$、$k\leqq 6$、三角不等式➔ $k\geqq 6$、0、-1、正實數、$-1\leqq k\leqq 1$、$6\leqq k\leqq 8$、$k=6$或8，學生的答案非常的混亂，但是大致上區分成以下幾種類型：

(a) $k\geqq 6$、$k\neq 6$：這種寫法的學生對於絕對值函數的極小值是有概念的，知道$f(x)$的

最小值為6，在想法上有聯想到答案大概的情形，但是卻不知道如何將正確答案表示出來。

(b) $k=6$、$k \leqq 6$：同樣的這類學生對於絕對值函數的極小值也是有概念的，與(a)不同的地方是他們對於答案較缺乏想像力，因為已經知道$f(x)$的最小值為6了，竟然還可以寫出$k \leqq 6$。

(c) $6 \leqq k \leqq 8$、$k=6$或8：這二個答案蠻有趣的，還蠻多同學寫的，仔細研究了一下學生的寫法，發現學生居然是用畫圖的方法所做出來的答案，畫圖為什麼會出現這種答案呢？原來因為陳老師的班級雖然沒有使用動態幾何系統教學。但是因為陳老師每個星期都會進入實驗組教室旁聽研究者上課，然後將一些上課結論紀錄後融入其課程當中，他教導學生把關鍵點的函數值算出來，在座標平面上將各點連起來，學生在搞不清楚的狀況下，畫出了看似正確實際卻是錯誤的圖形，導致學生最後解讀錯誤，這就是傳統教學下學生沒有思考，只是模仿老師的做法所產生的問題，但是這類學生給予正確的圖形概念，應該可以做的不錯。

(d) 0、正實數：這些寫法都是對於絕對值片面的認知所得到錯誤的解答。

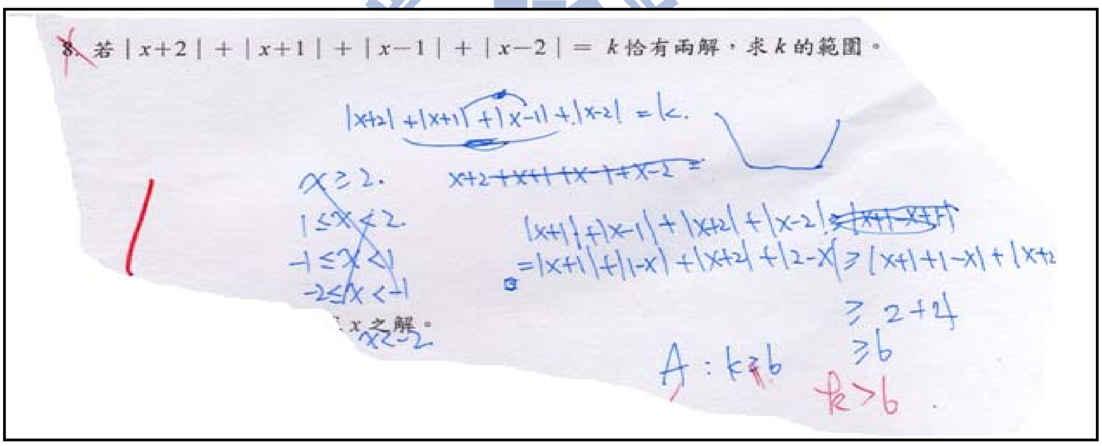


圖4-1-20 傳統教學模式下學生的常犯錯誤類型（四）

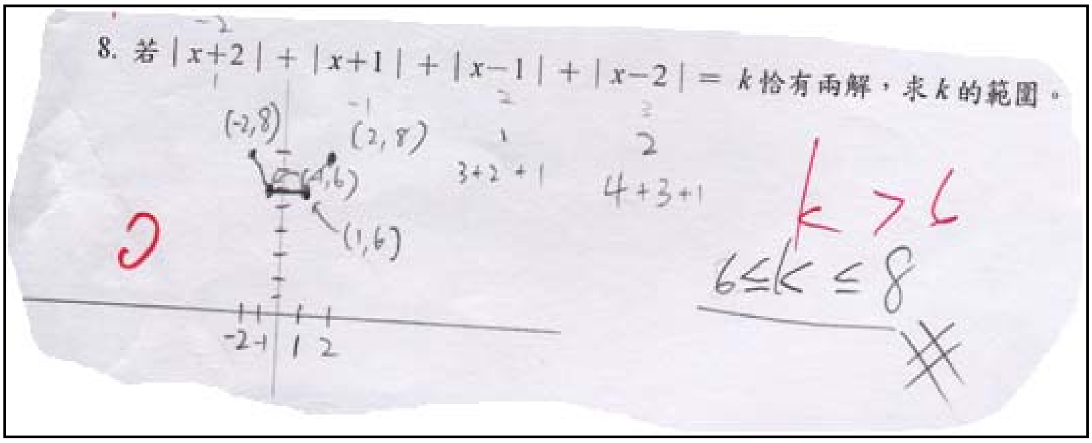


圖4-1-21 傳統教學模式下學生的常犯錯誤類型（五）

乙、函數圖形解法：

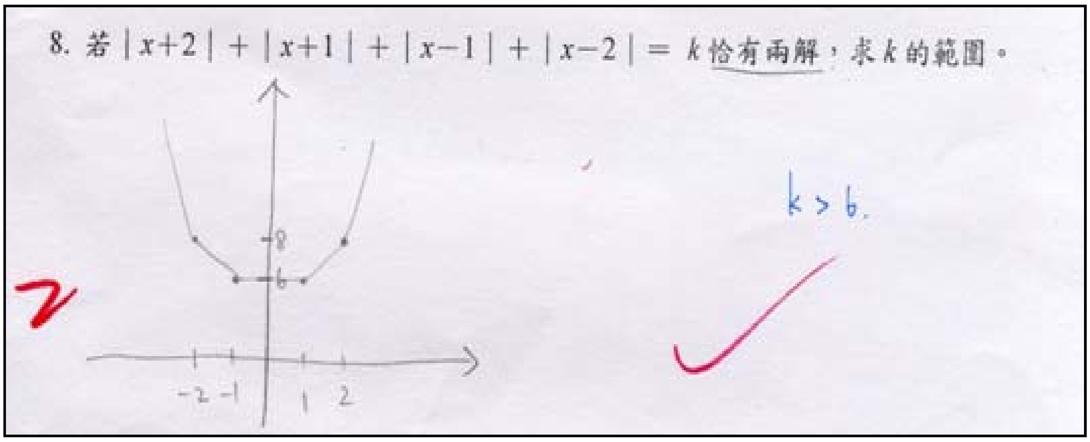


圖4-1-22動態幾何教學模式下學生的解題模式(二）

從實驗組學生的答案當中分析發現，實驗組的學生對於這個問題表現比對照組好很多，其迷失點竟然只有將答案寫成$k\geqq 6$，完全不同於傳統教學模式下學生的問題，而且寫成$k\geqq 6$看起來應該只是忘記討論圖形中$k=6$的情形，可看出實驗組的學生對於較複雜的問題，從另一個面向去思考問題的解決方式較一般學生更靈活、更多元。

而在延後測(參考附錄)的結果分析發現，除了後測時差異就很顯著的Q6及Q8之外，在延後測中Q9及Q10差異性也一樣顯著。表示經過了一個半月的時間，學生的學習記憶雖然會衰退，但是學生透過動手操作動態幾何系統，的確有效的延長學生的學習記憶，從實驗組與對照組兩次測驗成績的差異性越來越顯著，可以做爲最佳佐證。

本教學實驗第一階段設定的教學目標爲”融入”，參考實驗組的學習成就包含後測成績(表 4-1-1)、第一次定期考試成績(表 4-1-5)及操作 *GeoGebra* 時學生的討論情形，研究者與與一起參與實驗研究的呂老師討論之後認爲學生已經慢慢融入 *GeoGebra* 環境中學習；學生到電腦教室時，從一開始時整節課想上網聊天，到現在只有在等待時或完成功課時會偷偷上網之外，80%的學生已經比開始時自制了，不過還是需要老師提醒就是了，而測驗的成績部分原先研究者設定的目標爲不落後於對照組即可，但是實際上的後測的成績表現是優於對照組班級的，因此原來擔心來自家長、學生及同事的壓力頓時減小了，研究者因此決定自 2010 年 10 月 18 日起開始第二階段的實驗課程，將原先一星期上機兩節課縮短爲一節課，然後開始利用學校的 Moodel 平台，增加學生在家自行操作的時間，因此第二階段的課程實施方式及內容與第一階段有著不一樣的模式。

下表爲兩種教學方式下，從學生的後測觀察兩種學生學習迷失的差異：

實施*GeoGebra*輔助教學	傳統教學	備註
1.	少一組解	
2.	只有一段、$0 < x < -2$	
3.　少兩端點	少兩端點、只有兩端點	多數學生都是少了等號， 寫兩個端點者反而很少， 未接受*GeoGebra*教學者 所畫出的圖形很怪，像N
4.　未排序、直接取第二筆 資料，$1 \leqq x \leqq 2$	$2 < x < -2$、關鍵點差正負號， $-2 \leqq x \leqq 2$、取$1 \leqq x \leqq 2$很多，	解題時未將關鍵點排序 最小範圍寫成區間(實驗 組除外)
5.　平均數，一一代入	一一代入，未排序、平均數 直接取第四筆資料，	解題時未將關鍵點排序
6.　$x \geqq 1$或$x \leqq 1$、$\min = 3$	$x \geqq 1$或$x \leqq 1$，$x = 1$，$x \geqq 1$ 找$\min = 3$，無限多解	學生不會用x爲任意實數 表示$x \geqq 1$或$x \leqq 1$
7.　只有一解、 解左、右兩射線➔$\pm\frac{5}{3}$	求出三解、不合的未檢查 只求出一解，$1 \leqq x \leqq \frac{5}{3}$	
8.　$k \geqq 6$	$k \geqq 6$，$k = 6$，$k \neq 6$，$k \leqq 6$ 三角不等式➔ $k \geqq 6$ 分段討論未果 0、-1、正實數 $-1 \leqq k \leqq 1$ $6 \leqq k \leqq 8$，$k = 6$、8	多數都是$k \geqq 6$， 寫成x範圍 $-1 \leqq k \leqq 1$ 卻不是$k \geqq 1$，$k \leqq -1$ 且都有畫圖
9.　平方後➔增根 $x = -1$，$x > -1$，得兩解， 無解	$x = -1$，得兩解，$x = 0$或-1 平方後➔ $x = 0$，任意數， 無限多解，$x \geqq 0$	不會取聯集
10.　當成兩個絕對值的和 處理		不會組合答案

表4-1-7 兩種教學模式下學習迷失之比較

4.2 第二階段的實驗過程與結果

4.2.1 第二階段的實驗主題及探索課程內容

本教學實驗第二階段實驗課程設定的教學目標為"歸納"，探討的主題設定為99課綱第一冊第二章第四節多項式函數圖形。由於在校上機時間減少一半，因此課程設計分成兩個方向，上課時注重小組討論及學生歸納能力的培養，另一部分透過*Moodle*教學平台，增加家庭作業，而回家作業以比較活潑有趣的題目，讓學生以玩遊戲的方式學習數學，學生在家透過*Moodle*教學平台下載作業後，利用假日課餘時間操作*GeoGebra*，協助學生思考模式的訓練，並達到延長學生的學習時間。

由於這個單元學生在國中階段已經學過部分有關於一次函數及二次函數的圖形，多數學生對於圖形也都有基本的概念，因此課程的設計由奇、偶次多項式函數圖形之歸納分類開始，再則學生對於方程式的解和函數圖形與X軸交點之間的關聯性並不清楚，這是因為學生把兩者視為不同單元，因此研究者設計了相關課程讓學生藉由*GeoGebra*的動態呈現，觀察出其關聯性，最後再將不等式的解導入，引導學生畫出分式不等式的解。因此第二階段的所設定的各項探索主題：

(1) 奇、偶次數的多項式函數圖形的歸納分析
(2) 多項式函數解的個數討論
(3) 多項式不等式解之討論

4.2.2 第二階段的實驗過程

1. 多項式函數圖形觀察

透過國中的學習經驗，學生已經了解一次函數的圖形為一直線，二次函數的圖形為拋物線，但是三次以上的函數圖形學生就沒有概念了，因此第二階段實驗的第一個主題設定為多項式函數圖形觀察。透過小組討論的方式，學生描繪出他們所觀察到不同次數的多項式函數圖形，並請他們利用淺顯易懂的表徵方式來描述圖形特徵，如英文字母、注音符號、物體、動物、或是其他象徵，例如二次函數圖形長得像拱橋…等。實驗的階段目標是期望學生透過觀察對於多項式函數圖形能夠有初步的認識，希望學生能有不受

拘束的想像力發揮，透過學生的觀點來描述多項式的函數圖形如圖 4-2-1、圖 4-2-2，藉此讓學生對於多項式函數圖形有較深刻的印象。表 4-2-1 為各組創意之總整理。

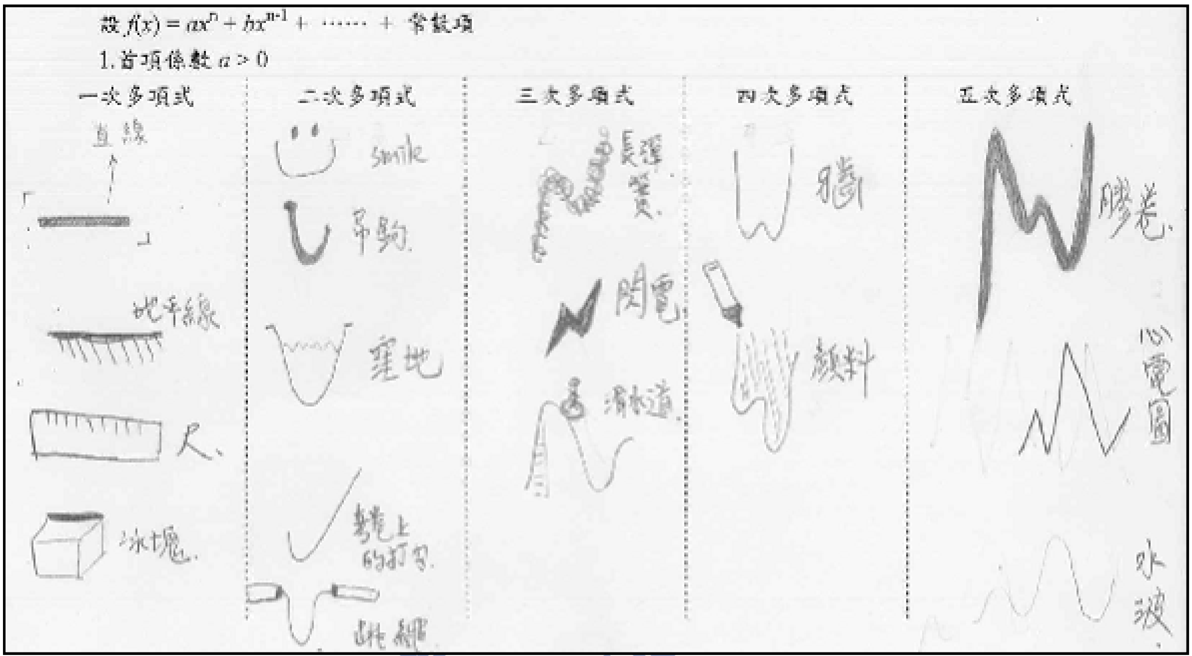


圖 4-2-1 關於多項式圖形學生的創意想像（一）

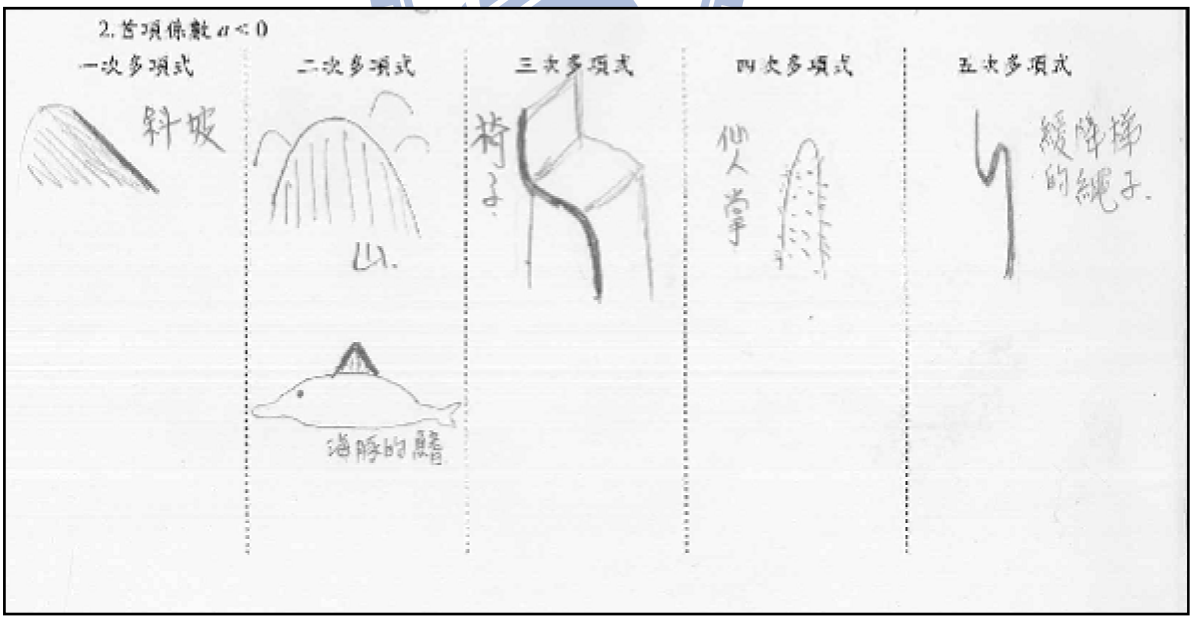


圖 4-2-2 關於多項式圖形學生的創意想像（二）

函數種類	圖形形狀　$a>0$	圖形形狀　$a<0$
一次函數	直線、地平線、尺、冰塊的稜、斜坡、溜滑梯、橫桿、流星劃過地平線無數的希望閃過、斜直線	斜坡、下坡、溜滑梯、無止境的未來、股市下跌的直線
二次函數	Smile、吊鉤、窪地、考卷上的打勾、跳繩、Big bowl、舌頭、U、下巴、北歐的峽谷、手指	山、海豚的鰭、噴泉、帽子、山丘、中指、迴力鏢、體操選手倒立的手勢、下垂
三次函數	長彈簧、滑水道、閃電、雲霄飛車、Big Wave、九彎十八拐、N、秋名山車神的車尾燈	椅子、S掛勾、彎彎曲曲的蚯蚓、婀娜多姿的身材曲線、頭毛、曼妙曲線、姣好身材、Nice Body、美女曲線S型
四次函數	W、小朋友的屁股、”銀狐弗克西”的下巴、首項係數調高就變成高低屁、牙齒、顏料、Big Ass、馬桶上的屁^2、豬蹄、牙根	聳立的高塔、仙人掌、麥當勞、想捉食物的手、西部牛仔帽、蠟筆小新的屁股、露屁屁的外星人、求救的手
五次函數	心電圖、水波、Stock、天使吊飾羽翼的一邊、鋸齒狀的翅膀、蘇花公路、連綿的山峰、心跳上上下下、膠卷、像波型一直亂動又衝上天很強	緩降梯的繩子、冰柱、山頂、班導師肚子上的游泳圈、排水管的U形管、閃電、猶如超長的閃電直霹地上

表4-2-1　關於多項式函數圖形學生的創意聯想(一)

從學生的回答中，我們發現到有些學生的想法並不成熟，無厘頭的回答，但是他的想像力卻是令人激賞的，相信只要我們給予適當的環境，鼓勵學生討論發表，學生就會以特殊的表徵模式去展現他的想像力，例如：二次函數圖形像下巴、迴力鏢，三次函數圖形像雲霄飛車、美女曲線，四次函數圖形像小屁屁、牛仔帽，五次函數圖形像心電圖、閃電，……等等。在此課程設計的目的為解構與啓發學生的思考，讓學生以自己的語言來闡述他所看到的現象，以學生目前的表現來觀察，多數學生都有達到研究者初步設定的階段性目標，因為學生能夠用自己的話說明，那就是屬於學生建構的知識，不容易忘記，實驗的結果學生的表現也的確讓老師的眼睛為之一亮。

2. 奇、偶次多項式函數圖形的歸納察

理論上當學生學過多項式函數、指對數函數、三角函數等函數觀念之後，對於函數圖形應該有一定程度的認知，但是根據研究者的經驗，如果老師給學生一個函數圖形，要他去分辨是哪種函數的圖形，其實有很多學生其實是無法辨別出來的，因爲學生在學習課程的時候是一段一段學習，對於統合的概念是薄弱的，許多學生都是從代數式去思考圖形，而不是從圖形去思考，因此如果他不知道函數圖形，他的思考方式很難具有想像及創造力的。透過上述實驗課程的發散思考過程，多數學生對於多項式函數圖形有了基本的認識，因此接下來研究者希望學生能夠分辨奇、偶次多項式函數圖形的差異，所以課程設計爲奇、偶次多項式函數圖形特徵的觀察，研究者引導學生再次畫出不同次數的多項式函數圖形，然後將多項式函數圖形依照奇、偶次數進行分類找出圖形共同的特徵。發現經過一個星期之後，多數學生的想像力比起前一次更加豐富，描述的情境也越來越活潑有趣如表 4-2-2，圖 4-2-3 及圖 4-2-4 爲其中二組學生的表徵方式。

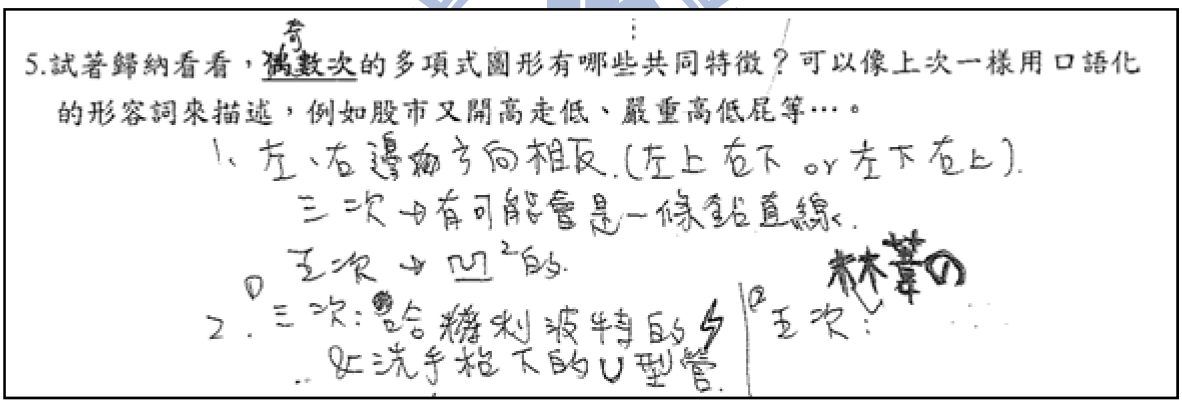

5.試著歸納看看，~~偶數次~~ 奇 的多項式圖形有哪些共同特徵？可以像上次一樣用口語化的形容詞來描述，例如股市又開高走低、嚴重高低屁等…。
1、左、右邊兩方向相反.(左上右下 or 左下右上).
三次→有可能會是一條斜直線.
五次→凹²的.
2. ①三次:超精利波特的⚡ ②五次:
&洗手枱下的U型管.
林蕾の

圖 4-2-3 關於多項式圖形學生的創意想像（三）

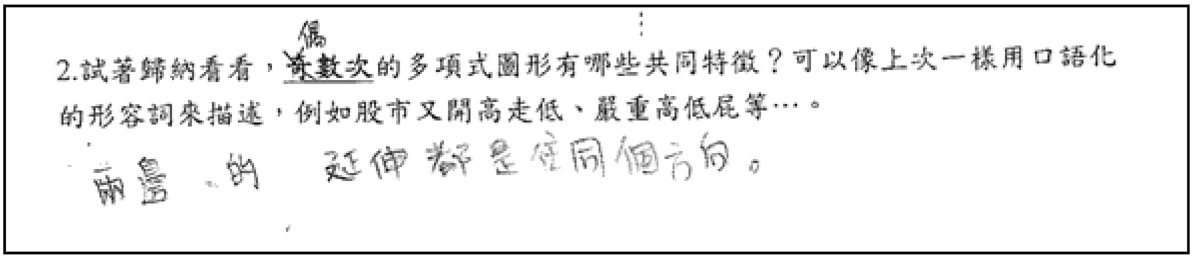

2.試著歸納看看，~~奇數次~~ 偶 的多項式圖形有哪些共同特徵？可以像上次一樣用口語化的形容詞來描述，例如股市又開高走低、嚴重高低屁等…。
兩邊的 延伸都是往同個方向。

圖4-2-4 關於多項式圖形學生的創意想像（四）

觀察上面二組學生的學習單，第一組學生的回答較無厘頭，但是比較像是經過吸收消化後的產物，而第二組的回答就中規中矩制式的答案，比較像老師上課講解的方式。

比較過後第一組的學生想像力相較於第二組而言是比較好的，其實第一組學生在寫學習單的時候，曾經問研究者：「可以用某人當例子嗎？」研究者說：「只要不要涉及人身攻擊，且當事人同意就可以。」所以學生就以特殊的表徵模式去展現他的想像力，研究者認爲學生應該要受到鼓勵，因爲此課程設計的目的爲解構與啓發學生的多元思考，讓學生以自己的語言來闡述他所看到的現象，建構屬於學生個人的知識庫，用字遣詞必須配合學生的學習經驗，學到的概念學生的學習記憶才能長久。

函數種類	偶數次函數	奇數次函數
圖形形狀特徵	山谷、鐘乳石、舌頭、屁股、下巴、龍捲風、派大星的手、下垂胸部、最少有一個弧形、W、U、水管、山丘、肥肥的手指、有時像幽靈、凸、被冰河侵蝕的U型谷、開口明顯、函數左右兩邊延伸方向相同、最外面的兩邊都會朝同個方向。	洗手檯下的U型管、心電圖、梯田、滑水道、山崖、魚嘴、豬蹄膀、溜滑梯、麥當勞、貓、NIKE、迴力鏢、飛舞的彩帶、左右兩邊的延伸方向相反、三次圖形可能是一條鉛垂線、五次凸凸的、哈利波特的閃電、開口不明顯、同時出現高山與深谷、蚯蚓爬行

表4-2-2　關於多項式函數圖形學生的創意聯想(二)

3. 多項式方程式解的觀察

經過前二個單元的觀察實驗，學生對於多項式函數圖形有了基本概念，研究者希望學生藉由 *GeoGebra* 來探索了解多項式方程式的解的個數與函數圖形和 X 軸的交點個數的關聯性，研究者設計兩個四次及五次的多項式函數，請學生觀察函數圖形與和 X 軸的交點個數的關係，並記錄下觀察到的特徵。以下爲學生透過觀察所得到的結果：

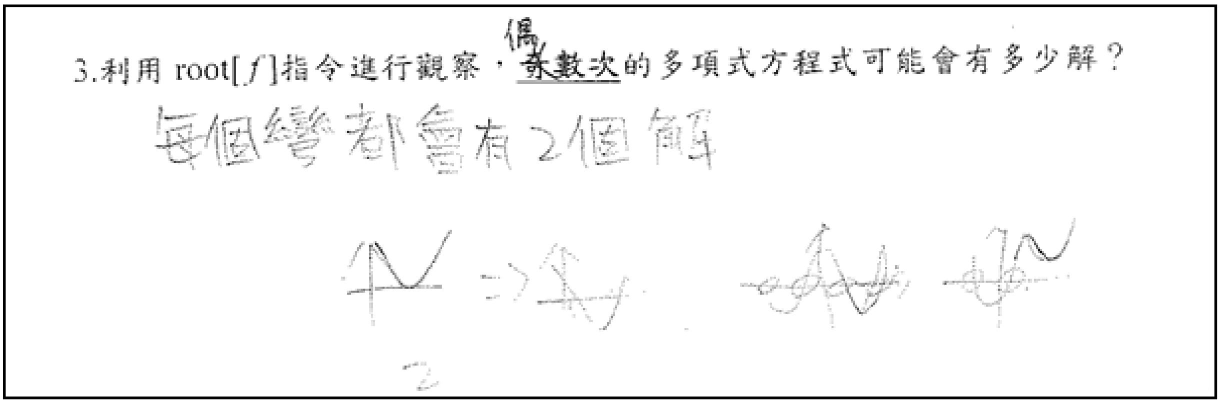
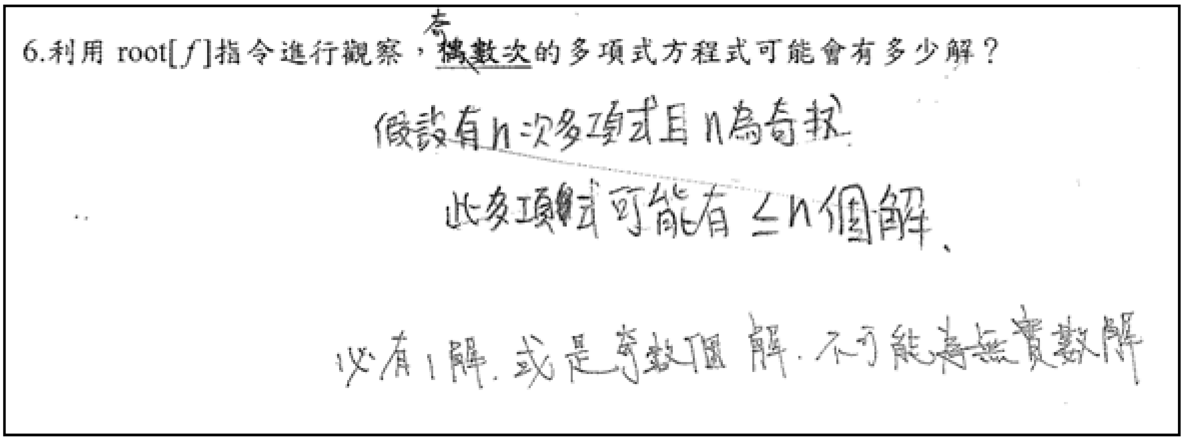


圖 4-2-5 關於多項式函數圖形學生的觀察歸納（一）



6.利用 root[*f*]指令進行觀察，~~偶數次~~奇數次的多項式方程式可能會有多少解？

假設有n次多項式且n為奇數

此多項式可能有≦n個解.

必有1解.或是奇數個解.不可能為無實數解

圖 4-2-6 關於多項式函數圖形學生的歸納觀察（二）

函數種類	偶數次函數	奇數次函數
解的情形	偶數次函數與X軸不一定有交點，而且解一定是偶數個、 不是無實數解、就是偶數個 每個彎都會有2個解 解的情形最多偶數次＋1種 2個解、4個解➔x^n➔n個解(偶數個) 至少2個 2個或0個	奇數次多項式解的個數≦n，必有一個解，或是奇數個解，不可能無實數解。 與X軸的交點必有奇數個 最少一個解，或是奇數個解 最少一個，最多與最高次數一樣 至少三個、五個解 1個解 3個解、5個解➔x^n➔n個解(奇數個)

表 4-2-3　關於多項式函數圖形學生的歸納觀察(一)

在下一節課堂當中，老師將引入幾個重要的數學定理，學生在這裡看似沒問題，可是實際上學生對於複數根與實根的觀念並不清楚，研究者希望學生透過圖形的觀察，得到的初步結論，可以與定理相結合，協助學生將代數與幾何兩種概念整合，對於定理有較明確的認知，因此教師做了以下的引言：

師：「從各位的學習單發現，有人觀察到偶數n次多項式函數與X軸不一定有交點，如果有交點，而且解一定是偶數個；奇數n次多項式解的個數不大於n，而且解的個數最少有一個解，或是奇數個解，不可能無實數解。這是很棒的觀察結論喔！」

師：「接下來今天我們要介紹幾個重要的數學定理，將你們觀察歸納的結論與數學

定理連結在一起！」

代數基本定理：
設 $n\in N$，則對於任意一元 n 次複係數方程式，至少有一個複數根。

這是一個很重要的數學定理，學生對於實係數方程式的複數根爲何成雙成對的觀念並不清楚，研究者希望學生透過圖形的觀察與定理相結合，協助學生能夠了解定理的內涵。

設 $n\in N$，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$，
$a_i\in C$，$i=1$、2、3、……、n，則 $f(x)$ 有 n 個複數根。

[說明]

根據代數基本定理，$f(x)$至少有一個複數根，令 z_1 爲 $f(x)$之一組解，$z_1\in C$

$\therefore f(x)=(x-z_1)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\ldots\ldots+b_1x+b_0)$

let $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\ldots\ldots+b_1x+b_0$，$b_i\in C$，$i=0$、$1$、…、$n-1$

再一次利用代數基本定理，$g(x)$至少有一個複數根，令 z_2 爲 $g(x)$之一組解，$z_2\in C$

$\therefore g(x)=(x-z_2)(c_{n-2}x^{n-2}+c_{n-3}x^{n-3}+\ldots\ldots+c_1x+c_0)$， $c_i\in C$，$i=1$、2、…、$n-2$

$$
\begin{aligned}
\therefore f(x)&=(x-z_1)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\ldots\ldots+b_1x+b_0)\\
&=(x-z_1)(x-z_2)(c_{n-2}x^{n-2}+c_{n-3}x^{n-3}+\ldots\ldots+c_1x+c_0)\\
&=\ldots\ldots\\
&=(x-z_1)(x-z_2)\ldots\ldots(x-z_n)，z_i\in C，i=1、2、\ldots、n
\end{aligned}
$$

也就是說對於任意一元 n 次複係數方程式，將會有 n 個複數根。

師：「有一組同學觀察發現n次多項式的函數圖形每個彎都會產生兩個解，二次實係數函數的圖形是拋物線，所以它有一個彎，也就是說二次實係數函數有兩個解。根據代數基本定理，表示它應該有兩個複數根。所以我們以函數圖形與X軸交點個數來判斷方程式的實根個數，

一個交點，相等實根，判別式＝0，
兩個交點，相異實根，判別式＞0，
沒有交點，共軛虛根，判別式＜0。」

根據研究者的經驗，以往學生學習方程式一元二次方程式兩根的性質多數是從代數方面思考：

判別式等於0，相等實根；
判別式大於0、相異實根；
判別式小於0、共軛虛根。

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots+a_1x+a_0=0$ 爲 n 次實係數方程式，
滿足 $f(x)=0$ 的虛根一定是成雙成對（共軛虛根）。

多數學生遇到實際問題時，有很高的比例的學生無法正確思考問題的解法，只是純粹看到關鍵字就開始計算，一知半解的結果當然就錯誤百出，以下爲其中一個例子。

範例：

設 k 爲實數，$kx^2+8x+(k+6)>0$ 無實數解，k 之範圍爲何？

學生常犯毛病 1：

判別式 $D=64-4k(k+6)>0$，$k^2-6k-16<0$，$(k+2)(k-8)<0$，$-2<k<8$

此類學生因爲題目的不等號是">0"很直接就認爲判別式應該">0"。

學生常犯毛病 2：

$\because kx^2+8x+(k+6)>0$ 無實數解，$\therefore D<0$

$D=64-4k(k+6)<0$，$k^2-6k-16>0$，$(k+2)(k-8)>0$，$k<-2$ 或 $k>8$

此類學生誤判的原因是，他認爲既然">0"無實數解，所以直接認定必定"<0"。

學生常犯毛病 3：

$\because kx^2+8x+(k+6)>0$ 無實數解，$\therefore D\leqq 0$

$D=64-4k(k+6)\leqq 0$，$k^2-6k-16\geqq 0$，$(k+2)(k-8)\geqq 0$，$k\leqq -2$ 或 $k\geqq 8$

此類學生誤判的原因是，他認爲既然">0"無實數解，所以直接認定必定"<0"。

正確解法：

$\because kx^2+8x+(k+6)>0$ 無實數解，$\therefore$開口朝下，$k<0$

且 $D=64-4k(k+6)\leqq 0$，$k^2-6k-16\geqq 0$，$(k+2)(k-8)\geqq 0$，$k\leqq -2$ 或 $k\geqq 8$

$\Rightarrow k\leqq -2$

上述三種情形是學生最容易犯的錯誤，許多人一看到無實數解，馬上就是判別式須小於 0，但是卻忘記討論開口方向，因此都忘記 $k<0$ 這個重要的條件，所以都沒有寫出正確的答案，包含實驗組在內超過 80%的學生有這個問題。其實學生犯這兩種錯誤，主要的原因是看到問題後直覺的反射動作，缺乏停下來思考，其實遇到這類問題，請同學畫圖後再解題，錯誤會比較少。

下面爲第十一週的小組作業，透過小組討論學生利用之前的學習經驗回答問題，題目如下，學生的回答如圖 4-2-8。

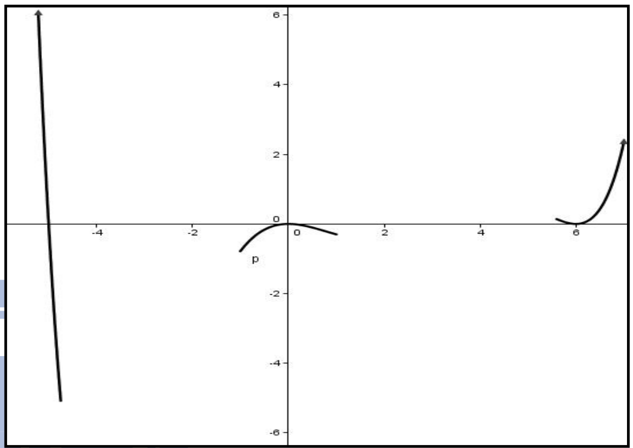


圖 4-2-7 小組討論之思考題

思漢不小心把張宇畫的多項式函數圖形作業給擦掉了，如今只剩下部份的圖形沒被擦掉…右圖是作業的遺跡，思漢希望能趁張宇發現之前趕緊補回去，但是卻又不知道原本長什麼樣子，老師發的題目小紙條也弄丟了……好心的各位同學，幫幫忙吧……

(1) 這份作業原本的題目可能是幾次多項式？(請寫出可能的數字規律)

(2) 承上，請寫下你猜測、推論的理由。

(3) 請試著用筆直接在上圖畫畫看，恢復原本圖形可能的樣子。

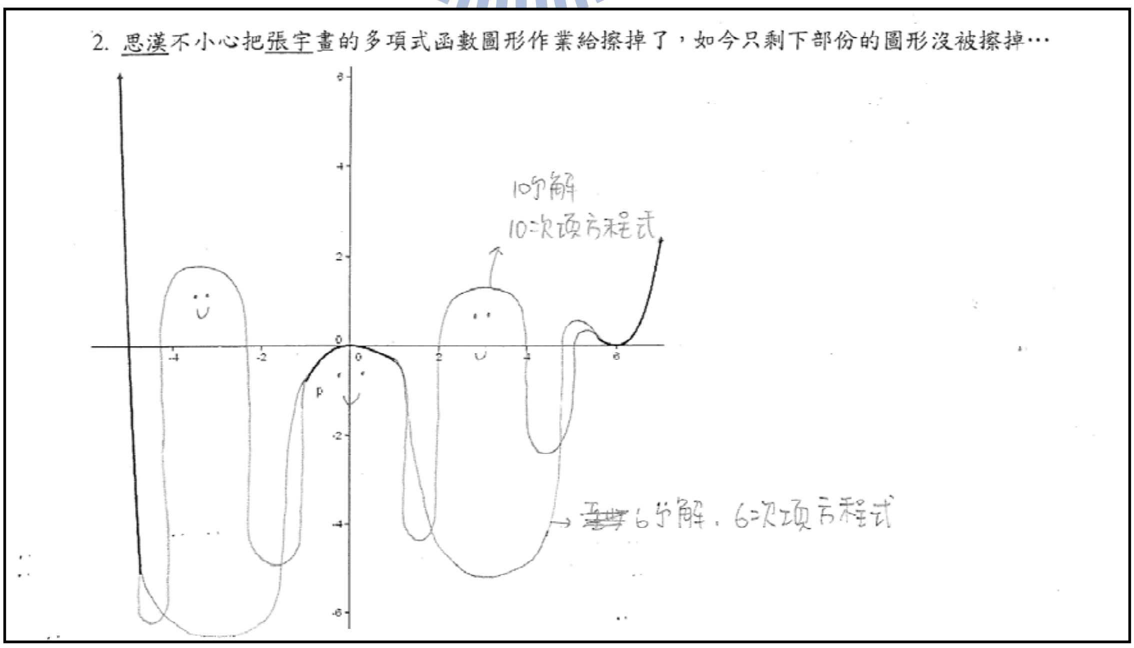


圖 4-2-8 關於思考題學生的歸納觀察

關於這個作業中，老師想要藉由多項式函數圖形特徵的觀察，以及多項式方程式解的個數觀察，引導學生畫出可能的圖形，學生根據學習經驗寫下答案，最後老師講解”堪根定理”來收斂及統整學生觀念。

勘根定理：

設 $a_i \in R$，$i=1$、2、…、n　，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$ 為 n 次實係數多項式，若 $f(a)\times f(b)<0$，則必有一個實數 c 介於 a、b 之間，使得 $f(c)=0$

師：「同學已經知道多項式函數圖形與X軸的交點代表的是方程式的解，圖形什麼時候會有交點呢？應該是有一直線穿越X軸，對不對？所以如果有兩個點，一個在X軸上方，一個在X軸下方，則這兩點的連線一定跟X軸有交點，這就是堪根定理的概念！」

4.　多項式不等式解的觀察

從前面的觀察當中發現透過學生的創意想法，可以協助學生對於多項式函數圖形的記憶印象，因此針對一般的函數圖形，學生可以描繪出大致上的輪廓，不會差異太大。所以對於次數較低的不等式題目，學生在解題上遇到的問題不大，多數都可以正確的解出來。接下來我們想探討的是下面這樣的題型：

設 $f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)^2$，$g(x)=(x+2)(x-1)(x-3)^4$

$h(x)=(x+2)(x-1)^3(x-3)^2$，$p(x)=(x+2)(x-1)^3(x-3)^4$

則 $f(x)>0$，$g(x)>0$，$h(x)>0$，$p(x)>0$ 的解為何？

根據研究者的經驗，當老師告訴學生上面這四個不等式的解是相同的時候，學生其實是很驚訝的！在認知上是懷疑的，因為他還在想像圖形的樣子，為什麼老師還沒有畫出圖形，就知道答案了，實在是太神奇了！但是經過老師解說後，學生可以理解 $(x-3)$ 與 $(x-3)^3$ 次數同為奇數，因此運算出來的值的性質符號是相同的，同理 $(x-3)^2$ 與 $(x-3)^4$ 次數同為偶數，運算出來的值的性質符號也是相同的，因此這四個不等式的解是相同的。研究者設計了如圖 4-2-9 的學習單(附件七)，學生透過 *GeoGebra* 來協助畫出四個不等式的圖形，以圖形重疊的方式觀察了解這四個不等式的解是相同的。希望學生透過圖像了解不等式解的特徵，自己能夠歸納整理，相信這樣的學習記憶將不容易忘記，而且較能夠面對複雜的問題。

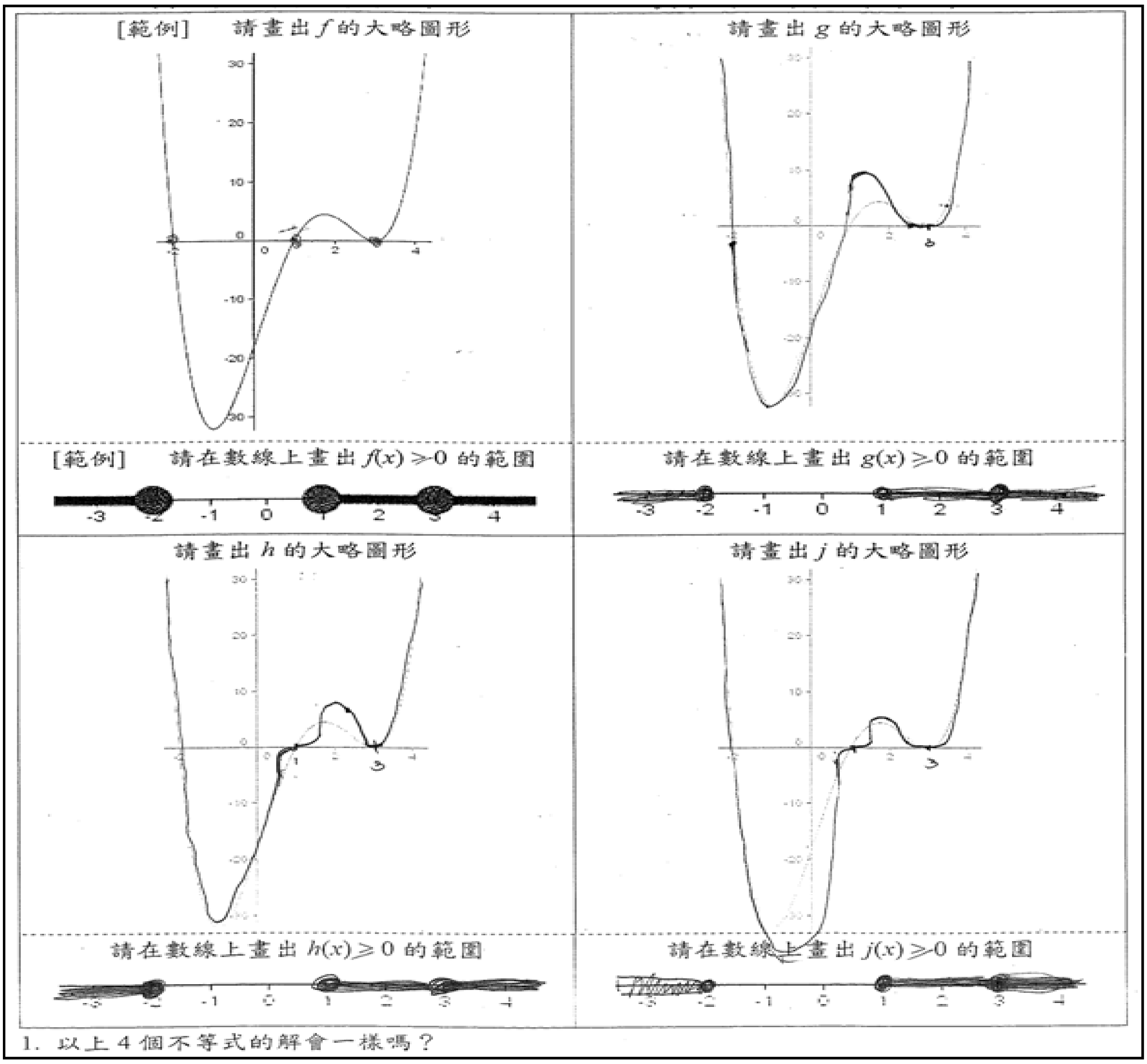


圖 4-2-9　不等式解的討論觀察

4.2.3　第二階段實驗的各項測驗結果探討

經過第一階段的實驗，研究者評估後實驗課程在 10 月 18 日進入第二階段，在 10 月 19 日進行第二階段實驗的前測，然後經過了六個星期的實驗課程從 10 月 18 日到 11 月 18 日，完成了第二階段的實驗，在 11 月 30 日進行第二階段實驗的後測，再經過一個半月之後在 1 月 18 日進行第二階段實驗的延後測。

1.　第二階段實驗前測成績分析

以下表格記錄了各班開始第二階段實驗之前的前測成績，各項統計資料如下表：

	N	*M*	*SD*	*High*		*Average*		*Low*	
				M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
實驗組	40	5.35	1.477	7.0	0.58	5.0	0.51	4.0	0.51
對照組A	38	5.63	1.746	7.5	0.52	5.6	0.51	3.9	1.50
對照組B	40	4.72	2.088	7.0	0.91	4.6	0.76	2.6	1.50
對照組C	41	4.98	2.185	7.3	0.63	5.3	0.73	2.5	1.29
對照組D	36	4.78	1.641	6.7	0.98	4.5	0.52	3.2	0.72
對照組E	35	3.97	1.807	6.0	1.00	3.8	0.38	2.1	1.22
對照組F	43	4.74	1.544	6.4	0.64	4.8	0.41	3.0	0.88
總和	273	4.89	1.845						

N：樣本數　M：平均數　SD：標準差

表4-2-4　第二階段實驗前測成績描述統計量

由各班第二階段實驗前測成績的統計量來觀察，初步發現除了對照組E的起點行為與其他班級差異較顯著之外，其餘各班的差異並不顯著，由變異數同質性檢定中的p值＝.134＞.05，表示各班的第二階段實驗前測平均成績的變異數是同質的，也就是說各班前測成績常態分佈的情形與性質大致上是雷同的，換句話說各班學生開始學習多項式不等式的起點形結構是相似的。而就*High*、*Average*、*Low*三種程度的學生來觀察，班級之間學生的結構差異不大，表示在學習多項式不等式這個單元的起點行為是沒有差異的；從數據中發現實驗組學生的前測績並非最佳。

表4-2-5　第二階段實驗前測ANOVA分析摘要表（一）

變異來源	SS	df	MS	F
組間	61.647	6	10.275	3.162**
組內	864.272	266	3.249	
總和	925.919	272		

***p＜.01　***p＝.005

表4-2-6　第二階段實驗前測ANOVA分析摘要表（二）

變異來源	SS	df	MS	F
組間	27.493	5	5.499	1.693
組內	753.301	232	3.247	
總和	780.794	237		

p＝.137

由第二階段前測成績的ANOVA分析當中赫然發現實驗還沒開始進行，班級間的差異已經出現，這樣一定會影響到實驗最後的結果，由於對照組E的成績的落後於其他班級，因此研究者懷疑是由於對照組E所產生的影響，研究者決定排除對照組E的資料後，對其他班級的前測成績再做一次ANOVA分析，分析結果如下，其他班級之間的差異是不明顯的。由排除對照組E之後的變異數同質性檢定發現顯著性＝.084＞.05，表示其餘各班數學的前測成績變異數是同質的，也就是說各班前測成績常態分佈的情形與性質大致是雷同的，換句話說各班學生開始學習多項式不等式的起點形結構是相似的。由同質子集分析發現除了對照組E之外，其他班級的成績差異並不顯著，顯示其餘班級的學生結構與程度接近，各班的起點行爲是相同的。由第二階段實驗前測的事後檢定中可以發現對照組E班級與每個班的差異都非常的顯著，其餘各對照組班級與實驗組的差異並不顯著。

2. 第二階段實驗後測成績分析

由第二階段實驗後測成績的變異數同質性檢定發現顯著性p值＝0.038，表示各班數學的後測成績變異數並不是同質的，由於前測中對照組E的成績明顯落後於其他班級，研究者決定先判斷差異是否是對照組E所造成的，經過研究者觀察對照組E的後測成績統計量，發現對照組E的成績還是些許落後於除了對照組C之外其他班級的成績，但是結構差異並非完全是對照組E所造成的，表示經過了六個星期的教學各班學生的成績結構有了顯著的差異。由各班第二階段實驗後測成績的統計量來觀察班級平均、標準差及*High*、*Average*、*Low*三種程度的學生的平均及標準差，發現實驗組的班級平均後測成績優於對照組，其中以*Average*、*Low*二種程度的學生差異更明顯，顯示*Average*、*Low*二種程度的學生透過操作確實可以提升學習成就，效果甚至優於*High*程度的學生。而且在前測成績中對照組有好幾個班級的成績是優於實驗組，但是經過實驗課程之後，實驗組反而優於這些對照組班級，顯示實驗組的學生經過二階段的實驗課程之後，學生的學習成效越來越顯著。

	N	*M*	*SD*	*High*		*Average*		*Low*	
				M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
實驗組	39	11.10	4.038	15.1	1.95	11.5	0.66	6.7	2.90
對照組A	38	9.68	3.967	14.2	1.90	9.5	0.66	5.7	2.72
對照組B	41	9.51	4.955	15.1	2.47	9.5	2.13	3.9	1.75
對照組C	38	6.82	4.666	12.6	2.27	6.2	1.64	2.1	1.32
對照組D	38	9.84	4.630	15.3	2.38	9.8	1.36	4.9	1.89
對照組E	33	8.18	3.925	12.5	2.42	7.8	1.25	4.2	1.78
對照組F	43	8.53	3.376	12	2.22	8.8	0.94	4.8	1.67
總和	270	9.11	4.393						

N：樣本數　M：平均數　SD：標準差

表4-2-7　第二階段實驗後測成績描述統計量

由同質子集分析發現，經過了六個星期的教學與實驗課程，除了對照組C與實驗組的差異非常顯著之外，其餘班級與實驗組的差異並不顯著，與第一階段實驗的結論相互印證，而由第二階段實驗後測的事後檢定中也發現，除了有三個班級（對照組C、對照

組E、對照組F）與實驗組差異非常的顯著之外，其餘三個班級（對照組A、對照組B、對照組D）與實驗組在第二階段的後測成績上並沒有顯著的差異，只能說實驗組成績優於對照組成績。再度證明傳統教學對於短期學習成效具有一定的優勢，就算沒有使用資訊融入，對於短期學習成效而言影響並不是很大。這是一個很合理的現象，每個班級剛教完課程印象都非常深刻，基本而言後測成績不太容易有明顯的差異，實驗的結果再次說明將動態幾何系統融入課程的教學方式與傳統的教學方式對於學生短期的學習成就的差異並非完全顯著。

表4-2-8　第二階段實驗後測ANOVA分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F
組間	437.027	6	72.838	4.029**
組內	4754.414	263	18.078	
總和	5191.441	269		

**p＜.001　　**p＝.001

從摘要表的p值＝.001，可看出7個班級在第二階段實驗的後測平均成績有顯著的差異存在，表示學生動手操作*GeoGebra*對於短期的學習成就與傳統教學比較的差異性是非常明顯的，但是這個差異從前面的討論可以得知主要是因爲*Average*、*Low*程度的表現都明顯的優於對照組學生，表示學生在動態幾何環境中學習，隨著時間的增長，思考會更靈活，差異會越來越大。雖然摘要表的是顯著，但是研究者認爲只有一半的班級達到顯著，與第一階段的相同，再次說明整體而言短期學習成效的差異並不顯著，但是同時也發現教師融合傳統與創新，學生短期的學習成就較佳。

就各班*High*、*Average*、*Low*三層級學習成就的學生表現而言，如表4-13，實驗組學生在*Average*、*Low*程度的表現都明顯的優於對照組學生，但是*High*層級的差異不明顯，表示操作動態幾何系統對於*Average*、*Low*程度的學生的學習影響是最大的。透過操作使得中下程度的學生印象更深刻進而提升學生成績，與第一階段實驗後測的結果是相同的。

3. 第二階段實驗延後測成績分析

由第二階段實驗延後測成績的變異數同質性檢定，發現顯著性＝0.017＜.05，表示各班的延後測成績變異數與後測一樣不是同質的，表示經過了六個星期的時間，學生的學習記憶大部分都呈現衰退現象，但是實驗組的學生仍然維持相當好的學習成就，而傳統教學方式下學生的記憶衰退較爲明顯，不管原來的成績差異多少，只要經過二個月之後原先的差異幾乎都會消失。

	N	M	SD	High		Average		Low	
				M	SD	M	SD	M	SD
實驗組	38	9.9	4.28	14.8	2.18	10.0	1.35	5.4	2.14
對照組A	36	7.2	3.67	11.3	1.56	7.0	1.13	3.3	2.06
對照組B	40	5.9	3.92	10.4	2.57	5.6	1.02	1.8	1.36
對照組C	36	2.5	2.11	5.2	0.98	1.9	0.9	0.5	0.52
對照組D	38	5.9	4.17	10.7	4.10	5.0	0.82	2.5	1.05
對照組E	37	5.7	3.52	9.8	2.55	4.9	0.76	2.3	1.06
對照組F	41	5.2	2.71	8.4	2.22	4.8	0.80	2.7	0.61
總和	270	9.11	4.393						

N：樣本數　M：平均數　SD：標準差

表4-2-9　第二階段實驗延後測成績描述統計量

由各班第二階段實驗延後測成績的統計量來觀察班級平均、標準差及*High*、*Average*、*Low*三種程度的學生的平均及標準差，發現不論在全班或者是*High*、*Average*、*Low*三種程度的學生的平均及標準差，實驗組的成績皆優於對照組，且由於實驗期間的增加，學生的邏輯思考程度差異更明顯，顯示學生透過操作*GeoGebra*確實可以提升學生的學習成就。而且在後測當中與實驗組差異不大對照組班級的，但是經過一段時間之後，顯示實驗組的學生經過二階段的實驗課程之後，學生的學習成效越來越顯著。由其是對照組A從前測成績優於實驗組，但是經過實驗之後，後測時實驗組反而優於對照組A，然後在延後測當中兩個班級的差異更顯著。

由第二階段延後測的同質子集分析，發現經過了六個星期的教學與實驗課程，除了對照組C與所有班級差異非常顯著之外，其餘班級分成（對照組F、對照組E、對照組B、

對照組D、對照組A）與（實驗組）等二個族群，表示第二階段的延後測成績證實實驗組的長期學習成就是非常優異的，而由第二階段實驗延後測的事後檢定中也發現，每個對照組班級與實驗組差異都非常的顯著。實驗的結果再次說明將動態幾何系統*GeoGebra*融入課程的教學方式對於學生長期的學習成就的影響與傳統的教學方式相較之下，差異是非常顯著的。

表4-2-10　第二階段實驗延後測ANOVA分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F
組間	1075.720	6	179.287	14.059***
組內	3277.276	257	12.752	
總和	4352.996	263		

***p＜.001

就實驗的結果而言，可以說實驗組班級的長期學習成就很明顯的領先對照組班級的長期學習的學習成就，這點其實就是將動態幾何系統融入課程的重點，學生透過動手操作、觀察、討論得到的結論，對於學生的學習具有重大的影響，改變了學生的學習方式與思考模式，與傳統教法當中學生只能被動的接受老師所講授的結論比較的結果，學生較能夠接受不同題型的挑戰，對於解題比一般學生較能夠利用幾何圖形或函數圖形的觀點切入，學生的學習也比較快樂。

從摘要表的顯著性p＜.001，可看出7個班級在第二階段實驗的延後測平均成績有顯著的差異存在，表示學生動手操作*GeoGebra*對於長期的學習成就與傳統教學比較的差異性是非常明顯的，也表示學生在動態幾何環境中學習，隨著時間的增長，思考會更靈活，差異會越來越大。仔細觀察第二階段延後測成績從統計量，每個對照組班級的成績表現與實驗組的差異都是非常顯著的。由從同質子集分析發現，其餘各班與實驗組的成績差異是非常明顯的，表示經過實驗課程之後，實驗組的成績是優於對照組的成績，與第一階段的相同，再次說明長期學習成效的差異是非常顯著的。

就各班*High*、*Average*、*Low*三層級學習成就的學生表現而言，如表4-3，實驗組學

生在各種程度的表現都明顯的優於對照組學生。其中*High*層級不僅平均成績最高，而且超過其他班級1~2個標準差，而在*Average*、*Low*層級實驗組學生平均成績不僅皆優於對照組班級,而且就長期學習成就而言,實驗組學生與對照組學生的平均成績比較的結果，實驗組學生的程度上幾乎皆往上提升了一個層級,表示操作動態幾何系統是全面式的提升學生成績,而不是只有少數人進步,印證了操作動態幾何系統*GeoGebra*確實對於各層級的學生的長期學習成就是正面的，與後測的結果是相同的，對於*Average*、*Low*程度的學生的學習影響是最大的。

從第二階段的後測及延後測成績而言，從短期的學習成就來觀察，實驗組與對照組班級的差異並不大,但是就長期的學習成就來看,實驗組班級很明顯的領先對照組班級，再次證明第一階段實驗的結果。這點其實就是研究者想要探討將動態幾何系統融入課程的重要原因，學生透過動手操作、觀察、歸納、分析及討論得到的結論，對於學生的長期學習的確具有重大的影響，可以改變學生的學習方式與思考模式，並提升學生的學習成效。與接受傳統教法的學生的學習方式及思考方式做比較，實驗組的學生較能夠接受不同題型的挑戰，對於解題方法也比一般學生多元化，除了基本的代數解題之外，並能夠從幾何圖形或函數圖形的觀點切入，解題的想法上是活的知識而不是死的知識，最重要的是學生的學習過程相當快樂。

4. 第二次期中考成績分析

由於後測日期為第二次期中考考完的隔天測驗，結果接近是合理的。由第二次期中考成績變異數同質性檢定，可以發現顯著性＝0.289，表示各班數學的期中考成績常態分布的結構相似，由同質子集分析也發現，整體而言七個對照組班級彼此間的差異性並不顯著，與後測的結果皆近，再度顯示傳統教學對於短期的學習成就具有一定的優勢，沒有使用資訊融入，對於短期學習成效而言依舊影響不大。

由第二次期中考成績的事後檢定中發現，雖然七個班級之間差異性不大，但是仍有四個班級（對照組B、對照組C、對照組E、對照組F）與實驗組成績差異非常顯著的之外，其餘二個班級（對照組A、對照組D）與實驗組在第二次期中考成績上並沒有顯著的差異，與第二階段實驗的後測結果接近。再度顯示學生透過動手操作、觀察、討論得到的結論，對於學生的學習雖然具有正面的影響，但是短期成果與傳統教法差異不大，

在潛移默化中改變了學生的學習方式與思考模式。

	N	*M*	*SD*	*High*		*Average*		*Low*	
				M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
實驗組	42	80.1	11.54	88.4	2.50	83.3	1.49	68.6	13.5
對照組A	39	77.2	10.54	86.8	2.39	78.5	3.18	66.4	10.4
對照組B	42	70.9	15.18	84.9	4.28	73.6	4.01	56.8	9.05
對照組C	41	73.0	12.97	84.9	4.13	73.9	2.56	60.1	14.1
對照組D	39	76.3	14.50	90.7	5.09	76.2	3.48	62.2	13.6
對照組E	37	72.9	13.83	85.3	4.54	75.2	2.55	58.1	13.6
對照組F	43	73.6	10.95	84.0	5.32	74.5	2.67	62.3	9.79
總和	283	74.9	13.08						

N：樣本數　M：平均數　SD：標準差

表4-2-11　第二次期中考描述統計量

就各班*High*、*Average*、*Low*三層級學習成就的學生表現而言，再度印證動態幾何系統融入課程對於*Average*、*Low*層級學生影響比*High*層級大，實驗結果證實將動態幾何系統融入課程對於*Average*、*Low*程度學生的學習成效是正面的，此項結果再度與第一次期中考互相呼應，確實增加了研究者及學生的信心。不過由於期中考的範圍比較大，而實驗課程只針對其中一個單元做課程設計，因此如果以此結果解讀爲實驗課程的成果，研究者認爲並不恰當。研究者寧可相信實驗組學生經過實驗課程之後，解題的技巧較傳統教法靈活，實驗組學生將觀察、歸納的能力類推到其它單元，因此比起傳統教法，學生有較佳的學習成果。因此期中考成績及後測成績並列爲一個課程階段融入判斷的重要依據，實驗計畫主要的成果研究者認爲應該注重後測及延後測的結果。

從摘要表可看出7個班級在第二次期中考平均成績沒有顯著的差異存在。由各班期中考成績的同質子集分析發現，成績區分成兩個子集（對照組B、對照組E、對照組C、對照組F、對照組D、對照組A）與（對照組E、對照組C、對照組F、對照組D、對照組A、實驗組），顯示動態幾何融入課程的教法對於學生的短期學習成就影響不顯著。從成績發現對照組D的*High*的成績表現比實驗組*High*的成績更好，此項結果也與後測的結果相吻合，顯示傳統教法對於學生短期的學習成就，其實教師只要教學方法與策略搭配的宜，再加上密集的測驗，透過精熟學習，學生的成績具有一定的水準。

表4-2-12　第二次期中考ANOVA分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F
組間	2474.471	6	412.412	2.487*
組內	45761.155	276	165.801	
總和	48235.625	282		

*p＜.05　*p＝.023

5. 第二階段實驗後測與延後測學生綜合表現之探討

經過二階段的實驗及後測與延後測成績ANOVA分析之後，對於教學實驗的結果，我們已有了一個明確的結論，動態幾何系統可以確實有效的提升學生長期的學習成效，短期的學習成效其實並不顯著。因此接下來我們要比較的是學生學習的差異到底在哪裡？從試題事後分析比較後，發現在後測（參考附錄）當中差異最顯著的試題是Q5&Q10，以下針對這兩個問題，就學生所產生的認知問題分別做探索：

Q5. 若 $ax^2 + 2ax - 1 > 0$ 無實數解，求實數 a 的範圍。

解法一：

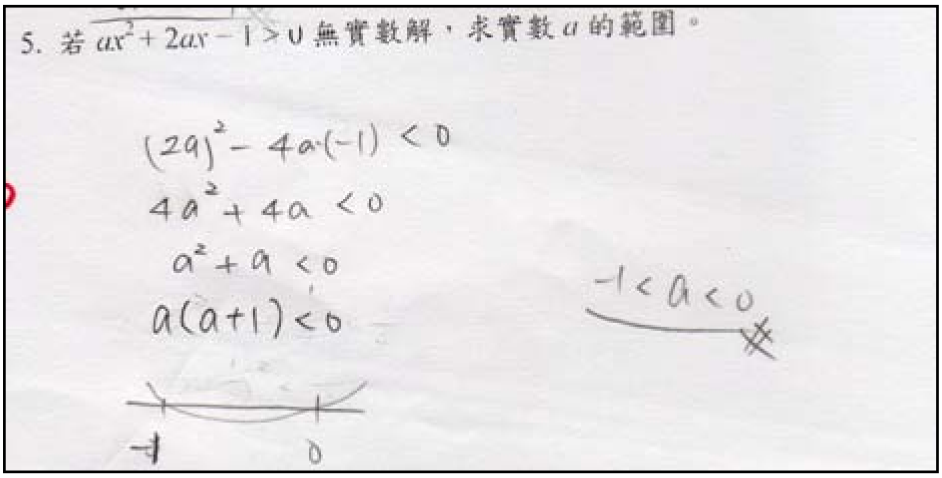


圖4-2-10 傳統教學模式下學生的常犯的錯誤(六)

解法二：

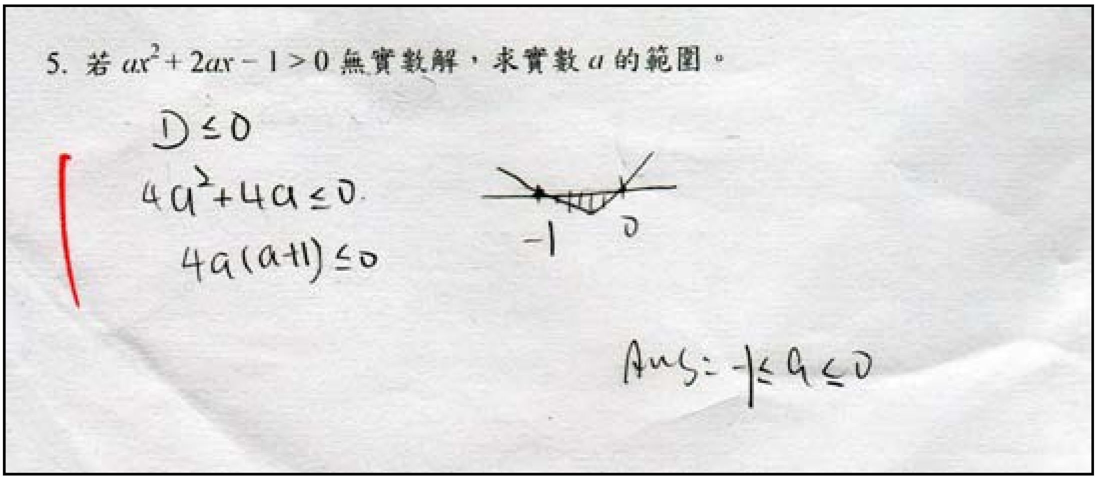


圖4-2-11 傳統教學模式下學生的常犯的錯誤(七)

解法三：

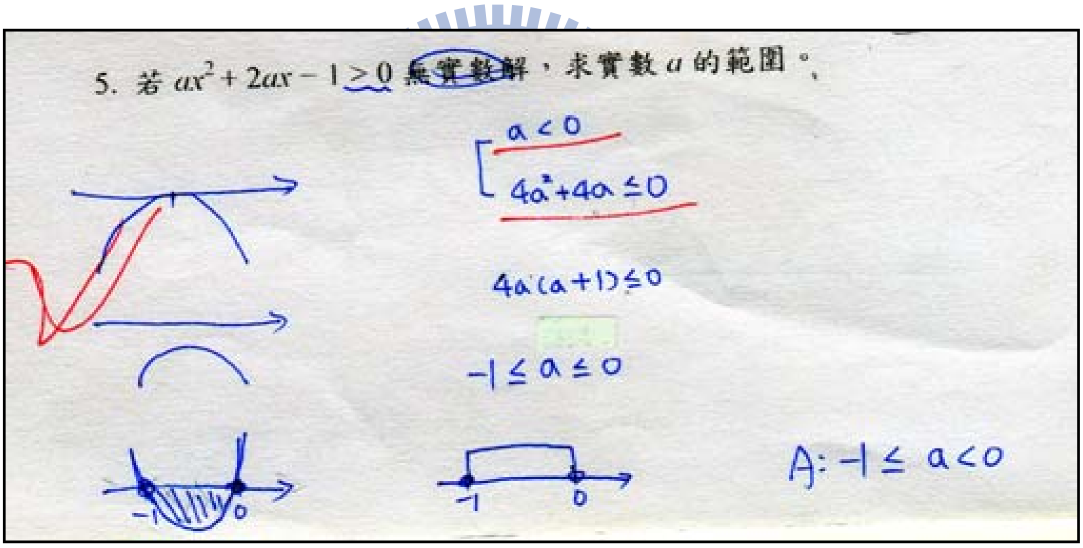


圖4-2-12 動態幾何教學模式下學生的解題模式(三)

從解法一、二、三可以發現學生在解題時的一些迷失問題，分別描述如下：

(a) 解法一：多數的學生都是採取這樣的做法。學生一看到題目寫著無實數解，二話不說馬上就用判別式小於 0，計算出不等式答案。學生會採取這種解法，研究者認為是純粹是由於學生的學習經驗所養成的反射動作，學生並沒有經過仔細思考的解題方式。

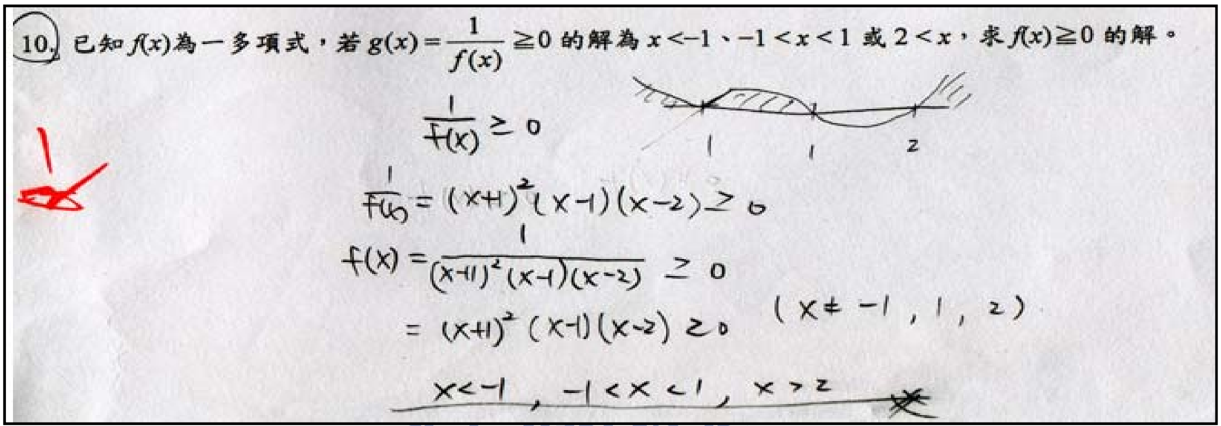
(b) 解法二：這種做法的同學已經注意到不等式大於 0 無實數解，其實有兩種可能性，所以判別式可能會小於或等於 0，依此計算出不等式的答案，但是卻未注

意到開口方向必須朝下，也就是 $a<0$ 是必要條件。

(c) 解法三：透過圖形思考解題，各項細節較容易被注意到，學生的解題想法較為完整。

Q10. 已知 $f(x)$為一多項式，若 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}\geq 0$ 的解為 $x<-1$、$-1<x<1$ 或 $2<x$，求 $f(x)\geqq 0$ 的解。

解法一：


10. 已知 $f(x)$為一多項式，若 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}\geq 0$ 的解為 $x<-1$、$-1<x<1$ 或 $2<x$，求 $f(x)\geqq 0$ 的解。

$\dfrac{1}{f(x)}\geq 0$

$\dfrac{1}{f(x)}=(x+1)^2(x-1)(x-2)\geq 0$

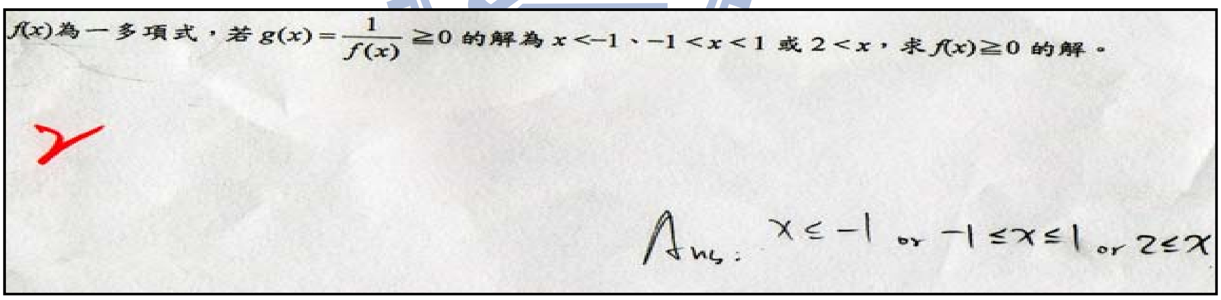
$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)(x-2)}\geq 0$

$=(x+1)^2(x-1)(x-2)\geq 0 \quad (x\neq -1, 1, 2)$

$x<-1,\ -1<x<1,\ x>2$

圖4-2-13 傳統教學模式下學生的常犯的錯誤(八)

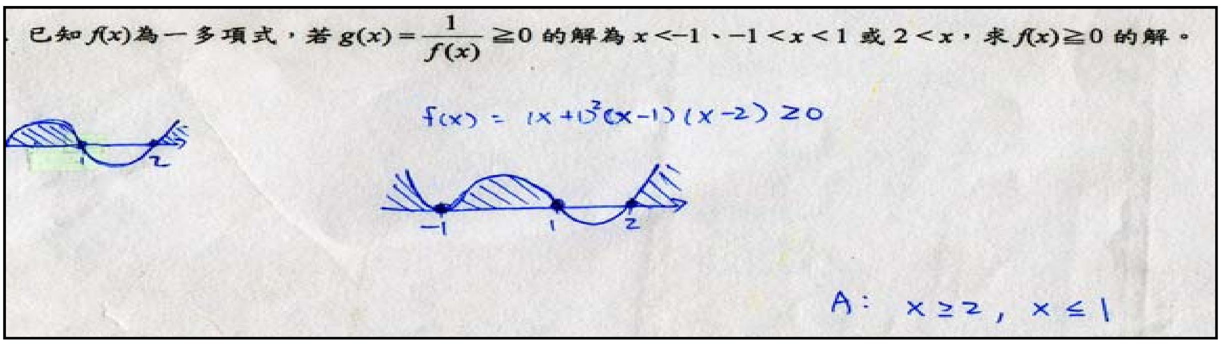
解法二：


$f(x)$為一多項式，若 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}\geq 0$ 的解為 $x<-1$、$-1<x<1$ 或 $2<x$，求 $f(x)\geqq 0$ 的解。

Ans: $x\leq -1$ or $-1\leq x\leq 1$ or $2\leq x$

圖4-2-14 傳統教學模式下學生的快速解題

解法三：


已知 $f(x)$為一多項式，若 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}\geq 0$ 的解為 $x<-1$、$-1<x<1$ 或 $2<x$，求 $f(x)\geqq 0$ 的解。

$f(x)=(x+1)^2(x-1)(x-2)\geq 0$

A: $x\geq 2,\ x\leq 1$

圖4-2-15 動態幾何教學模式下學生的解題模式(三)

從解法一、二、三發現學生在解題時的一些迷失問題，分別描述如下：

(a) 解法一：採取這樣做法的學生其實數學能力不差。會想辦法利用已知條件求出符合條件的函數，然後再解出不等式的答案寫，不過由於學生做了一些不適合的假設，經過反覆的計算後產生了一些由假設衍生出來的問題，雖然學生畫出圖形，但是還是產生了錯誤的解答。

(b) 解法二：採取這種做法的同學已經注意到分式不等式的等號問題，透過簡單的思考，很快的就寫出答案，根本不需要計算，這是很棒的解題方法，只可惜跟第一階段實驗的後測所發現的問題一樣，傳統做法中學生較容易有統整答案的問題。

(c) 解法三：類似於解法二，學生將不等式的答案圖像化，透過圖像思考解題，各部分的細節較容易注意到，統整答案的能力較佳。

而在延後測(參考附錄)的結果分析發現，除了後測時差異就很顯著的Q6及Q8之外，在延後測中Q2、Q4、Q6、Q7、Q8及Q9差異性也一樣顯著。表示經過了一個半月的時間，學生的學習記憶雖然會衰退，但是學生透過動手操作動態幾何系統，的確有效的延長學生的學習記憶，從實驗組與對照組兩次測驗成績的差異性越來越顯著，可以做爲最佳佐證。

6. 第二階段實驗後測與延後測三種程度學生成績之探討

	Mean		SD		變異係數	
	後測	延後測	後測	延後測	後測	延後測
實驗組	11.10	9.9	4.038	3.210	36.4%	43.2%
對照組A	9.68	7.2	3.967	4.359	41.0%	51.0%
對照組B	9.51	5.9	4.955	4.004	52.1%	66.4%
對照組C	6.82	2.5	4.666	4.705	68.4%	84.4%
對照組D	9.84	5.9	4.630	3.834	47.1%	70.7%
對照組E	8.18	5.7	3.925	4.959	48.0%	61.8%
對照組F	8.53	5.2	3.376	4.002	39.6%	52.1%

表4-2-13　後測與延後測各班平均成績統計表

根據統計資料我們已經知道學生的成績是有顯著差異的，但是研究者接著把第二階

段實驗的後測成績與延後測成績合併，加入了變異係數來討論觀察各種程度的學生學習記憶衰退狀況，從表4-2-13發現整體而言，學生的記憶衰退很明顯，每個班學生平均成績的變異係數都變大了，表示學生的學習差異擴大了，但是實驗組的學生表現相對是非常好的，不僅差異最小，而且擴大的幅度也最小。

	Mean		SD		變異係數	
	後測	延後測	後測	延後測	後測	延後測
實驗組	15.1	14.8	1.95	2.18	12.9%	14.7%
對照組A	14.2	11.3	1.90	1.56	13.4%	13.8%
對照組B	15.1	10.4	2.47	2.57	16.4%	24.7%
對照組C	12.6	5.2	2.27	0.98	18.0%	18.8%
對照組D	15.3	10.7	2.38	4.10	15.6%	38.3%
對照組E	12.5	9.8	2.42	2.55	19.4%	26.0%
對照組F	12.0	8.4	2.22	2.22	18.5%	26.4%

表4-2-14　後測與延後測HIGH程度平均成績統計表

表4-2-14發現就HIGH程度學生的成績表現而言記憶衰退是很明顯的，大約還記得70%~80%。從變異係數的觀點來看，變異係數維持一定但是成績明顯退步的班級表示記憶衰退是全班性的情形，而非少數學生，而變異係數擴大的班級表示部分同學的記憶衰退比較嚴重。實驗組的學生表現相對是非常好的，還有高達96%的記憶力，雖然變異係數高於對照組A，不過差異很小，而且擴大的幅度也最小。

	Mean		SD		變異係數	
	後測	延後測	後測	延後測	後測	延後測
實驗組	11.5	10.0	0.66	1.35	5.7%	13.5%
對照組A	9.5	7.0	0.66	1.13	6.9%	16.1%
對照組B	9.5	5.6	2.13	1.02	22.4%	18.2%
對照組C	6.2	1.9	1.64	0.9	26.5%	47.4%
對照組D	9.8	5.0	1.36	0.82	13.9%	16.4%
對照組E	7.8	4.9	1.25	0.76	16.0%	15.5%
對照組F	8.8	4.8	0.94	0.80	10.7%	16.7%

表4-2-15　後測與延後測AVERAGE程度平均成績統計表

表4-2-15發現就AVERAGE程度學生的成績表現而言記憶衰退是很明顯的，大約只

剩下55%~65%，衰退幅度高於HIGH程度學生。從變異係數的觀點來看，除了對照組C變異係數擴大記憶衰退比較嚴重之外，多數班級變異係數維持一定但是成績明顯退步的班級表示記憶衰退是全班性的情形，而非少數學生。但是同時實驗組的學生表現相對仍然是非常好的，還有高達90%的記憶力。

	Mean		SD		變異係數	
	後測	延後測	後測	延後測	後測	延後測
實驗組	6.7	5.4	2.90	2.14	43.3%	39.6%
對照組A	5.7	3.3	2.72	2.06	47.7%	62.4%
對照組B	3.9	1.8	1.75	1.36	44.9%	75.6%
對照組C	2.1	0.6	1.32	0.52	62.9%	86.7%
對照組D	4.9	2.5	1.89	1.05	38.6%	42.0%
對照組E	4.2	2.3	1.78	1.06	42.4%	46.1%
對照組F	4.8	2.7	1.67	0.61	34.8%	22.6%

表4-2-16　後測與延後測LOW程度平均成績統計表

表4-2-16發現就LOW程度學生的成績表現而言，對照組班級的記憶衰退是很明顯的，幾乎都忘光了。實驗組的學生表現相對是有優勢的，從變異係數來看，記憶衰退的狀況是比較好的。

整體而言，從後測與延後測的各班之間的橫向比較，或者是同一個班級後測與延後測的縱向比較，實驗組的學生表現相對是非常好的，在相同程度的學生中，實驗組學生是比較具有競爭力的。

4.3 第三階段的實驗課程

由於本教學實驗的前二個階段已針對實驗課程進行二階段的前測、後測及延後測，結果分析也得到非常明確的結論，再則因爲學期末不容易找到時間對全部學生做後測及延後測，所以第三階段的教學實驗並沒有進行測驗分析成果。本教學實驗第三階段實驗課程設定的教學目標爲”應用”，探討的主題設定爲99課綱第一冊第三章第三節及第五節指數與對數圖形。由於已將實驗課程融入正課中，因此課程設計成兩部分，一是上課時藉由教師操作素材引導學生進行小組討論，透過問答的方式加強學生歸納能力的培養，另一部分透過*Moodle*教學平台，給予家庭作業，讓學生以玩遊戲的方式學習數學，利用假日課餘時間操作*GeoGebra*，協助學生思考模式的訓練，並達到延長學生的學習時間。然後利用星期一上課時間學生上台分享作品，增加學生的榮譽感及自信心。由於指數與對數圖形當中強調的是平移與對稱概念，因此第三階段所探討的主題以平移與對稱爲主要探索概念，以本學期所學過的各函數圖形進行討論。家庭作業也朝此方向設計，研究者認爲避免讓學生一直學習制式的課程，才能提高學習效果。

4.3.1 學生作品分享

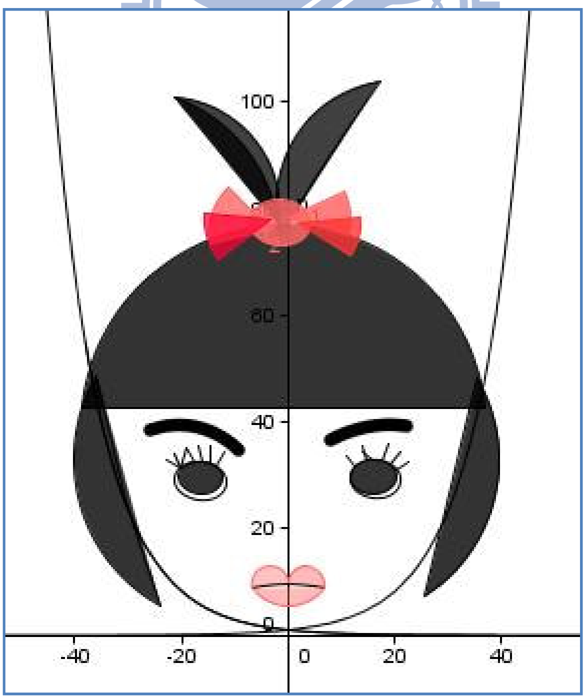


圖4-3-1 學生的作品分享

圖4-3-1爲學生的作品分享，以某位同學的特徵爲構圖背景，透過生動有趣的解說，多數同學都不僅哈哈大笑，也刺激了許多同學的創意思考，在後續的作業中時常出現令

人眼睛爲之一亮的作業主題展示。圖中所有曲線皆爲函數圖形或是利用工具所製作的幾何圖形，以下分別就學生作品的製作方法及學生論述說明如下：

主題：我是LIN-WAY

1. 製作方法：

(a) 兩側臉頰：指數函數

左臉頰$f(x)=(0.9)^{x}$，右臉頰$g(x)=(0.9)^{-x}$

(b) 嘴唇、頭髮、部分蝴蝶結、髮髻、眉毛：

皆爲利用三點所製作的弧

(c) 蝴蝶結： 皆爲扇形

(d) 眼睛、眼球、部分蝴蝶結：橢圓

左眼睛：$55.82x^2+9.74xy+90.04y^2+1559.99x-5061.72y=-85023.29$

左眼球：$36.99x^2+3.36xy+68.01y^2+1109.77x-3977.36y=-67394.72$

右眼睛：$55.82x^2+9.74xy+90.04y^2-2111.62x-5438.62y=-95742.41$

右眼球：$40.39x^2-3.54xy+74.87y^2-1189.77x-4381.92y=-73728.13$

蝴蝶結： $9.13x^2+0.35xy+16.39y^2+\ 11.17x-2531.42y=-97474.30$

2. 學生論述觀點：

(a) $f(x)=(0.9)^{x}$，$g(x)=(0.9)^{-x}$ 兩圖形以y軸爲對稱軸。

(b) $f(x)$、$g(x)$爲倒數關係，而倒數的關鍵在於$f(-x)$其中的負號。

(c) 當數值滑桿$a=1$時，$f(x)$與$g(x)$圖形相同。

(d) 數值滑桿從$a<1$增加到$a>1$時，$f(x)$與$g(x)$兩個圖形會互調。

3. 教師收斂結論：透過學生作品展示、分享心得後，老師再將每個學生的觀點聚焦、收斂解釋、統整後得到以下的結論，

(a) 若$f(x)=f(-x)$，則$f(x)$的圖形以y軸爲對稱軸。

(b) $f(x)=a^{x}$，$g(x)=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$。當$a=1$時，$f(x)$與$g(x)$底數相同，所以圖形相同；

當$a<1$或$a>1$時，$f(x)$與$g(x)$的底數爲倒數，所以兩個圖形會互調。

(c) 指數圖形以x軸爲漸近線。

(d) 指數函數爲嚴格遞增或嚴格遞減函數。

(e) 指數函數爲凹函數。

高一學生雖然沒有學過圓錐曲線，但是透過指令操作畫出了橢圓，老師透過代數視窗，簡單的解說橢圓方程式的概念，學生雖然不清楚定義，但是經過解說後，多數可以利用已學過的概念作圖，其實這就是研究者想發展的教學概念，透過遊戲的方式慢慢的

融入數學概念，等到課程進行到該單元時，學生學習的狀況比起一般的學生更快、更好。這是研究者期待的方向。所以在平時的課程進行當中，研究者學到的經驗是最好不要以效率來要求學生執行實驗課程，否則學習效果不容易出現。

五、　結論與建議

5.1　結論

目前中學數學教育將資訊融入課程主流發展的方向是教材設計，其中包含 PPT 教材製作及動態幾何系統素材設計，教師企圖透過活潑、生動、有趣的介面引發學生的學習動機，提高學生的學習成效，在許多的研究文獻也已經證明資訊融入課程確實會提高學生的學習成就，這是無庸置疑的，但是在教學實務上，的確也發現老師使用的狀況並不踴躍，研究者認為原因如同本文描述的內容一樣，使用傳統教學法與資訊融入教學做比較，對於學生短期的學習成就差異其實並不明顯，甚至於使用傳統教學法搭配精熟學習成效更顯著。當一位已習慣使用傳統教學法的老師要投入資訊融入課程時，他在設計教材需要花費大量的時間準備，如果學生的學習成就與傳統教法差異不顯著的話，老師為何要改變教法呢？這就是為什麼老師使用的狀況不踴躍的重要原因之一。因此本研究的重點在於透過學生延後測的成績，探討操作動態幾何系統對於學生長期學習成就的影響，並藉此透過漸進式的方式將動態幾何系統 *GeoGebra* 融入正式課程中，學生透過操作可以學到更活的概念。

動態幾何系統 *GeoGebra* 融入教學的目的，研究者認為重點不在於是否可以馬上提升學生短期的學習成就，而是落在學生從操作 *GeoGebra* 的過程當中，是否將所學到的學習經驗轉換成個人的知識，從幾何物件的建構當中學習數學，然後發現學生個人的學習盲點，從修正幾何物件建構方式來澄清觀念，就好像玩數獨一樣，如果順序錯誤可能會造成答案出現矛盾的情形，這時候就要及時修正錯誤的地方才能順利進行，否則到了後面錯誤累積越多，以致於無法彌補到最後就放棄了。學生學數學也是一樣，如果沒有及早澄清其錯誤觀念，到最後學生學習越來越沒有成就感，可能就放棄了這個學科。換句話以教師對於將動態幾何系統 *GeoGebra* 融入課程協助教師進行教學這個教學策略而言，如果教師以學生短期的學習成就是否提升，當作他是否想要將 *GeoGebra* 動態幾何系統融入課程的唯一準則的話，那麼 *GeoGebra* 不一定比傳統教學具有優勢，傳統教法中的精熟學習對於學生短期的學習成就其實更具吸引力，但是如果就學生長期的學習成就而言，本研究的結果顯示 *GeoGebra* 的確具有絕對的優勢。

由本研究的結果可發現藉由學生操作 *GeoGebra* 的圖像表徵所得到的學習經驗比傳統教學更具學習遷移的效果，協助學生將學習經驗應用於日後的學習，學生對於數學課程的學習較傳統的教學方式更富有想像力，對於數學問題的解決，也較能結合文字、圖像的表徵，思考更恰當的解決方法。

5.2 可能面臨的問題及建議

目前教育部正積極在推動資訊融入各科課程的計畫，各家出版社也找來各領域的學者專家，協助第一線的老師製作教學媒體電子檔案，包含 PPT、題庫檔，甚至連動態幾何系統 *Gsp*、*Cabri* 3D 及 *GeoGebra* 也都搭配課程需求事先做好素材提供老師使用，可使數學科老師的使用率不高。研究者認爲老師使用率低的原因跟學生是一樣的，那就是如果教材不是老師自己製作的，老師無法感受到作者建構的概念，上課時無法完整表達出作者的設計內涵，只能如同錄音機一樣播放講解內容而已，難怪學生聽到資訊融入就覺得燈光好、氣氛佳，睡覺的時間又到了。之前曾經有人說網路發達之後，老師的工作就會被電腦取代，當然這是錯誤的論點，電腦網路搜尋能力再強，還是需要有人解說其正確性，否則學生無所適從，所以老師的不可替代性就在這裡。因此資訊融入要有成效，老師最好自己設計素材，否則使用別人做好的教學軟體，有如隔靴搔癢，一點感覺都沒有。

高中數學科學科中心經常辦理各項研習，其中 *GeoGebra* 是發展的重心及趨勢，許多老師也都熱烈的參與研習，老師們也覺得藉由 *GeoGebra* 可能可以協助學生更理解數學。但是在教學實務上，老師研習後回到工作崗位多數又回到傳統的教學方式，因爲目前發展資訊融入課程的主流方向主要是教材設計，老師覺得學生若沒有動手抄，學生就好像看電視一樣，一下子就忘記了，從本研究的結果發現資訊融入不應該只是教師的教材設計而已，應該要讓學生動手操作，引導學生去觀察與推理，對於學生長期的學習成就是正向的。

目前許多學校也設有數位教學平台(Moodle)，然而由於各學科屬性不同，因此教學平台的建構理念應依照各學科屬性建構。另外教師個人教學信念不同，一昧的要求教師投入可能會造成反效果，最後平台只會是一個學生繳交作業及老師收發作業的地方，及有一大堆無人使用的教案而已，師生皆無法融入環境中學習，造成平台較難達到其教育

功能，教師與學生也難以感受到其優點，最後又會回到傳統的教學模式。因此要將資訊融入各學科教育，各校應就其學校本位課程發展學校課程特色，循序漸進一步一步的建構完整的架構，而非急就章的盲目跟進。資訊融入學科課程，受限於課程標準的授課時數及內容，教師的教學信念、學生學習習慣與態度及學校硬體設施等各個面向的問題，將來可能面對的問題分述如下：

5.2.1 教師信念

教師必須跳脫出"教學的中心是老師"的心態，而"以學生爲教學的主體"，老師只是引導者的身分來教導學生基本知識，引導學生去學習各項知識，老師必須引導學生具備批判的能力，老師的授課內容不再是學生唯一得到正確知識的來源。但是這與多數數學老師求學時所受的訓練、個人數學信念及教學信念有關，因爲多數數學教師認爲數學是一門嚴謹的學問，學生必須學習嚴謹的證明過程，才可能學習到正確知識。因此對於現代教育教學的目標，老師教學信念需要有些調整，那就是希望每位學生都能夠學習到如何去"學習"，畢竟不是每位學生都要念數學系，不需要要求他們全部都能做出嚴謹的數學證明，至於如何達到教學目標，教師們可以藉由教學研究會組成學校本位課程發展小組，藉由應用各項工具去發展學校本位課程的教學特色。

經過這半年來資訊融入的數學課程的實驗計畫，研究者體會到"討論"是一項非常重要的教學策略，與其花時間對學生做紙筆測驗，研究者現在寧可選擇的是給學生時間去討論，學生透過討論與使得彼此的觀念獲得澄清，彌補教師上課不足的地方，而老師在旁觀察、紀錄學生的討論情形，更可察覺到學生學習迷失的概念，檢驗學生的學習結果與教師的認知是否有所差異，做爲老師日後上課修正教學方式的參考依據，所以教師必須參與學生的討論，給予適度及適時的引導，但是不可過度干預討論、主導討論，給與學生更多的空間與時間，學生會學習得更好也更快樂。有一句話說：「與其給一個人魚吃，不如給他一根釣竿，教他如何釣魚。」我想這就是最好的詮釋。

在實驗課進行的過程當中，有老師來參觀學生的上課情形，老師看完之後有感而發的給了研究者一個建議，秩序太混亂了，沒有效率，應該要一個口令一個動作，譬如說：「我現在給你們十分鐘觀察、歸納某一個圖形特徵，然後將結論寫在學習單上，沒有交的就 0 分。」老師認爲這樣才能夠提高學習效率，學生才會認真寫。可是研究者認爲

應該要在沒有壓力的狀況下學生的創意才會被啓發，學生才會喜歡在這個環境學習探索，否則學生隨便胡寫一通更糟糕。研究者有一次隨著校長及主任去台北市的麗山高中參訪有一門名爲研究方法及研究專題的上課方式，發現老師們給學生極大的空間去發揮創意，老師只在旁觀察引導，研究者認爲這是正確的方向，也確實深深的影響到個人的教學信念。

5.2.2 學生的學習態度

學生承受到家長的期待的壓力與學生個人的自我期許，爲了短期的學習成就，學生選擇了速成的公式解或特殊解法，而不去追求知識的理論背景。學生必須跳脫出傳統的學習方式，”講光抄”與”背多分”已不符合現代教育潮流。學生要能夠從觀察當中學習，學生要能夠從觀察當中歸納分析，學生要能夠從觀察當中學習假設，學生要能夠從觀察當中學習驗證。所以教師的評量方式理應跟著修正，多元化的評量方式學生才有機會改變學習態度。

“*University*”經常被學生戲稱”由你玩四年”，爲什麼會這樣呢？這是因爲從國小、國中一直到高中，學生的學習態度及習慣是一直受到老師及家長壓迫式”學習”及”要求”方式的影響，因此當學生到大學之後，突然之間這兩種壓力不見了，但是學生已習慣如此的學習方式，多數學生無法自主學習，因此導致我國高等教育的品質相較於歐美各國大幅滑落。要解決這樣的問題，就是要提早教導學生如何學習，因此中小學教師主要的任務應該是引導學生去學習，爲日後的研究鋪路。學生的學習態度改變，教育改革方能成功。

實驗過程當中學生從一碰到電腦就上網玩遊戲，到後來多數學生都能自律，其實是花費了許多的時間來培養學生融入環境，也因爲是慢慢的養成習慣，所以學生幾乎是在沒有壓力的情形下學習，研究者後來爲了獎勵學生的積極參與，由學生票選當週最佳作品，得獎者可獲得研究者提供的獎品。

實驗在 99 年 1 月份結束，本學期開學時學生一直詢問這學期是否還有 *GeoGebra* 的課程，研究者內心很感動，表示一個學期的辛苦努力是值得的，多數學生已習慣於 *GeoGebra* 環境學習。

5.2.3 家長的態度

家長對於學生的學習的概念，嚴重的影響到學生的學習方法與態度，家長如果將升學擺第一順位，過於注重分數，認為只有分數才能測量出學生的學習狀況，一股腦的將學生送到補習班學習，學生每天上完課回到家已經很晚了，根本就沒有時間去”消化與吸收”上課所得到的知識，只是每天一直被填鴨，如此的惡性循環，學生的學習是不快樂的，學生為了減少壓力，導致學生選擇了速成的公式解或特殊解法獲得高分，而不去追求知識的理論背景。因此家長應該鼓勵學生花更多的時間看書，自己統整上課時所得到的知識。

許多家長覺得學生一碰到電腦一定沒有好事情，一定是上網聊天或者是打電動，因此禁止學生碰電腦，如此對於教師將資訊融入課程也是一大阻礙。教師可以透過親師座談會與所有家長溝通，講解日後的執行方式，讓家長也能熱情參與。而在本學期的親師座談的時候有家長跟老師反映，上學期的 *GeoGebra* 的課程很不錯，現在數學課程與她念書的時候不太一樣，雖然她看不懂，可是她發現小孩子假日很努力的在做作業。基於家長及學生的回饋，研究者答應學生，本學期會繼續實施 *GeoGebra* 課程。

透過 *GeoGebra* 課程，雖然學生短期的學習成就不一定比較好，但是家長會發現他的小孩學習態度在改變，從本實驗的結果告訴我們，剛開始時辛苦一點，但是家長最後的態度會是正面的。

5.2.4 課程的授課時數

教育部每隔幾年就會針對國小、國中及高中的課程綱要做修正，我們從修正的趨勢可以了解到未來的上課時數必定下降，每個科目的授課時數也必定都會受到壓縮，這是無法避免的趨勢，因此教師如果維持傳統的教學方式，那教師的授課壓力將日漸擴大。現階段 99 新課綱的實施，各個領域的授課時間都也確實受到了壓縮，教師可能擔心教不完課程內容，因此為了達成教學目標而捨棄嵌入教學媒體。本教學實驗的結果提供給老師將動態幾何系統融入課程的一種策略，在授課時數的限制下，這樣的教學策略可以延長學生的學習時間，提升學生的學習成就，剛開始教師可能會很辛苦，不過等到學生熟習操作環境之後，將動態幾何系統融入課程不僅不會影響到教師授課的進度，而且對

於學習有正面的幫助。

5.2.5 學校的硬體設備

以研究者目前學校的硬體設施而言，本校目前共有 55 個班級，學校配備電腦教室 2 間，除了資訊課程之外，還有選修課程也需要用到電腦教室，剩下來的時間才能提供給老師使用，很明顯的是無法照顧到全校學生的需求，除了無法滿足所有學生同時一人一機的上課之外，甚至於每個班級排時間到電腦教室操作學習都有所困難。目前各校執行資訊融入課程時最常使用的策略如下：

(1) 採取分組共用電腦方式學習：其實這是資訊融入的最大隱憂，因爲資訊融入教育的最大特點就是學生的學習課程是配合學生個人學習進度的，不同程度的學生共用電腦是無法達到適性教育的特點。

(2) 實驗班級的專屬課程：目前許多開設實驗班級的學校執行方式都是如此，專門針對實驗班的學生開設相關課程，只有少數學生使用，無法使全校學生受惠，無法達到教育改革的目的。

不過很弔詭的是，雖然學校硬體設備不足，但是因爲目前學校的電腦教室較少人使用，剛好可以提供有興趣的老師充分的實驗空間。不過如果學校要發展資訊融入的課程，電腦教室的應該要在充實才可以。

5.3 結語

數學教育的改革浪潮中，每位老師根據個人的學習經驗，很認真的在爲學生尋找一個更好的教學方式及教學策略，其實目的不外乎是提高學生的學習成效。經過這二年來不斷的研究與學習，教書超過二十年的我，對於教學方式有了一個相當大的轉變，研究者認爲學生在愉快的環境學習，或許學習速度很緩慢，只要老師信念堅定，學生的學習經驗值必定會提升；教師及家長如果過於注重考試的結果只會揠苗助長，摧毀學生的學習興趣。最後提出一則研究者最近經常問自己的問題，願與所有教師共同省思。

「要提高學生的學習成效，除了考試！我還會哪招？」

References

[1] 王郁華，台灣南區中學數學科教師信念之研究，國立高雄師範大學數學系碩士班論文，1996年。

[2] 李吉彬，資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究，國立交通大學理學院科技與數位學習學程專班碩士論文，2006年。

[3] 李政豐，資訊科技融入數學教育模組實務的研究，國立交通大學理學院科技與數位學習學程專班碩士論文，2003年。

[4] 林國源，高中數學建模課程與實踐之研究，國立交通大學理學院科技與數位學習學程專班碩士論文，2004年。

[5] 陳彥廷,教學問題？因應策略與教學信念關係之研究---以一位高中數學教師爲例，Joural of National Taitung Teachers College，Vol.13-1，P171~200，2002年。

[6] 蔡政樺，在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究，國立交通大學理學院科技與數位學習學程專班碩士論文，2005年。

[7] 劉宗榮，關於高中學生數學建模指導之研究，國立交通大學理學院科技與數位學習學程專班碩士論文，2007年。

[8] 劉志紅，內地新課程函數教與學，MathsExchange-A11.indd，P43~P56，2008年。

[9] 游心怡，關於建構三角函數動態學習環境之研究，國立交通大學理學院科技與數位學習學程專班碩士論文，2007年。

[10] 謝豐瑞，漫談中學教師素養，數學傳播22卷2期，1998年6月。

[11] Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), 13-33.

[12] Hersh, R. (1979). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. *Advances in Mathematics,* Vol. 31, pp. 31-50.

[13] Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In T. TYMOCZKO (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhauser.

[14] Judith Hohenwarter ,Markus Hohenwarter, Zsolt Lavicza, Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra , *Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching* (2008) **28**(2), 135-146

[15] Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students'

Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations, Educational Studies in Mathematics, 44 (1-3), 55–85.

[16] Jones, K. (2005). Research on the Use of Dynamic Geometry Software：implications for the classroom , In:J. Edwards & D. Wright(Ed), Integrating ICT into the mathematics. Derby:Association of Teachers of Mathematics. pp27-29.

[17] L. Cuban, H. Kirpatrick, C. Peck (2001), "High access and low use of technologies in high school classrooms: Explaining an apparent paradox", *American Educational Research Journal*, Vol. 38 pp.813 - 834.

[18] Markus Hohenwarter,Judith Hohenwarter, Yves Kreis, Zsolt Lavicza, Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. TSG 16: Research and development in the teaching and learning of calculus, ICME 11, Monterrey, Mexico 2008

[19] Markus Hohenwarter. Dynamic investigation of functions using GeoGebra Florida Atlantic University.

[20] Markus Hohenwarter. Bidirectional Dynamic Geometry and Algebra with GeoGebra, July 14, 2004

[21] Maria Alessandra Mariotti. Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment, *Educational Studies in Mathematics* 44: 25–53, 2000

[22] Maria Alessandra Mariotti. Justifying and Proving in the Cabri Environment, *International Journal of Computers for Mathematical learning* **6:** 257–281, 2001

[23] Thompson, A G. (1992). *Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research.* In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 127-146. New York: Macmillan Publishing Company.

[24] Thompson, A.G. (1984). *The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice.* Educational Studies in Mathematics, 5(2), pp. 105-127.

[25] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving , metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan

[26] Stefan Halverscheid. Dynamic Geometry Software As A Simulation Tool For Algebra Problem. PhD thesis Universität Bremen, Germany

附錄

附件一

第一階段後測試題

高中數學第一冊教學評量 - 絕對值函數	1-10
班級：________ 座號：__________ 姓名：______________	

計算題，請寫出計算過程

1. 若 $|2x+3| = 3$，求 x 之解。

2. 若 $2 < |2x-2| < 6$，求 x 之解。

3. 設 $f(x)=|x+2|+|x-1|$，(a) 求 $f(x)$的最小值 (b) 求 $f(x)$最小值發生時，x 的範圍

4. 設 $f(x)=|x-2|+|x+2|+|x-1|$，(a)求 $f(x)$的最小值 (b)求 $f(x)$最小值發生時，x 的範圍

5. 設 $f(x)=|x-3|+|x-2|+|x+1|+|x|+|x+2|+|x+3|+|x+4|$，求 $f(x)$的最小值。

6. 若 $|x+1|+|x-1|+|x-2| \geqq 3$，求 x 之解。

7. 若 $2|x+1|+|x-2|=5$，求 x 之解。

8. 若 $|x+2|+|x+1|+|x-1|+|x-2|=k$ 恰有兩解，求 k 的範圍。

9. 若 $|x+1|=x+1$，求 x 之解。

10. 若 $|x+2|>|x-3|$，求 x 之解。

附件二

第一階段延後測試題

高中數學第一冊教學評量 - 絕對值函數	1-10
班級：________ 座號：__________ 姓名：______________	

計算題，請寫出計算過程

1. 若 $|3x+2|=5$，求 x 之解。

2. 若 $1<|3x-1|<4$，求 x 之解。

3. 設 $f(x)=|x+7|+|x-5|$，(a) 求 $f(x)$的最小值 (b) 求 $f(x)$最小值發生時，x 的範圍。

4. 設 $f(x)=|x-7|+|x+5|+|x-9|$，(a)求 $f(x)$的最小值 (b)求 $f(x)$最小值發生時，x 的範圍。

5. 設 $f(x)=|x-3|+|x|+|x-6|+|x-1|+|x+2|+|x-5|+|x-3|$，求 $f(x)$的最小值。

6. 若 $|x+2|+|x-1|+|x-3| \geqq 4$，求 x 之解。

7. 若 $|x+2|+2|x-2| = 6$，求 x 之解。

8. 若 $|x+2|+|x-1|+|x-2| = k$ 恰有一解，求 k 的範圍。

9. 若 $|x-2| = 2-x$，求 x 之解。

10. 若 $|x+3| > |x-1|$，求 x 之解。

附件三

第二階段前測試題

高中數學第一冊教學評量 － 不等式	1-10
班級：________ 座號：__________ 姓名：______________	

1. 解不等式 $\begin{cases} x > 3x-6 \\ 3x-6 > -2x-1 \end{cases}$

2. 解不等式 $x^2 + 2x - 3 > 0$

3. 若 $ax^2 + bx + 1 > 0$ 的解為 $-\frac{1}{2} < x < 1$（$a, b \in \boldsymbol{R}$），求(a, b)

4. 若二次函數 $f(x) = ax^2 + 3x - 2$ 的值恆為負，求實數 a 的範圍

附件四

第二階段後測試題

高中數學第一冊教學評量 － 不等式	1-10
班級：________ 座號：__________ 姓名：______________	

1. 解不等式$\begin{cases} 2x > x-3 \\ x-1 > -2x+1 \end{cases}$

2. 解不等式 $x^2+x+1>0$

3. 若 $f(x)>0$ 的解為$-2<x<4$，求 $f(2x)<0$ 的解。

4. 若 $y=ax^2+4x-2$ 的圖形恆在水平線 $y=2$ 的下方，求實數 a 的範圍。

5. 若 $ax^2+2ax-1>0$ 無實數解，求實數 a 的範圍。

6. 解$(x^2-1)(x^3-1)>0$

7. 解$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20}<-1$

8. 解$\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{|x|(x^2+1)}\geqq 0$

9. 已知 $f(x)$為 n 次多項式，若 $f(x)>0$ 的解為$-1<x<0$、$1<x<2$ 或 $2<x$，求 n 最小值。

10. 已知 $f(x)$為一多項式，若 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}\geqq 0$ 的解為 $x<-1$、$-1<x<1$ 或 $2<x$，求 $f(x)\geqq 0$ 的解。

附件五

第二階段延後測試題

高中數學第一冊教學評量 － 不等式	1-10
班級：________ 座號：__________ 姓名：______________	

1. 解不等式 $\begin{cases} 2x \geq x-3 \\ x+4 \leq -2x-5 \end{cases}$

2. 解不等式 $2x^2+2x+1<0$

3. 若 $f(x)>0$ 的解為 $-2<x<4$，求 $f(2x+2)<0$ 的解。

4. 若 $y=ax^2+x+2$ 的圖形恆在水平線 $y=9$ 的下方，求實數 a 的範圍。

5. 若 $ax^2+ax+1<0$ 無實數解，求實數 a 的範圍。

6. 解$(x^2-1)(x^3+1) \geq 0$

7. 解$\dfrac{-2}{x^2+3x+2} \leq -1$

8. 解$\dfrac{(x+2)|x+1|^2}{|x|(x^2+1)} \geqq 0$

9. 已知 $f(x)$為 n 次多項式，若 $f(x) > 0$ 的解為$-1 < x < 0$、$0 < x < 1$ 或 $1 < x$，求 n 最小值。

10. 已知 $f(x)$為一多項式，若 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)} \leq 0$ 的解為 $0 < x < 1$ 或 $1 < x < 2$，求 $f(x) \leq 0$ 的解。

附件六

學習單

GeoGebra 絕對值函數概念學習單 1

班級：__________	組長：_____________	組員：_____________	組員：_____________
	組員：_____________	組員：_____________	組員：_____________

(1) 請畫出絕對值函數 $f(x) = | x - 3 |$ 的圖形。

(2) 承(1)，請在圖形的左半部和右半部，利用 GeoGebra 的「點」和「直線」工具，測量出 f(x)的圖形是由哪些直線（或線段、射線）的方程式組合而成？觀察看看，得到的方程式和 $f(x) = | x - 3 |$ 之間有什麼關係？（提示：從 x 的範圍觀察）

(3) 若 $a \in R$，請<u>說明</u> $f(x) = | x - a |$ 幾何意義為何？最小值發生時，x 值為何？

(4) 請畫出 $f(x) = | x - 1 | + | x - 3 |$ 的圖形，並利用 GeoGebra 的「點」和「直線」工具，測量出 f(x)的圖形是由哪些直線（或線段、射線）的方程式組合而成？（提示：從 x 的範圍觀察）

(5) 請將老師指定的 ggb 檔下載下來並進行觀察，請說明 $f(x) = | x - a | + | x - b |$，（$a < b$）最小值為何？此時 x 值為何？**<u>為什麼？</u>**（檔案在 http://nctuied.twbbs.org/ggb/abs1.ggb）

(6) 綜合(4)、(5)並統整結論，請說明 $f(x) = | x - a | + | x - b |$ ($a < b$)圖形的特徵為何？為什麼圖形會長這個形狀？（盡量用多種不同的觀點詮釋，寫越多種表示越瞭解概念）

GeoGebra 絕對值函數概念學習單 2　(9/13 & 9/16)

組別：_______	組長：_________	組員：_________
組員：_______	組員：_________	組員：_________

(1) (a) 請畫出 $f(x) = |x+1| + 2|x-1|$的圖形，並標示 f(x)的轉折點以及 f(x)是由哪些線段、射線的方程式組成。

(b) 請在同一張圖上畫出 $g_1(x) = 2$、$g_2(x) = 3$、$g_3(x) = 4$ 的圖形。

(2) 請利用(1)的圖形求下列方程式的解：

(a) $|x+1| + 2|x-1| = 2$　　(b) $|x+1| + 2|x-1| > 3$　　(c) $|x+1| + 2|x-1| \leqq 4$

★ 重要 ★

(3) 根據前兩題的觀察和討論結果，假如現在沒有電腦軟體可模擬，請問該如何求解？

(a) $|x+1| + 3|x-1| = 3$　　(b) $2|x+1| + |x-1| = 7$　　(重點在於過程，請不要只寫答案)

GeoGebra 絕對值函數概念學習單 3　(9/20)

組別：_______	組長：_________	組員：_________
組員：_______	組員：_________	組員：_________

(1) (a) 請大略畫出 $f(x) = |x+1| + |x-1| + |x-4|$ 的圖形，並標示**轉折點座標**。

(b) 若直線 $y=8$ 與 $f(x)$ 函數圖形相交於 $f(x)$ 的兩個線段上，求此兩線段的方程式。
(前幾堂課都要求寫出所有線段方程式，現在只需找出相交的線段即可)

(c) 求 $|x+1| + |x-1| + |x-4| = 8$ 之解。

(2) (a) 請大略畫出 $g(x) = |x+1| + |x-1| + |x-4| + |x-5|$ 的圖形，並標示**轉折點座標**。

(b) 參考(1)的解法，求 $|x+1| + |x-1| + |x-4| + |x-5| = 10$ 之解。

(3) 請利用數值滑桿的功能，做出 $f(x) = |x+2| + |x-1| + |x-a|$ (a 可以拉動)：

(a) $a = 2$ 時，畫出圖形的大略形狀，並標示**轉折點座標**以及**最小值**。

(b) $a = 1$ 時，畫出圖形的大略形狀，並標示**轉折點座標**以及**最小值**。

(c) 當 a 的值從 2 慢慢拉到 1 時，圖形有何變化。(哪些地方改變了，哪些不變)

(4) 請利用數值滑桿的功能，做出 $f(x) = |x+2| + |x-1| + |x-2| + |x-a|$ (a 可以拉動)：

(a) $a = 4$ 時，畫出圖形的大略形狀，並標示**轉折點座標**以及**最小值**。

(b) $a = 2$ 時，畫出圖形的大略形狀，並標示**轉折點座標**以及**最小值**。

(c) 當 a 的值從 4 慢慢拉到 2 時，圖形有何變化。(哪些地方改變了，哪些不變)

GeoGebra 絕對值函數概念學習單 4 (10/18)

組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

(1) 請大略畫出以下圖形的**形狀**，並標出**最小值**發生的點座標。

(a) $f_1(x) = |x - 1|$　　(b) $f_2(x) = |x + 2| + |x - 1|$ (c) $f_3(x) = |x + 2| + |x| + |x - 1|$

(d) $f_4(x) = |x + 2| + |x + 1| + |x| + |x - 1|$

(e) $f_5(x) = |x + 2| + |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 4|$

(2) 請觀察「絕對值函數的幾何意義.ggb」，並寫下討論後的結論：

(a) $f_1(x)$、$f_3(x)$、$f_5(x)$的最小值發生在哪裡？若將關鍵點由左排到右，發生在第幾個點？

(b) $f_2(x)$、$f_4(x)$ 的最小值發生在哪裡？若將關鍵點由左排到右，發生在哪幾個點之間？

(c) 請說明為什麼上述函數的最小值都發生在「中位數」或距離中位數最近的關鍵點之間？　(hint: 可從代數的角度詮釋或從幾何的觀點說明)

★☆ 超級重要 ☆★

(3) 設 $g(x) = |x + 1| + 2|x + 3| + 2|x - 2|$，請利用此例題檢視(2)的結論是否正確，

若是正確：請說明此例題如何用(2)的結論解釋。

若是錯誤：請不要將(2)的結論毀屍滅跡，試著將結論進行修正，並說明(2)錯誤的原因。

GeoGebra 多項式函數圖形概念學習單 1 (10/28)

組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

請根據 5 個「多項式函數圖形觀察.ggb」檔案進行觀察，畫出不同次數的多項式函數圖形的**大略形狀**，並用英文字母、注音符號、物體、動物、或是其他象徵，**描述**圖形的形狀，例如二次函數圖形長得像拱橋…等。

設 $f(x) = ax^{n} + bx^{n-1} + \cdots\cdots +$ 常數項

1.首項係數 $a > 0$

一次多項式	二次多項式	三次多項式	四次多項式	五次多項式

2.首項係數 $a < 0$

一次多項式	二次多項式	三次多項式	四次多項式	五次多項式

GeoGebra 多項式函數圖形概念學習單 2　(11/4)

組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

已知多項式的首項係數影響圖形的方向，常數項影響圖形與 y 軸的交點高度，因此為了便於觀察，本週將這兩項設為定值——1。(也就是說，只考慮首項係數為正)

若 $f_2(x) = 1 + ax + x^2$　　　　$f_3(x) = 1 + ax + bx^2 + x^3$

　$f_4(x) = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + x^4$　　　　$f_5(x) = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + x^5$

請設定自變數 *a*、*b*、*c*、*d* 並利用數值滑桿進行觀察，不同次數的多項式有哪些共同的特徵。

1.請畫出 f_2、f_4 的<u>**大略圖形**</u>，和上週一樣輕鬆揮灑即可（答案可能不只一種)

二次多項式 f_2	四次多項式 f_4

2.試著歸納看看，<u>奇數次</u>的多項式圖形有哪些共同特徵？可以像上次一樣用口語化的形容詞來描述，例如股市又開高走低、嚴重高低屁等…。
3.利用 root[*f*]指令進行觀察，<u>奇數次</u>的多項式方程式可能會有多少解？

4.請畫出 f_3、f_5 的**大略圖形**(和上週一樣輕鬆揮灑，答案可能不只一種)

三次多項式 f_3	五次多項式 f_5

5.試著歸納看看，**偶數次**的多項式圖形有哪些共同特徵？可以像上次一樣用口語化的形容詞來描述，例如股市又開高走低、嚴重高低屁等…。

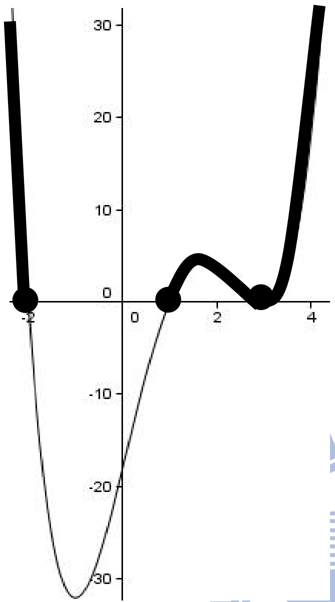
6.利用 root[f]指令進行觀察，**偶數次**的多項式方程式可能會有多少解？

GeoGebra 多項式函數圖形概念學習單 3　(11/11)

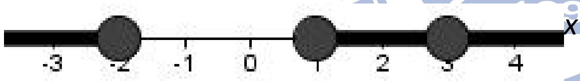
組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

1. 請畫出下列函數的圖形、並解出不等式範圍。

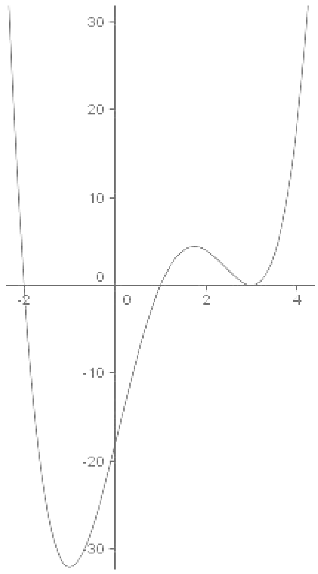
[範例]　$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)^2$



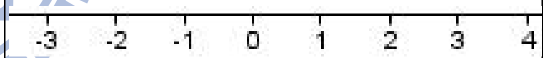
[範例]　請在數線上畫出 $f(x) \geqq 0$ 的範圍



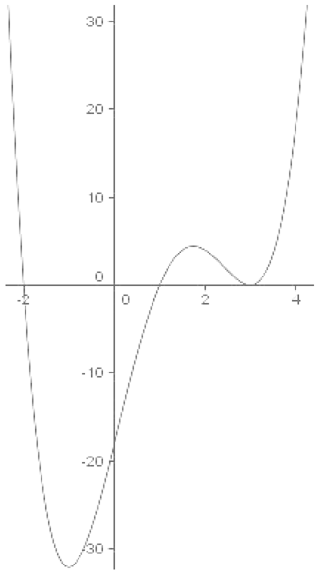
$g(x) = (x+2)(x-1)(x-3)^4$



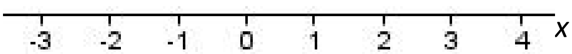
請在數線上畫出 $g(x) \geqq 0$ 的範圍



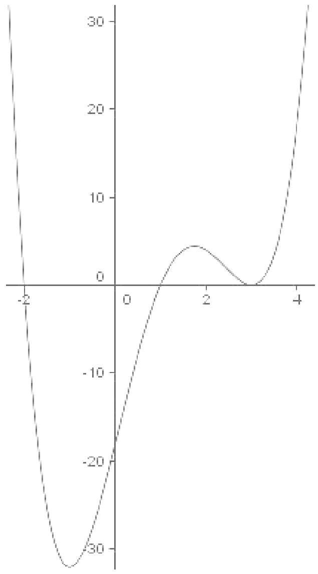
$h(x) = (x+2)(x-1)^3(x-3)^2$



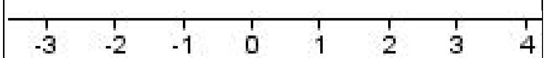
請在數線上畫出 $h(x) \geqq 0$ 的範圍



$j(x) = (x+2)(x-1)^3(x-3)^4$

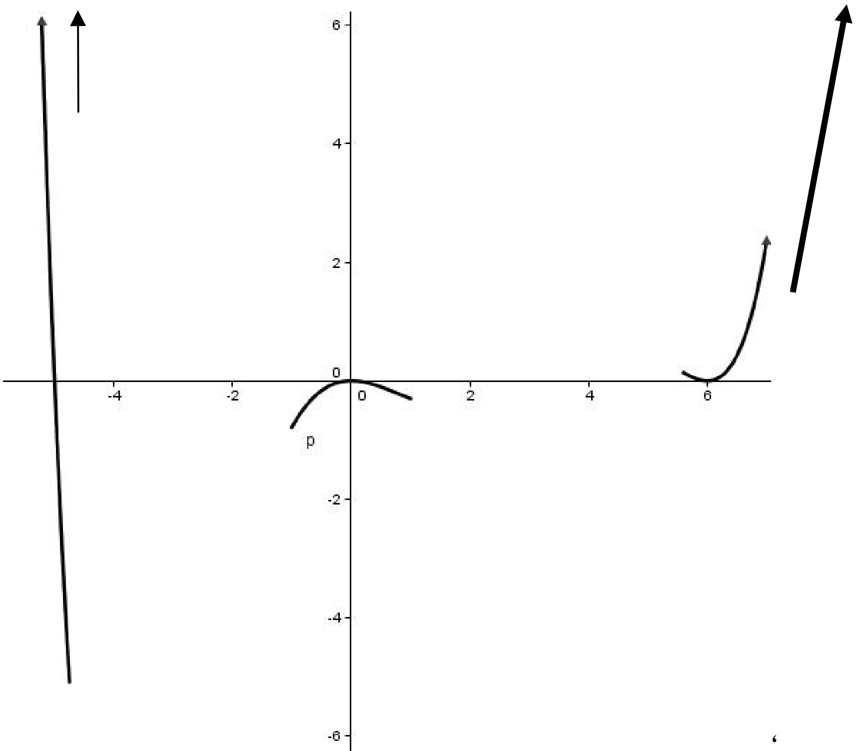


請在數線上畫出 $j(x) \geqq 0$ 的範圍



1. 以上 4 個不等式的解會一樣嗎？

2. 思漢不小心把張宇畫的多項式函數圖形作業給擦掉了，如今只剩下部份的圖形沒被擦掉⋯



上圖是作業的遺跡，思漢希望能趁張宇發現之前趕緊補回去，但是卻又不知道原本長什麼樣子，老師發的題目小紙條也弄丟了......好心的各位同學，幫幫忙吧......

(1) 這份作業原本的題目可能是幾次多項式？(請寫出可能的數字規律)

(2) 承上，請寫下你猜測、推論的理由。

(3) 請試著用筆直接在上圖畫畫看，恢復原本圖形可能的樣子。

(4) 歡迎繼續發揮你的想像力加油添醋，相信張宇回來之後一定會發現作業被人動過手腳。(咦!? 原本不是在幫忙嗎？)

本週你可能會用到的指令：

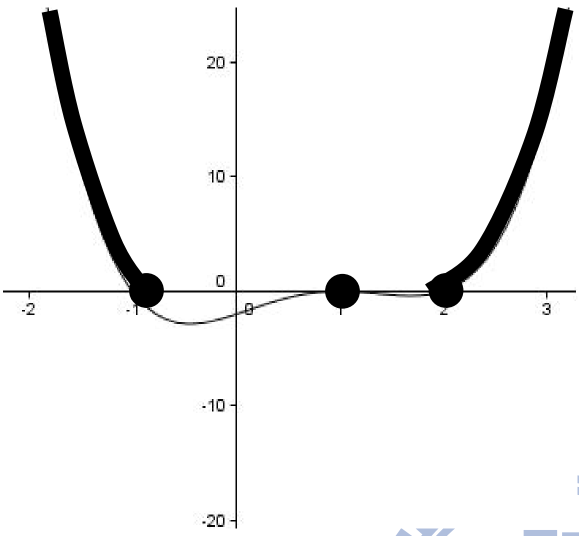
設 $F(x) = x^2 - 1$ root[F]：找出 $F(x) = 0$ 與 x 軸的交點，得到(1, 0)、(-1, 0) 。

GeoGebra 多項式函數圖形概念學習單 4　(11/18)

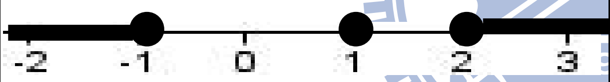
組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

1. (a)請畫出下列函數圖形。　(b)解出不等式的解，並在畫在數線上。

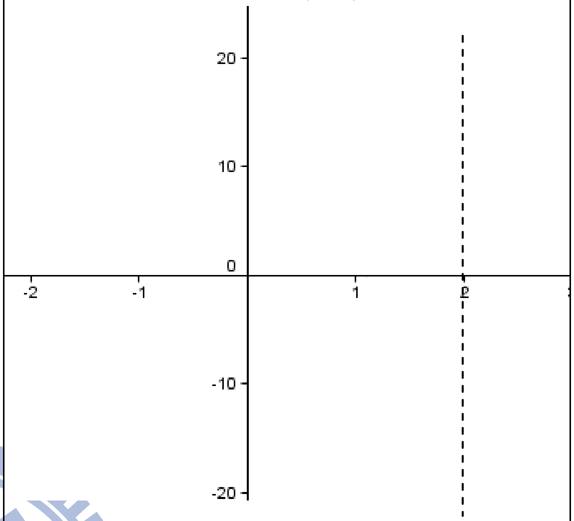
[範例]　$f(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)$



[範例]　請在數線上畫出 $f(x) \geqq 0$ 的範圍

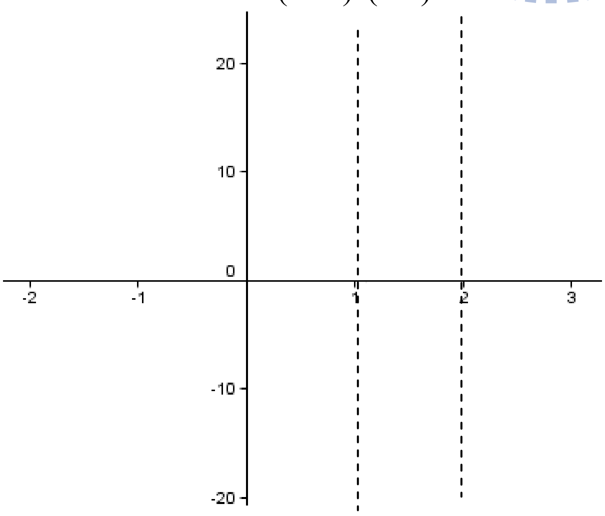


$g(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)^2}{(x-2)}$



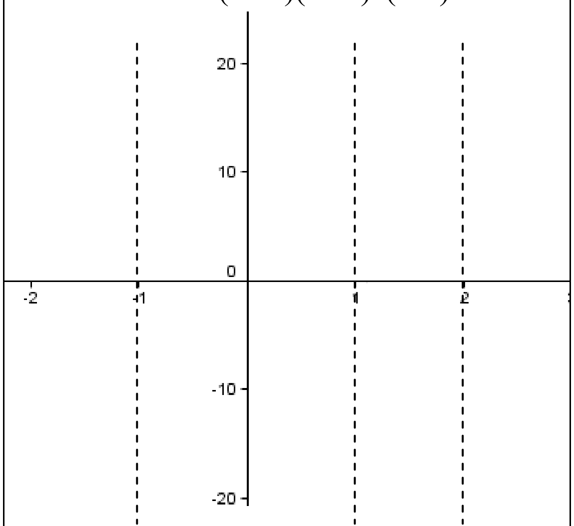
請在數線上畫出 $g(x) \geqq 0$ 的範圍

$h(x) = \dfrac{(x+1)}{(x-1)^2(x-2)}$



請在數線上畫出 $h(x) \geqq 0$ 的範圍

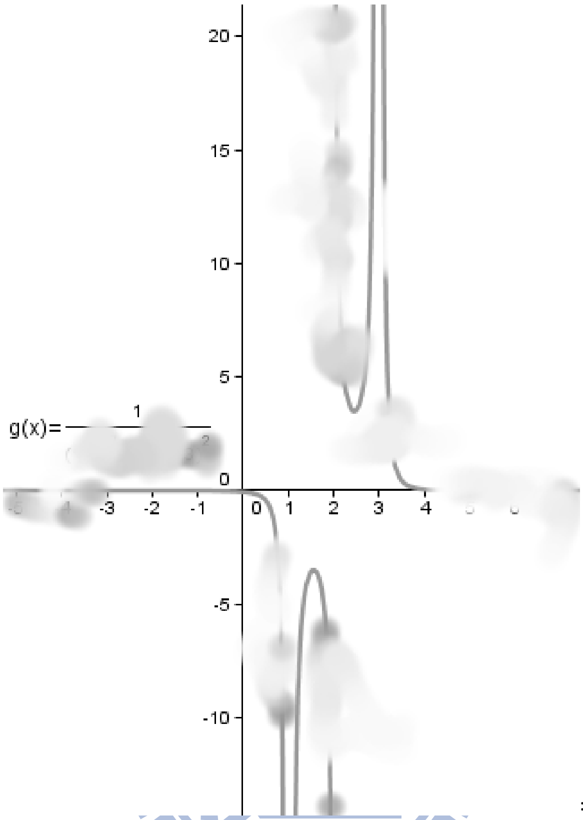
$j(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)^2(x-2)}$



請在數線上畫出 $j(x) \geqq 0$ 的範圍

2. 以上 4 個不等式的解會一樣嗎？若不一樣，差別在哪裡？

3. 志勵哥異想天開用粉筆在紙上寫作業，結果正要交出去的時候發現作業糊掉了，先讓我們來看看志勵哥的作業變什麼樣子……



=_= |||

瀟灑倜儻的志勵哥一寫完作業就把題目給丟了，現在只記得作業的題目是給定一個首項係數為 1 的五次多項式 $f(x)$，且 $f(x)$有 5 個整數解，題目要求畫出 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 的圖形。

好心的各位同學，來幫幫志勵哥吧……

為了還原作業，請先試著找出題目中的 $f(x)$，再來還原 $g(x)$的圖形。

(1) 請先用紅筆畫出 $g(x)$圖形的漸近線。

(2) 根據(1)，請找出 $f(x)$的關鍵點，並判斷 x 在哪些範圍時， $f(x)$為正、或為負。

(2) 請試著在原圖上畫出出 $f(x)$的圖形，並寫下 $f(x)$為何？

(3) 承上，請寫下你猜測、推論的理由。

(4) 請幫忙用藍筆或黑筆將原本的圖形復原。

(5) 老規矩，歡迎繼續發揮你的想像力加油添醋，給志勵哥一點驚喜吧！

GeoGebra 指數函數與對數函數學習單 1　(12/2)

組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

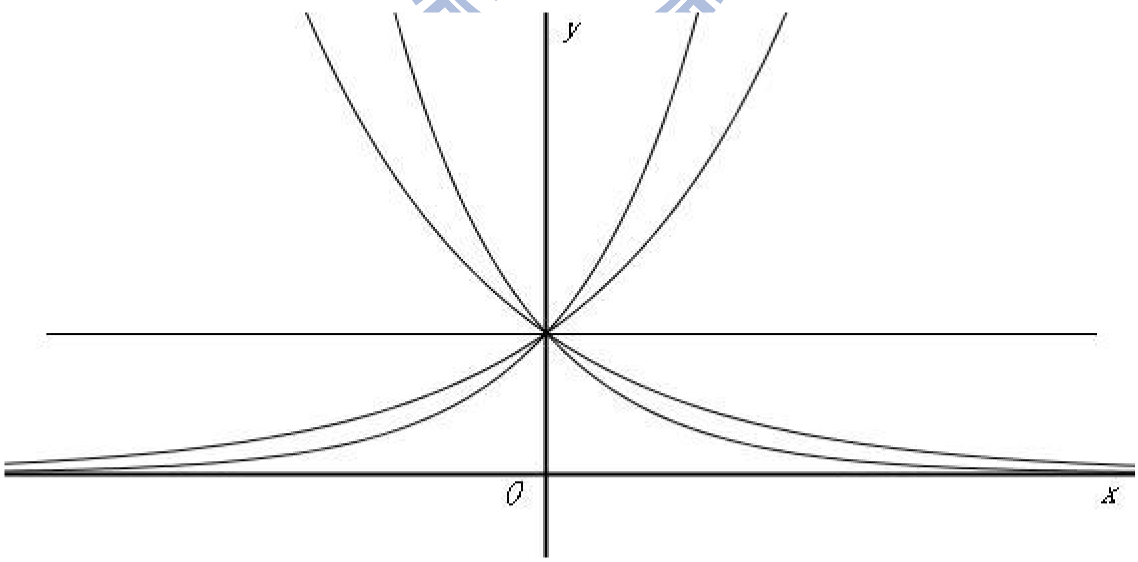
一、利用 GerGebra，以描點的方式畫出指數函數的圖形，並上傳至 moodle。(每個人都要交)

步驟：

1. 拉一個數值滑桿，令名稱為 a。
2. 對數值滑桿按右鍵>屬性>滑桿，修改 a 最大、最小值，將範圍調寬一點。
3. 設一個動點 $A = (a, 2\text{^}a)$。
4. 對 A 點按右鍵，選擇顯示移動軌跡。
5. 設 $f(x) = 2 \text{ ^ } a$，看看此軌跡是否和電腦畫出來的圖形一致？

三、為了愛護地球，因此第三題塞在這裡，請做完第二題後再回來看這裡，\~/ (._.)再見～

下圖中有 $y = a^x$、 $y = b^x$、 $y = c^x$、 $y = d^x$、 $y = e^x$ 的圖形，已知 $a > b > c > d > e$，請用不同顏色的筆，標示出這五個方程式分別對應到哪個圖形。



二、請利用 GeoGebra 進行觀察、歸納指數圖形的特徵。

步驟：

1. 拉出數值滑桿 *a*，將 *a* 值的範圍修改為 0.1～5 之間。
2. 設 $f(x) = a \wedge x$，並拉動開始觀察。
3. *a* 值在某些範圍中，圖形會有共同特徵，請依這個範圍來分類，在下方三個格子中繪圖。
4. 請盡量發揮你的想像力，用文字描述、畫圖塗鴉，表達你在這三類的圖形中發現了什麼。

當 *a* 的範圍在________________的時候

當 *a* 值為______的時候

當 *a* 的範圍在________________的時候

GeoGebra 指數函數與對數函數學習單 2　(12/23)

組別：_______	組長：_________	組員：_________
組員：_______	組員：_________	組員：_________

※在 GeoGebra 中，log(　)代表以常數「e」為底的對數，

若要以其他數為底，請利用換底公式計算，如：$\log_3 2 = \dfrac{\text{bg}(2)}{\text{bg}(3)}$ 。

一、利用 GerGebra，以描點的方式畫出對數函數的圖形，並上傳至 moodle。

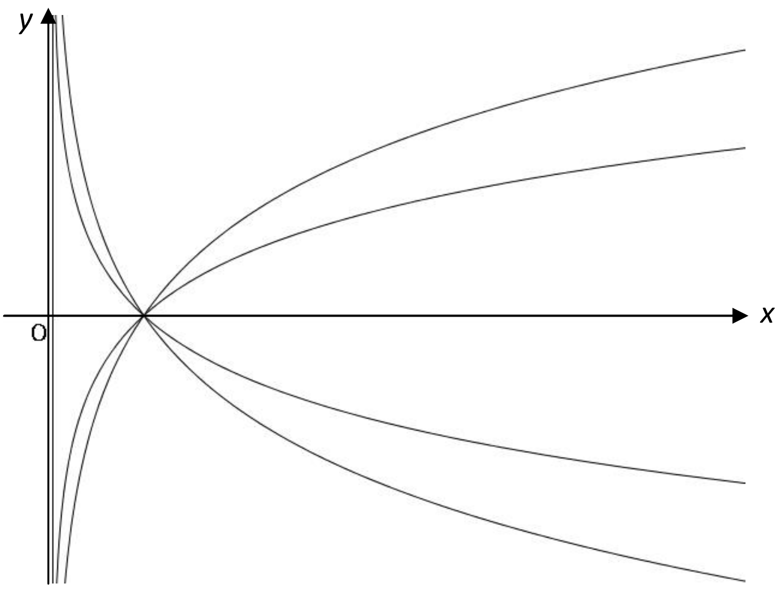
步驟：

1. 拉一個數值滑桿，令名稱為 a。
2. 對數值滑桿按右鍵>屬性>滑桿，修改 a 最大、最小值，將範圍調寬一點。
3. 設一個動點 $A = (a, \log(a)／\log(2))$。
4. 對 A 點按右鍵，選擇顯示移動軌跡。
5. 設 $f(x) = \log(a)／\log(2)$，看看此軌跡是否和電腦畫出來的圖形一致？

三、為了愛護地球，因此第三題塞在這裡，**<u>請做完第二題後再回來看這裡</u>**，\~/ (._.)再見～

下圖中有 $y = \log_a x$、 $y = \log_b x$、 $y = \log_c x$、 $y = \log_d x$ 的圖形，

已知 $a > b > c > d$，請用不同顏色的筆，標示出這四個方程式分別對應到哪個圖形。



二、請利用 GeoGebra 進行觀察、歸納對數圖形的特徵。

步驟：

1. 拉出數值滑桿 a，將 a 值的範圍修改為 0.1～5 之間。
2. 設 $f(x) = \log_a x$，並拉動開始觀察。
3. a 值在某些範圍中，圖形會有共同特徵，請依這個範圍來分類，在下方三個格子中繪圖。
4. 請盡量發揮你的想像力，用文字描述、畫圖塗鴉，表達你在這三類的圖形中發現了什麼。

當 a 的範圍在_______________的時候

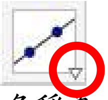
當 a 值為______的時候

當 a 的範圍在_______________的時候

GeoGebra 平移與對稱學習單 1　(12/9)

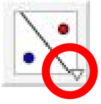
組別：_______	組長：_________	組員：_________
組員：_______	組員：_________	組員：_________

一、請利用平移指令，觀察直線經過平移後，方程式有什麼改變。

1.在上方按鈕列，點選的箭號，再點選

，拉出一段平移向量。

2.拉兩個數值滑桿，令名稱為 a、b，接著假設拋物線 r: $y=(x-a)^2+b$。

3.在上方按鈕列，點選的箭號，再點選

，接著先點拋物線 r，再點平移向量。

4.拉動平移向量，觀察看看 r 的方程式在平移前、後有什麼關係。

二、將方程式進行鉛垂上下平移，觀察並歸納方程式的改變。

1.當 $k>0$ 時，拋物線 $y=(x-a)^2+b$ 鉛垂往上、往下平移 k 個單位時，方程式會如何改變？(用 x、y、a、b、k 表示)

2.(1)畫出 $y=x^3+3x^2$ 的圖形，並輸入指令 extremum[方程式名稱]找出轉彎點(相對極值)。

(2)利用上下平移的概念思考方程式 $x^3+3x^2+k=0$ 的實數解

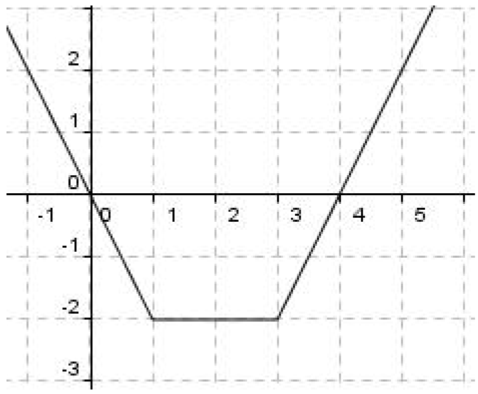
此方程式恰有一實數解時，k 的範圍為何？

此方程式有三實數解時，k 的範圍為何？

3.某個月黑風高的夜晚，小如在即時通上教嘉梅做 GGB 作業，小如把作業拍照後傳給嘉梅，嘉梅眉頭一皺，發現案情並不單純，正想要問小如問題時發現小如已離線… =_=

(1)幫助嘉梅想一想，這個圖形是由絕對值函數往上還是往下平移呢？為什麼？

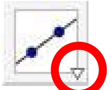
(2)請幫助嘉梅寫出此圖的函數為何。



GeoGebra 平移與對稱學習單 2　(12/23)

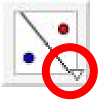
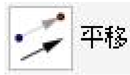
組別：_______	組長：_________	組員：_________
組員：_______	組員：_________	組員：_________

一、請利用平移指令，觀察直線經過平移後，方程式有什麼改變。

1.在上方按鈕列，點選  的箭號，再點選 

，拉出一段平移向量。

2.拉兩個數值滑桿，令名稱為 a、b，接著假設拋物線 r: $y = (x-a)^2 + b$。

3.在上方按鈕列，點選  的箭號，再點選 

，接著先點拋物線 r，再點平移向量。

4.拉動平移向量，觀察看看 r 的方程式在平移前、後有什麼關係。

二、將方程式進行左右平移，觀察並歸納方程式的改變。

1.當 $k > 0$ 時，拋物線 $y = (x-a)^2 + b$ 水平往左、往右平移 k 個單位時，方程式會如何改變？(用 x、y、a、b、k 表示)

2.若有一多項式函數 $f(x) = (x+2)(x-1)(x-2)$，將 $f(x)$ 向右平移 4 單位後得到 $g(x)$。
(1)從圖形觀察，$f(x) = 0$ 的解與 $g(x) = 0$ 的解有什麼關係。
(2)求 $g(x) = 0$ 的解，並寫出 $g(x)$。

3.有一多項式函數 $f(x)$<u>往左或往右平移</u>後得 $g(x) = (x+1)(x-3)(x-4)$，已知 $f(x) = 0$ 有一根為 1，則原本的 $f(x)$可能為何？

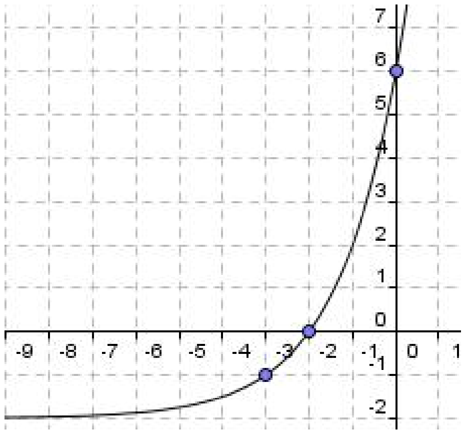
4.嘉梅眉頭一皺，發現上星期小如傳了兩份作業，這是其中的第二份，依舊是只有圖片而沒有式子⋯ =_=

嘉梅隱隱約約記得原本的題目是一平移後的指數函數，大概長這樣：

$g(x) = \square^{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}+\triangle$

請幫助「可黏」的嘉梅寫出原本的方程式吧！

(1)找出此函數的漸近線。



(2)判斷此指數的底數為何。

(3)若原本的函數是 $f(x)=\square^{\bigcirc}$，揪~~~~竟 $f(x)$經過上下左右平移了幾單位才變成此圖呢？

(4)請寫出 $g(x)$為何。

GeoGebra 平移與對稱學習單 3 (12/30)

組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

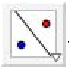
※由於軟體的限制，函數無法進行對稱變換，只有方程式才可以，因此將以描點的方式觀察。

步驟：請利用對稱指令，觀察平面經過對稱變換後，方程式有什麼改變。

1.先畫出想要變換的圖形，並在圖形上設一動點 A。

2.先對 A 點右鍵>顯示移動軌跡，再點右鍵>屬性>顯示標籤>名稱與數值，以便進行觀察。

3.拉出一條直線當作對稱軸。

4.在上方按鈕列，選擇  線對稱 ，先點要變換的動點，再點對稱軸。

5.拉動動點 A，觀察看看對稱點的軌跡方程式為何。

一、令函數圖形上有一動點 A，進行對稱後得到 A'，利用此動點觀察方程式的對稱關係。

1. 根據描點得到的結果，填寫下方表格。
2. 若有一圖形為 $y = h(x)$，經過對稱動作後得到一個新的圖形，請以 h 表示出新的圖形，並寫在表格中的「推論」欄位。

對稱 x 軸	對稱 y 軸
$A(x, y)$ ⇨ A'____________ $f(x)= 2^x$ ⇨ $f'(x)$=__________ $g(x) = log_2 x$ ⇨ $g'(x)$=__________	$A(x, y)$ ⇨ A'____________ $f(x)= 2^x$ ⇨ $f'(x)$=__________ $g(x) = log_2 x$ ⇨ $g'(x)$=__________
推論：若原圖形為 $y = h(x)$，對稱後…	推論：若原圖形為 $y = h(x)$，對稱後…

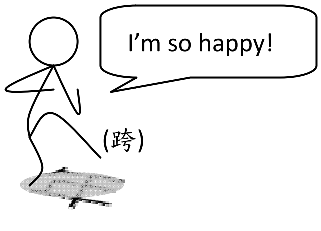
對稱 $x = y$	對稱 $x = -y$
$A(x, y)$ ⇨ A'____________ $f(x)= 2^x$ ⇨ $f'(x)$=__________ $g(x) = log_2 x$ ⇨ $g'(x)$=__________	$A(x, y)$ ⇨ A'____________ $f(x)= 2^x$ ⇨ $f'(x)$=__________ $g(x) = log_2 x$ ⇨ $g'(x)$=__________
推論：若原圖形為 $y = h(x)$，對稱後…	推論：若原圖形為 $y = h(x)$，對稱後…

二、若一圖形上有一動點 A，A 對 x 軸或 y 軸進行對稱後，得到的點 A'依然在原圖形上，則稱此圖形對稱於 x 軸或 y 軸。

1. 哪些圖形對稱於 y 軸(左右長得一樣)？請寫下方程式並簡略畫出。如 $y = x^2$。
2. 有哪些圖形兩兩互相對稱於 x 軸或 y 軸？請寫下方程式並簡略畫出。如 $y = x^2$ & $y = -x^2$ (x 軸)

（課本習題或是自己猜想沒學過的圖形皆可，寫越多分數越高！一種類型限寫一次）

3. 按照慣例請發揮你的想像力把上面畫滿、寫滿。
4. 新年快樂、跨年愉快。

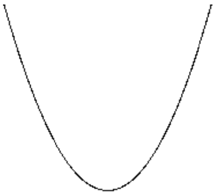


GeoGebra 平移與對稱學習單 4　(1/6)

組別：________	組長：__________	組員：__________
組員：________	組員：__________	組員：__________

一、如果有一函數圖形為 $y=f(x)$，若將 x、y 對調，得到 $x=f(y)$，經過移項整理之後可以寫成 $y=g(x)$形式，那麼為 $y=f(x)$和 $y=g(x)$的圖形之間會有巧妙的關係。

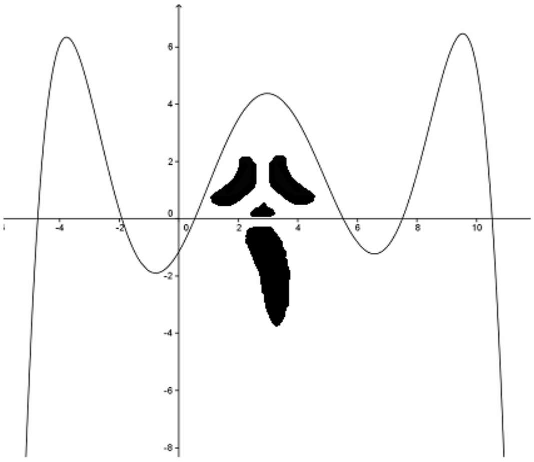
1. 請將下列函數的 x、y 對調並整理成 $y=\boxed{}$形式，再畫出變換後的圖形長相

例: $y=x^2$ $\xrightarrow{x、y\text{ 對調}}$ $y=\pm\sqrt{x}$	$y=x^3$ $\xrightarrow{x、y\text{ 對調}}$ $y=$ _______
把 $y=x^2$ 的 x、y 交換得到 $x=y^2$，再一起開根號，變成 $y=\pm\sqrt{x}$，畫出圖形後，我發現圖形和原本的 $y=x^2$ 之間…………  $\xrightarrow{x、y\text{ 對調}}$	
$y=2^x$ $\xrightarrow{x、y\text{ 對調}}$ $y=$ _______	$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ $\xrightarrow{x、y\text{ 對調}}$ $y=$ _______
$y=\pm 4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$ $\xrightarrow{x、y\text{ 對調}}$ $y=$ _______	自由發揮: $\xrightarrow{x、y\text{ 對調}}$

附件七

Homework

第八週個人回家作業：



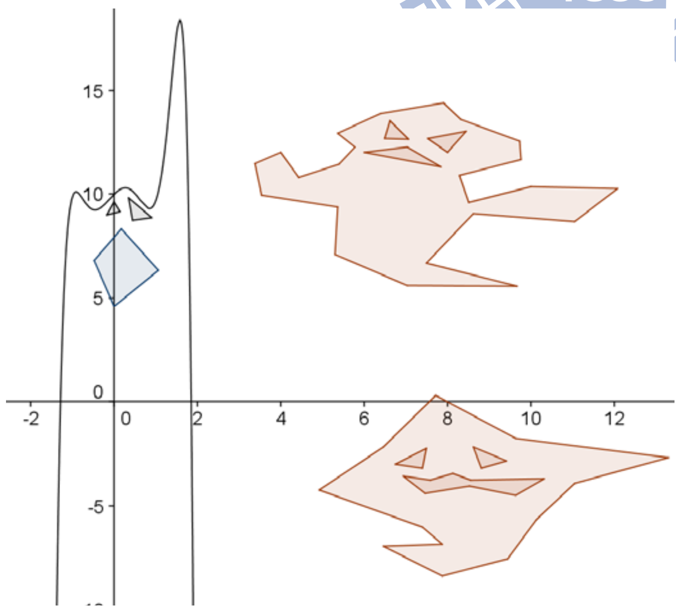
萬聖節快到了，於是呂老師利用數學軟體 GeoGebra 畫了一隻阿飄，根據老師私下透露，這隻阿飄的身影是以多項式函數圖形描繪出來的……

1. 這隻阿飄可能是以幾次多項式畫出來的？
2. 這隻阿飄多項式的首項係數是正數還是負數？
3. 請在 GeoGebra 中任意畫出多個點，再利用指令 polynomial[A,B,C,D,E,F,…]，試著畫出屬於你的阿飄。作業完成後，請將 ggb 檔**<u>上傳至 moodle 平台</u>**

(建功高中首頁＞建功數位學習網)，帳號為學號，密碼預設為身分證字號後 4 碼，請記得更換。**繳交期限：10/31 (Sun) 24:00** p.s. 本週的 ggb 檔、學習單、題目在平台上都有。

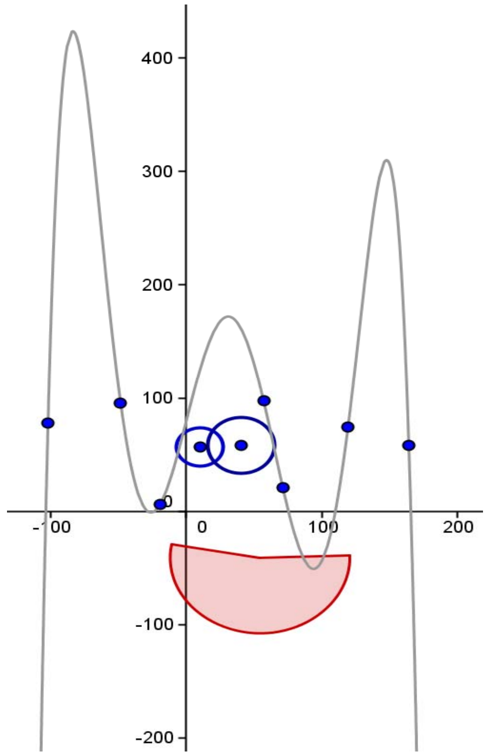
張旭含

$f(x) = -1.6\,x^8 + 1.7\,x^7 + 1.6\,x^6 + 1.6\,x^5 + 1.8\,x^4 - 5.4\,x^3 - 2\,x^2 + 2\,x^1 + 10$



陳安琦

$f(x) = 0\,x^6 + 0\,x^5 + 0.00001\,x^4 - 0.00219\,x^3 + 0.00084\,x^2 + 4.68333\,x + 80.15445$



第九週個人回家作業：

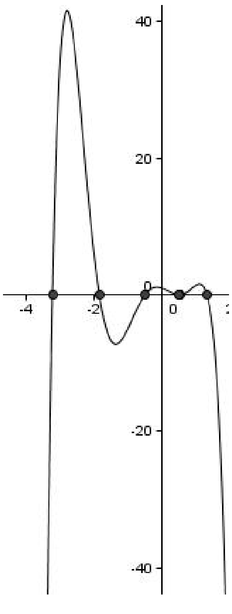
若函數 $f(x)$為多項式，當 $y=f(x)$ 和 $y=0$ 的圖形有交點時，代表方程式 $f(x)=0$ 有實數解。設 $f(x)$為 n 次多項式，且首項係數為負…

1. $f(x)=0$ 可能恰有 n-1 個實數解嗎？為什麼？(可利用圖形歸納的結果說明)

2 (1) 若 $f(x)=0$ 恰有 n 個實數解，請畫出<u>一種</u>可能的 $f(x)$圖形。
  (2) 承上，這個圖形像什麼？以你的想像為主題，試著利用幾何圖形或插入圖片功能，裝飾成你想像中的物體、象徵。

蒯怡靖

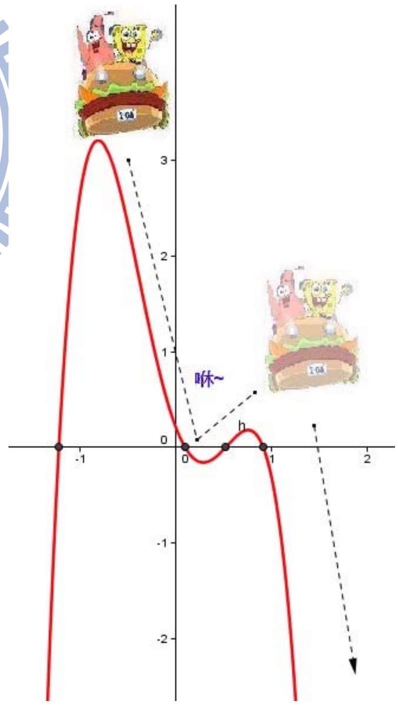
$1-1.8x-4.8x^2+8.2x^3+3x^4-3.2x^5-x^6$



我沿用了鬼 六次方的圖形來做研究。
如果這個六次方的圖可以出現六減一~也就是五~個解的話，關鍵就在這裡。
如果眼前這個弧能和 X 軸交於一點，那麼 f(x)六次多項式就可能有六減一個解。
可是好像不太可能。
我有找到另一個與這個類似的圖形，可是情況一樣，四個交點或是六個交點，不會出現五個。
（當然，也有兩個交點的。）
照這種情形來看，我推測，多半也不會有一個或三個交點的。

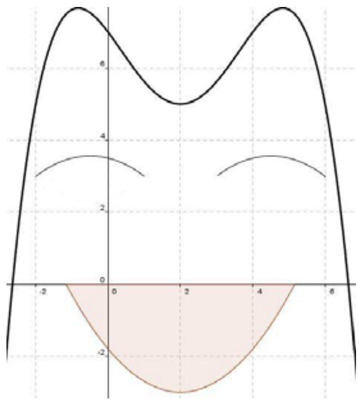
官容暄

$-3.72x^4+1.1x^3+4.7x^2-2.6x^1+0.2$



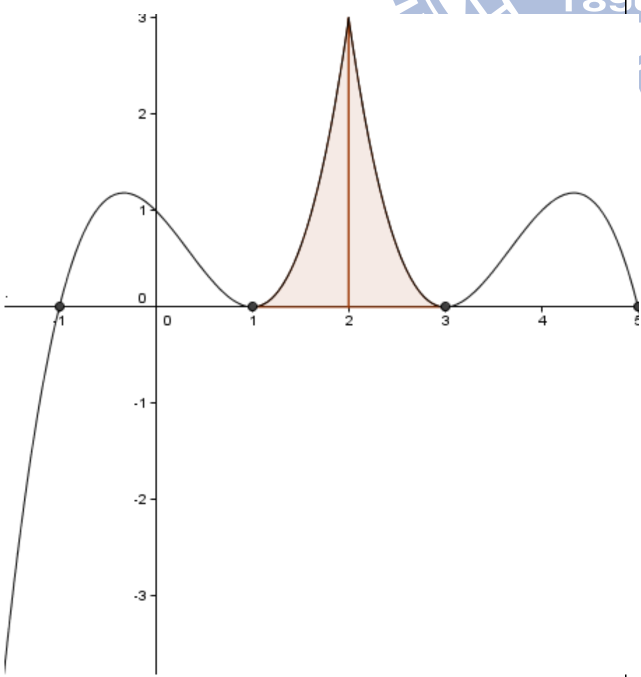
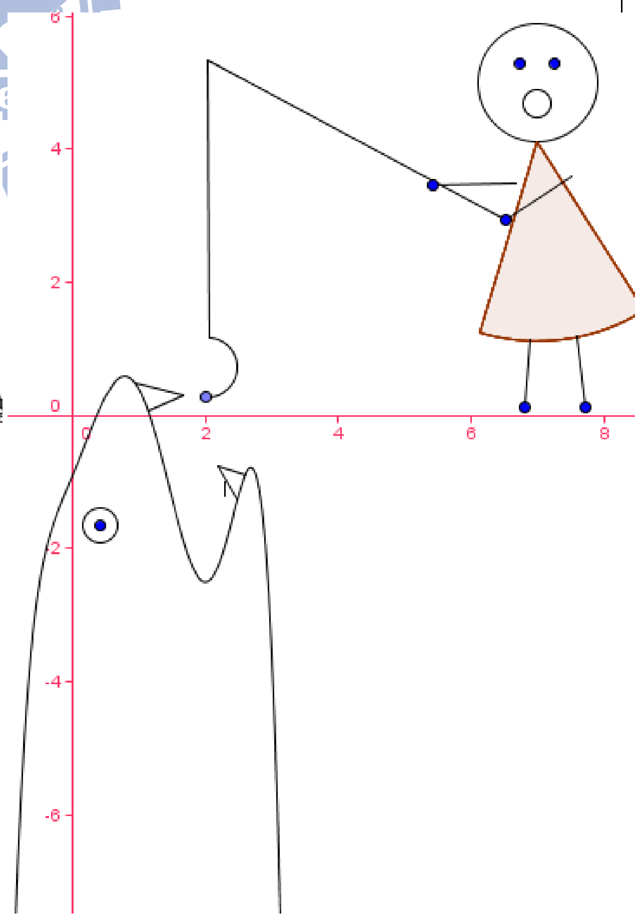
不可能，因為四次方程式的解有四個，實數解不會是奇數個，虛數解一定是成對的，所以，實數解會是零個或偶數個，不會是三個實數解
如果用圖形來看，首項係數是負的，兩邊的的方向一樣，所以會呈現 M 或倒 U 型

<u>**第十週個人回家作業：**</u>

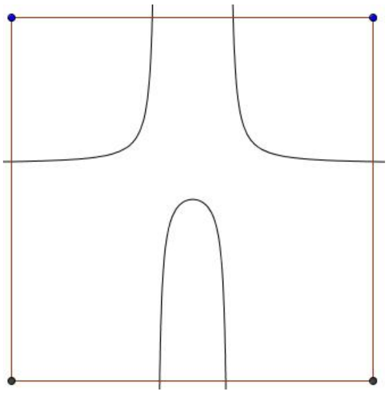


數學曲線可以用在電腦繪圖上，利用少量點、函數、方程式等資訊，就可以畫出複雜的圖案。而利用數學概念繪製的圖形稱為向量圖，向量圖的優點一是佔用的記憶體小，另一個則是當你的圖形放大時也不會變模糊…

請利用<u>**至少兩個**</u>多項式圖形，並使用 function[]指令，畫出簡單的塗鴉！(主題不限)

吳凱翔	董耘
	

第十一週個人回家作業：



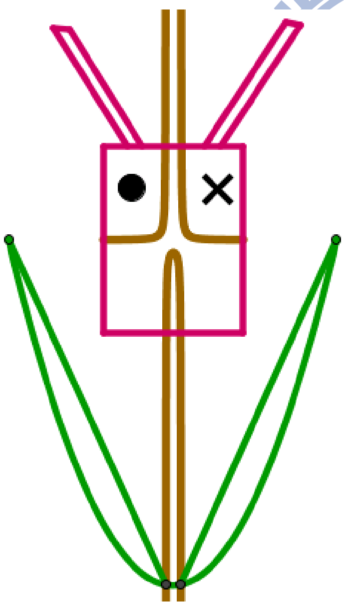
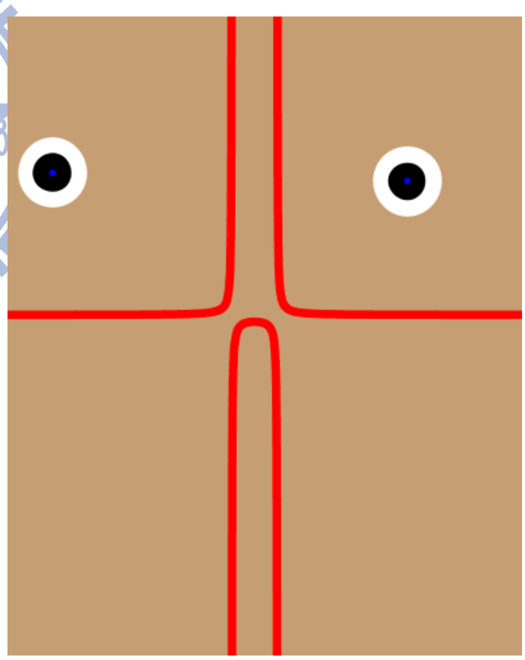
每當盛飯的時候，總是有人會情不自禁露出囧臉，於是呂老師又用數學軟體將各位的表情紀錄下來了…

呂老師利用多項式 $f(x)$，輸入 $g(x)=1/f(x)$就變成左圖

1.想想看 $f(x)$有幾個關鍵點，x 的範圍在哪裡會使 $f(x)$為正或負？$f(x)$可能是幾次多項式？

2.找出 $f(x)$後，畫出 $g(x)$看看是否變囧臉。

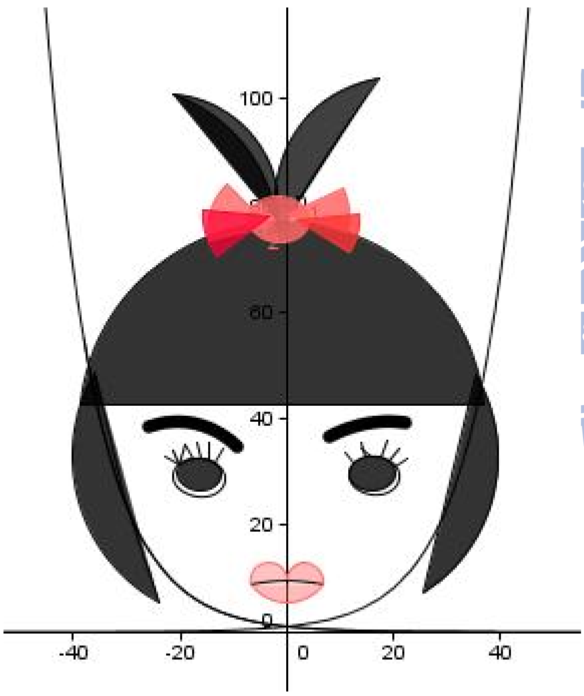
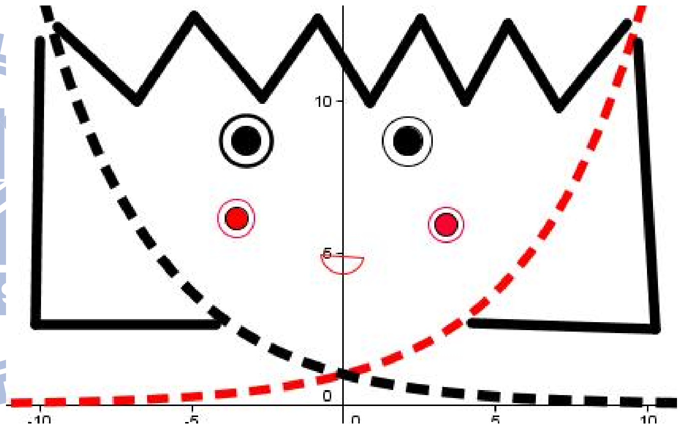
3.請看著鏡子畫出自己的囧臉，並發揮創意為自己的囧臉打扮一下！

邱子庭 - 很囧的花	楊尚恩
 由我的圖形可知，f(x)有 2 個關鍵點 x＞2 or x＜1 ----- f(x)＞0 1＜x＜2 ----- f(x)＜0 f(x)是 2 次多項式 經觀察:f(x)為偶數次多項式時，若無重根，可畫出連續完整的囧 f(x)為奇數次多項式時，若無重根，可畫出囧，但兩旁的不完整	 1. f(x)有兩個關鍵點,在 f(x)=(x+1)(x+4)時,當 x 大於-1 或小於-4,f(x)為正數 當 x 介於-1 到-4 之間,f(x)為負數.f(x)可能為 2 次多項式會形成"囧"字 2.F(X)會和 G(X)有交點

第十三週個人回家作業：

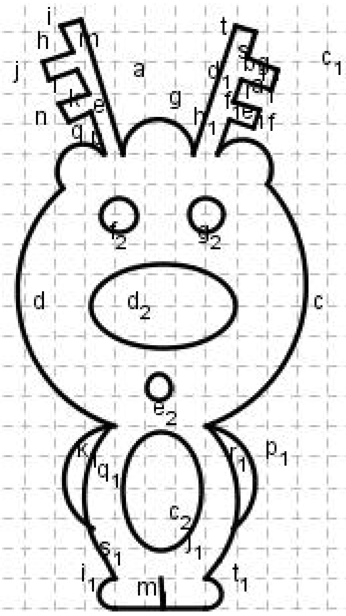
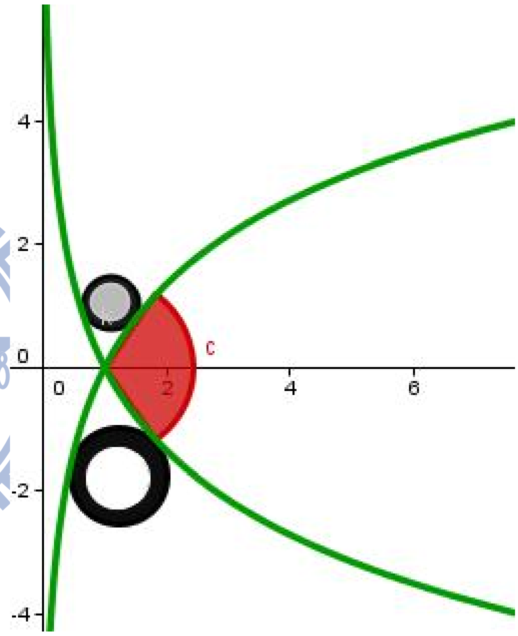
指數函數圖形的對稱關係

1. 請拉一個數值滑桿，令名稱為 *a*。
2. 設 $f(x) = a \wedge x$、　$g(x) = f(-x)$。
3. 由圖形來看，*f* 和 *g* 有什麼關係？
4. 由式子來看，為什麼 *f* 和 *g* 會有這樣的關係？
5. 按照慣例，請利用之前學過的指令，裝飾一下你的作業吧！

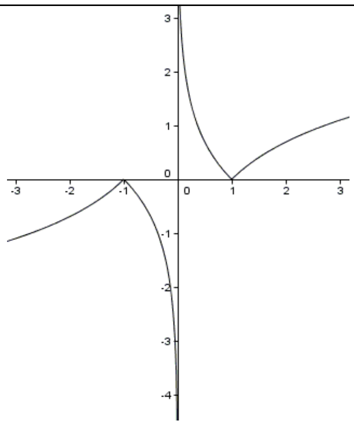
徐敏之－我是ＬＩＮ　ＷＡＹ	林佳萱
 ３.f 和 g 以 y 軸對稱 ４.f 和 g 是倒數的關係，而讓是促成倒數的關鍵，就是 f(-x)其中的負號。 另外當 a=1 時 f、g 圖形相同，若當 a<1 利用數值滑桿拉到 a>1，f、g 兩個圖形會整個互調	 指數一個是正,一個是負(相反數) 導致底數是倒數,因此兩圖形會成對稱 兩圖形恆正,與ｘ軸不會有交點 ｘ軸是這兩圖形的漸進線 在ａ不等於０時，ｘ為０，答案都為１ 因此會是一條水平線，交點（０，１） 紅色的是漸增函數 黑色的是漸減函數

第十七週個人回家作業：

1. 請拉一個數值滑桿，令名稱為 *a*。
2. 設 *f*(*x*) = *log*(*x*) / *log*(*a*)、 *g*(*x*) = *log*(*x*) / *log*(1 / *a*)。
3. 由圖形來看，*f* 和 *g* 有什麼關係？
4. 由式子來看，為什麼 *f* 和 *g* 會有這樣的關係？
5. 按照慣例，請利用之前學過的指令，裝飾一下你的作業吧！

劉育辰	李晟榜
 f(x)和 g(x)對稱，x 軸為對稱軸 y 軸為漸進線 當兩函數 x 值相同時，y 值相加的值為 0 因為真數互為倒數，且底數相同 所以假使 f(x)為 k，g(x)為(-k) k+(-k)=0 所以 y 值相加為 0 解說正確 解說詳細	 f(x) 和 g(x) 對稱於 X 軸 從式子上看是 f(x)=log(x)/log(a) 和 g(x)= -[log(x)/log(a)]只差在 g(x) 式子多個負號，所以答案都正負相反 解說正確

第十八週個人回家作業：



LOGO 設計

對稱能夠帶來協調的美感，而哥德式的藝術風範就在強調均衡、對稱的美感。請利用圖形的對稱變換，設計出代表你個人風格的圖案。

1. 請設計一個或多個函數／方程式，必須使圖形看起來是**對稱**的。

(點對稱、線對稱皆可)

2. 可以試著調整負號、絕對值或偶數次方放置的位置，或許會調整出令人驚異的圖案！

3. 裝飾的花邊不受限於對稱，可自由發揮。

葉定杰	曾崇揚