

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩士論文

動態幾何系統 GeoGebra 對數學學習成效與認知診斷
影響之研究

-以簡易二次函數圖形為例

A Study on the Effect of GeoGebra on Math Learning Achievement and
Cognitive Diagnosis – a Case of Simple Quadratic Functions Graph

研究生：黃楷智

指導教授：李榮耀 教授

中華民國 一 百 年 六 月

動態幾何系統 GeoGebra 對數學學習成效與認知診斷影響之研究

-以簡易二次函數圖形為例

A Study on the Effect of GeoGebra on Math Learning Achievement and
Cognitive Diagnosis – a Case of Simple Quadratic Functions Graph

研究生：黃楷智

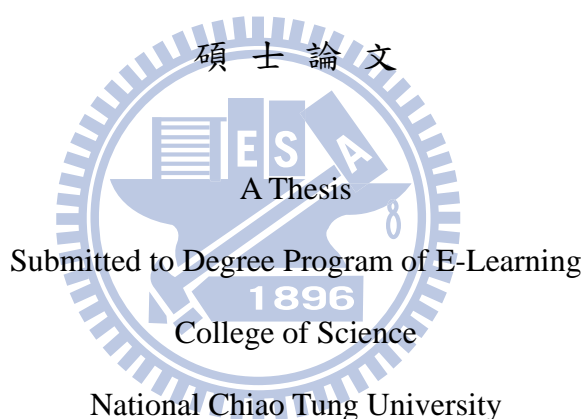
Student : Kai-Chih Huang

指導教授：李榮耀

Advisor : Jong-Eao Lee

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程



National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一十年六月

動態幾何系統 GeoGebra 對數學學習成效與認知診斷影響之研究
-以簡易二次函數圖形為例

學生：黃楷智

指導教授：李榮耀 博士

國立交通大學理學院科技與數位學習學程

摘要

動態幾何系統 GeoGebra 結合代數運算與幾何建構兩大系統的雙向軟體，主要特色在以動態互動的方式讓學習者主動操作、觀察數學物件，方便學習者連結真實經驗並建構數學形式，因此可透過適當的教材設計，引導學生注意力，進行認知學習，並達到師生互動。

本研究以簡易二次函數為例，採準實驗研究法，探討 GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計，相較於一般簡報教學與一般傳統教學，是否能達到較好的學習成效，並進一步分析其認知診斷評量訊息。

主要研究結論可以彙整如下：

- 1、GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計有助於低、中學業能力的學生在數學上的學習。
- 2、GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計明顯有助於學生將數學概念、技能形成新知識並儲存於長期記憶區。
- 3、GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計有助於提高學生學習數學技能之精熟度，並增強概念的圖像表徵。

關鍵詞：動態幾何、GeoGebra、認知診斷評量、二次函數

A Study on the Effect of GeoGebra on Math Learning Achievement and
Cognitive Diagnosis
– a Case of Simple Quadratic Functions Graph

Student : Kai-Chih Huang

Advisor : Dr. Jong-Eao Lee

Degree Program of E-Learning
National Chiao Tung University

Abstract

GeoGebra (dynamic geometry system) is an interactive software that combines algebraic calculation and geometric construction. The main feature focuses on students' own initiatives to operate and observe mathematical objects through interactive methods. It facilitates building mathematical concepts through tangible experiences. With properly designed teaching materials, it can focus students' attentions, promote cognitive learning and encourage student-teacher interactions.

Using the quasi-experimental method, the study uses simple quadratic function as the particular case to investigate whether GeoGebra's teaching design can achieve better learning outcomes compared to the typical PowerPoint presentations and the common traditional teachings; and to provide further analysis on cognitive diagnostic assessment.

The main conclusion can be summarized as follows:

1. GeoGebra's instructional design helps students with low to mid academic abilities to improve their mathematical learning.
2. GeoGebra's instructional design has the apparent effect in aiding students form mathematical concepts and turn hands-on skills into new knowledge stored in the long-term memory.
3. GeoGebra's instructional design helps students to increase their proficiencies in acquiring mathematical skills and enhance the concept of pictorial representations.

keyword: dynamic geometry, GeoGebra, cognitively diagnostic assessment, quadratic
function

誌謝

能夠踏入交通大學進修，並且順利地完成論文，這一切，完全得感謝我生命中最重要的一半，因為有妳的殷切叮嚀與鼓勵，以及飛快的人生規劃，才讓我總是有源源不絕的動力來完成碩士學業。

另外，感謝指導教授李榮耀老師願意提供機會，讓我的論文得以誕生，為兩年的在職進修生活畫下完美的句點。

最後，感謝所有在我撰寫論文時幫助過我的親人、朋友，謝謝你們。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章 緒論	1
第一節 研究背景與動機	1
第二節 研究目的	2
第三節 研究問題	4
第四節 名辭解釋	4
第五節 研究限制	5
第二章 文獻探討	7
第一節 多媒體學習認知理論	7
第二節 動態幾何系統 GeoGebra	13
第三節 認知診斷評量	16
第四節 二次函數相關研究	22
第三章 研究方法	25

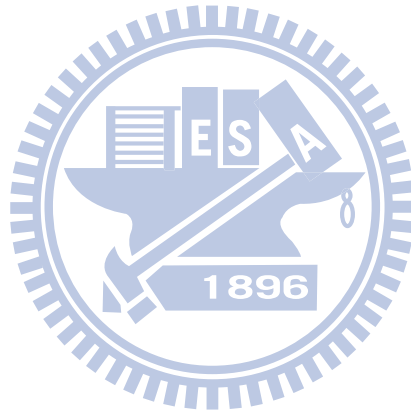
第一節	研究流程	25
第二節	研究對象	26
第三節	研究設計	28
第四節	研究工具	32
第五節	資料分析方法	36
第四章	研究結果與討論	38
第一節	施測樣本的敘述統計資料與檢定分析	38
第二節	認知診斷評量	47
第三節	研究結果摘要	54
第五章	結論與建議	55
第一節	研究結論	55
第二節	研究建議	56
第三節	未來研究方向	57
參考文獻		59
附錄		63
附錄一	課程學習單	63
附錄二	GeoGebra 輔助教學教材內容及分析	67
附錄三	一般簡報教學教材內容及分析	78
附錄四	函數學習成就測驗後測	92

表目錄

表 2-1 GSP 及 GeoGebra 對照比較表	16
表 2-2 發展以心理學為導向的認知診斷測驗之五個編製步驟	17
表 3-1 甲乙丙三組三次段考成績平均數與標準差摘要表	26
表 3-2 甲乙丙三組三次段考平均成績單因子變異數分析檢定摘要表	26
表 3-3 三組高中低能力分組段考平均成績單因子變異數分析檢定摘要表	27
表 3-4 三組高中低能力分組段考平均成績 Scheffe 多重比較摘要表	27
表 3-5 實驗設計分組表	28
表 3-6 高中低三組段考平均成績單因子變異數分析檢定摘要表	30
表 3-7 教學主題與內容目標	32
表 3-8 施測試題雙向細目表	34
表 3-9 施測試題難度、鑑別度摘要表	35
表 3-10 繪圖題給分標準	35
表 3-11 簡易二次函數圖形的認知操作	36
表 3-12 函數學習成就測驗之 Q 矩陣	36
表 4-1 各組教學實驗相關敘述統計資料摘要總表	39
表 4-2 三組前測成績之單因子變異數分析檢定摘要表	40
表 4-3 三組前測成績之 Scheffe 多重比較摘要表	40
表 4-4 各組對不同教材設計在學習成效（後測）上的單因子變異數分析摘要表	40
表 4-5 各組對不同教材設計在學習成效（延後測）上的單因子變異數分析摘要表	40
表 4-6 各組對不同教材設計在學習成效（延後測）上的 Scheffe 多重比較	41
表 4-7 各組之低學業能力授試樣本相關敘述統計資料摘要表	42
表 4-8 各組之中學業能力授試樣本相關敘述統計資料摘要表	43
表 4-9 各組之高學業能力授試樣本相關敘述統計資料摘要表	44
表 4-10 各學業能力分組對不同教材設計之後測學習成效單因子變異數分析摘要表	45
表 4-11 各學業能力分組對不同教材設計在後測學習成效之 Scheffe 多重比較	45
表 4-12 各學業能力分組對不同教材設計之延後測學習成效單因子變異數分析表	46
表 4-13 各學業能力分組對不同教材設計在延後測學習成效之 Scheffe 多重比較	46
表 4-13 不同教材設計之各組受試樣本後測 G-DINA 分析摘要表	47
表 4-14 各組與各能力分組之單元目標技能平均精熟率（後測）	49

圖目錄

圖 2-1 多媒體雙通道假設	8
圖 2-2 只有圖像經視覺管道	10
圖 2-3 印刷文字與圖像都經視覺管道	11
圖 2-4 字幕與圖像都經視覺管道	12
圖 2-5 受試者對試題 j 的反應程序圖	21
圖 2-6 Ox 程式執行 G-DINA 模型畫面	22
圖 2-7 二次函數課程地位圖	23
圖 3-1 研究流程圖	25
圖 3-2 研究架構圖	28
圖 3-3 課程流程圖	31
圖 4-1 不同教材設計之各組受試樣本後測 G-DINA 分析比較圖	48
圖 4-2 不同教材設計之各組受試樣本延後測 G-DINA 分析比較圖	48
圖 4-3 各組與各能力分組之單元目標技能平均精熟率 (後測)	49



第一章 緒論

第一節 研究背景與動機

「怎麼辦？學生不懂標準式的意義，化簡也有問題，那怎麼學函數與圖形之間的關係呢？」這是筆者在現今國中教育現場時常聽到數學教師在二次函數教學過程中所提出的問題，反應出在二次函數這個銜接代數（文字）與幾何（圖形）兩大數學系統的學習單元中，有相當多學生感到困難，而大多數的學生對函數的認識都停留在抽象符號的代數觀念，忽略了函數在坐標幾何上的意義（林星秀，2001），使得函數概念的形成無法全面而完整，因而可能在往後的函數學習歷程產生學習上的困難。

「這次二次函數的教具又是掛圖和投影片，每次貼完圖就花了很多時間，又無法隨意移動變換，怎麼沒有更好的教具能使用？」對於非線性的二次函數圖形，「畫圖」無疑是教師教學過程中的一大挑戰，而在數學學習過程中，當教師能協助學生以圖像表徵方式建立新知識時，學生能深入思考並記住相關知識，學習成就會提高（Marzano, Pickering, & Pollock, 2001），雖然有許多教師與課程設計者都已投入開發二次函數教具的行列，但使用實體教具仍有許多限制，因此對於如何更佳地呈現函數圖形，也一直是筆者不斷努力尋求改進的一個環節。

在「九年一貫正式綱要」（2003）的基本理念與實施要點中提出：演算能力、抽象能力及推論能力的培養是數學教育的主軸。而Brian（1998）表示數學課程就是圍繞著變數與函數。因此函數概念在中學階段，正是數學學習的核心單元，從常數、未知數到變數等概念的轉變，由靜態思維到運動思維、由離散到連續、由運算進入關係，並且在運算式、符號、圖表之間多重表徵的轉換（賴明裕，2008）。但這麼重要的單元，卻由全國青少年函數概念發展研究（2003）指出：「我國國中學生對於函數的圖形表徵，和幾何圖形與函數之圖形的判別能力均明顯不足，建議教師在教學時應培養學生這兩方面的能力。」。

由此看來，函數概念的多面向表徵，是造成學生學習困難的主要原因。然而以靜態的課本教材及傳統教學現場來看，遇到函數圖形呈現較為複雜，或是圖形的平移、伸縮時，總覺得黑板上徒手繪製的圖形不夠完美且費時，無法動態的將圖形的變化呈現出來，同時更可能因圖形的誤差造成學生理解上的困難。所以，Nation Council of

Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) 在「Principles and Standards for School Mathematics」中指出：「利用電腦及計算器繪製函數圖形，並觀察當參數改變時，圖形的變動關係，有助於函數概念的理解。」Rahim (2000) 也由「A Classroom Use of the Geometer's Sketchpad in a Mathematics Pre-Service Teacher Education Program」研究中：「參加研習的教師對於將來在數學教學中使用動態幾何軟體從存疑到充滿自信，他們同意可運用動態幾何軟體於幾何、代數和三角學的教學中。」。

為此，筆者研究過眾多網路上可用的資訊教材後，發現儘管教學者嘗試利用簡報軟體設計許多動畫來說明教材中圖形的轉換過程，但讓學生在認知上形成一個圖形連續變動的概念仍有困難，更重要的是無法讓學習者隨心所欲地進行各項圖形的變換與操作，由學習者達到主動探索、觀察並歸納教材中呈現的表徵概念，最後只能倚賴公式出現後才開始產生概念而達到學習效果。此時，GeoGebra 動態幾何軟體的連續動態圖形呈現特性便可讓學生在教師的引導下，觀察、歸納出圖形變換與函數概念之間的連結。

GeoGebra 是由 Markus 在 Salzburg 大學針對學校數學教育所研發的軟體，國中數學的相關圖形均能輕易畫出，操作方式和 GSP 及 Graphmatica 相似，但在其功能與特性，GeoGebra 較 GSP 在教學上擁有更多優勢，GeoGebra 具有尺規作圖、紀錄作圖過程等，能將函數概念以動態圖形的方式呈現，可讓學生的學習藉著觀察、猜想的過程，加強函數在坐標平面上所代表的圖形表徵。加上過去有關動態幾何系統輔助教學的研究大多使用 GSP 設計課程，而比較兩者的優劣之後，發現 GeoGebra 在使用上較 GSP 容易上手，而且是免費軟體，學生可自行於網站下載安裝，很值得推廣讓國中生學習，故本研究擬使用 GeoGebra 軟體來設計一個可供學生觀察、檢驗與歸納的學習環境，幫助學生理解二次函數圖形的變換，並加深其對二次函數圖形變換的印象，期能改善學生的學習態度並提昇學生的學習成效。

第二節 研究目的

國內現有的幾篇動態幾何融入二次函數教學研究中（陳英娥，1992；林星秀，2001；胡瑞明，2001；吳長憶，2009），其研究的成果大多著重在探究傳統教學與資

訊融入教學後的教學成效差異，此種強調常模參照與總結性評量的方式，往往只能測量到受試者目前的學習表現程度，而無法探究深藏在實際操作表現之下的心智運作歷程，無法對教師教學、學生學習提供充分且有效的訊息。因數學知識的建構是一段複雜的學習歷程，並非「會」與「不會」的二分法，所以評量的目的，除了測量出學習者的學習現況外，同時也應該提供學習者學習成敗的診斷訊息，以利教學者根據診斷訊息，進行有效的補救教學（涂金堂，2003）。

為此，Nichols（1994）即主張傳統評量理論無法提供有效的訊息，讓教師對學生的錯誤學習進行診斷的評量，因此，他提倡將認知科學（cognitive science）與心理計量學（psychometrics）結合，發展新的診斷評量方法，以幫助教學目標的達成。這種新的診斷評量方法，稱為認知診斷評量（cognitively diagnostic assessment（CDA））。這種認知診斷評量可以透過受試者對試題的作答反應組型，而推論出其認知歷程與知識結構的可能狀態，顯現出學生是否精熟某種技能的訊息。而這些額外的訊息可以幫助學生或老師更加瞭解分數所代表的涵義，以及哪一類的學習可以增進學習成效（Sheehan, 1997）。

故本研究在針對國中數學領域二次函數課程而發展的 GeoGebra 動態幾何軟體輔助教學設計中，以準實驗的研究方式探討在此主動探究學習的教學設計下，學生能不能夠對國中的二次函數課程有更清楚的瞭解，跳脫死背、多練的傳統學習方式，進而統整出一個由抽象而直覺的整體概念，以及探究個別學習與教學設計間的互動情況。並依據認知診斷評量的方式，深究使用動態幾何軟體輔助教學之後，學生在哪些概念、技能更容易達到精熟。

因此，本研究運用三種教學模式「GeoGebra 輔助教學模式」、「一般資訊融入教學模式」及「一般傳統教學模式」，比較國二學生對於學習簡易二次函數圖形課程之學習成效及認知診斷評量之訊息，以便作為將來在國中階段發展 GeoGebra 輔助教學之參考。

基於上述研究動機，本研究以簡易二次函數圖形為例，探討 GeoGebra 輔助教學模式對不同學業成就學生，在學習成效與認知診斷評量的表現。研究目的敘述如下：

- 1、探討不同教學設計對不同學業能力學生在簡易二次函數圖形課程上的學習成效影響。
- 2、探討不同教學設計對不同學業能力學生在三種層次問題表現上的影響。
- 3、探討不同教學設計對不同學業能力學生在學習簡易二次函數圖形課程後認知診

斷評量的影響。

第三節 研究問題

根據上述研究目的，本研究欲探討的問題如下：

- (一) 不同教學設計對不同學業能力學生（高、中、低）在簡易二次函數圖形課程上的學習成效是否有顯著的影響？
 - 1、GeoGebra 輔助教學模式對學習成效是否有影響？
 - 2、GeoGebra 輔助教學模式對不同學業能力學生在學習成效上是否有影響？
- (二) 不同教學設計對不同學業能力學生（高、中、低）在三種層次問題表現上是否有顯著的影響？
 - 1、在基礎題型上，GeoGebra 輔助教學模式與學業能力對學習成效是否有影響？
 - 2、在擴展題型上，GeoGebra 輔助教學模式與學業能力對學習成效是否有影響？
 - 3、在高層次題型上，GeoGebra 輔助教學模式與學業能力對學習成效是否有影響？
- (三) 不同教學設計對學生在學習簡易二次函數圖形課程後的認知診斷評量是否有顯著的影響？

第四節 名辭解釋

為便利討論分析，茲針對本研究所使用的一些特定名詞，加以說明如下：

1、簡易二次函數

函數的定義是，對於任意給定的一個 x 值，都恰有一個 y 值與它相對應，則我們說 y 是 x 的函數。一般所稱二次函數為現今國中數學第六冊第一章所提及的內容，亦即形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 之函數，但本研究所謂之簡易二次函數，僅限於第一節「簡易二次函數圖形」中所提及的簡易二次函數，如 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$)。

2、GeoGebra 動態幾何軟體

GeoGebra 是一套免費並且多平台的動態數學教育軟體，結合幾何、代數和微積分，並曾獲得多項國際性的大獎，包括歐洲及德國教育軟體大獎。

3、學業能力

本研究所指的學業能力，為學生在八年級上學期三次段考數學平均成績，在受試學生中先依實驗組、對照組分成三組，各組再依段考數學平均成績由低至高排列，取前 27% 為低學業能力組，後 27% 為高學業能力組，其餘為中學業能力組。

4、學習成效

經過實驗教學之後，學生能應用知識解決問題的能力。本研究以自編二次函數圖形單元階段性成就測驗之後測分數表示。在「函數學習成就測驗」的得分越高，表示學生的數學學習成效越高；反之則越低。

第五節 研究限制

本研究是以國中九年級下學期簡易二次函數圖形課程為教材設計的範圍，採準實驗研究法，研究過程中，主要限制說明如下：

1、就研究樣本而言

本研究考量城鄉差距、時間及財力等因素的限制與困難，受試樣本僅限於教學者任教學校以方便抽樣挑選的三個班級學生，有效樣本為 95 位，每班再分為三組，每組約 10 位左右，樣本數略少，故研究結果不足以推論至其他縣市之同年齡層的學生。如須推廣，則須考慮種種因素，如地區、年級等母群體差異不大的樣本。

研究主題在九年一貫課程編排上是安排在九年級下學期教學，本研究為了避免現今學生課外超前補習風氣影響，提前於八年級下學期進行實驗教學，就學生先備知識而言已能夠銜接，但因非正式課程，受試學生學習心態是否能接受可能會影響施測結果。

2、就研究變項而言

本研究採準實驗研究法，由於影響教學成效的因素眾多，除了教學者、教材設計外，班及特質、學習者間彼此影響、學習者本身的動機與學習態度都可

能影響學習成效，因此實驗結果較難推論其他學習環境與學習者上。

3、就研究題材、單元內容而言

二次函數等相關教材編排於九年級下學期課程，本研究中所探討之內容僅止於教材中的簡易二次函數圖形單元，因此，其他冊之其他單元內容是否等同適用本研究結果並無法推論。且為考慮不影響原班上課及學校電腦教室的排課時間，故實驗教學僅實施兩節課，實驗時間尚短，若推廣為長時間使用，仍須再進一步研究。



第二章 文獻探討

本章分為四節，第一節介紹多媒體學習認知理論，第二節介紹動態幾何系統，第三節介紹認知診斷評量，第四節介紹二次函數相關研究。

第一節 多媒體學習認知理論

如今電腦教學軟體的研究使用和網路的普及，使得現今教學方式趨向多元化，而在豐富的教學資源中，認知心理學家 Mayer 將電腦多媒體學習定義為利用文字（包含書寫印刷的視覺文字與口述的聽覺文字）或圖片（靜態圖片、動畫及影片）的學習（Clark & Mayer, 2008）。根據 Mayer 的定義，只要須透過文字或圖片來學習的一切過程，皆可屬於多媒體學習的一種，如：影片、簡報教學、網路學習……等。

因此，以 Paivio (1986) 的雙碼理論 (Dual-Coding Theory) 為基本，Mayer (2001) 與多位專家提出「多媒體學習認知理論」(A Cognitive Theory of Multimedia Learning)，並做了三種基本假設，分別說明如下：

1、雙通道假設 (Dual Channels Assumption)

人類擁有兩個分開的通道來處理外來的視覺訊息 (visual information) 和語文訊息 (auditory information) (Paivio, 1986; Baddeley, 1992)。因此，Mayer 在多媒體設計原則中也將訊息呈現方式訂為兩個通道，一個是視覺化的，一個是聽覺化的。面對文字訊息，我們經由眼睛接收，產生視覺化的訊息進入工作記憶區；口述的文字或聲音則經由耳朵接收，選擇訊息產生聽覺，並沿著聽覺通道進入工作記憶區，組織文字形成一個口語模型。而對於圖像訊息則皆是透過眼睛視覺接受訊息，沿著視覺通道進入工作記憶區，形成圖像模型。這兩個通道中流通的訊息又可以互相轉換，我們可以將看到的文字在心中念出，將視覺訊息轉換成口語訊息。相同的，也可能在接收完聽覺訊息後，將聽到的聲音在心理上轉化成影像。兩種訊息間應有互補的作用。所以，在雙碼理論中，一般認為能使用兩種通道來接收訊息是比較能獲得成效的。其雙通道模型如圖 2-1。

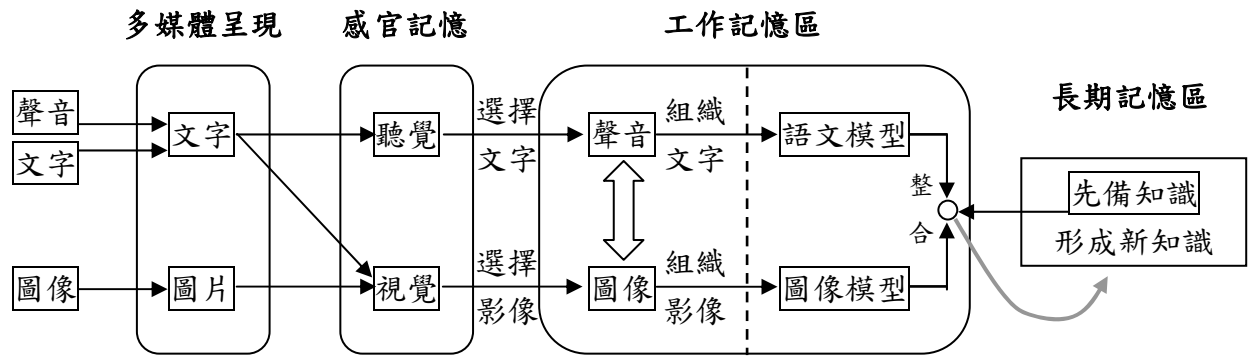


圖 2-1 多媒體雙通道假設
資料來源：修改自 Mayer (2008)

2、有限容量假設 (Limited Capacity Assumption)

人類在每個獨立通道的一次訊息處理量是有限的 (Baddeley, 1992; Chandler & Sweller, 1991)。即短期 (工作) 記憶區 (working memory) 的容量是有限的。更加強說明了，在雙通道的假設下，教學設計必須謹慎安排文字與圖像出現的時間與所有的訊息呈現量，才能使學習者充分接收訊息，達到有意義的學習。

3、主動學習假設 (Active processing Assumption)

當訊息呈現時，學習者會主動接收並與舊有經驗、知識和基模 (Schema) 整合，形成一個新的知識再回存到長期記憶區。其中知識是學習者自行建構的，並非將所有的教學概念直接照單全收，而是把看到、聽到的訊息意義化，再與自己的先備知識作整合。因此儘管面對一樣的教師與教學呈現方式，每個人所建構出來的知識卻不盡相同。所以，主動學習包含「選擇相關訊息」、「組織已選擇訊息」和「將新訊息與舊知識整合」。

在了解以上三項多媒體學習認知理論的基本假設後，Mayer 更進一步提出訊息處理中必經的三個心理認知過程 (Clark & Mayer, 2008)，分別說明如下：

1、選擇 (Selecting)

當教學內容同時包含文字與圖像訊息，學習者先由感官記憶中的視覺或聽覺選擇相關的文字或圖像建立資料庫，並分別儲存於語言工作區與圖像工作區。因此在教材設計與呈現上，如何讓學習者能方便地選擇所需的訊息顯得非常重要。

2、組織 (Organizing)

儲存到工作區的訊息便可由學習者運行組織。Mayer 在此所稱的組織即將短期記憶中的內容加以排列組合，形成一個合邏輯、一貫的整體。經過組織後的文字與圖像資料，Mayer 稱之為情境模型 (Situational Model) (宋曜廷，2000)。

3、整合 (Integrating)

當學習者組織建立情境模型後，最後必須再與融入自身的先備知識加以整合，形成新的知識結構，以基模的形式回存到長期記憶區，以利日後進行新知識的建構。

上述的三個認知歷程皆發生在工作記憶區中，工作記憶區又受限於有時間及容量限制，長期記憶區則沒有限制，因此能協助學習者輕鬆地完成選擇、組織及整合訊息三項過程，不會發生工作記憶區運作超載，達成有效的學習，將是良好多媒體教材的設計目標。接下來將探討多媒體學習認知理論中的教材設計原則。

以多媒體學習認知理論為基礎，Clark & Mayer (2008) 以多項教學實驗歸納出多媒體教材設計的幾個原則，整理如下：

1、多媒體原則 (Multimedia Principle)

多媒體原則即「文字」與「圖像」並用的教材內容會比單獨使用「文字」的教材內容給學生帶來更好的學習效果。從多媒體學習認知理論來看，文字與圖像為語文通道與圖像通道兩種不同知識建構系統，兩種通道各自接收適量的訊息，既可彼此整合又不會讓工作記憶區運作超載。且一般認為圖像較文字能直接傳遞訊息，兩種感官記憶應可互補，但不能取代彼此。

本研究的主題為「簡易二次函數的圖形」，本就是結合代數 (文字) 與幾何 (圖像) 的數學概念，在內容呈現須加入許多圖例與相對應的代數式，教學過程中也將搭配口語解說，應能妥善運用多媒體原則。

2、空間接近原則 (Spatial Contiguity Principle)

人類的視覺感受上，若圖像與相關文字距離太遠，將須花費較多的時間與認知資源去搜尋對照才能對訊息產生認識。因此在教材內容呈現圖像時，應與其相關文字的位置彼此接近，學習者便能省去多餘的心力而投注於其他訊息上，進而提高訊息的獲取量，對應地，學習成效也能跟著提升。由多媒體學習認知理論的主動學習假設 (Active processing Assumption) 也可發現，接收訊息時，學習者會試著主動選擇有意義的文字或圖像訊息再加以組織，形成一致

性的語文與圖像心智模型，透過整合此兩種模型來建構新知識，存入長期記憶區。故接近的文字與圖像能降低學習者此認知歷程之選擇與組織的運作負擔。

空間接近的處理方式除了可將文字與圖像靠近，但若訊息量太多、太複雜，無法妥善配置畫面，也可用連接線銜接文字與圖像，或彈出小視窗說明，使用完畢再關上，都可讓學習者很快地完成選擇、組織訊息。

3、時間接近原則 (Temporal Contiguity Principle)

呈現訊息時，圖像伴隨著相關口語說明一起出現，對學習者的學習成效比圖像與相關口語說明分離呈現時的成效較好。圖像呈現與口語說明是分別由不同通道讓學習者吸收的，並不會產生衝突，且在學習者的主動學習過程中，圖像與口語敘述在整合呈現時，學習者較有機會能同時對相呼應圖像與口語敘述進行選擇、組織，將訊息保留在工作記憶區，增加學習者心智整合圖像表徵與語文表徵的機會。

4、通道原則 (Modality Principle)

學習者可從「動畫搭配口語表達」得到比「動畫搭配視覺文字」較佳的學習成效。因為動畫、圖像或視覺文字皆利用視覺通道進入工作記憶區，當同時出現時，將造成多種訊息彼此競爭認知資源，產生衝突，但此時聽覺通道卻沒有被使用到；而若視覺文字改以口語表達時，口語表達由聽覺通道，而動畫、圖像使用視覺通道，兩者彼此平衡，對學習者來說較能快速建立連結，節省工作記憶使用量，提高學習成效。

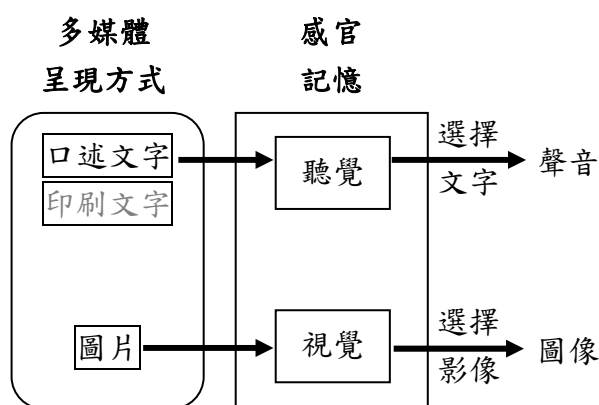


圖 2-2 只有圖像經視覺管道
資料來源：修改自 Mayer (2008)

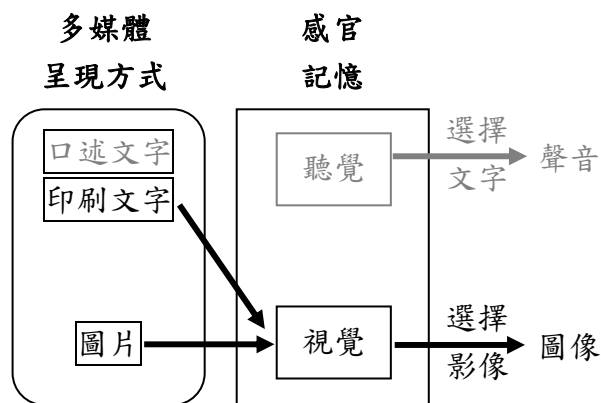


圖 2-3 印刷文字與圖像都經視覺管道
資料來源：修改自 Mayer (2008)

5、重複原則 (Redundancy Principle)

亦可稱為「多餘原則」，教材設計上若是依循通道原則採用「動畫搭配口語說明」，學習者的學習成效會比「動畫搭配口語說明再加上文字敘述」的設計方式較好。因雙通道的假設下，動畫與口語說明可同時由兩種不同通道進入工作記憶區，方便連結、組織；但已有動畫與口語說明後，若再加入文字敘述，動畫與文字敘述將會在經由視覺通道時產生衝突，學習者可能因花較多注意於文字敘述，而忽略了圖像所呈現的效果，反之亦然，且學習者會嘗試比較動畫、口語說明及文字敘述之間的連結性，耗費更多的認知資源去學習，反而降低有意義學習的機會。

但這個原則並不表示我們完全不能將螢幕上的文字和口語說明一起呈現，必須視情況而定，當呈現的速度比較慢或是沒有圖片同時出現時，螢幕上的文字是可以呈現的，如重點提示、演講……等。本研究的內容設計以「講述」、「圖形」及「重要的簡述文字」搭配呈現。

運用上述的 2、3、4、5 四點，本研究在教材設計上，盡量安排圖形的出現搭配口語引導，僅在呈現重點概念時，就近在圖形周邊輔以文字說明，降低學習者搜尋、比對訊息的可能性，減輕工作記憶區的運作負擔。

6、連貫原則 (Coherence Principle)

連貫意指訊息中元素間的結構關係。當教學目標與主題確立後，無關的資料及訊息被排除在教學呈現內容外時，學習者的學習成效優於無關的資料及訊息被納入時的學習成效。近幾年來教育的方向趨向創新、活潑及美化以吸引學

習者的興趣，但若加入的元件活潑、有趣卻與主要訊息不相關，則學習者提高的興趣僅限於那些元件上，對學習沒有幫助，如此只會造成學習的負擔及傷害。Mayer (2008) 指出無關的資料或訊息將造成：

- (1) 在工作記憶區中競爭認知資源。
- (2) 將學習者從重要的資料或訊息中分散注意力。
- (3) 分裂組織中的資料或訊息處理。
- (4) 可能使學習者繞著不適當主題組織資料或訊息。

因此，在本研究的教學設計上，背景底色皆設為全白，畫面中沒有無相關的圖像或圖示，且主要訊息呈現盡量於畫面中央，儘管畫面較單調，但對學習者的注意力集中也較有成效。

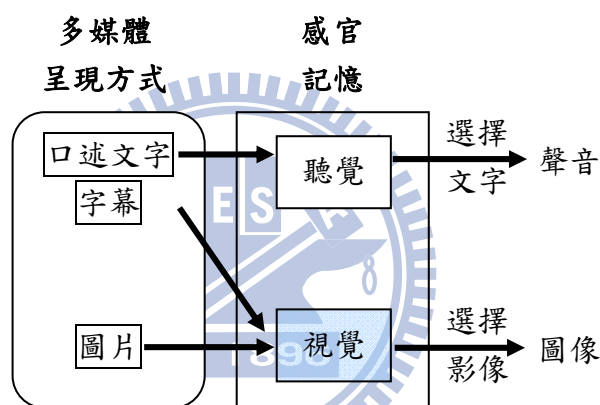


圖 2-4 字幕與圖像都經視覺管道
資料來源：修改自 Mayer (2008)

7、個人化原則 (Personalization Principle)

採用電腦呈現教學內容的學習環境中，教學者採用口語對話 (conversational style) 的方式進行教學，學習成效會比正式 (formal style) 方式進行教學更好；當錄製聲音時以真人發音的接受度也較電腦發音為佳；在口語敘述上用禮貌的語氣優於命令式語氣。這是 Mayer (2008) 考慮到學習者在主動學習過程中，受到教學者言語、態度可能影響學習者的學習動機，進而增進認知的原理，所提出的建議。本研究過程中，教學者將以經過設計之教材作為和學生溝通的平台，由教學者不斷提出問題，引導學習者思考，並由學習者進行自主操作教材發現答案，增進學習成效。

8、分割原則 (Segmenting Principle)

面對組織複雜、內容龐大的教材主題時，分析並拆解其概念成數個段落，每次上課只教授 1~3 個觀念或步驟，會比將主題內容一次完整呈現更有學習效果。人的有限容量假設已說明人類在每個獨立通道的一次訊息處理量是有限的（Baddeley, 1992; Chandler & Sweller, 1991），當學習者的工作記憶區已累積足夠的訊息，便需要整合成段落概念，才能達成有效學習。

因此，本研究設計便將主題內容分成四個部分，每次上課只教授兩個部分，給學生較充裕的時間選擇、組織訊息，形成概念。

9、事先訓練原則（Pretraining Principle）

接收訊息前，先讓學習者知道主要概念的名稱與特徵，再進行內容教學，其學習成效將優於完全不認識學習內容的，就直接切入內容教學的學習成效。此原則類似預習的效果，先讓學習者對學習內容產生認識，當學習者在主動學習過程中，遇到或接觸到相同的名詞或特徵時，自然會提高注意力，加強學習印象。本研究在設計每個畫面上皆清楚標示該選項要傳達的內容名稱，教學者也會在授課前先複誦標題，並概略說明其意義，讓學習者對內容有初步印象再進行教學。

第二節 動態幾何系統 GeoGebra

數學概念包括一系列有意義的情境、由基本關係組成的不變性以及用表徵形式呈現的符號（Vergnaud, 1987），說明了數學的學習，涵蓋了數值的、代數的、圖形的極與意的各種表徵的交互應用（Kaput, 1992）。而電腦視窗環境可同時包含文字、圖形、靜態畫面、動態畫面等訊息，只要在適當的設計下，將數學概念以這些表徵形式來呈現，使得數學概念的基本關係外顯出來，不同表徵間的變化情形用連結的方式同時變化，並在視窗中展現多重表徵間的連結（蔡志仁，2000）。

函數觀念，特別是圖形部份，受限於過去工具的功能，其呈現方是靜態的抽象符號，少有直觀的（intuitive）、數值的（numerical）動態想法（謝哲仁，2001）。而電腦提供了強大的計算與繪圖能力，使個體可運用真實數據進行模擬或建模（modeling）的活動，並可直接操弄數學物件與關係，以連結真實經驗與數學形式（Balacheff & Kaput, 1996）。因此，動態幾何是一個允許使用者建構、操作幾何基本圖形的工具視窗環境（全任重，1996；林保平，1998），加上度量、計算器與函數運

算的功能，隨著動態幾何軟體工具和教學觀念的發展，幾何和代數的教學可以從比較直觀的、動態的圖形著手（林保平，2000）。

以下將介紹動態幾何軟體的功能與特質，以做為本研究 GeoGebra 動態幾何呈現教學設計的重要參考。

1、符合尺規作圖原理（Euclidean constructions）

動態幾何軟體中所提供的繪圖工具，仿照直尺或圓規的作圖方法，可容易地製作出精確的幾何圖形，如：畫點、直線、圓、圓弧、平行線、垂直線、角平分線…等，同時線與線、線與圓或圓與圓皆可立即產生交點，並能利用這些基本功能的組合，繪製較複雜的幾何圖形。這些作圖工具均依照幾何定義設計，因此圖形精確適合幾何教學（林保平，1997）。

2、圖形可操作，具幾何變換功能

由動態幾何軟體工具所製成的圖形整體或其構成部份，皆可在視窗內利用滑鼠指標直接依作圖時的定義移動其位置或改變形狀，也可利用軟體提供的幾何變換（Geometric Transformation）功能，選出變換的基準，如：平移向量、鏡射軸、旋轉或相似中心、縮放的比例、旋轉的角度等，再做平移、旋轉、鏡射、相似等幾何變換。而其幾何作圖及圖形可操作及變換的功能，是動態幾何軟體能成為臆測、探索幾何性質工具的原因之一（Rahim, 2000）

3、提供解析幾何（Analytic Geometry）的坐標系統

動態幾何軟體提供直角坐標與極坐標平面，可用定點坐標描點，或使用度量工具求得任意點的坐標、距離長度、斜率等，並可畫多項式函數、三角函數、指數函數與對數函數等函數圖形。

4、動態連續變化及不變性

動態係指圖形及數值可以做連續的變動，當圖形或其某一構成元素改變位置、形狀或被變換時，其改變過程是漸進及連續的。不只圖形的最後形態呈現出來，其改變過程的圖形也會不間斷地呈現出來，因此學習者看到的是一個連續的變動過程，使學生能觀察圖形的連續變換，並由度量工具之輔助來發現幾何的不變性質（invariant）（林保平，1997）。

5、同時具手動操作及自動化功能

動態幾何軟體具拉曳（dragging）及動態模擬（animate）功能，透過適當設計，程式可自動呈現動態過程，也可手動操作，控制速度，方便觀察、比

較與臆測。在手動操作不易精準時，如重合或疊合兩圖形，可透過設計動作按鈕使電腦自動操作，增加準確度（林保平，1995）。學習者可隨心所欲操控程式，依個人差異建構概念。

6、動態互動、視覺化、情境化及數值化，並結合圖像和文字的多重表徵視窗環境

動態幾何軟體的互動係指圖形的變動或函數式參數的變動，將帶動函數式或圖形作相對應的變動，而其坐標也會隨著點位置之改變而改變。視窗中可同時呈現（1）文字模式（text mode）－問題情境的呈現，（2）數值模式（numerical mode）－探索函數、參數、測量值等各種可能數值的變化，（3）圖形模式（graphical mode）－對應數值變動的圖形變化。各模式之間是動態連結的，也就是學習者可以改變文字模式的數值，其相關的數值及圖形模式就會快速地更動。把圖形的意涵從被動層次提升至較為主動的層次，並可透過連結的設定及程式的設計達到課程間的橫向連結（謝哲仁，2001）。

傳統教材靜態的文字、圖形陳述時不易導引出探索的情境，因此不容意引導學生主動式的學習（余麗惠，2002）。妥善運用各種學習理論與教學設計，配合動態幾何軟體的特性與功能，可營造出讓學生透過圖形概念連結基本函數概念、探測與驗證教材內容，發現數學結果的變動與不變性，經歷知識建構的過程與成果。因此，許多動態幾何軟體相繼被開發出來，本研究採用的 GeoGebra 便是常見且廣泛被使用的動態幾何軟體。

GeoGebra 由任教於 Florida Atlantic University 的 Markus Hohenwarter 為數學教育所研發的數學軟體。其開發精神為 Markus 主張的 KISS 原則（Keep it Simple and Short），目標在於整合代數與幾何兩大系統。一方面來看，GeoGebra 是一套動態幾何系統，可用點、向量、線段、直線或圓錐曲線等工具來繪圖，當數值改變時，相對應的函數或方程式圖形也隨之改變；另一方面來看，可直接輸入方程式和坐標，由軟體進行數字、向量、點坐標的運算，並可求出函數的微分與積分，還可用來算方程式的根或函數的極值。這種可直接做代數運算的功能，讓 GeoGebra 成為可處理幾何圖形的電腦代數系統。

檢視過去動態幾何系統輔助教學的研究大多使用 GSP（Geometry Sketch Pad）進行實驗，故以下比較 GSP 與 GeoGebra 的功能性與相關資料，如表 2-1。

表 2-1 GSP 及 GeoGebra 對照比較表

資料來源：修改自吳長憶（2008）

	項目	GSP	GeoGebra
A	價格	校園版 50000 元 個人版 6000 元 學生版 1600 元	免費 自行至網站下載
B	繪圖工具	基本的線及圓作圖	有較多的繪圖工具如： 半圓，切線，中垂線，角平分線，過 5 點的圓錐曲線等
C	輸入方程式	畫函數方程式的圖形步驟較繁雜難記	有輸入欄位可用，能快速的輸入函數方程式或繪圖指令
D	相關書籍資源	中文書如： 聯經出版社：國中幾何動動動；各教科書出版社所提供的教學光碟及範例 網站如： 師大陳創義教授，宜蘭高中官長壽等有豐富的範例檔案	中文書： 各教科書出版社所提供的教學光碟及範例 網站： 錦和高中數學教學網 GeoGebraWiki：任何人均可上傳提供檔案，分享教育資源
E	輸出為網頁	轉換為 JavaSketchPad，但對於某些繪圖指令不支援	GeoGebra 是以 Java 語言設計的，100%可轉換為網頁，可跨平台及作業系統
F	文字工具	可加入簡單文字	可在圖形上加入文字及數學符號（支援 Latex 語法，可顯示 $\sqrt{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ ，根號及分數）

基於以上比較，GeoGebra 在使用上較 GSP 容易操作，而且是免費軟體，學生可自行於網站上下載安裝，值得推廣，故本研究採用 GeoGebra 設計動態幾何呈現的教學內容以進行實驗。

第三節 認知診斷評量

傳統測驗的結果常是一些測驗分數的集合，這些測驗分數反映了學生經過測驗後答對與答錯的題數，這分數可以提供一種可靠且穩定的訊息來將學生按一定的順序排列在某個潛在變量的連續量尺上。在古典測量理論（Classical Test Theory (CTT)）

下，這種潛在變量是真分數。而在試題反應理論 (Item Response Theory (IRT)) 中，這種潛在變量是潛在特質。透過這些訊息函數可以將學生的能力在團體中所佔的相對位置明確地表示出來，但這傳統測驗的評量設計卻無法從受試者的作答反應組型中，顯現出學生是否經熟某種技能的訊息，進而幫助學生或老師更加了解分數所代表的涵義，並進行更有效率的學習 (Sheehan, 1997)。

近幾年來，國內教育界對學習成效的評量，以從單一紙筆測驗逐漸轉變為多元化的評量方式。雖然多元化評量的實施，提供了較廣域的評量內容，較多樣的評量方法，並且創造了較真實與公平的評量情境 (王文卿, 2009)。然而檢視目前所推行的多元評量，卻未能透過評量歷程，提供老師足夠的訊息，用來診斷學習者的學習成敗。因此，Nichols (1994) 即主張將認知科學 (cognitive science) 與心理計量學 (psychometrics) 結合，發展新的診斷評量方法，以幫助教學目標的達成。這種新的診斷評量方法，稱為認知診斷評量 (cognitively diagnostic assessment (CDA))。

Nichols (1994) 認為認知診斷評量的測驗編製必須以心理學所發展的理论為基礎，如此才能編製一份可以反映受試者知識狀態的測驗，進而達成認知診斷評量所追求的目標。因此，他提出編製以心理學為導向的認知診斷測驗，須經歷五個重要的編製歷程，今整理如表 2-2。

表 2-2 發展以心理學為導向的認知診斷測驗之五個編製步驟 (Nichols, 1994)

步驟一	實質理論的建構	實質理論關注於描述知識與技能的模式或理論的發展，這些知識與技能被假定在認知表現時所產生的，而測量的試題必須能描述個體表現時的知識與技能。
步驟二	設計的選擇	在這個步驟，測驗的編製者必須選擇觀察與測量設計，選擇的標準必須以步驟一的實質理論為基礎，所建構的試題必須能預測受試者所可能產生的特定知識與技能。其建構測量的程序是一種測量設計的操作化過程。
步驟三	測驗管理	測驗管理包括測驗內容的每個部分：試題的形式、反應的種類、計分的工具、施測的環境等。
步驟四	反應計分	這個步驟的目標是根據受試者的反應組型，給予某個數值，並將其反應組型與實質理論所建構的策略或錯誤規則相連結。
步驟五	設計修正	設計修正是一個蒐集支持模式或理論的過程，即透過證據的蒐集，可以獲知理論是被支持或被挑戰的。在這個步驟，測驗施

		測的結果將用來修正實質理論的建構。
--	--	-------------------

透過上述五個步驟所編製而成的認知診斷測驗，比傳統測驗的編製歷程更強調須以心理學研究成果的實質理論為編製試題的依據，同時對於試題也都特別經過周詳的設計，以期能從受試者答題反應組型中，推論受試者可能具備的知識結構狀態（涂金堂，2003）。而為了達到認知診斷評量的目標，de la Torre（2009）表示認知診斷模型（cognitive diagnosis models (CDMs)）是可以被使用來判斷受試者在心理計量學模式上的優缺點，且其分數型態也是可以有效測量受試者學習狀態與進步情形。

認知診斷模型是一個以概念為主的診斷策略，診斷受試者是否精熟某些概念，因此，受試者的各項概念表現可簡單地分類成精熟（mastery）與不精熟（non-mastery）的二元計分，利用 y_i 來表示第 i 個受試者對應到 J 個試題的二元精熟分數（binary mastery scores）向量，並假設 y_i 的組型是一個獨立的統計向量，以 $\alpha_{ik} = \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}\}$ 表示，例如： $K=3$ ，而受試者 $\alpha_i = (1, 1, 0)$ ，表示第 i 個受試者精熟第 1 個與第 2 個概念，對第 3 個概念則不夠精熟。所以，每個概念都可以對應到精熟與不精熟，整個反應組型便會有 2^k 個可能情況。下列列出 $K=3$ 時，所有可能的 8 種反應組型。

$(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ 、 $(1, 1, 0)$ 、 $(1, 0, 1)$ 、 $(0, 1, 1)$ 、 $(1, 1, 1)$

因此，為了能夠清楚表示試題和概念之間的關係，許多認知診斷模型在導入模型時，需要建立一個由數值 0 與 1 所組成的 Q 矩陣（Q-matrix），來當作概念影響試題答對率的對照表（Tatsuoka, 1985）。Q 矩陣表示一個題庫中的試題所需的特定概念，如有 J 個試題與 K 個概念，則 Q 矩陣的大小為 $J \times K$ ，Q 矩陣內的元素表示為第 j 個試題是否須具備概念 k ，其定義如下。

$$Q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 個試題需要第 } k \text{ 個概念} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } j=1 \dots J, k=1 \dots K$$

由上可知，每一個試題正好就是 Q 矩陣中的一列，舉例來說，我們假設 Q 矩陣如下：

$$Q = \begin{bmatrix} 1010 \\ 0101 \\ 1000 \\ 0011 \end{bmatrix}$$

我們可以發現試題一需要概念 1 與 3，試題二需要概念 2 與 4，試題三則只需要概念 1，依此類推。而 Q 矩陣通常是由學科專家 (subject matter experts) 所建立的。除了決定每個試題所需要的概念之外，學科專家也必須決定概念的精熟將如何影響受試者作答的機率，答對試題的機率提高了，是否代表需要具備更多精熟的技能？透過不同機率的設計就衍生出不同的認知診斷模型了。

認知診斷模型可分為潛在特質模型 (latent trait model) 和潛在分類模型 (latent class model) 兩大類。其中，比較具有代表性的是以 Fischer (1973) 的線性邏輯潛在特質模型 (Linear Logistic Trait Model (LLTM)) 為基礎的潛在特質模型，和以 Tatsuoka (1983) 的規則空間模型 (Rule Space Model (RSM)) 為基礎的潛在分類模型。兩大類模型中，潛在分類模型主要用來分析受試者的作答過程，進而探討受試者的潛在知識結構，對於觀察受試者具有何種潛在能力、認知缺陷，或在測驗中的典型錯誤分類最具特色。

近幾年來，潛在分類模型以發展出相當多的模型，包括規則空間模型、統一模型 (unified model)、融合模型 (fusion model; Hartz, 2002; Hartz, Roussos, & Stout, 2002)、DINA 模型、NIDA 模型 (Noisy Input, Deterministic “and” Gate model; Maris, 1999) 以及 G-DINA 模型……等。其中，DINA 模型採用了較簡單的模型定義，僅涉及「粗心」和「猜測」兩參數，為許多認知診斷與評估方法的基礎 (Doignon & Falgagne, 1999; Tatsuoka, 1985)；而 G-DINA 模型為 DINA 模型的一般化模型，且在樣本數較小時，G-DINA 模型較 DINA 模型更確實完成估計 (王文卿, 2009; 陳亭宇, 2010)。因此，本研究將以 G-DINA 模型為基礎，診斷受試者經過實驗教學後對於知識概念的精熟程度。為能了解 G-DINA 模型的內涵，以下將透過 DINA 模型的介紹來探討 G-DINA 模型。

一、DINA 模型

DINA 模型創建與流行開始於 Junker & Sijtsma (2001) 的研究，適用於二元計分項目來進行認知診斷評量的測驗。此模型假設受試者如具備解答該試題所需的認知屬性，即能答對該試題，但答對試題的機率又會受到粗心 (slip) 和猜測 (guess) 兩個試題參數的影響。因此，我們可以透過公式

$\eta_{ij} = \prod_{k:Q_{jk}=1} \alpha_{ik} = \prod_{k=1}^K \alpha_{ik}^{Q_{jk}}$ 代表受試者是否具備答對某試題所需要的概念，而 DINA 模

型的公式如下。

$$P(Y_{ij} = 1 | \eta_{ij} = 1) = (1 - s_j)^{\eta_{ij}} (g_j)^{(1 - \eta_{ij})}$$

其中，

$$\eta_{ij} = \prod_{k:Q_{jk}=1} \alpha_{ik} = \prod_{k=1}^K \alpha_{ik}^{Q_{jk}}$$

$$s_j = P(Y_{ij} = 0 | \eta_{ij} = 1)$$

$$g_j = P(Y_{ij} = 1 | \eta_{ij} = 0)$$

其中，

Y_{ij} ：第 i 個受試者在第 j 題試題的反應組型。

s_j ：受試者具備回答第 j 題試題所需要的認知屬性，但卻因粗心而答錯該題的機率。

g_j ：受試者不具備回答第 j 題試題所需要的認知屬性，但卻因猜測而答對該題的機率。

α_{ik} ：第 i 個受試者在第 k 個認知屬性的有無，如具備該屬性其值為 1，若無則為 0。

η_{ij} ：受試者是否具備答對第 j 題試題所需要的概念，如全部具備其值為 1，反之，若受試者缺少一個答對第 j 題試題所需要的概念，其值為 0。

從 DINA 模型的定義中可知該模型將受試者分為兩類，一類是掌握了答對試題所具備的全部認知屬性，另一類則是缺少了某個必要的認知屬性，而使其答對的機率降低，即使答對也會被歸類於猜測的機率。

假設數值 $\eta_{ij} = 1$ ，表示受試者 i 已經具備試題 j 的各個認知屬性；數值 $\eta_{ij} = 0$ ，表示受試者 i 至少還缺少答對試題 j 的某一個認知屬性。但在現實情況下，受試者 i 具備試題 j 的認知屬性，卻可能因為粗心寫錯而降低 $s_j = P(Y_{ij} = 0 | \eta_{ij} = 1)$ ，又可能因為猜測答對而提升 $g_j = P(Y_{ij} = 1 | \eta_{ij} = 0)$ 。因此，在理想狀態下，粗心和猜測值皆為 0，代表沒有學生是粗心寫錯或猜測答對的。如圖 2-5 所示。

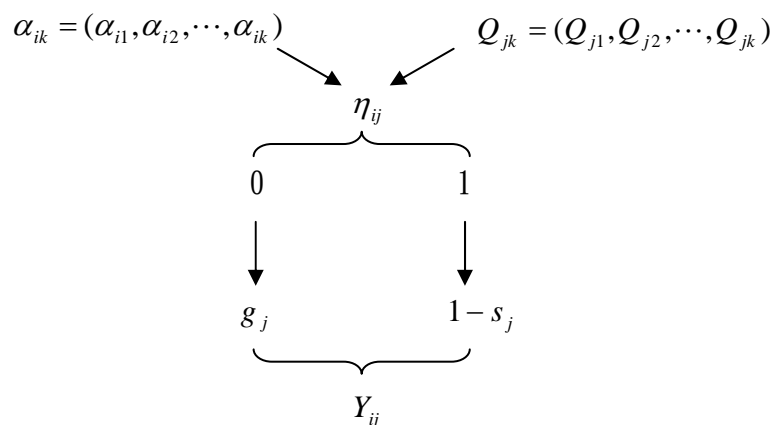


圖 2-5 受試者對試題 j 的反應程序圖 (de la Torre, 2009)

綜合以上所述，DINA 模型是一個非常簡單且容易解釋的模型，因為它對每個試題只考慮兩個參數（粗心機率 s_j 、猜測機率 g_j ），所以它有非常好的模型適配 (de la Torre & Douglas, 2004)，也被廣泛地應用在測驗的許多方面。

二、G-DINA 模型

G-DINA 模型為 DINA 模型的一般化模型，由 de la Torre (2008) 提出，模型如下方程式所示。

$$P(\alpha_{ij}^*) = \delta_{j0} + \sum_{k=1}^{K_j^*} \delta_{jk} \alpha_{ik} + \sum_{k' > k}^{K_j^*} \sum_{k=1}^{K_j^*-1} \delta_{jkk'} \alpha_{ik} \alpha_{ik'} + \delta_{j12 \dots K_j^*} \prod_{k=1}^{K_j^*} \alpha_{ik}$$

其中，

δ_{j0} ：第 j 題的截距。

δ_{jk} ：對 α_k 的主要影響。

$\delta_{jkk'}$ ：對 α_k 與 $\alpha_{k'}$ 的交互影響。

$\delta_{j12 \dots K_j^*}$ ：由 α_k 到 $\alpha_{k'}$ 的交互影響。

當 δ_{j0} 與 $\delta_{j12 \dots K_j^*}$ 不為 0，而其他 δ_{jk} 與 $\delta_{jkk'}$ 均為 0 時，就是 DINA 模型。由此可知，DINA 模型是 G-DINA 模型的特例，而 G-DINA 模型針對試題的認知屬性間彼此交互影響做了詳盡的估計。

de la Torre 對於 G-DINA 模型的程式碼是使用 Ox (Doornik, 2003) 程式編寫的，該程式在 5.1 版提供可以編寫程式碼與執行環境的 OxEdit 編輯器，使用上更為便利。在程式執行後又提供 G-DINA 的參數估計與標準誤，還有認知屬性的後驗分配與受試者分配情形。其執行畫面如圖 2-6。

```
OxEdit - [Gdina_1110.ox]
File Edit Search View Modules Window Help
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#include <oxfloat.h>

decl N=9, J=8, K=6;
decl data={"data_343.dat"};
decl qmatrix={"q_matrix.txt"};
decl emp_bayes=1, analysis=2;
decl crit=0.001, maxit=999;

decl Q, X;
decl n1, r1;
decl post, alpha, est, se2;
decl prior, lprior, eta;
decl it, maxabs;
decl ml, BIC, AIC;
decl locmax, max_p, m_obs, m_exp;
decl se2_obs, se2_exp;
decl Nfit;
decl et;

pattern() {
  alpha=<>;
  for(decl k=1; k<=K; k++) {
    decl tmp=<>;
    decl base=zeros(2^(K-k), 1) | ones(2^(K-k), 1);
    for(decl l=0; l<2^(k-1); l++) {
      tmp=tmp | base;
    }
  }
}
```

圖 2-6 Ox 程式執行 G-DINA 模型畫面

第四節 二次函數相關研究

在數學教育中，函數是台灣學生從國中到大學都必須要學習的數學概念（謝豐瑞、陳材河，1997），國外亦有許多學者（Janvier, 1987；Kaput, 1985；Schoenfeld, 1987；Yerushalmy, 1992）針對學生在二次函數所學各種表徵以及相互之間的轉換概念進行研究。函數概念的建立，最早在國小階段就有初步的認識，國中階段對於相關名詞和定義給予完備的介紹。在現行的九年一貫正式綱要課程中，學生在學習線性函數及求解二次方程式的問題後，才能進行二次函數的學習。以下整理有關二次函數的教材地位分析，如圖 2-7。

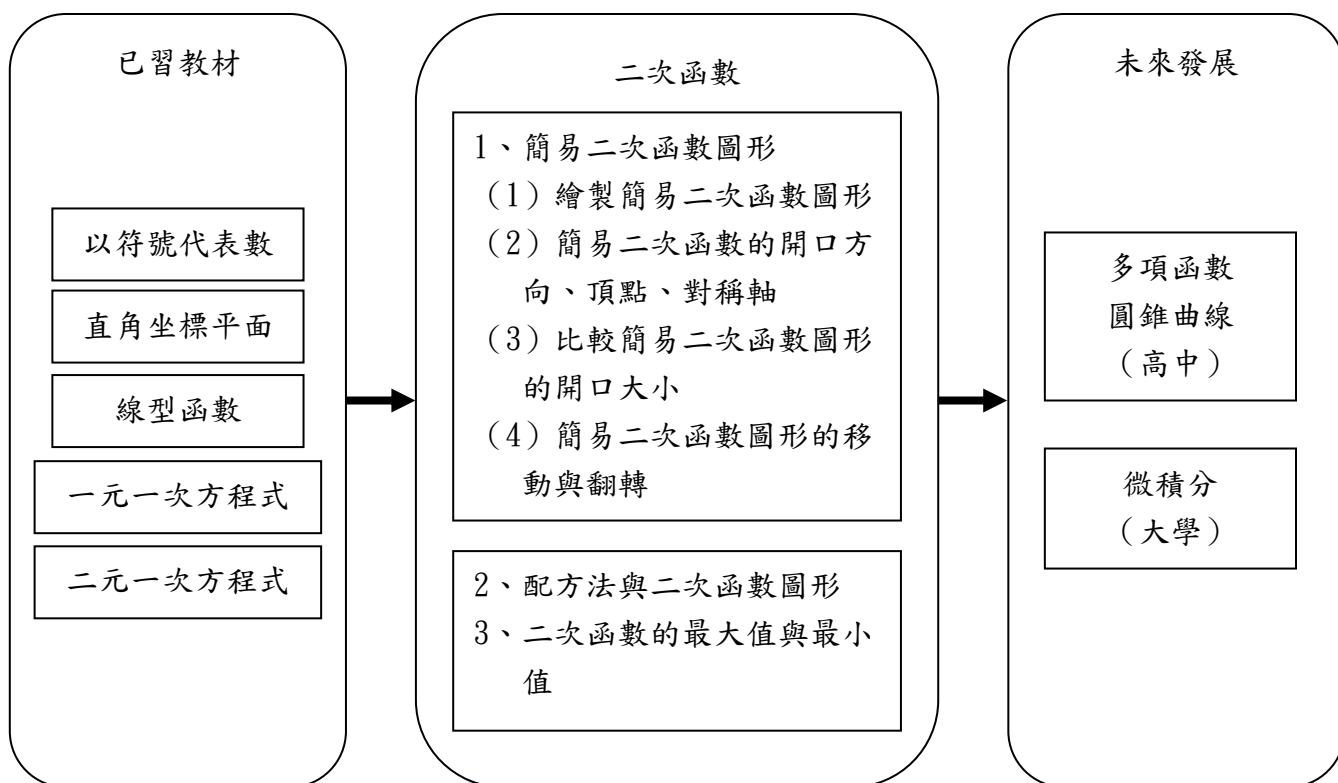


圖 2-7 二次函數課程地位圖

根據這樣的教學順序歷程，Matz (1982) 認為大部分代數的錯誤來自於學習者對於該問題特徵膚淺的先備知識，Zaslavsky (1997) 認為先學習線型函數與二次方程式後，再學習二次函數的教學順序會妨礙二次函數的學習。

由 Zaslavsky (1997) 的研究發現學生在學習二次函數時，最常發生阻礙概念發展的障礙有：

1、以視覺上所看到的圖形解釋幾何圖形

學生在學習二次函數時，只考慮到函數中可以看到圖形部份，而未考慮到所呈現的圖形只是整個函數圖形的一部份；同時認為二次函數的圖形有兩條垂直的漸近線，但事實上沒有漸近線的存在，所有 x 值都可存在於拋物線中。

2、二次函數與二次方程式關係的錯誤類推

因為學生先學習二次方程式再學習二次函數，已至於混淆兩者的關係，例如 $y = x^2 - 2x + 3$ 與 $y = 3x^2 - 6x + 9$ 兩個函數中，因函數各項係數成倍數關係，所以學生容易視兩個函數為相同函數。

3、二次函數與線型函數關係的錯誤類推

例如線型函數中任三點皆為共線，學生將之推廣到二次函數的拋物線中，認為拋物線可經過三個共線的點，因而導致以兩點來估計二次函數的斜率進而計算函數的參數。

4、不了解二次函數的代數形式可能會轉變

學生在學習二次函數的過程中，代數與幾何圖形表徵之間成功的轉換，將是促進函數概念有效學習的策略。

其他有關函數概念學習困難方面的研究，Dreyfus & Eisenberg (1982) 指出學生通常不了解變數的概念和函數符號 $f(x)$ 。而顏啟麟、羅昭強 (1993) 指出造成函數學習困難的原因之一，是函數概念把幾何和代數兩個似乎不相關的數學概念連結在一起。因此，若能將視覺化的函數圖形表徵和代數符號表徵作緊密的連結，將可以使學生對函數的概念有更深入的了解。



第三章 研究方法

本章分為五節說明研究的方法與步驟，第一節－研究流程，第二節－研究對象，第三節－研究設計，第四節－研究工具，第五節－資料分析方法。

第一節 研究流程

本研究流程如圖 3-1 所示：

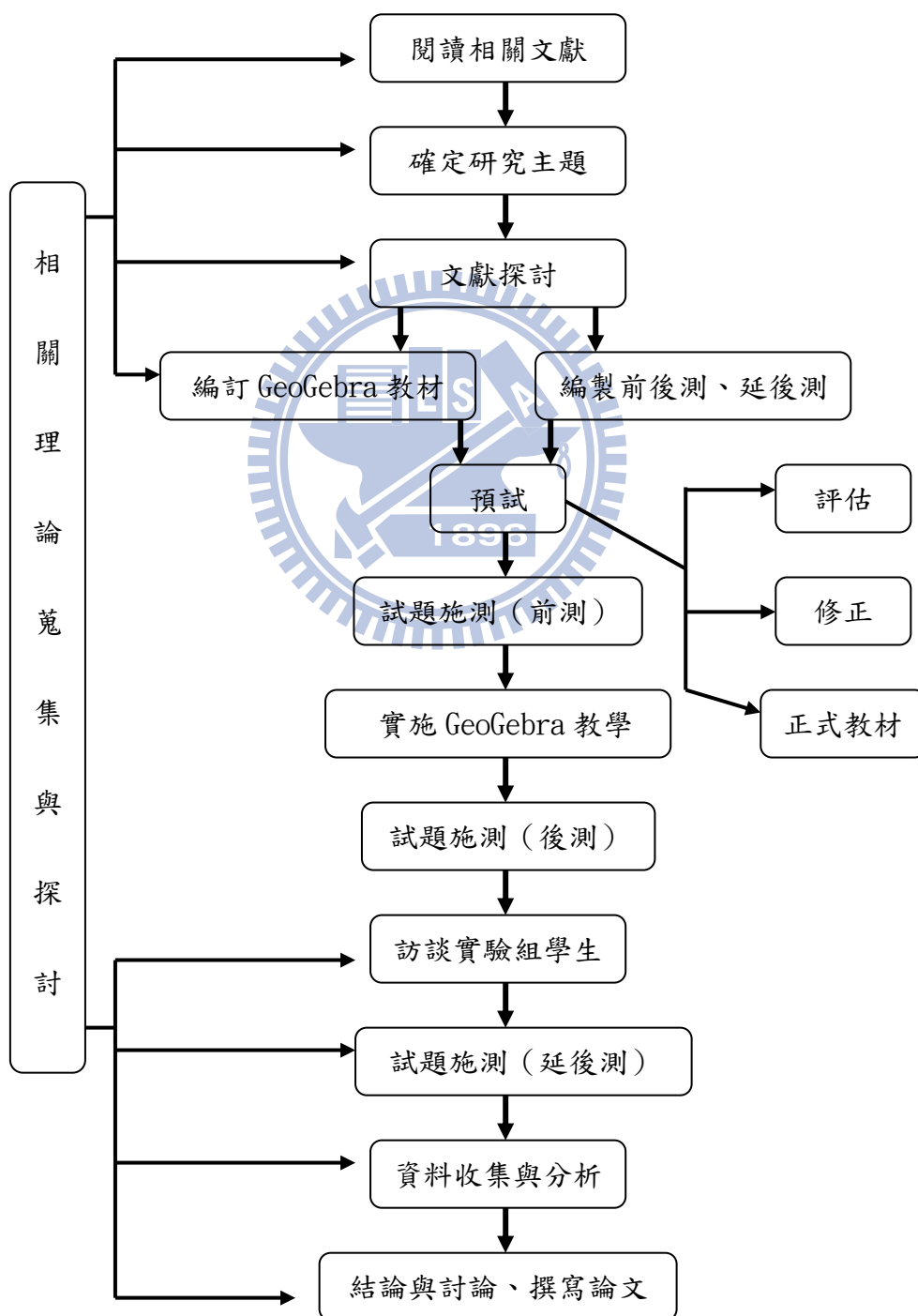


圖 3-1 研究流程圖

第二節 研究對象

本研究的教學者為本文執筆者，有 5 年的國中數學教學經驗，受測學生為桃園市區某國中學生，該校共有 108 班（七年級 34 班、八年級 39 班、九年級 35 班），屬於桃園縣大型學校，其學生來源多數為跨區就讀，除各年級已成立美術班與體育班各一班，其餘學生分班方式皆依入學時新生能力測驗成績採 S 型分配常態編班。而參與本研究的學生分為預試樣本及正式施測樣本。

一、預試樣本：

為使編制的試題在本研究中更具客觀性及準確性，於該校以方便抽樣挑選三個常態編班的九年級學生共 97 人為預試試卷施測對象，以作為正式試卷的參考、準備。

二、正式施測樣本：

為求適用於較一般的情形，本研究的正式施測樣本挑選該校常態分班中的三個班級參與實驗，以下採甲、乙、丙班作為區分。

甲班 32 人為實驗組，乙班 31 人、丙班 32 人為控制組，三班皆非研究者任教的班級，故為避免學生的新奇效應影響研究結果，研究者提前到三班代課一週，進行校內進度課程教學。另外為了解學生的起點行為，將比較甲、乙、丙三班 99 學年度上學期三次段考數學平均成績，且考慮到數學成績較高的班級安排為實驗組可能造成實驗結果的影響因素，本研究將數學平均成績較低的甲班安排為實驗組，乙、丙兩班安排為控制組，如下表 3-1。

表 3-1 甲乙丙三組三次段考成績平均數與標準差摘要表

	個數	平均數	標準差
甲（實驗組）	32	63.84	20.886
乙（控制組）	31	67.48	23.422
丙（控制組）	32	68.52	19.598

表 3-2 甲乙丙三組三次段考平均成績單因子變異數分析檢定摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	384.744	2	192.372	.423	.657
組內	41887.203	92	455.296		
總和	42271.947	94			

由表 3-2 顯示，三組的段考平均成績單因子變異數分析檢定顯著性 $P=0.657 > 0.05$ ，表示三組受試者在上學期三次段考平均成績無顯著差異，視為三組受試者數學先備能力相同。而為了觀察不同層次學生的表現，將實驗組與控制組的三次段考平均成績加以分群，得到高、中、低三個學業能力群組，各班分別對三個學業能力群組進行單因子變異數分析檢定，實驗組甲、控制組乙與丙之高、中、低學業能力分組段考平均成績顯著性皆為 $P=0.000 < 0.05$ ，顯示實驗組與控制組之高、中、低學業能力分組之間的段考平均成績均達顯著差異。在經過 Scheffe 多重比較，得知差異在高、中、高、低，中、低之間都有存在，故此分類方式確實可做為實驗組與控制組配對比較的參考。以下列出三組之學業能力分組的單因子變異數分析檢定分析摘要表與多重比較摘要表，如表 3-3。

表 3-3 三組高中低能力分組段考平均成績單因子變異數分析檢定摘要表

		平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
甲（實驗組）	組間	10007.589	2	5003.795	76.428	.000
	組內	1898.653	29	65.471		
	總和	11906.242	31			
乙（控制組）	組間	13719.215	2	6859.607	70.136	.000
	組內	2738.527	28	97.805		
	總和	16457.742	30			
丙（控制組）	組間	10287.012	2	5143.506	46.092	.000
	組內	3236.206	29	111.593		
	總和	13523.219	31			

表 3-4 三組高中低能力分組段考平均成績 Scheffe 多重比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異 (I-J)	標準誤	顯著性	95% 信賴區間	
						下界	上界
甲（實驗組）	高能力	中能力	16.5278*	3.4570	.000	7.609	25.446
		低能力	46.3333*	3.8143	.000	36.493	56.173
乙（控制組）	高能力	中能力	15.8583*	4.3297	.004	4.667	27.049
		低能力	56.0625*	4.9448	.000	43.282	68.843
丙（控制組）	高能力	中能力	21.0159*	4.5133	.000	9.372	32.659
		低能力	47.6667*	4.9798	.000	34.820	60.514

*. 平均差異在 0.05 水準是顯著的。

第三節 研究設計

本節將分別說明研究法的選擇、研究架構、研究變項與假設及實驗流程。

一、研究法的選擇

本研究因考量到無法隨機分派受試者到各個研究班級，又受限於時間、電腦教室的排課使用，且最不影響到實驗班級的教學進度，故以方便抽樣挑選八年級三個班級的排課使用，且最不影響到實驗班級的教學進度，故以方便抽樣挑選八年級三個班級，以下用甲、乙、丙標記做區別，一班為實驗組，兩班為控制組，採用不等組前後測設計的準實驗研究法，實驗設計分組表如下表 3-5。

表 3-5 實驗設計分組表

教學設計	班級	學業成就			合計人數
		高能力	中能力	低能力	
實驗組—GeoGebra	甲班	9	14	9	32
控制組—簡報教學	乙班	8	15	8	31
控制組—傳統教學	丙班	9	14	9	32
	合計人數	26	43	26	95

對內在效度而言，本研究有實驗組、控制組三組可供比較，學習成就皆施以前測、後測，可了解三組的條件是否整齊。若兩組的前測分數一致，可說成熟、測驗與工具等主要的影響力皆已受到控制，實驗處理發生影響即可肯定。

二、研究架構

本研究根據研究動機與目的，規劃之研究架構如圖 3-2 所示：

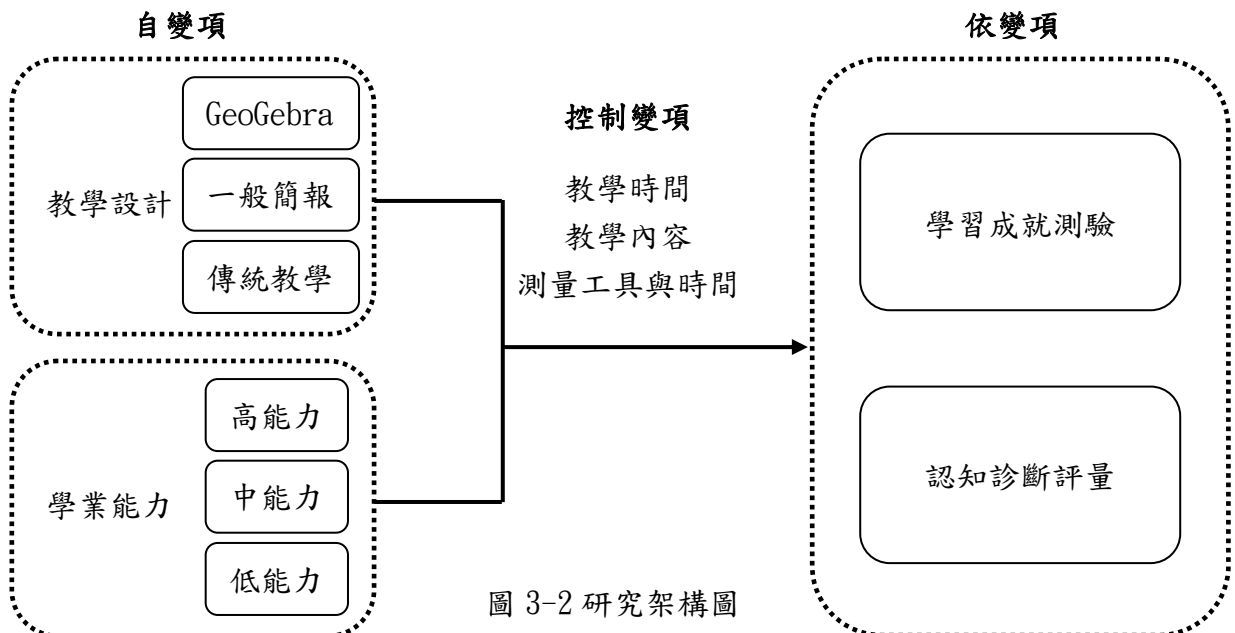


圖 3-2 研究架構圖

三、研究變項

(一) 控制變項：

1、起點行為

由受測學生 99 學年度上學期三次段考數學平均成績之單因子變異數分析檢定可知其數學能力無顯著差異，且簡易二次函數的圖形相關內容非受測學生該學期進度內課程，可排除現今學生課外超前補習的效應，故起點行相同。

2、授課教師

本研究三組受試樣本班級之授課教師皆為研究者一人，皆非原任課教師，故研究者提前一週到三組代課，減低學生的新奇感。而授課教師具有多年教學經驗，能掌握課堂教學進度及時間。

3、授課時數

均為兩堂課，每堂課 45 分鐘，各組皆在一天之內完成實驗。

4、教材內容

三組上課的主題單元皆為國中三年級第六冊第一章第一節簡易二次函數圖形課程。

5、測量工具

三組在教學實驗後所做的函數學習成就測驗與認知診斷評量，其題目內容、施測時間、給分標準皆相同。

(二) 自變項：

1、教材設計方式

共有 GeoGebra 動態幾何輔助教學、一般圖文簡報教學與一般傳統課堂教學三種教學模式。

GeoGebra 輔助教學：考慮多媒體教材設計原則，使教學訊息有可選擇性、隨意性或預先安排地呈現，並保留教學訊息的連續動態性供學生探索觀察，且可由學生自行操作教材內容，增加互動性。

一般圖文簡報教學：考慮部分多媒體教材設計原則，但每張投影片內容多採一次呈現或循序呈現教材內容方式，利用滑鼠及口頭說明指引學生瀏覽。

一般傳統課堂教學：以板書、掛圖呈現教材內容，由教師解說、學生聽講的傳統解說式教學進行課程。

2、學業能力分組

將各組受測學生分成低學業能力、中學業能力及高學業能力三組，依 99 學年度上學期三次段考數學平均成績為分組依據，分數由低到高排列，取前 27% 作為低學業能力組，後 27% 為高學業能力組，其餘為中學業能力組，人數如表 3-5，各組之間的單因子變異數分析檢定摘要表如下表 3-6。

表 3-6 高中低三組段考平均成績單因子變異數分析檢定摘要表

		平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
高能力	組間	46.963	2	23.481	1.103	.349
	組內	489.653	23	21.289		
	總和	536.615	25			
中能力	組間	562.868	2	281.434	2.109	.249
	組內	1735.737	40	133.393		
	總和	2298.605	42			
低能力	組間	335.667	2	167.833	.683	.515
	組內	5647.997	23	245.565		
	總和	5983.663	25			

從以上表格可知，各班高、中、低三個能力分組的段考成績顯著性皆大於 0.05，表示各組高、中、低三組平均成績均無顯著差異，在數學起點行為上的比較可視為情況相同。

3、授課環境

隨著教材設計方式不同，實驗組將在該國中的電腦教室進行實驗教學，電腦教室配備有電腦 40 台，均可正常使用，超過學生人數，故每位學生都能自己操作一台電腦，其作業系統皆為 Windows Xp。

另外兩組控制組班級都在原班教室上課，因教育部提倡教室 e 化，實施「班班有單槍」政策，故各班級教室內皆有單槍、大螢幕投影設備可供教師課堂授課使用。

(三) 依變項：

1、學習成就測驗（後測與延後測）

前測成績顯示學生對教學內容尚未學習過，再經過不同教材設計的實驗教學後，觀察三組學生的學習成就測驗（後測與延後測）成績來評估其學習成效。

2、認知診斷評量

經過學習後，學生對於學習成就測驗中隱含的六項認知技能之精熟程度。

四、實驗流程

本研究進行教學實驗時間為受試學生八年級下學期期初（2月），在實驗進行前對受測學生作簡易二次函數課程內容的前測，以了解學生的先備知識。

另進行實驗教學前，皆告知所有受測學生此課程是作為多媒體教學研究之實驗課程，並先行講解課程流程，請受測學生認真聽講及作答，上課、測驗成績結果都會做為任課教師平時成績的參考，藉此避免受測學生得知自己為實驗組或控制組，而改進其學習表現效果產生霍桑效應。

全部實驗課程進行兩節課，每節課為45分鐘，每組實驗課程皆在同一天內完成，且實驗教材內容分成四個主題，每節課進行兩個主題的教學，在每節課結束前實施該階段內容之學習成就測驗（後測），課程流程如圖3-3所示。

第一節



第二節

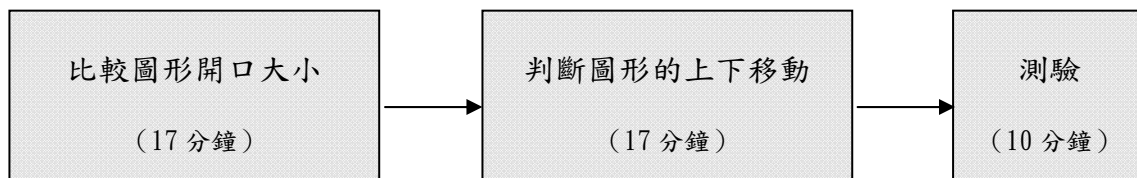


圖 3-3 課程流程圖

而本研究亦想探討 GeoGebra 動態幾何輔助教學對學習者是否能順利儲存新知識於長期記憶區，故在後測結束四周後，三組受試樣本皆未再接觸「簡易二次函

數圖形」之相關概念的情況下，以後測之題型稍做修改，再對三組受試樣本施以延後測，觀察知識概念保留的狀況。

第四節 研究工具

一、實驗教材製作

本研究將以國中數學「簡易二次函數圖形」為教材設計範圍，此單元為銜接代數（文字表徵）與幾何（圖像表徵）的內容，函數在國高中數學課程中又具有舉足輕重的地位，期盼透過本研究可以協助學生正確、有效地認識函數概念，為將來的學習穩固基礎。課程內容分為四個部份教學，將其能力指標、活動目標整理成表 3-7。

表 3-7 教學主題與內容目標

主題	能力指標與分年細目	教學活動目標
第一部分： 繪製簡易二次函數圖形	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形 9-a-01 能理解二次函數的意義 9-a-02 能描繪二次函數的圖形	能以描點方式繪製 $y = ax^2$ 的圖形，了解其圖形為拋物線
第二部分： 觀察簡易二次函數圖形開口方向、頂點、對稱軸	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形 9-a-02 能描繪二次函數的圖形	察覺形如 $y = ax^2$ 二次函數圖形的各種特性（開口方向、最高點、最低點與對稱軸）
第三部分： 比較簡易二次函數圖形的開口大小	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形 9-a-02 能描繪二次函數的圖形	能透過 a 的不同，發現 $y = ax^2$ 圖形的改變
第四部分： 簡易二次函數圖形的上下移動	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形 9-a-02 能描繪二次函數的圖形 9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值	能描繪形如 $y = ax^2 + c$ 的二次函數圖形，並了解其圖形可由 $y = ax^2$ 的圖形上下移動而得

本研究教材內容實驗組設計以動態幾何軟體 GeoGebra 為教學平台，融合多媒體設計原則，以是否具有動態呈現幾何圖形的特性作為與對照組的差異。對照組中的一般簡報教學則以具有普及性的 PowerPoint 簡報軟體來呈現教材內容；而傳統教學組由教師以板書講解與掛圖為授課方式。本研究之教材內容及教材分析請見附錄一、附錄二、附錄三。

二、實驗問卷製作

本研究之實驗問卷為函數學習成就測驗卷，考慮教學目標與認知診斷評量方式編製而成，分別說明如下。

(一) 函數學習成就測驗

為了解本研究採用之三種不同教學模式對受試樣本在教學實驗前後對教材的學習成效，施以函數學習成就測驗（前、後測與延後測）。前測試卷是在了解受試學生對實驗教材內容的熟悉度，後測試卷是作為受試學生在實驗教學課程後對實驗內容的學習程度，延後測是在了解受試學生接受實驗教學課程後對數學概念、技能的保留程度。三份試卷皆依教材內容設計，題型內容皆相同，但在後測與延後測題目的試題數據或答題選項上將稍做修改。

1、內容效度

本測驗的編製是以國中九年級數學課程「簡易二次函數圖形」概念為依據，列出本單元的四個部分主題概念，第一部分—繪製簡易二次函數圖形，第二部分—簡易二次函數圖形的開口、頂點、對稱軸，第三部分—簡易二次函數圖形的開口大小，第四部分—簡易二次函數圖形的上下移動。並由國內研究發現美國國家教育進展評估（NAEP）的數學能力評量架構在解釋上與九年一貫數學能力指標相似（洪瑞鎂，2001），九年一貫將數學能力分為基礎、擴展與高級三種層次，對應到美國國家教育進展評估協會提出的概念理解、過程知識、解題能力三種數學能力。將四個部分主題概念與學生期望表現製成雙項細目表，如表 3-8，然後再由雙項細目表開始預試試卷、函數學習成就測驗前測與後測的命題，作為內容效度的依據。

2、專家效度

試題設計時，先參考 90 年到 99 年基測試題中二次函數的相關題型

，後又收集國內二次函數相關研究中提出的題目類型，最後選定 14 題，經由三位在國中數學領域任教年資 5 到 10 年的教師審閱，聽其建議作部分修改，故本測驗具有基本的專家效度。

3、信度

將回收的 97 份預試卷作信度分析，得到內部一致性信度 Cronbach's Alpha 值為 0.859，具有良好信度值。

4、難度及鑑別度

試題難度分析採高分組及低分組通過率的平均值，數值介於 0~1 之間，其中將預試成績由低排至高，總人數的前 27% 為低分組，總人數的後 27% 為高分組。而難度高於 0.8 為太簡單，低於 0.2 為太難，0.2~0.8 之間為適當難度（王文科、王智弘，2009）。

鑑別度分析以每一試題中，高分組的答對人數百分比減去低分組答對人數百分比，其值一般介於 -1~1 之間，若數值為負為不具鑑別度，應刪去該題，數值在 0.2 以上具有參考價值，一般來說鑑別度達 0.3 或較高一點，即可被接受（王文科、王智弘，2009）。

在古典測驗理論下，編製成就測驗的方法，多為考慮試題的內容和特徵（如：難度和鑑別度）當成是選擇試題的依據，例如：先挑出鑑別度較高（大於 0.25）的試題，再依據測驗目的和考生能力挑出難度較適中的題目（郭生玉，1990）。故本研究施測題目選擇以先選出鑑別度較高（0.25~0.4 以上）的題目，再從中選出難度指數較適合（0.2~0.8 之間）的題目依實際教學應用再作部分修改，最後依實驗設計分析教材內容，挑選出較適合的題目共 9 題，作為正式實驗的函數學習成就測驗前測卷及後測卷的修改樣本。各階段主題單元教學後的施測試題詳細內容見附錄二，難度、鑑別度簡述如下表 3-9。本研究之正式測驗卷如附錄四。

表 3-8 施測試題雙向細目表

	基礎層次 (概念理解)	擴展層次 (過程知識)	高級層次 (解題能力)	題數合計
第一部分	1			1
第二部分	2、6	3		3
第三部分	4	5		2
第四部分		7、8	9	3
題數合計	4	4	1	9

表 3-9 施測試題難度、鑑別度摘要表

題號	難度	鑑別度	題號	難度	鑑別度
1	0.8	0.5	6	0.63	0.78
2	0.41	0.56	7	0.69	0.56
3	0.63	0.78	8	0.63	0.67
4	0.47	0.67	9	0.59	0.67
5	0.66	0.67			

5、給分標準

施測內容除第一題為繪圖題兩分外，其餘各題皆為選擇題，每題一分。繪圖題給分標準說明如下表 3-10。

表 3-10 繪圖題給分標準

給分	標準
2	描點完全正確，各點以圓滑曲線正確連接，且曲線超出標示的點
1	部分描點正確或未以圓滑曲線連接或曲線停留在點上
0	描點不正確或各點以線段連接或連接錯誤

(二) 認知診斷評量技能表及 Q 矩陣

根據簡易二次函數課程的教學目標，本研究設定 6 項欲評量的認知技能。在修改預試題目時，除了考慮每道試題至少必須包含一個認知技能，為了更能辨識出學生是否熟練某項認知技能，亦須謹慎評估各個認知技能

間的相似程度與難易度，以進行良好的認知診斷。

正式施測試題共 9 題，第一題為簡易二次函數圖形的繪製，第二到第九題為二元計分的選擇題，為配合 G-DINA 模型的二元計分特性，故僅針對第二到第九題施以認知診斷評量之估計。今將本研究設定之 6 項認知技能與正式施測試題之 Q 矩陣簡述如下表 3-11、表 3-12。

表 3-11 簡易二次函數圖形的認知操作

認知技能	說明
1	能從 x^2 項係數之正負判斷二次函數圖形開口方向
2	知道二次函數圖形之頂點
3	知道二次函數圖形之對稱軸
4	了解二次函數圖形的開口大小與 x^2 項係數絕對值之間關聯
5	能由二次函數之頂點推得 $y = ax^2 + k$
6	能將二次函數圖形之頂點經上下平移得到 $y = ax^2 + k$ 的圖形

表 3-12 函數學習成就測驗之 Q 矩陣

試題編號	認知技能					
	k1	k2	k3	k4	k5	k6
2	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	0	0	0	0
7	1	1	0	0	0	0
8	1	1	0	1	1	0
9	1	1	0	1	1	1

第五節 資料分析方法

本研究採用 Microsoft Excel 2003、統計軟體 SPSS 17.0 版與矩陣運算軟體 Ox 5.1 版作為資料分析的工具。須分析的類型分成學習成效差異與認知診斷評量兩大類，收集到的資料有受測者三次段考平均成績，二次函數學習成就測驗前、後測與延後測成績，以及認知診斷評量訊息。

(一) 學習成效差異

考慮到本研究之受測者依教學模式不同共分三組，而分析時，僅以「教學設計」為自變項，「後測成績」與「延後測成績」分別為依變項，故採用單因子變異數分析（one-way ANOVA）與 Scheffe 多重比較來檢驗三組之間的差異性。其統計檢定顯著水準 α 值設為 0.05。

（二）認知診斷評量

檢驗認知診斷訊息須利用認知診斷模型來進行估計，須輸入的資料包含學生受測的作答反應組型與認知技能之 Q 矩陣，兩種資料皆以矩陣呈現，因此本研究採用矩陣計算軟體 Ox 來分析認知診斷訊息。

Ox 的核心是一個有效率的矩陣語言，矩陣可以直接表示及運算，如：矩陣相乘、反矩陣計算。其特色為運算速度快，具有可延伸的資料庫及設計良好的語法與編輯器，亦可讀寫許多不同的資料格式，包含 EXCEL 檔和 OXMETRIC 檔。而本研究利用此軟體，並以 de la Torre (2008, 2010) 撰寫之 G-DINA 模型程式，估計作答反應組型內之各項試題參數及受試者的知識狀態。



第四章 研究研果與討論

本章將收集實驗教學後受試者的測驗資料並進行分析、討論，以探討本研究使用的「GeoGebra 動態幾何輔助教學」對國中數學「簡易二次函數圖形」的教學是否有所助益。本章共分三節，第一節為施測樣本的敘述統計資料，第二節為認知診斷評量訊息，第三節為研究結果摘要。

第一節 施測樣本的敘述統計資料與檢定分析

一、不同教材設計下各組受試樣本敘述統計資料與檢定分析

首先觀察各組受試樣本在上學期的三次段考平均成績、教學實驗前的前測成績與教學實驗後的後測成績（包含基礎、擴展與高級層次）與延後測成績等相關數據的平均數與標準差，整理如表 4-1。由表 4-1 的數據可以觀察下列幾個現象：

- 1、實驗組甲之段考平均成績低於控制組乙、丙，但經過單因子變異數分析檢定分析後，三組之間並無顯著差異，因此視為程度相當。
- 2、三組在實驗前測成績均低於 3 分（總分 10 分），且標準差皆偏高，可說明受試者在進行教學實驗前尚未學習本研究設定之課程內容。
- 3、實驗組甲（GeoGebra）在後測表現上高出控制組乙（簡報教學）、控制組丙（傳統教學）1 分以上。
- 4、後測中，實驗組甲（GeoGebra）在各層次題型的表現只有基礎層次落後控制組丙（傳統教學）。
- 5、實驗組甲之延後測成績仍高於控制組乙、丙之後測成績。

表 4-1 各組教學實驗相關敘述統計資料摘要總表

	分組	人數	平均數	標準差
上學期段考 平均成績	甲 (GeoGebra)	32	63.84	20.886
	乙 (簡報教學)	31	67.48	23.422
	丙 (傳統教學)	32	68.52	19.598
前測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	32	2.72	1.397
	乙 (簡報教學)	31	2.52	1.568
	丙 (傳統教學)	32	2.81	1.401
後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	32	7.28	1.871
	乙 (簡報教學)	31	6.19	2.688
	丙 (傳統教學)	32	6.28	2.581
基礎層次成績 (後測, 共 5 分)	甲 (GeoGebra)	32	2.63	.976
	乙 (簡報教學)	31	2.03	1.278
	丙 (傳統教學)	32	3.09	1.400
擴展層次成績 (後測, 共 4 分)	甲 (GeoGebra)	32	2.88	.907
	乙 (簡報教學)	31	2.55	1.261
	丙 (傳統教學)	32	2.59	1.214
高級層次成績 (後測, 共 1 分)	甲 (GeoGebra)	32	.75	.440
	乙 (簡報教學)	31	.74	.445
	丙 (傳統教學)	32	.59	.499
延後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	32	6.41	2.448
	乙 (簡報教學)	31	3.77	2.291
	丙 (傳統教學)	32	5.31	2.558

將三組前測成績做單因子變異數分析與 Scheffe 多重比較，摘要表如表 4-2、表 4-3，觀察發現各組之間前測成績皆無顯著差異 ($F=0.34$, $P=0.713 > 0.05$)，故以下教學成效之檢定將採用單因子變異數分析檢定，以了解不同教材設計是否會對學習成效造成影響。將依變項設定為學習成效，自變項設定為教材設計，進行單因子變異數分析檢定，結果摘要如下表 4-4。

表 4-2 三組前測成績之單因子變異數分析檢定摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	1.441	2	.720	.340	.713
組內	195.086	92	2.12		
總和	196.526	94			

表 4-3 三組前測成績之 Scheffe 多重比較摘要表

組別	(I) 組別	平均差異 (I-J)	標準誤	顯著性	95% 信賴區間	
					下界	上界
甲	乙	.203	.367	.859	-7.1	1.12
	丙	-.094	.364	.967	-1	.81

表 4-4 各組對不同教材設計在學習成效（後測）上的單因子變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	23.213	2	11.607	2.008	.14
組內	531.776	92	5.78		
總和	554.989	94			

由上表 4-4 觀察可知，在後測之教學成效表現上，實驗組甲與控制組乙、丙沒有顯著差異（ $F=2.008$ ， $P=0.14 > 0.05$ ）。

本研究為更深入了解 GeoGebra 動態呈現對學生主動學習的概念保留程度，實施了延後測，對延後測成績亦採用單因子變異數分析檢定與 Scheffe 多重比較，依變項為延後測成績，自變項為教材設計，其結果摘要如下表 4-5、表 4-6。

表 4-5 各組對不同教材設計在學習成效（延後測）上的單因子變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	109.945	2	54.972	9.263	.000
組內	546.013	92	5.935		
總和	655.958	94			

表 4-6 各組對不同教材設計在學習成效（延後測）上的 Scheffe 多重比較

組別	(I) 組別	平均差異		顯著性	95% 信賴區間	
		(I-J)	標準誤		下界	上界
甲	乙	2.632	.614	.000	1.1	4.16
	丙	1.094	.609	.205	-.42	2.61

由上述兩表觀察可發現，實驗組甲在延後測表現與控制組乙、丙達到顯著差異 ($F=9.263$, $P=0.000 < 0.05$)，顯示 GeoGebra 動態幾何輔助教學有助於學生對簡易二次函數圖形的技能、概念形成長期記憶。由多重比較可看出，控制組乙與實驗組甲已達顯著差異，但控制組丙與實驗組甲尚未達顯著差異。

二、不同教材設計下各學業能力分組受試樣本敘述統計資料與檢定分析

以下分別觀察各學業能力分組在上學期的三次段考平均成績、教學實驗前的前測成績與教學實驗後的後測（包含基礎、擴展與高級層次）及延後測成績等相關數據的平均數與標準差。

（一）各組之低學業能力受試樣本相關敘述統計資料摘要如表 4-7，觀察可知：

- 1、以後測成績而言，實驗組甲高出控制組乙、丙近 2 分；延後測成績高出控制組乙、丙 1 分以上。
- 2、實驗組甲之延後測成績仍高於控制組乙、丙之後測成績。
- 3、基礎與擴展層次題型皆為實驗組甲表現優於控制組乙、丙，唯高級層次題型實驗組甲略低於控制組乙、丙。

表 4-7 各組之低學業能力受試樣本相關敘述統計資料摘要表

	分組	人數	平均數	標準差
上學期段考 平均成績	甲 (GeoGebra)	9	33.56	17.430
	乙 (簡報教學)	8	38.78	16.763
	丙 (傳統教學)	9	42.44	12.616
前測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	9	.89	.333
	乙 (簡報教學)	8	.63	.744
	丙 (傳統教學)	9	1.11	.601
後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	9	4.89	.928
	乙 (簡報教學)	8	2.50	1.195
	丙 (傳統教學)	9	3.11	1.364
基礎層次成績 (後測, 共 5 分)	甲 (GeoGebra)	9	1.67	.866
	乙 (簡報教學)	8	.38	.518
	丙 (傳統教學)	9	1.67	1.118
擴展層次成績 (後測, 共 4 分)	甲 (GeoGebra)	9	1.89	.601
	乙 (簡報教學)	8	1.25	.707
	丙 (傳統教學)	9	1.22	.972
高級層次成績 (後測, 共 1 分)	甲 (GeoGebra)	9	.33	.500
	乙 (簡報教學)	8	.38	.518
	丙 (傳統教學)	9	.22	.441
延後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	9	3.33	1.414
	乙 (簡報教學)	8	.88	.835
	丙 (傳統教學)	9	2.44	1.509

(二) 各組之中學業能力受試樣本相關敘述統計資料摘要如表 4-8，觀察可知

:

- 1、實驗組甲之後測及延後測成績皆優於控制組乙、丙達 1 分以上。
- 2、實驗組甲之延後測成績仍高於控制組乙、丙之後測成績。
- 3、擴展與高級層次題型皆為實驗組甲表現優於控制組乙、丙，唯基礎層次題型實驗組甲略低於控制組丙。

表 4-8 各組之中學業能力受試樣本相關敘述統計資料摘要表

	分組	人數	平均數	標準差
上學期段考 平均成績	甲 (GeoGebra)	14	65.43	7.322
	乙 (簡報教學)	15	72.25	6.132
	丙 (傳統教學)	14	73.77	6.267
前測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	14	2.86	.363
	乙 (簡報教學)	15	2.47	.516
	丙 (傳統教學)	14	2.86	.363
後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	14	7.50	.855
	乙 (簡報教學)	15	6.53	1.125
	丙 (傳統教學)	14	6.36	.929
基礎層次成績 (後測, 共 5 分)	甲 (GeoGebra)	14	2.57	.514
	乙 (簡報教學)	15	2.20	.676
	丙 (傳統教學)	14	3.07	.917
擴展層次成績 (後測, 共 4 分)	甲 (GeoGebra)	14	3.00	.679
	乙 (簡報教學)	15	2.53	1.060
	丙 (傳統教學)	14	2.64	.633
高級層次成績 (後測, 共 1 分)	甲 (GeoGebra)	14	.86	.363
	乙 (簡報教學)	15	.80	.414
	丙 (傳統教學)	14	.64	.497
延後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	14	6.64	1.008
	乙 (簡報教學)	15	3.80	.862
	丙 (傳統教學)	14	5.07	.829

(三) 各組之高學業能力受試樣本相關敘述統計資料摘要如表 4-9，觀察可知

:

- 1、實驗組甲之後測成績優於控制組乙，與控制組丙成績相同，但標準差較小；而延後測成績仍維持在 9 分以上，優於控制組乙、丙。
- 2、基礎與高級層次題型皆為實驗組甲表現優於控制組乙、丙，唯擴展層次題型實驗組甲略低於控制組乙、丙。

表 4-9 各組之高學業能力受試樣本相關敘述統計資料摘要表

	分組	人數	平均數	標準差
上學期段考 平均成績	甲 (GeoGebra)	9	86.44	6.033
	乙 (簡報教學)	8	88.78	4.131
	丙 (傳統教學)	9	89.63	2.973
前測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	9	4.33	.707
	乙 (簡報教學)	8	4.50	.926
	丙 (傳統教學)	9	4.44	.882
後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	9	9.33	.500
	乙 (簡報教學)	8	9.25	.707
	丙 (傳統教學)	9	9.33	.866
基礎層次成績 (後測, 共 5 分)	甲 (GeoGebra)	9	3.67	.500
	乙 (簡報教學)	8	3.38	.744
	丙 (傳統教學)	9	4.56	.527
擴展層次成績 (後測, 共 4 分)	甲 (GeoGebra)	9	3.67	.500
	乙 (簡報教學)	8	3.88	.354
	丙 (傳統教學)	9	3.89	.333
高級層次成績 (後測, 共 1 分)	甲 (GeoGebra)	9	1.00	.000
	乙 (簡報教學)	8	1.00	.000
	丙 (傳統教學)	9	.89	.111
延後測成績 (共 10 分)	甲 (GeoGebra)	9	9.11	.782
	乙 (簡報教學)	8	6.63	1.188
	丙 (傳統教學)	9	8.56	.882

(四) 檢驗在不同學業能力分組下，不同教材設計是否會對學習成效造成影響，進行各學業能力對於不同教材在學習成效上的單因子變異數分析檢定，依變項為學習成效，自變項為教材設計，分析結果摘要如表 4-10。

表 4-10 各學業能力分組對不同教材設計之後測學習成效單因子變異數分析摘要表

分組		平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
低能力	組間	26.684	2	13.342	9.657	.001
	組內	31.778	23	1.382		
	總和	58.462	25			
中能力	組間	10.669	2	5.334	5.55	.007
	組內	38.448	40	.961		
	總和	49.116	42			
高能力	組間	.038	2	.019	.038	.962
	組內	11.5	23	.5		
	總和	11.538	25			

由表可知，經過 GeoGebra 動態幾何輔助教學，在中、低學業能力分組之下，三組之低學業能力 ($F=9.657, P=0.001 < 0.05$) 與中學業能力 ($F=5.55, P=0.007 < 0.05$) 的學習成效皆達到顯著差異，因此將各學業能力分組之後測成績再做 Scheffe 多重比較，以深入了解其間關聯，分析結果摘要如表 4-11。

表 4-11 各學業能力分組對不同教材設計在後測學習成效之 Scheffe 多重比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異			95% 信賴區間	
			(I-J)	標準誤	顯著性	下界	上界
低能力	甲	乙	2.389*	.571	.001	.89	3.88
		丙	1.778*	.554	.014	.33	3.23
中能力	甲	乙	.967*	.364	.039	.04	1.89
		丙	1.143*	.371	.014	.2	2.08
高能力	甲	乙	.083	.344	.971	-.82	.98
		丙	.000	.333	1	-.87	.87

*. 平均差異在 0.05 水準是顯著的。

(五) 檢驗各學業能力分組之延後測成績，學生在不同教材設計下對概念、技能的保留程度，因此以延後測成績為依變項，教學設計為自變項，進行單因子變異數分析，並做 Scheffe 多重比較檢定，分析結果摘要

如表 4-12、表 4-13。

表 4-12 各學業能力分組對不同教材設計之延後測學習成效單因子變異數分析摘要表

分組		平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
低能力	組間	26.018	2	13.009	7.653	.003
	組內	39.097	23	1.7		
	總和	65.115	25			
中能力	組間	58.620	2	29.31	36.026	.000
	組內	32.543	40	.814		
	總和	92.163	42			
高能力	組間	28.399	2	14.199	15.562	.000
	組內	20.986	23	.912		
	總和	49.385	25			

表 4-13 各學業能力分組對不同教材設計在延後測學習成效之 Scheffe 多重比較摘要表

依變數	(I) 分組	(J) 分組	平均差異		顯著性	95% 信賴區間	
			(I-J)	標準誤		下界	上界
低能力	甲	乙	2.458*	.634	.003	.8	4.12
		丙	.889	.615	.368	-.72	2.5
中能力	甲	乙	2.843*	.335	.000	1.99	3.7
		丙	1.571*	.341	.000	.7	2.44
高能力	甲	乙	2.486*	.464	.000	1.27	3.7
		丙	.556	.45	.479	-.62	1.73

*. 平均差異在 0.05 水準是顯著的。

觀察上述兩表發現，在單因子變異數分析檢定中，實驗組甲之高、中、低學業能力分組與控制組乙、丙之高、中、低學業能力分組皆達顯著差異。而多重比較顯示，實驗組甲之各學業能力組與控制組乙之各學業能力組皆達顯著差異，與控制組丙僅中學業能力組達顯著差異。

三、小結

由以上統計分析來看，使用 GeoGebra 動態幾何系統輔助教學的實驗組甲之後測成績與控制組乙、丙沒有顯著差異，但在延後測表現上，與控制組乙有顯著差異。再以學業能力分組來看，實驗組甲之低、中學業能力組在後測

表現與控制組乙、丙之低、中學業能力組產生顯著差異；在延後測中，實驗組甲之各學業能力組與控制組乙皆有顯著差異，與控制組丙僅中學業能力組有顯著差異，且實驗組甲之延後測成績甚至超越控制組乙、丙之後測成績。而後測之各層次題型表現，實驗組甲大多高於控制組乙、丙。由此可知，GeoGebra 動態幾何輔助教學有助於學習者對簡易二次函數圖形的學習，且對中學業能力學生更有助益。

第二節 認知診斷評量訊息

一、不同教材設計各組受試樣本知認知診斷評量訊息

本研究採用 G-DINA 認知診斷模型來估計受試者的概念與技能精熟率，收集之資料為受試者經過實驗教學後的後測及延後測作答組型，而為配合 G-DINA 模型的二元計分方式，以下僅分析正式測驗卷之第 2 題到第 8 題（選擇題），不做第 1 題（繪圖題）之分析，分析摘要如表 4-14、表 4-15，比較圖如圖 4-1、圖 4-2。觀察其數據發現以下幾點現象：

- 1、後測表現上，實驗組甲在技能 1 到技能 5 之精熟程度皆優於控制組乙、丙，唯技能 6 稍落後控制組丙。
- 2、實驗組甲之技能 2 在後測時精熟度達到 0.8，亦即 8 成以上受試者精熟該項技能。
- 3、延後測表現上，實驗組甲在技能 1 到技能 5 之精熟程度皆優於控制組乙、丙，而技能 6 各組之精熟程度相同。

表 4-14 不同教材設計之各組受試樣本後測 G-DINA 分析摘要表

	實驗組甲 (GeoGebra)	控制組乙 (簡報教學)	控制組丙 (傳統教學)
技能 1	0.75	0.66	0.75
技能 2	0.81	0.71	0.53
技能 3	0.78	0.61	0.63
技能 4	0.60	0.58	0.58
技能 5	0.61	0.55	0.59
技能 6	0.51	0.51	0.56

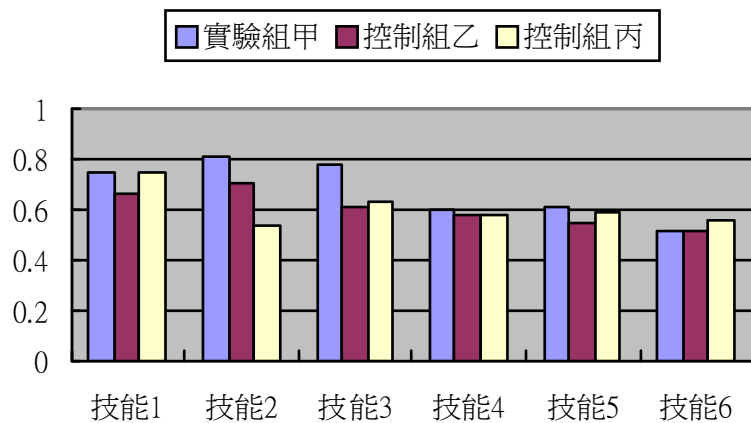


圖 4-1 不同教材設計各組受試樣本後測 G-DINA 分析比較圖

表 4-15 不同教材設計各組受試樣本延後測 G-DINA 分析摘要表

	實驗組甲 (GeoGebra)	控制組乙 (簡報教學)	控制組丙 (傳統教學)
技能 1	0.60	0.35	0.52
技能 2	0.63	0.52	0.54
技能 3	0.66	0.42	0.62
技能 4	0.57	0.32	0.28
技能 5	0.57	0.50	0.53
技能 6	0.51	0.51	0.51

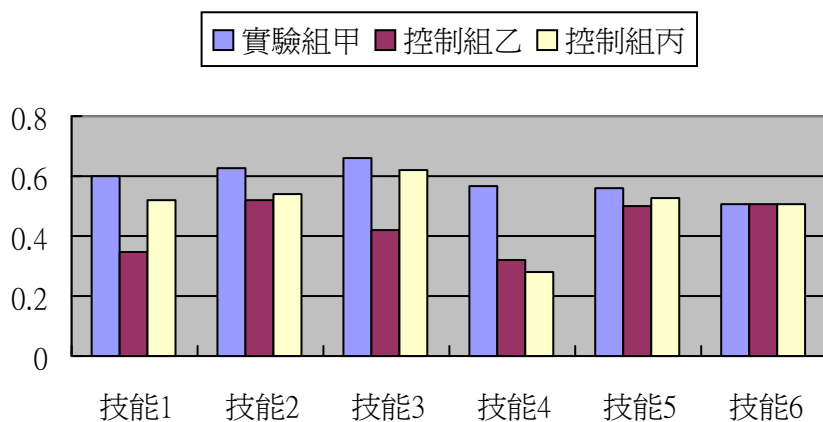


圖 4-2 不同教材設計各組受試樣本延後測 G-DINA 分析比較圖

綜合上述各項技能精熟率，以下列出各組與學業能力分組之平均精熟率，觀察各組經過實驗教學後對教材內容之目標技能精熟程度，摘要表如表 4-16，比較圖如圖 4-3。分析結果如下：

- 1、實驗組甲全班之單元目標技能平均精熟率優於控制組乙、丙。
- 2、實驗組甲低學業能力之單元目標技能平均精熟率優於控制組乙、丙。

表 4-16 各組與各能力分組之單元目標技能平均精熟率（後測）

	實驗組甲	控制組乙	控制組丙
全班	0.56	0.53	0.55
低能力	0.52	0.45	0.45
中能力	0.56	0.57	0.54
高能力	0.59	0.53	0.66

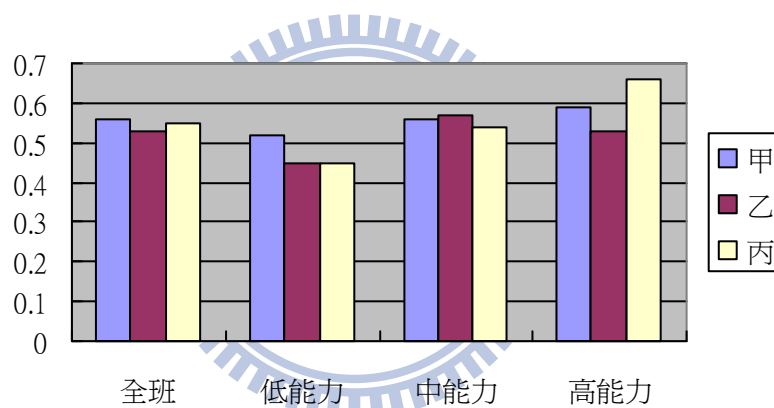


圖 4-3 各組與各能力分組之單元目標技能平均精熟率（後測）比較圖

二、正式施測試題之認知技能與作答組型逐題分析（後測）

除了觀察認知診斷模型之數據，為能更進一步了解經由 GeoGebra 動態幾何輔助教學對學習上可能產生的影響，因此以下將針對本研究之後測試題進行逐題分析與比較。

2. () 把兩個二次函數 $y = 2x^2$ 與 $y = -2x^2$ 的圖形畫在同一坐標平面上，將之看成一個圖形時，則此圖形的對稱軸為下列何者？					
		(A) $x = 1$	(B) y 軸	(C) x 軸	(D) x 軸及 y 軸皆是
選	實驗組甲	0%	34.38%	9.38%	56.25%

答 率	控制組乙	3.23%	61.29%	16.13%	19.35%
	控制組丙	3.13%	37.5%	18.75%	40.63%
分 析	<p>本題強調將兩個頂點、大小相同，但方向相反的二次函數圖形放在同一坐標平面上，此時對稱軸有 x 軸與 y 軸兩條。</p> <p>控制組乙有 60% 以上學生選擇 y 軸，據學生表示：「上課時，老師有說過對稱軸是 y 軸，所以選 y 軸。」可知因控制組乙接受簡報教學，學習時不需自己動腦畫圖，只需將上課重點記下即可，故對組合圖形之觀念薄弱，知識無法靈活應用。</p> <p>實驗組甲學生表示：「因為我自己點了很多個像這樣的圖，上下左右都有對稱，所以 x 軸、y 軸應該都是對稱軸。」可發現實驗組因自己動手並有自動化的 GeoGebra 軟體協助繪圖，故能強化圖形之組合或變化，有近 60% 的學生答對該題。控制組丙則是曾經由思考後畫過類似圖形，故表現居中。</p>				
難 度	0.59	鑑別度	0.58		

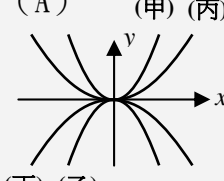
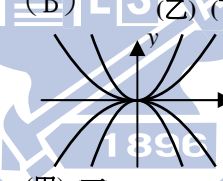
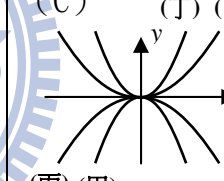
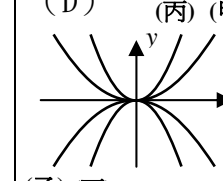
3. () 若二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 (2,8) 與 (-2,8) 兩點，則其對稱軸為何？					
		(A) $x = 4$	(B) $x = 0$	(C) $x = 1$	(D) $x = 8$
選 答 率	實驗組甲	9.38%	78.13%	3.13%	9.38%
	控制組乙	9.68%	61.29%	12.9%	16.13%
	控制組丙	6.25%	62.5%	15.63%	15.63%
分 析	<p>當二次函數圖形上兩點之 y 坐標相同時，其為對稱之兩點。由答題率可知三組答對率皆有 60% 以上，其中實驗組甲全班答對率近 80%，故可知透過 GeoGebra 操作，確實有助於學生了解二次函數圖形對稱軸的相關概念。</p>				
難 度	0.39	鑑別度	0.65		

4. () 下列哪一個二次函數的圖形開口最大？					
		(A) $y = x^2$	(B) $y = -2x^2$	(C) $y = -\frac{3}{2}x^2$	(D) $y = \frac{2}{3}x^2$

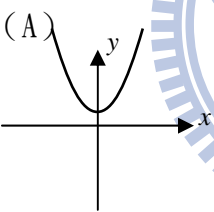
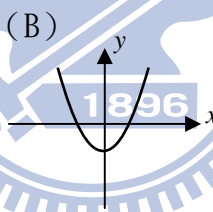
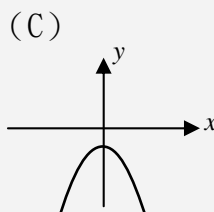
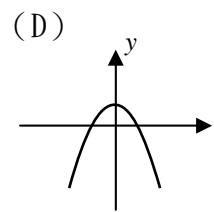
選 答 率	實驗組甲	21.88%	25%	9.38%	43.75%
	控制組乙	9.68%	25.81%	16.13%	48.39%
	控制組丙	9.38%	34.38%	9.38%	46.88%
分析	實驗組甲在本題答對率略低於控制組乙、丙，從學生訪談中得知，此題只有文字沒有圖形，對於使用滑鼠移動滑桿來觀察圖形變化進行學習之實驗組甲是比較不容易思考的，且從各組均有 25% 以上的學生選擇 B 選項之情況來看，開口大小之判斷對學生來說確實是較有難度的，因此各組答對率皆低於 50%。				
難度	0.67	鑑別度	0.5		

5. () 有四個二次函數如下：(甲) $y=4x^2$ (乙) $y=-4x^2$ (丙) $y=\frac{1}{4}x^2$ (丁)

$y=-\frac{1}{4}x^2$ 。則下列何者為它們在同一坐標平面上的圖形？

	(A)	(B)	(C)	(D)	
	(甲)(丙)  (丁)(乙)	(乙)(丁)  (甲)(丙)	(丁)(乙)  (丙)(甲)	(丙)(甲)  (乙)(丁)	
選 答 率	實驗組甲	78.13%	0%	0%	21.88%
	控制組乙	64.52%	6.45%	3.23%	25.81%
	控制組丙	65.63%	3.13%	15.63%	15.63%
分析	除判斷圖形開口方向，還須了解圖形開口大小。由實驗組甲之作答組型可發現開口方向錯誤之 (B)、(C) 兩個選項完全沒有人選擇，說明在學生主動操作 GeoGebra 摸索圖形性質後，對於了解二次函數圖形開口方向相關概念頗有幫助。而總答對率將近 80%，表示實驗組學生亦能了解開口大小相關概念，學生：「因為圖都畫在一起，就像那個時候在電腦上面把所有的圖形都點出來一樣，我就能記得越外面的數字越小，越裡面的數字越大。」由此可知，實驗組學生經由 GeoGebra 學習後，對於圖形的表徵強過文字表徵。				
難度	0.46	鑑別度	0.65		

6. () 若兩拋物線 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 及 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ 的頂點分別為 A、B，則 $\overline{AB} = ?$					
		(A) 4	(B) 2	(C) 1	(D) 0
選 答 率	實驗組甲	81.25%	3.13%	0%	15.63%
	控制組乙	74.19%	6.45%	9.68%	9.68%
	控制組丙	62.5%	12.5%	6.25%	18.75%
分析		三組答對率皆在 60% 以上，其中實驗組甲整體答對率超過 80%，而實驗組學生表示：「這個很簡單，我用滑鼠移一格，圖就移一格，正的往上，負的往下。」因此可說明 GeoGebra 的動態幾何特性非常適合運用於二次函數圖形的上下移動。			
難度		0.69	鑑別度	0.65	

7. () 已知二次函數 $y = ax^2 + k$ ，其中 $a < 0$ 、 $k < 0$ ，則下列哪一個選項可能是此二次函數的圖形？					
		(A) 	(B) 	(C) 	(D) 
選 答 率	實驗組甲	9.38%	0%	87.5%	3.13%
	控制組乙	9.68%	9.68%	67.74%	12.9%
	控制組丙	12.5%	12.5%	68.75%	6.25%
分析		此題為基本的函數圖形性質的綜合判斷，包含開口方向、頂點位置。三組都有不錯的答對率，而實驗組甲答對率達到 87.5%，恰可呼應前述狀況，使用 GeoGebra 輔助教學對於學習二次函數圖形之開口方向與上下移動可得到優異的效果。			
難度		0.73	鑑別度	0.58	

8. () 在坐標平面上有一個二次函數 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ ，經過平移後，頂點為 $(0, -4)$ ，則此二次函數的圖形為下列何者？	
---	--

		(A) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$	(B) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$	(C) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$	(D) $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$
選 答 率	實驗組甲	21.88%	15.63%	40.63%	21.88%
	控制組乙	19.35%	6.45%	61.29%	12.9%
	控制組丙	12.5%	12.5%	62.5%	9.38%
分析		由頂點坐標直接推回二次函數式。實驗組甲之答對率不足 50%，而控制組乙、丙皆超過 60%，再次說明文字類型之試題對實驗組學生在思考解題上造成較大的困難，反觀傳統教學最能強化學生此部分之技能。			
難度		0.75	鑑別度	0.46	

9. () 若兩個二次函數 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 3$ 與 $y = ax^2 + b$ 圖形的開口方向相同，且開口大小相等，若這兩個函數圖形的頂點相距 3 個單位，則 $b = ?$					
		(A) 6	(B) -6 或 0	(C) 6 或 0	(D) 0
選 答 率	實驗組甲	9.38%	12.5%	75%	3.13%
	控制組乙	3.23%	16.13%	74.19%	6.45%
	控制組丙	3.13%	31.25%	59.38%	6.25%
分析		圖形頂點之移動亦代表整個圖形上下平移。實驗組甲與控制組乙都達到 70% 以上的答對率，且實驗組甲優於控制組乙，如實驗組學生所說：「這個相差 3 個單位就很像老師上課用到的例題，我往上移動 3 格或往下 3 格，那個常數項就會改變，往上就用加的，往下用減的。」可知雖然三組講解之例題皆相同，但經過 GeoGebra 操作、主動學習後，學生較能加深此概念，並且運用於解題上。相較之下，控制組丙對此觀念較為薄弱，且其中有 30% 以上學生選擇 (B) 選項，顯示其觀念錯誤或一知半解。			
難度		0.56	鑑別度	0.69	

三、小結

由認知診斷模型 G-DINA 模型來看，實驗組甲的後測表現，技能 1 到技能 5 之精熟率皆達到 0.6 以上；延後測表現，技能 1 到技能 3 之精熟率維持在 0.6 以上，技能 4 與技能 5 微微下滑到 0.5 左右，其中技能 6 皆保持在 0.51。相較於控制組乙、丙的精熟程度表現，可說實驗組甲在整體表現與概念保

留皆較良好。

在逐題分析比較中，發現實驗組甲不擅於解決第 4 題與第 8 題此類全文字敘述之題型，而在搭配圖形之題型中，實驗組甲表現皆優於控制組乙、丙。

第三節 研究結果摘要

將本章資料分析的重點與結果摘要如下：

一、教學設計與學業能力對學習成效的影響

- 1、教學設計上，實驗組甲之後測與控制組乙、丙無顯著差異，但延後測表現顯著優於控制組乙、丙。
- 2、學業能力上，實驗組甲之低、中能力在後測成績顯著優於控制組乙；延後測表現上，實驗組甲之低、中、高能力皆顯著優於控制組乙，而與控制組丙僅中學業能力組具有顯著差異。

二、教學設計對認知診斷評量的影響

- 1、教學設計上，實驗組甲以 GeoGebra 動態幾何輔助教學後，技能精熟程度皆優於控制組乙、丙。
- 2、學業能力上，高學業能力組的技能精熟率高於低學業能力組的技能精熟度；實驗組甲之低學業能力組技能精熟率高於控制組乙、丙之低學業能力組。
- 3、逐題分析發現，實驗組甲對於圖像表徵題型的表現優於文字表徵題型。

三、學習成效

低、中學業能力組之實驗效果較好，因此可說，該實驗教材適合低、中學業能力組學生。

第五章 結論與建議

本研究以準實驗研究法探討 GeoGebra 動態幾何輔助教學設計對不同學業能力的學生，在學習成效及認知診斷評量上的影響。本章將針對研究結果做出結論與建議共分為三節，第一節為研究結論，第二節為研究建議，第三節為未來研究方向。

第一節 研究結論

本研究以 GeoGebra 動態幾何軟體輔助教學與一般簡報教學、一般傳統教學來做教學實驗，而綜合第四章的資料分析，本研究得到以下結論：

- 1、GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計有助於低、中學業能力的學生在數學上的學習。
- 2、GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計明顯有助於學生將數學概念、技能形成新知識並儲存於長期記憶區。
- 3、GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計有助於提高學生學習數學技能之精熟度，並增強數學概念的圖像表徵。

觀察以上結論，可知 GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計對數學學習確實有正向的影響，以下再針對教材內容、設計方法與數學學習來作進一步的說明。

本研究設定之教材主題為「簡易二次函數圖形」，其教材內容結合代數與幾何，教學時須隨時搭配二次函數式及圖形的呈現與變化，以幫助學生了解二次函數的圖形樣式，並能比較不同的二次函數圖形，亦即抽象的思考必須轉化成視覺化圖像動態呈現，然而要呈現與接受如此複雜的教材內容，便是教師與學生的一大挑戰。

因此，為減低學生的學習困難度，且提升學習成效，設計教材時運用多媒體設計原則，將單元主題切割段落，教學訊息以步驟化方式逐步呈現，相同代數、圖形元素出現時用相同顏色標示；利用動態幾何系統設計可供學生自由操作、主動觀察的個人學習視窗，親自移動滑鼠、點選按鈕，察覺代數、圖形動態變化之間的關聯。

這樣的教材設計方式，減低了學生學習的困難度，也讓學生從主動探索中，發現在學習過程中產生問題之癥結點，再經過嘗試解決、尋求協助，學生不斷地將新訊息與舊畫面、舊經驗連結，活化腦袋思考運作，最後察覺圖形與代數之間的連結關係，而產生屬於學生自己的新知識。對於能力較高早已熟練教材內相關概念的學生，

操作學習的同時，除了印證先前習得之概念，亦可由呈現於畫面上不同的函數圖形變化，加深思考，逐漸地建構出圖形產生各種改變時其代數式的變化，建立函數與圖形間的整體感覺。

透過這樣的發展歷程，學生較易於選擇、組織教學訊息，與先備知識整合形成新知識，並儲存於長期記憶區。因此教學成效在延後測時，即可明顯比較出與其他教學法的差異，其中，因高學業能力之學生學習理解力已達水準之上，不同的教學訊息呈現方式對理解相關概念應無太大影響，故又以低、中學業能力的學生效果最為顯著。且學生對於視覺化圖像訊息產生較強的連結作用，思考、解題都偏向以圖像切入，也導致學生對數學知識的圖像表徵強過文字表徵。

第二節 研究建議

本研究以簡易二次函數圖形為實驗內容，其教材內容在教學過程的訊息與教材物件皆有高度相關性，對學生學習上有一定困難度，所以本研究以 GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計實驗後，顯示在提升學習成效與技能精熟度的效果良好，故由本教學實驗的過程與結果，提出有關教材設計、教學過程及教學環境三方面的建議，分述如下：

(一) 教材設計

- 1、根據本研究結論，面對低、中學業能力的學生，建議可採用 GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計方式，特別是教材內容包含代數與幾何相關知識，並彼此有高度相關，須藉著觀察圖形了解代數變化之單元。
- 2、運用 GeoGebra 動態幾何呈現教學畫面時，建議可多採用按鈕開關教學內容，依照教學步調，控制事先安排好的引導訊息，配合口語解說適時出現文字重點，有助於初次學習的學生迅速選擇教學主題的重點，然後加以組織、整合。
- 3、研究過程發現，連續動態的模擬繪製圖形可強化學生對圖形樣式的認識，適當的相關內容建議可採用連續動態呈現方式。
- 4、由學生親自操作之學習內容，須經過妥善分析，再行編製與試用，其按鈕的安排、滑桿的位置與最重要的使用說明，皆應有良好的呈現順序與人性化的操作方式。特別需注意「螢幕上的絕對位置」的使用，因

GeoGebra 按鍵設定上，滾動滑鼠滾輪為放大、縮小背景畫面尺寸，而非畫面的上拉或下拖，故學生常因平時瀏覽網頁的慣性動作而滾動滑鼠滾輪，改變了整個畫面的尺寸大小，將可能造成按鈕、滑桿不見，甚至找不到已畫好的圖形位置而影響學習。

- 5、GeoGebra 動態幾何呈現的教材設計提供數學教師一個有效的教學方式，但由本研究可發現，若只能在有限的時間與資源下進行教學，透過一般課堂傳統教學也可得到不錯的教學成效。

(二) 教學過程

- 1、在首次使用 GeoGebra 動態幾何呈現教學內容時，建議先對學生做好軟體功能、按鍵的簡介，若能由學生親自使用過，對軟體有基本的認識，才開始正式內容的教授，將有助於學生後來的操作學習。
- 2、雖然在教材設計時，為維持教學的流暢度與教學品質的一致，每個教學頁面的訊息呈現都已有一套事先安排的循序出現次序，但教學過程中，建議多注意學生反應以隨時調整教學內容，適時地呈現已安排好的教學訊息或關閉多餘的訊息。

(三) 教學環境

- 1、運用 GeoGebra 動態幾何輔助教學時，建議以學生親自操作、探索為首要考量，善用學校電腦教室，或請學生於家中電腦自行下載、安裝 GeoGebra 以便隨時練習。
- 2、在一人一機的電腦教室中，因學生皆面對著電腦，教師欲隨時觀察注意全班學生之學習狀況是相當吃力的，建議可在班上另選一位小幫手或請其他教師協助，事先給予訓練，課堂中分擔授課教師的負擔，將可讓教師教學與學生學習過程更為流暢。

第三節 未來研究方向

本研究以教材設計為主軸，將簡易二次函數圖形單元主題以 GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計，配合多媒體教材設計原理進行實驗教學，所得到的結論對數學教學是有幫助的。因此，考慮未來進一步的研究，提出以下建議：

- 1、GeoGebra 動態幾何呈現輔助教學並非適用於所有課程，但應可在教師專業判斷

下，選擇相同類似的單元，如：二元一次方程式的圖形、線型函數圖形…等，使用 GeoGebra 動態幾何呈現輔助教學，檢視其學習成效與認知診斷評量上的表現是否也如本研究所觀察到的現象。

- 2、本研究考慮不影響學校教學進度，故教學實驗僅設計部分單元主題，進行兩節課的實驗教學，實驗時間尚短，因此長時間的 GeoGebra 動態幾何呈現輔助教學的學習成效仍待研究。
- 3、GeoGebra 動態幾何呈現的教學設計對低、中學業能力的學生，在數學學習成效上有顯著差異，而其未來學習相關概念時，如二項式、指對數函數圖形…等，是否也能有相同的效果，應可再進一步的探究。
- 4、在教學過程中，研究者發現當學生在使用教師設計的 GeoGebra 動態幾何呈現之教材時，常面臨到的挑戰不是數學知識的運用，而是操作上的困難，特別是滑桿、按鈕位置的掌握，與整體圖形的放大及縮小，雖然已註記操作說明，也使按鈕顏色明顯，然而這些都可能造成學習上的干擾。所以，如何在設計此類動態幾何課程時，減低學生的學習負擔與干擾，應可再進一步針對 GeoGebra 做探究。



參考文獻

中文部份

- 王文卿(2009)。DINA 模式與 G-DINA 模式參數估計比較。國立台中教育大學教育測驗統計所碩士論文。
- 全任重(1996)。圓規，直尺與 Cabri-geometre。數學傳播，20(1)。
- 吳長憶(2009)。GeoGebra 電腦輔助教學於國三函數課程成效之研究。中華大學應用數學所碩士論文。
- 余艷惠(2003)。高雄市高職學生運用 GSP 軟體學習三角函數成效之研究。國立高雄師範大學數學所碩士論文。
- 林保平(1995)。在動態、互動、可操作的電腦環境下探討 $ax+by=n$ 之非負整數解。科學教育研究與發展，1，40-49。
- 林保平(1997)。動態幾何教學的電腦輔助教材研究，八五年度國科會研究計畫報告，計畫編號：85-2511-S-113-004，台北市立師院。
- 林保平(2000)。動態的勾股定理—電腦輔助教學環境，科學教育，210，12-23。
- 林星秀(2001)。高雄市國二函數課程 GSP 輔助教學成效之研究。國立高雄師範大學數學所碩士論文。
- 胡瑞明(2001)。用 CAL 探討五專生學習與二次函數相關數學概念之研究。科學教育學刊，9(4)，401-416 頁。
- 涂金堂(2003)。認知診斷評量的探究。南師學報，37(2)，67-97。
- 教育部，國民中小學九年一貫課程綱要，教育部，台北市，2003 年。
- 陳英娥(1992)。電腦輔助教學在國中數學科學習成效之研究。國立高雄師範大學數學教育所碩士論文。
- 陳亭宇(2010)。DINA 模式與 G-DINA 模式參數不變性探討。國立台中教育大學教育測驗統計所碩士論文。
- 蔡志仁(2000)。動態連結多重表徵視窗環境下橢圓學習之研究。國立臺灣師範大學數學所碩士論文。
- 賴明裕(2008)。從設計國一函數線上學習課程來探討自學成效。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文。
- 謝哲仁(2001)。動態電腦幾何教學建構之研究。美和教育學報，19，199-211。
- 謝豐瑞、陳材河(1993)。國中生函數概念認知發展及教學之研究(II)。行政院國家科

學委員會研究報告，計畫編號：NSC82-0111-S003-013。

顏啟麟、羅昭強(1993)：國中生函數概念認知發展及教學之研究(II)。行政院國家科學委員會研究報告。計畫編號：NSC82-0111-S003-013。

英文部份

- Baddeley, A. D. (1992). "Is working memory working?" *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 44A(1), 1-31.
- Balacheff, N. & Kaput, J. J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In A. J. Bishop, & K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 469-501. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Brian, R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 21-40.
- Chandler, P. & Sweller, J. (1991). "Cognitive Load Theory and The Format of Instruction," *Cognitive and Instruction*, 8, 293-332.
- Clark, R. C. & Mayer, R. E. (2008). *E-Learning and the science of instruction: proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning* (2nd ed.). San Francisco: Pfeiffer.
- de la Torre, J. & Douglas, J. (2004). Higher-order latent trait models for cognitive diagnosis. *Psychometrika*, 69(3), 333-353.
- de la Torre, J. (2009). A cognitive diagnosis model for cognitively based multiple-choice options. *Applied Psychological Measurement*, 33(3), 163-183.
- Doignon, J.P. & Falzague, J.C. (1999). *Knowledge spaces*. New York: Springer.
- Doornik, J. A. (2003). *Object-oriented matrix programming using Ox* (Version 3.1). [Computer software]. London, England: Timberlake Consultants Press.
- Fischer, G. H. (1973). The linear logistic test model as an instrument in

- educational research. *Acta Psychologica*, 37, 59-374.
- Hartz, S. (2002). A Bayesian framework for the Unified Model for assessing cognitive abilities: blending theory with practice. Unpublished doctoral thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Hartz, S. Roussos, L. & Stout, W. (2002). Skills diagnosis: Theory and practice [User manual for Arpeggio software]. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Janvier, C. (1987). Problem of Representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ, England: Erlbaum.
- Junker, B. & Sijtsma, K. (2001). Cognitive assessment models with few assumptions, and connections with nonparametric item response theory. *Applied Psychological Measurement*, 25(3), 258-272.
- Kaput, J. J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. In E. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, 381-398. Hillsdale, NJ, England: Erlbaum.
- Kaput J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. Grouws(Eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 515-556. Reston, VA: NCTM.
- Maris, E. (1999). Estimating multiple classification latent class models. *Psychometrika*, 64(2), 187-212.
- Marzano, R., Pickering, D., & Pollock, J. (2001). Classroom instruction that works. Association for Supervision and Curriculum Development: Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Matz, M.(1982). Towards a process model for high school algebra errors. In D. Sleeman, & J.S.Brown(Eds.), *Intelligent tutoring systems*, 25-50. London: Academic Press.
- Mayer, R. E. (2001). *Multimedia Learning*. New York: Cambridge University press.
- Nation Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards*

- for School Mathematics. Reston, VA : NCTM.
- Paivio, A. (1986). *Mental Representations: A Dual Coding Approach*. Oxford, England: Oxford University Press.
- Rahim, M. H. (2000). A Classroom Use of the Geometer' s Sketchpad in a Mathematics Pre-Service Teacher Education program , In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of The International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics For Living*.
- Schoenfeld(1987). *Learning : The microgenetic analysis of one student' s evolving understanding of a complex subject matter domain*. To appear in Glaser, R. (Ed.). *Advances in instructional Psychology*(v.4). Hillsdale, NJ, England: Erlbaum.
- Sheehan, K. M. (1997). A tree-based approach to proficiency scaling and diagnostic assessment. *Journal of Educational Measurement*, 34, 333-352.
- Tatsuoka, K. K. (1983). Rule space: An approach for dealing with misconception based on item response theory. *Journal of Educational Measurement*, 20, 345-354.
- Tatsuoka, K. K. (1985). A probabilistic model for diagnosing misconceptions by the pattern classification approach. *Journal of Educational Statistics*, 10, 55-73.
- Vergnaud, G. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Edited by Claude Janvier: Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 227-232.
- Yerushalmy, M., & Gafni, R. (1992). Syntactic manipulations and semantic interpretation in algebra: The effect of graphic representation. *Learning and Instruction*, 2, 303-319.
- Zaslavsky, O. (1997). Conceptual Obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on learning Problems in Mathematics*, 19(1), 20-42.

附錄一：

【教材內容】課程學習單

簡易二次函數的圖形

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

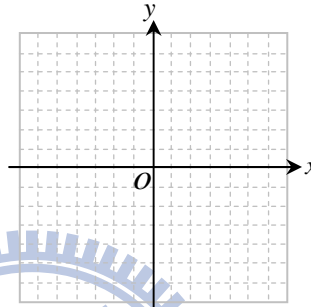
函數複習：

※線型函數：i. _____ 函數： $y = b$ ，圖形為一_____。

ii. _____ 函數： $y = ax + b (a \neq 0)$ ，圖形為一_____。

▲ 請畫出 $y = 2x + 1$ 的圖形。

x		
y		



※二次函數：形如 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，自變數 x 最高次數為二次。

▲ 如： $y = x^2$ 、 $y = -2x^2 - 3$ 、 $y = 5x^2 + 2x - 1$

※二次函數的圖形：一次函數在坐標平面上所畫出的圖形為一直線，而二次函數在坐標平面上繪畫出怎樣的圖形？

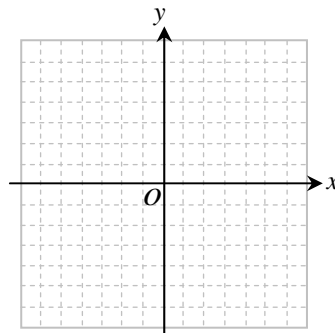
▲ 請畫出 $y = x^2$ 的圖形。

步驟一：先選 x 值，再求出對應的 y 值。（至少 _____ 組）

步驟二：將每一個數對所對應的點描到坐標平面上。

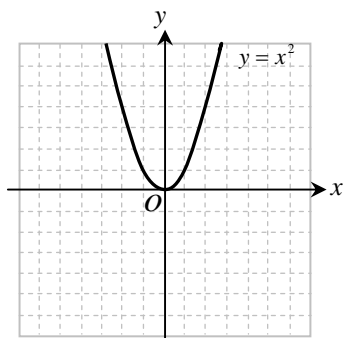
步驟三：用 _____ 把各點連接起來，即得圖形。

x	-2	-1	0	1	2
y					



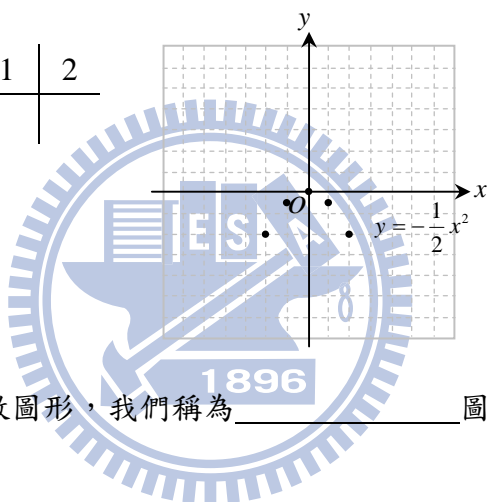
▲ 請畫出 $y = -x^2$ 的圖形。

x	-2	-1	0	1	2
y					



▲ 請在下圖畫出 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形，並將 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的圖形完成。

x	-2	-1	0	1	2
y					

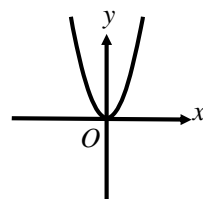


▲ 觀察上面的二次函數圖形，我們稱為_____圖形。

※ 頂點、對稱軸：

▲ 觀察右圖 $y = x^2$ 的圖形，這是一個線對稱圖形，對稱軸是_____，而對稱軸與圖形的交點為_____，即稱為圖形的頂點，也是整個圖形的最_____點(高或低)。

Ex: $y = -\frac{1}{2}x^2$ 圖形的對稱軸為_____，頂點_____為整個圖形的最_____點(高或低)。



※開口方向：

▲ $y = x^2$ 與 $y = -x^2$ 的圖形差異為_____不同。

$y = x^2$ 的開口方向_____，其 x^2 項係數 a _____ 0。

$y = -x^2$ 的開口方向_____，其 x^2 項係數 a _____ 0。

◎結論： x^2 項係數 $a > 0 \Rightarrow$ 圖形開口向_____（上或下）。

x^2 項係數 $a < 0 \Rightarrow$ 圖形開口向_____（上或下）。

Ex: ① $y = 1.7x^2$ 開口向_____。 ② $y = -\frac{3}{2}x^2$ 開口向_____。

※開口大小：

▲ 觀察 $y = \frac{1}{2}x^2$ 、 $y = x^2$ 與 $y = 2x^2$ 三個圖形，共同處為：

頂點皆為_____，對稱軸皆為_____，開口方向皆向_____。

圖形形狀唯一不同處為：開口_____不同。

其大小順序為_____。

*想一想：函數的哪個部分影響圖形開口大小？_____。

如何影響？係數越大 \Rightarrow 開口越_____。

▲ 觀察 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 、 $y = -x^2$ 與 $y = -2x^2$ 三個圖形，其開口大小順序：

_____。

*想一想：係數越大 \Rightarrow 開口越_____。

◎結論： x^2 項係數 a 的絕對值越大 \Rightarrow 開口越_____。

x^2 項係數 a 的絕對值越小 \Rightarrow 開口越_____。

Ex: 請以代號寫出下列函數的開口大小順序：

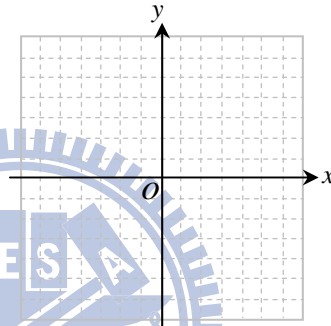
$$A: y = \frac{1}{2}x^2, B: y = -\frac{1}{2}x^2, C: y = -x^2, D: y = \frac{4}{3}x^2$$

_____。

※上下移動：

▲ 根據 $y = x^2$ 的圖形，請畫出 $y = x^2 + 1$ 的圖形。

x	-2	-1	0	1	2
y					



▲ 觀察 $y = x^2 + 1$ 的圖形，與 $y = x^2$ 的圖形有何相同與不同之處？

相同：_____。

不同：相同的 x 值代入， y 值須加_____。其頂點由 $(0,0) \rightarrow$ (,)。

$\Rightarrow y = x^2 + 1$ 的圖形為 $y = x^2$ 的圖形向_____移動_____單位。

▲ $y = x^2 - 3$ 的圖形為 $y = x^2$ 的圖形向_____移動_____單位，

頂點由(,) \rightarrow (,)。

▲ $y = -x^2 + 2$ 的圖形為 $y = -x^2 - 2$ 的圖形向_____移動_____單位，

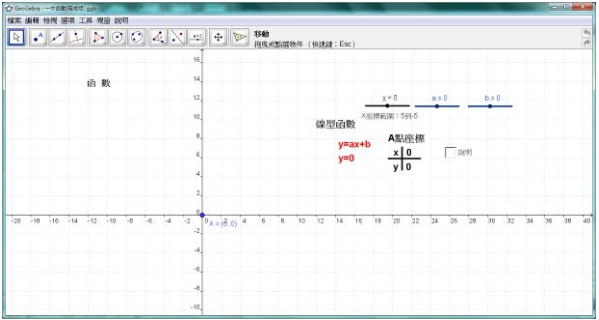
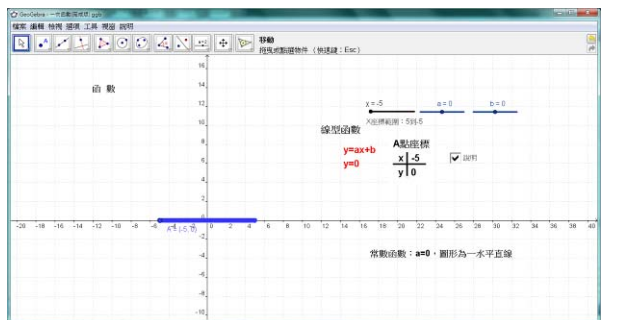
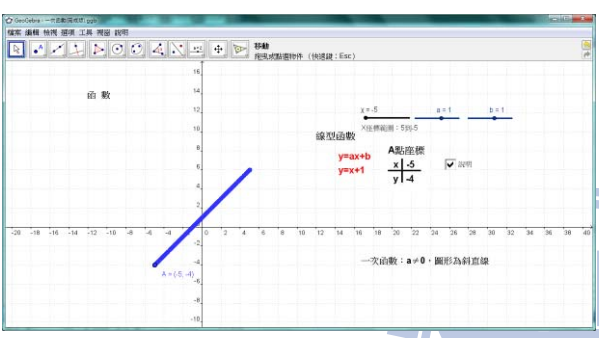
頂點由(,) \rightarrow (,)。

Ex: $y = x^2 - \frac{5}{2}$ 為 $y = x^2 - 1$ 的圖形向_____移動_____單位，

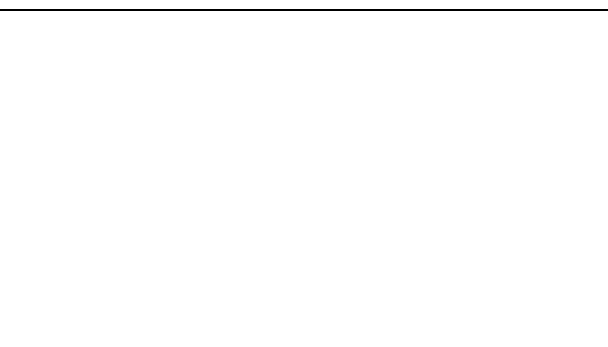
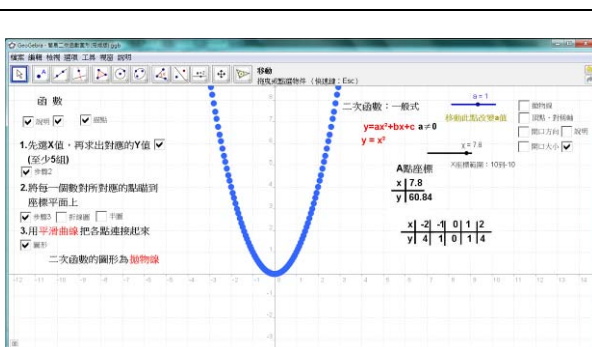
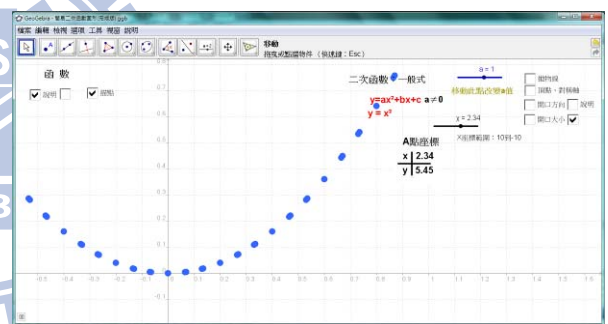
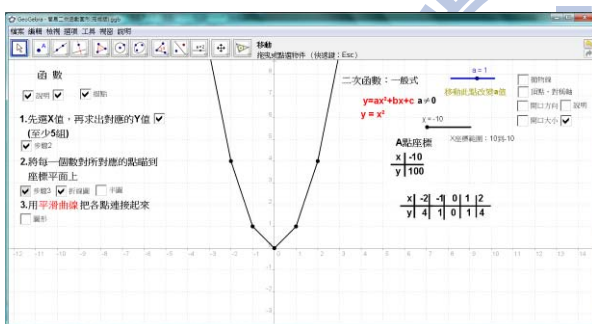
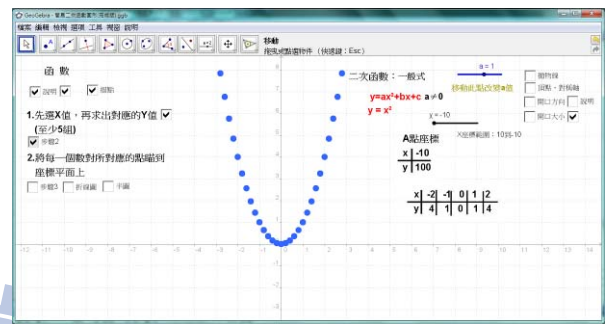
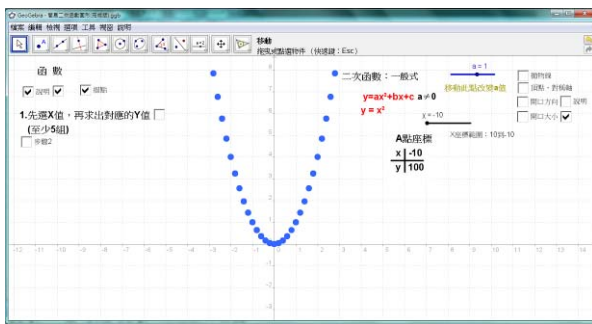
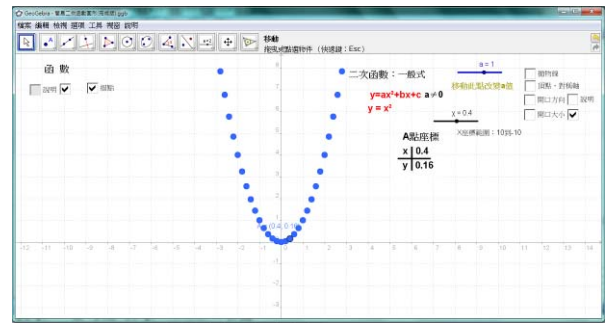
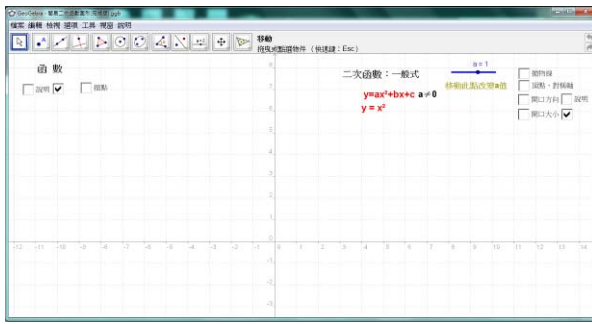
頂點由(,) \rightarrow (,)。

附錄二：

【(實驗組) GeoGebra 輔助教學】教學內容及教材分析

(實驗組) 線型函數	
	
	
教材分析	複習舊有經驗。
能力指標與分年細目表	<p>A-4-11 能在坐標平面上，畫出一次函數或二元一次方程式的圖形。</p> <p>7-a-12 能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。</p> <p>7-a-13 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。</p>
多媒體設計原則	<p>1. 空間接近原則：函數式與 x、y 坐標對應表位於同一畫面。</p> <p>2. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>3. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。</p>

(實驗組) 繪製簡易二次函數圖形



教材分析

延續舊有經驗，推展到二次函數，並加強注意在 (0, 0) 到 (1, 1) 這區間的圖形變化。了解二次函數的圖形為圓滑曲線。

能力指標與
分年細目表

A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形

	<p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p>
多媒體設計原則	<p>1. 空間接近原則：函數式與 x、y 坐標對應表位於同一畫面。</p> <p>2. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>3. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。</p>

(實驗組) 觀察簡易二次函數圖形開口方向、頂點、對稱軸	
教材分析	<p>二次函數的圖形為線對稱圖形，對稱點會通過頂點（最高或最低點）。了解二次函數圖形用平方項係數判斷開口方向，頂點為函數值（y 值）的最大值或最小值位置，並判斷對稱軸。</p>
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形</p>

	<p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

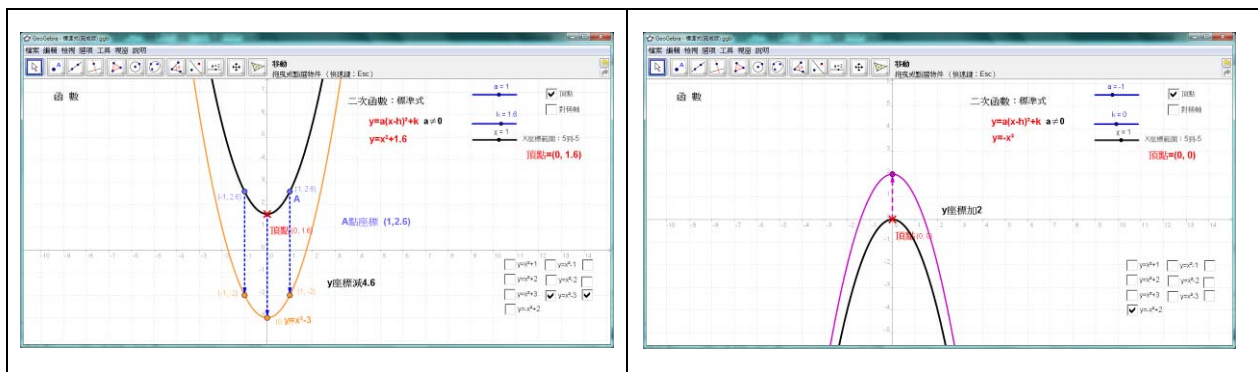
(實驗組) 比較簡易二次函數的開口大小	
教材分析	<p>給定平方項係數不同的三個二次函數，利用繪圖觀察出平方項係數與圖形開口大小之間的關係。</p>

<p>能力指標與 分年細目表</p>	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p>
<p>多媒體設計原則</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(實驗組) 簡易二次函數圖形的上下移動

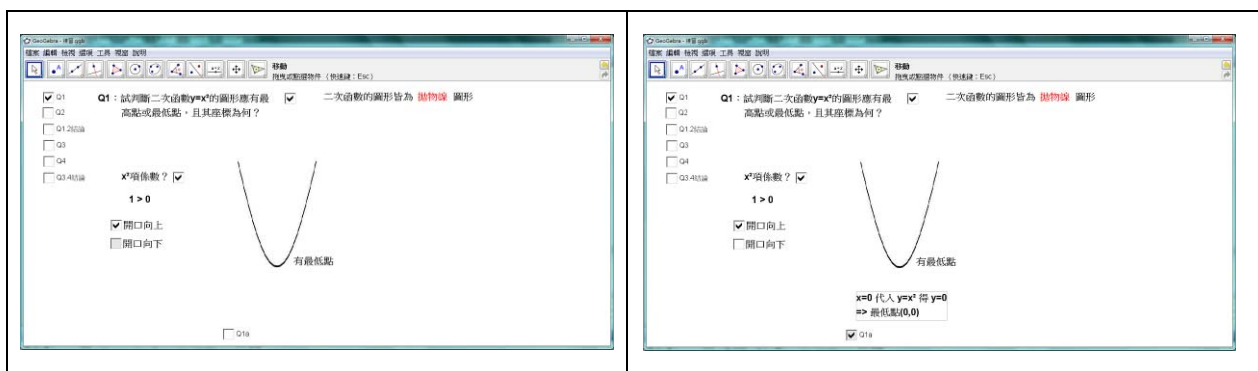
The figure displays six screenshots of a software interface illustrating the vertical translation of a parabola $y=x^2$. Each screenshot shows the original parabola and its vertical shift by a constant k . The interface includes a coordinate plane, a control panel with sliders for a , h , and k , and a list of functions to display. The shifts shown are:

- Top Left:** $y=x^2+1$ (up 1). Vertex at $(0, 1)$. A point A is at $(1, 1)$ and B is at $(1, 2)$. The distance $AB=1$ is labeled as y -coordinate +1.
- Top Right:** $y=x^2+2$ (up 2). Vertex at $(0, 2)$. A point C is at $(1, 3)$ and A is at $(1, 1)$. The distance $AC=2$ is labeled as y -coordinate +2.
- Middle Left:** $y=x^2+3$ (up 3). Vertex at $(0, 3)$. A point D is at $(1, 4)$ and A is at $(1, 1)$. The distance $AD=2$ is labeled as y -coordinate +2.
- Middle Right:** $y=x^2+3$ (up 3), $y=x^2+2$ (up 2), and $y=x^2+1$ (up 1). Vertices at $(0, 3)$, $(0, 2)$, and $(0, 1)$. Distances $AD=3.1$, $AC=2.1$, and $AB=1.1$ are labeled as y -coordinate +3.1, +2.1, and +1.1 respectively.
- Bottom Left:** $y=x^2-1$ (down 1), $y=x^2-2$ (down 2), and $y=x^2-3$ (down 3). Vertices at $(0, -1)$, $(0, -2)$, and $(0, -3)$. Distances y -coordinate -1.3, -2.3, and -3.3 are labeled.
- Bottom Right:** $y=x^2-1$ (down 1), $y=x^2-2$ (down 2), and $y=x^2-3$ (down 3). Vertices at $(0, -1)$, $(0, -2)$, and $(0, -3)$. A point A is at $(1, 1)$. The distance y -coordinate -2.3 is labeled.



教材分析	給定平方項係數相同，而常數項不同的兩個函數，觀察函數式與圖形之間的關聯或圖形的上下移動。
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(實驗組) 簡易二次函數圖形的練習 Q1

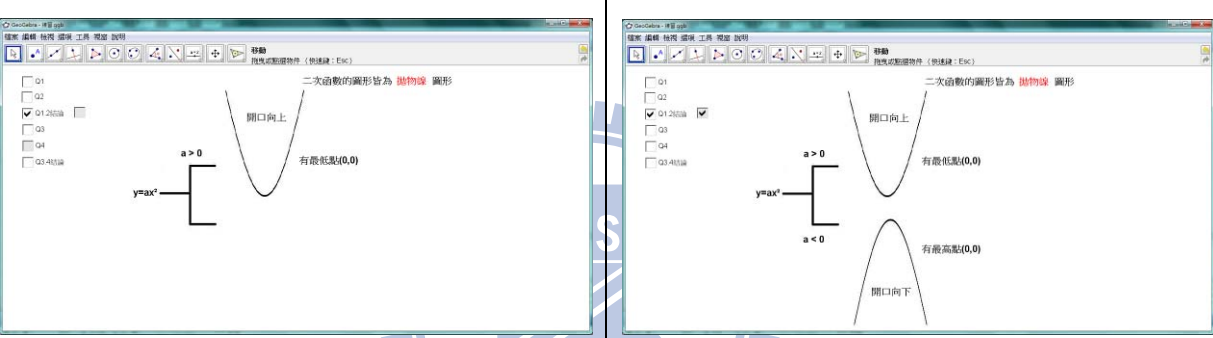


教材分析	給定函數 $y=ax^2$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

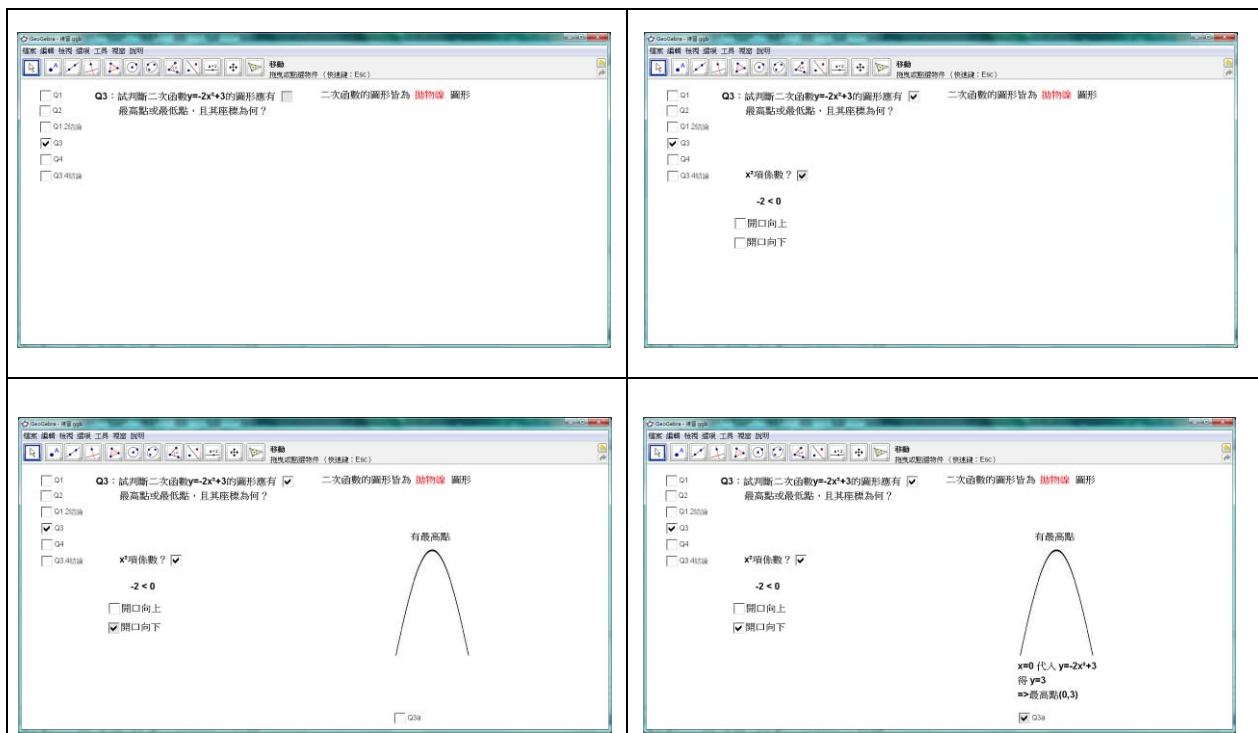
(實驗組) 簡易二次函數圖形的練習 Q2

教材分析	給定函數 $y=ax^2$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p>

	<p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<p>1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。</p> <p>2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。</p> <p>3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。</p> <p>5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。</p>

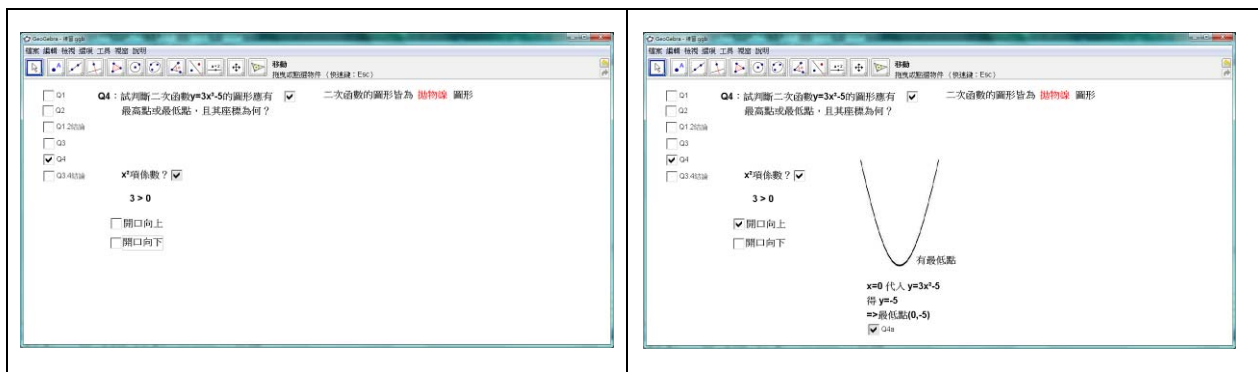
(實驗組) 簡易二次函數圖形的練習 Q1、Q2 結論	
	
教材分析	給定函數 $y=ax^2$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與 分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<p>1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。</p> <p>2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。</p> <p>3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。</p> <p>5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。</p>

(實驗組) 簡易二次函數圖形的練習 Q3



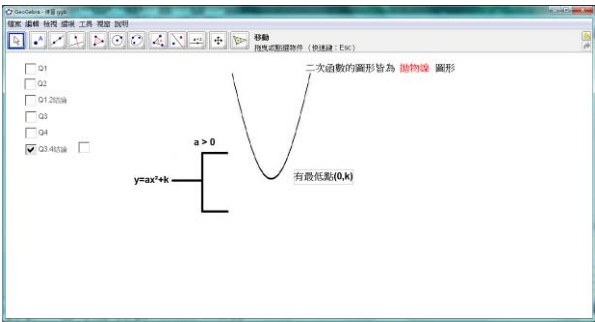
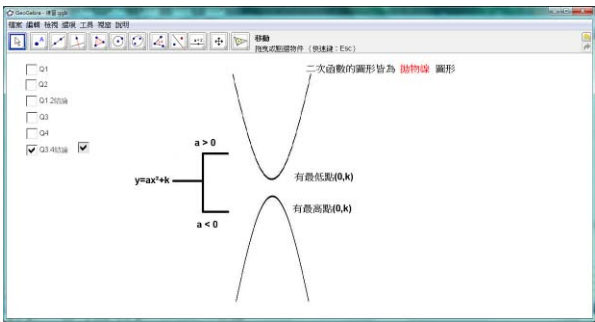
教材分析	給定函數 $y = ax^2 + k$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與 分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(實驗組) 簡易二次函數圖形的練習 Q4



教材分析	給定函數 $y=ax^2+k$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(實驗組) 簡易二次函數圖形的練習 Q3、Q4 結論

	
教材分析	給定函數 $y=ax^2+k$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p>

	<p>9-a-01 能理解二次函數的意義。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。



附錄三：

【（對照組）一般簡報教學】教學投影片及教材分析

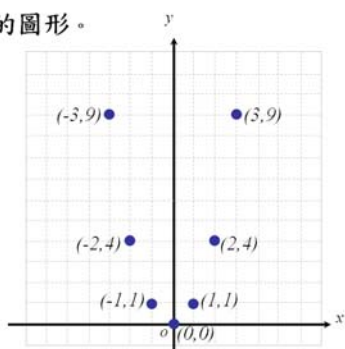
* 第一部份：繪製簡易二次函數圖形

(對照組) 投影片 1、2							
<p>複習線型函數</p> <p>線型函數有兩種類型：</p> <p>1、常數函數：$y=b$，圖形為一水平直線。</p> <p>Ex: $y=-2$</p> 	<p>複習線型函數</p> <p>線型函數有兩種類型：</p> <p>1、一次函數：$y=ax+b$，圖形為一斜直線。</p> <p>Ex: $y=2x+1$</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">3</td> </tr> </table> 	x	0	1	y	1	3
x	0	1					
y	1	3					
教材分析	複習舊有經驗。						
能力指標與 分年細目表	<p>A-4-11 能在坐標平面上，畫出一次函數或二元一次方程式的圖形。</p> <p>7-a-12 能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。</p> <p>7-a-13 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。</p>						
多媒體設計原則	<p>1. 空間接近原則：函數式 $y=-2$、$y=2x+1$ 與 x、y 坐標對應表位於同一畫面。</p> <p>2. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>3. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。</p>						
(對照組) 投影片 3							

簡易二次函數的圖形

請畫出 $y=x^2$ 的圖形。

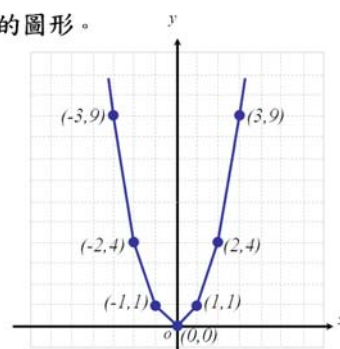
x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9



簡易二次函數的圖形

請畫出 $y=x^2$ 的圖形。

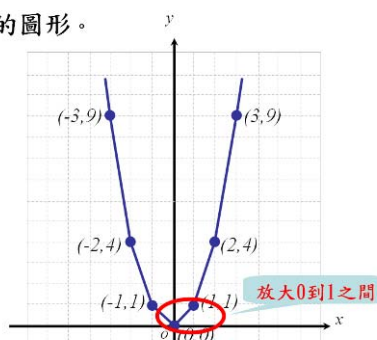
x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9



簡易二次函數的圖形

請畫出 $y=x^2$ 的圖形。

x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9



教材分析

延續舊有經驗，推展到二次函數。

能力指標與
分年細目表

A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。

9-a-01 能理解二次函數的意義。

9-a-02 能描繪二次函數的圖形。

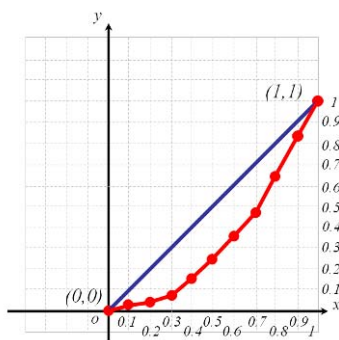
多媒體設計原則

1. 空間接近原則：函數式 $y=x^2$ 與 x 、 y 坐標對應表位於同一畫面，並使用箭頭連接教學訊息。
2. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。
3. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(對照組) 投影片 4

簡易二次函數的圖形

x	y
0.1	0.01
0.2	0.04
0.3	0.09
0.4	0.16
0.5	0.25
0.6	0.36
0.7	0.49
0.8	0.64
0.9	0.81
1	1



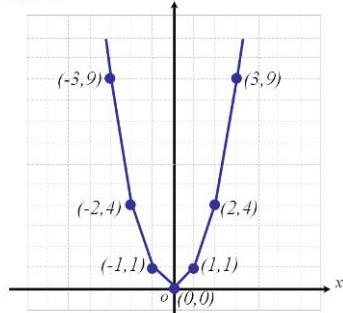
教材分析	加強注意在 (0, 0) 到 (1, 1) 這區間的圖形變化。
能力指標與分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。
多媒體設計原則	1. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 2. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(對照組) 投影片 5

簡易二次函數的圖形

請畫出 $y=x^2$ 的圖形。

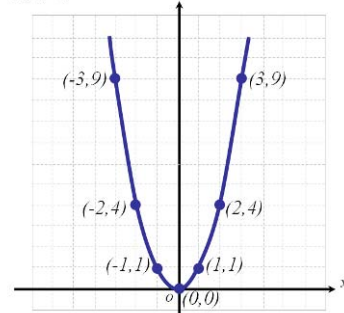
x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9



簡易二次函數的圖形

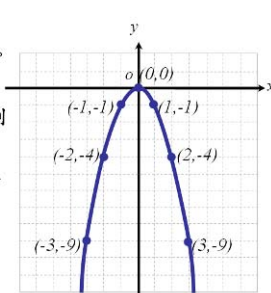
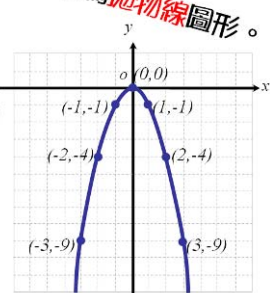
請畫出 $y=x^2$ 的圖形。

x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9



教材分析	二次函數的圖形為圓滑曲線。
能力指標與分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。

	9-a-02 能描繪二次函數的圖形。
多媒體設計原則	<p>1. 空間接近原則：數對關係、直角坐標平面以及點的位置都先擺在接近的位置上。</p> <p>2. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>3. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。</p> <p>4. 個人化原則：與學生產生互動。</p>

(對照組) 投影片 6																									
<p>簡易二次函數的圖形</p> <p>請畫出 $y=-x^2$ 的圖形。</p> <p>畫圖步驟：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、先選 x 值，再求出對應的 y 值。 (至少 5 組) 2、將每一個數對所對應的點描到座標平面上。 3、用 平滑曲線 把各點連接起來，即得圖形。 <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-4</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>-1</td> <td>-4</td> </tr> </table> 	x	-2	-1	0	1	2	y	-4	-1	0	-1	-4	<p>簡易二次函數的圖形</p> <p>請畫出 $y=-x^2$ 的圖形。 <i>稱為拋物線圖形。</i></p> <p>畫圖步驟：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、先選 x 值，再求出對應的 y 值。 (至少 5 組) 2、將每一個數對所對應的點描到座標平面上。 3、用 平滑曲線 把各點連接起來，即得圖形。 <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-4</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>-1</td> <td>-4</td> </tr> </table> 	x	-2	-1	0	1	2	y	-4	-1	0	-1	-4
x	-2	-1	0	1	2																				
y	-4	-1	0	-1	-4																				
x	-2	-1	0	1	2																				
y	-4	-1	0	-1	-4																				
教材分析	了解畫圖步驟，二次函數為拋物線，且讓同學們注意在畫圖的時候，不能只畫到點為止，應要超出點的範圍延伸，呈現正確圖形概念。																								
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p>																								
多媒體設計原則	<p>1. 空間接近原則：數對關係、直角坐標平面以及點的位置都先擺在接近的位置上。</p> <p>2. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>3. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。</p> <p>4. 個人化原則：與學生產生互動。</p>																								

* 第二部份：觀察簡易二次函數圖形開口方向、頂點、對稱軸

(對照組) 投影片 7	
<h3>簡易二次函數的圖形</h3>	
教材分析	二次函數的圖形為線對稱圖形，對稱點會通過頂點（最高或最低點）。
能力指標與 分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：函數式放在圖形旁邊，並使用箭頭連接教學訊息。 2. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 3. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

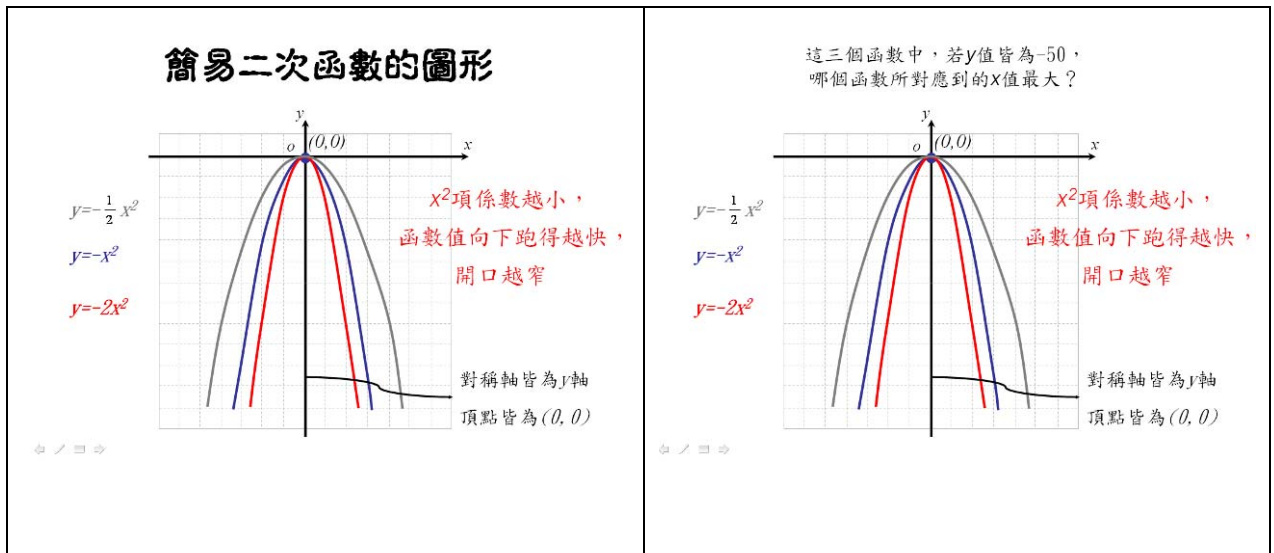
(對照組) 投影片 8	
<h3>簡易二次函數的圖形</h3>	
教材分析	了解二次函數圖形用平方項係數判斷開口方向，頂點為函數值（ y 值）的最大值或最小值位置，並判斷對稱軸。

能力指標與 分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。
多媒體設計原則	1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

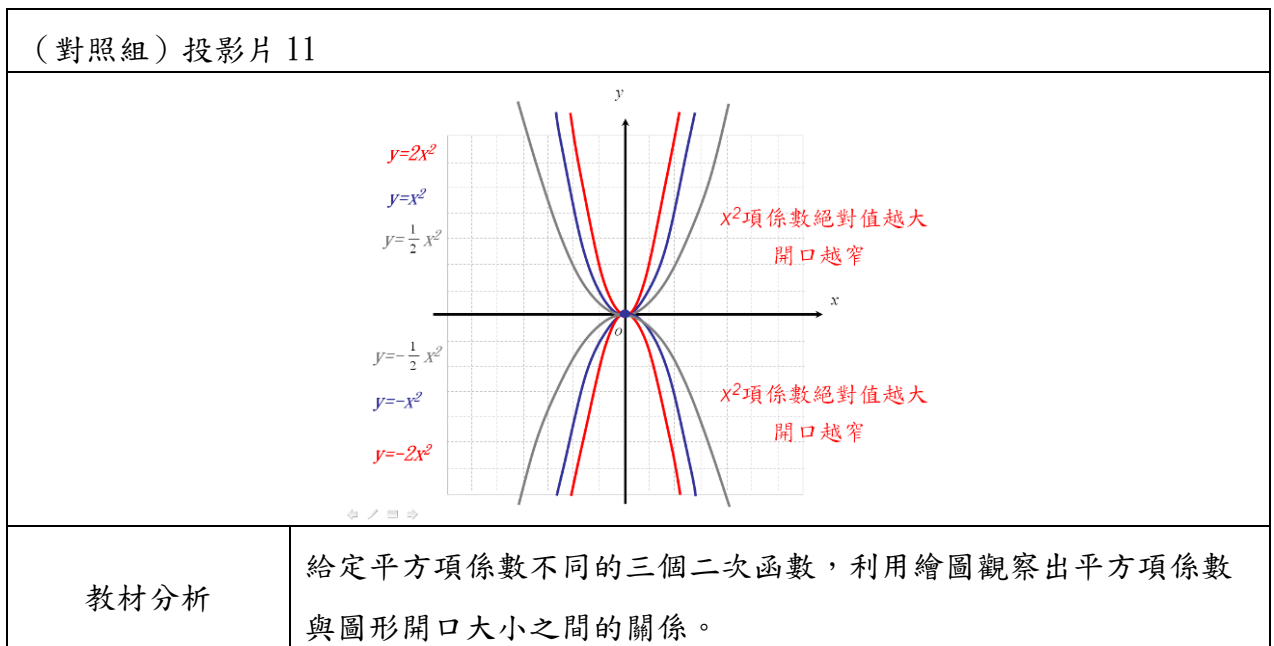
* 第三部份：比較簡易二次函數的開口大小

(對照組) 投影片 9	
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>簡易二次函數的圖形</p> <p>$y=2x^2$ $y=x^2$ $y=\frac{1}{2}x^2$</p> <p>x^2項係數越大， 函數值向上跑得越快， 開口越窄</p> <p>對稱軸皆為y軸 頂點皆為(0,0)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>這三個函數中，當x值越來越大， 哪個函數值最快到達100？</p> <p>$y=2x^2$ $y=x^2$ $y=\frac{1}{2}x^2$</p> <p>x^2項係數越大， 函數值向上跑得越快， 開口越窄</p> <p>對稱軸皆為y軸 頂點皆為(0,0)</p> </div> </div>	
教材分析	給定平方項係數不同的三個二次函數，利用繪圖觀察出平方項係數與圖形開口大小之間的關係。
能力指標與 分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。
多媒體設計原則	1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(對照組) 投影片 10



教材分析	給定平方項係數不同的三個二次函數，利用繪圖觀察出平方項係數與圖形開口大小之間的關係。
能力指標與 分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

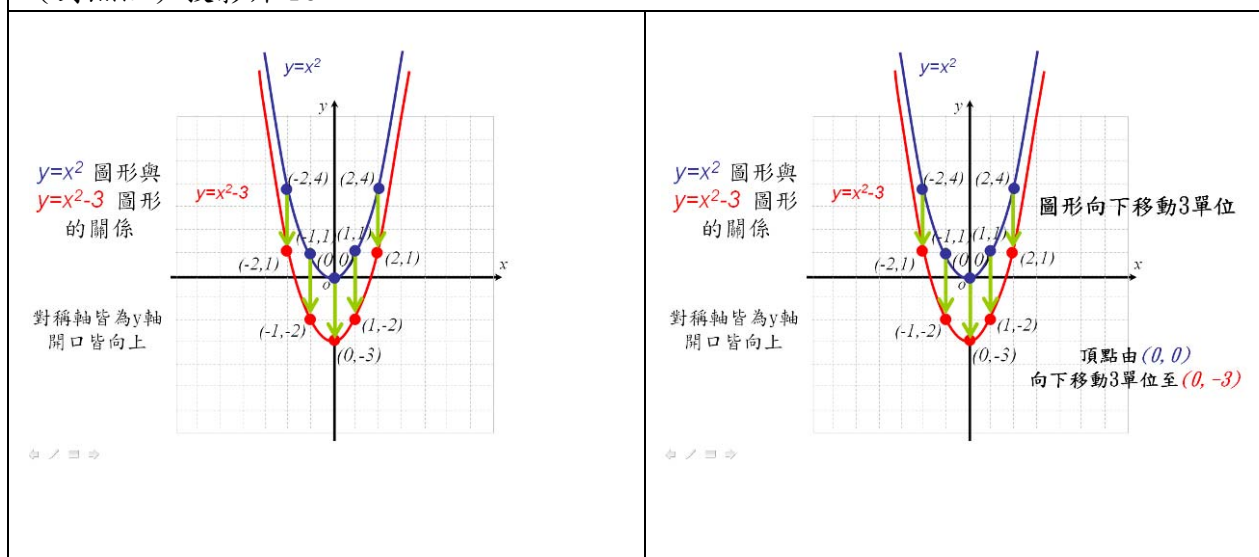


能力指標與 分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

* 第四部份：簡易二次函數圖形的上下移動

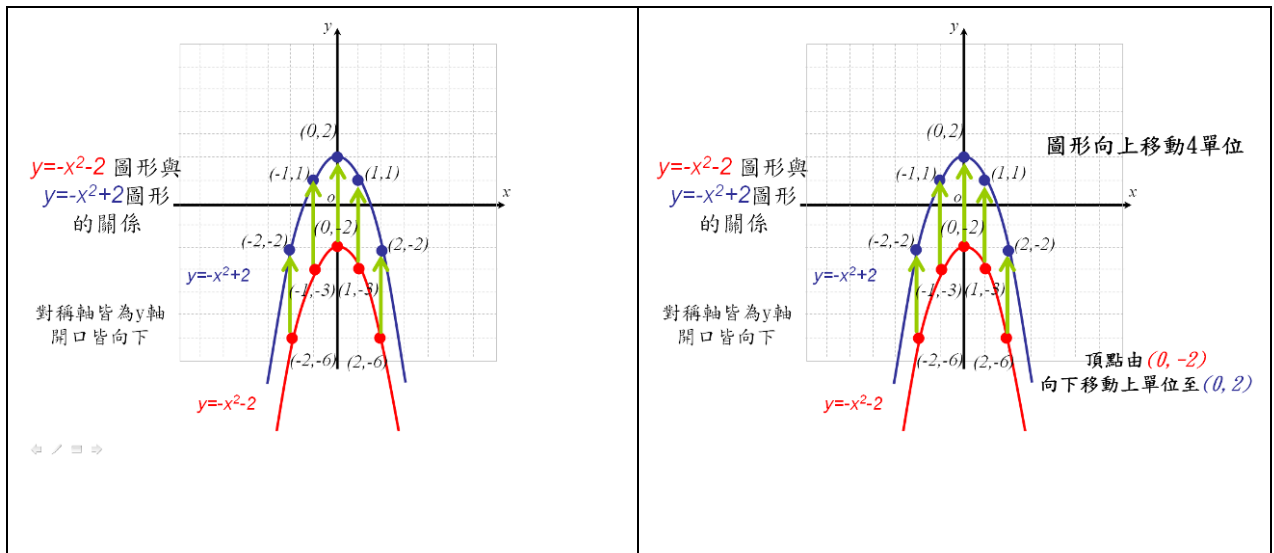
(對照組) 投影片 12	
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="width: 45%;"> <p style="text-align: center;">簡易二次函數的圖形</p> <p>$y=x^2$ 圖形與 $y=x^2+1$ 圖形的關係</p> <p>對稱軸皆為y軸 開口皆向上</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p style="text-align: center;">簡易二次函數的圖形</p> <p>$y=x^2$ 圖形與 $y=x^2+1$ 圖形的關係</p> <p>對稱軸皆為y軸 開口皆向上</p> <p>圖形向上移動1單位</p> <p>頂點由 $(0, 0)$ 向上移動1單位至 $(0, 1)$</p> </div> </div>	
教材分析	給定平方項係數相同，而常數項不同的兩個函數，觀察函數式與圖形之間的關聯。
能力指標與 分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(對照組) 投影片 13



教材分析	給定平方項係數相同，而常數項不同的兩個函數，觀察函數式與圖形之間的關聯或圖形的上下移動。
能力指標與 分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(對照組) 投影片 14



教材分析	給定平方項係數相同，而常數項不同的兩個函數，觀察函數式與圖形之間的關聯或圖形的上下移動。
能力指標與分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。 5. 連貫原則：畫面簡潔，減少不必要的圖像。

(對照組) 投影片 15

Q1：試判斷二次函數 $y=x^2$ 的圖形應有最高點或最低點，且其座標為何？

二次函數圖形皆為拋物線圖形

x^2 項係數？
 $1 > 0$

開口向上

開口向下

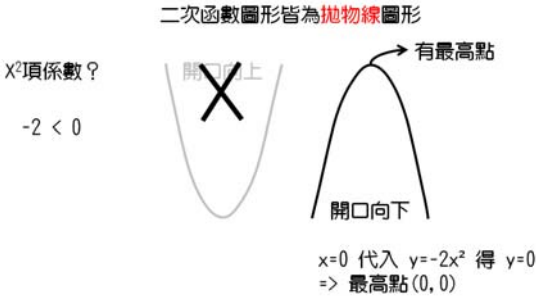
有最低點

$x=0$ 代入 $y=x^2$ 得 $y=0$
 \Rightarrow 最低點 $(0, 0)$

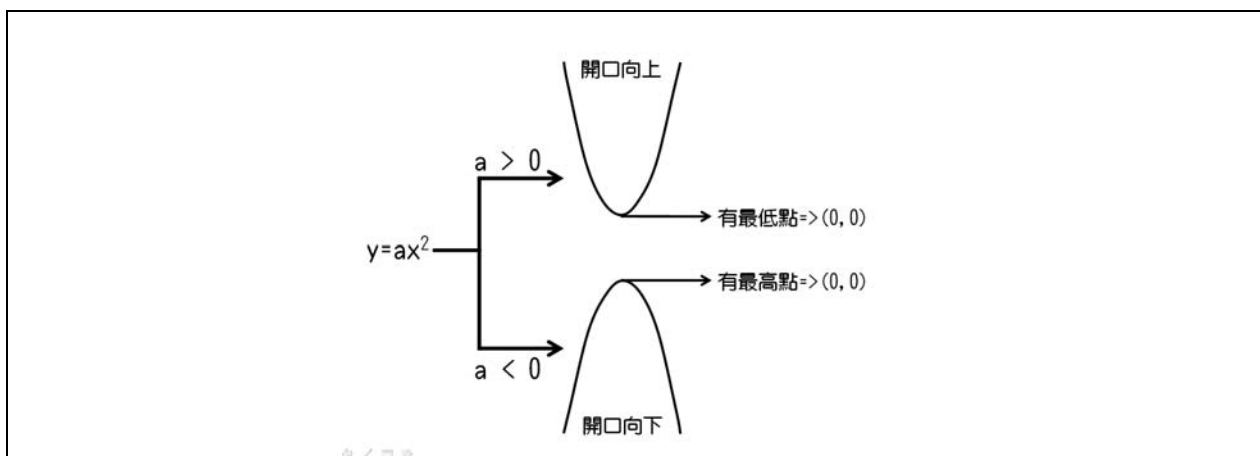
Figure 3: A slide showing the analysis of the quadratic function $y=x^2$. It states that the coefficient of the x^2 term is $1 > 0$, which means the parabola opens upwards. It shows a diagram of an upward-opening parabola with a minimum point at $(0, 0)$ and a downward-opening parabola with a maximum point at $(0, 0)$ crossed out with a large 'X'. The text concludes that for $y=x^2$, the minimum point is at $(0, 0)$.

教材分析	給定函數 $y=ax^2$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
------	---------------------------------

<p>能力指標與 分年細目表</p>	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
<p>多媒體設計原則</p>	<p>1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。</p> <p>2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。</p> <p>3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。</p>

<p>(對照組) 投影片 16</p>	
<p>Q2: 試判斷二次函數$y=-2x^2$的圖形應有最高點或最低點，且其座標為何？</p> <p>二次函數圖形皆為拋物線圖形</p> <p>x^2項係數? $-2 < 0$</p> 	
<p>教材分析</p>	<p>給定函數 $y=ax^2$，判斷圖形開口方向及最高或最低點。</p>
<p>能力指標與 分年細目表</p>	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
<p>多媒體設計原則</p>	<p>1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。</p> <p>2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。</p> <p>3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。</p> <p>4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。</p>

(對照組) 投影片 17



教材分析	給定函數 $y=ax^2$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。 9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。
多媒體設計原則	1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。

(對照組) 投影片 18

Q3: 試判斷二次函數 $y=-2x^2+3$ 的圖形應有最高點或最低點，且其座標為何？

二次函數圖形皆為拋物線圖形

x^2 項係數?
 $-2 < 0$

$x=0$ 代入 $y=-2x^2+3$ 得 $y=3$
 \Rightarrow 最高點 $(0, 3)$

教材分析	給定函數 $y=ax^2+k$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與分年細目表	A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。

	9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。

(對照組) 投影片 19	
<p>Q4：試判斷二次函數$y=3x^2-5$的圖形應有最高點或最低點，且其座標為何？</p> <p>二次函數圖形皆為拋物線圖形</p> <p>x^2項係數？ $3 > 0$</p> <p>開口向上</p> <p>有最低點</p> <p>$x=0$ 代入 $y=3x^2-5$ 得 $y=-5$ \Rightarrow 最低點(0, -5)</p> <p>開口向下</p>	
教材分析	給定函數 $y=ax^2+k$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。

(對照組) 投影片 20

教材分析	給定函數 $y = ax^2 + k$ ，判斷圖形開口方向及最高或最低點。
能力指標與 分年細目表	<p>A-4-18 能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。</p> <p>9-a-02 能描繪二次函數的圖形。</p> <p>9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。</p>
多媒體設計原則	<ol style="list-style-type: none"> 1. 空間接近原則：出現的文字都接近該強調的位置區域。 2. 時間接近原則：畫面轉換配合學生回答出現。 3. 通道原則：出現圖形或文字時，搭配口語講解。 4. 重複原則：轉換畫面時，搭配口語說明，減少多餘文字出現。

附錄四：

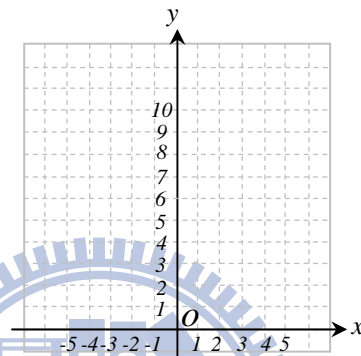
【函數學習成就測驗】後測

本頁作答5鐘，聽老師指示停止作答

班級 座號 姓名

簡易二次函數的圖形(第一部分)

1. 請在右圖畫出 $y = \frac{1}{3}x^2$ 的圖形。

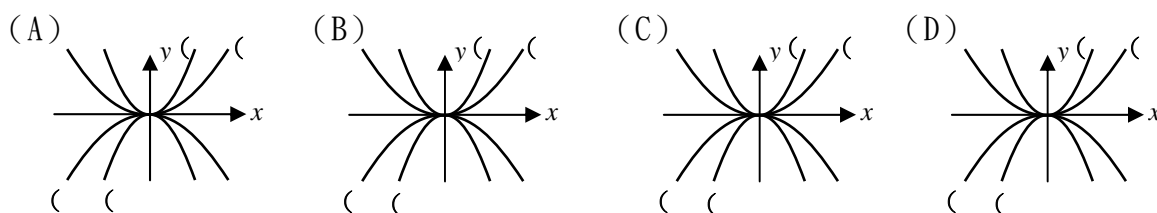


2. () 把兩個二次函數 $y = 2x^2$ 與 $y = -2x^2$ 的圖形畫在同一坐標平面上，將之看成一個圖形時，則此圖形的對稱軸為下列何者？(A) $x=1$ (B) y 軸 (C) x 軸 (D) x 軸及 y 軸皆是。
3. () 若二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 $(2,8)$ 與 $(-2,8)$ 兩點，則其對稱軸為何？(A) $x=4$ (B) $x=0$ (C) $x=1$ (D) $x=8$ 。

簡易二次函數的圖形 (第二部分)

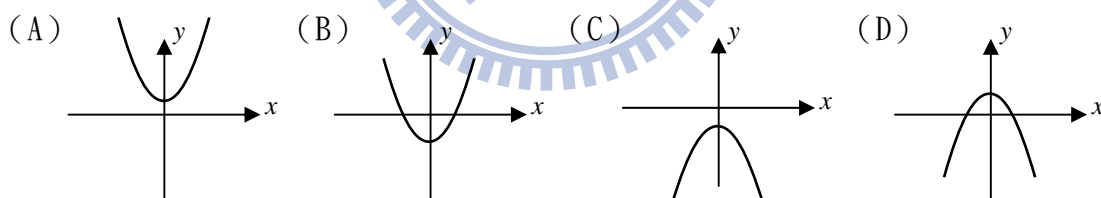
4. () 下列哪一個二次函數的圖形開口最大？(A) $y = x^2$ (B) $y = -2x^2$ (C) $y = -\frac{3}{2}x^2$ (D) $y = \frac{2}{3}x^2$ 。

5. () 有四個二次函數如下：(甲) $y = 4x^2$ (乙) $y = -4x^2$ (丙) $y = \frac{1}{4}x^2$ (丁) $y = -\frac{1}{4}x^2$ 。則下列何者為它們在同一坐標平面上的圖形？



6. () 若兩拋物線 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 及 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ 的頂點分別為 A、B，則 $\overline{AB} = ?$ (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0。

7. () 已知二次函數 $y = ax^2 + k$ ，其中 $a < 0$ 、 $k < 0$ ，則下列哪一個選項可能是此二次函數的圖形？



8. () 在坐標平面上有一個二次函數 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ ，經過平移後，頂點為 $(0, -4)$ ，則此二次函數的圖形為下列何者？(A) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ (B) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$ (C) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ (D) $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$ 。

9. () 若兩個二次函數 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 3$ 與 $y = ax^2 + b$ 圖形的開口方向相同，且開口大小相等，若這兩個函數圖形的頂點相距 3 個單位，則 $b = ?$ (A) 6 (B) -6 或 0 (C) 6 或 0 (D) 0。