

國立交通大學

理學院應用科技學程

碩士論文

光學中萬花筒圖斑的形成



Generation of Kaleidoscopic patterns in optics

研究生：林利娟

指導教授：陳永富教授

中華民國一百年七月

光學中萬花筒圖斑的形成

Generation of Kaleidoscopic patterns in optics

研 究 生：林利娟

Student : Li-Chuan Lin

指 導 教 授：陳永富教授

Advisor : Yung-Fu Chen



A Thesis

Submitted to Degree Program of Applied Science and Technology College of Science

National Chiao Tung University in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master in

Degree Program of Applied Science and Technology

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

光學中萬花筒圖斑的形成

學生：林利娟

指導教授：陳永富教授

國立交通大學理學院應用科技學程碩士班

摘要

在自然界裡，可以發現一些有趣的幾何圖形。我們希望能利用電腦模擬與實務操作讓這些有趣的圖騰重現。本論文主要是利用光學方法形成各種萬花筒圖斑，論文的研究工作共分為兩個部份，分別是 Quasi-Crystal 圖形與 Super Lattice 圖形。經由平面波的疊加，將不同方向等距的平面波用干涉的方式產生圖形，利用電腦輔助研究產生所謂的準晶格與超晶格圖樣，並以實驗架構驗證其圖樣，其結果如預期跟電腦模擬圖形相吻合。

Computer-aided visualization for investigation of quasi-crystal patterns

student : Li-Chuan Lin

Advisor : Dr. Yung-Fu Chen

Department of Degree Program of Applied Science and Technology

Course

National Chiao Tung University



In the nature, there are some interesting geometric figures. We hoped that we can let these interesting totem reproduction with computer simulation and practical operation. In this paper, we have demonstrated that the optical crystal, quasicrystal, and kaleidoscope beams can be generated with a collimated light to illuminate by a high-precision mask with multiple apertures regularly distributed on a ring. We also found that the super lattice patterns can be generated with the same method.

誌 謝

首先要感謝我的指導老師陳永富教授在這兩年來，不斷的提醒及勉勵我們對於身為一個碩士生應具有的專業知識、及作研究的學習態度。當同學有研究上的困惑時，老師也能從旁推敲點出同學的盲點，解決同學的困惑，很榮幸能在老師的實驗室學習，讓我受益良多，在不斷的摸索與學習當中，也讓我進步成長不少；還要感謝梁興弛學長對我的指導，不管是電腦模擬的技巧或是實驗架構的操作技巧總是毫不保留的教導我，給我許多學習上的協助並解決我學習上遇到的問題；感謝毓捷學姊在興弛學長事務繁忙的時間協助我論文的學習；感謝蘇冠暉老師與實驗室其他學長姐給我許多的協助，當我有其他疑問時也都很熱心的替我解惑跟分享生活上的心得；感謝我的同學淑美、瑋倫、金豪大家在這段時間互相的鼓勵，彼此提醒；最後感謝我的父母及兄弟姐妹們的鼓勵與支持，讓我能夠很幸福快樂的去追求我的夢想完成這段學業。還有其他協助過我鼓勵過我的朋友們感謝你們對我的關心與照顧，最後以一顆誠摯感恩的心謝謝大家。

目 錄

中文摘要	iii
英文摘要	iv
誌謝	v
目錄	vi
圖表目錄	vii
一、	緒論.....	1
1.1.	研究動機.....	1
1.2.	本論文結構.....	2
二、	各式各樣的萬花筒圖騰.....	3
2.1.	對稱.....	3
2.2.	萬花筒圖騰.....	5
2.3.	Tiling 圖樣與伊斯蘭教圖樣.....	9
2.4.	礦物中的 Quasi-crystal 圖樣.....	15
2.5.	克拉尼圖形與 Faraday wave.....	20
三、	電腦輔助產生 Quasi-crystal 圖像.....	24
3.1.	Diffracting and non-diffraction.....	24
3.2.	Singularity.....	28
3.3.	理論計算與討論.....	35
3.4.	結論.....	44
四、	光學中準晶格圖騰的產生.....	45
4.1.	實驗架構.....	45
4.2.	實驗觀察與結果.....	47
4.3.	實驗分析與討論.....	52
4.4.	結論.....	56
五、	Super lattice 圖像產生方式.....	57
5.1.	Super lattic.....	57
5.2.	理論計算.....	58
5.3.	實驗架構.....	59
5.4.	實驗討論.....	62
5.5.	結論.....	75
六、	結論與未來展望.....	76
參考文獻	79

圖表目錄

圖 2.2.1	各種不同的萬花筒圖樣.....	6
圖 2.2.2	萬花筒示意圖.....	7
圖 2.3.1	Penrose 的方法產生出五對稱圖形.....	10
圖 2.3.2	綠寶石的分子結構與伊斯蘭教圖騰.....	12
圖 2.3.3	三價鐵輪的分子結構與伊斯蘭教圖騰.....	13
圖 2.4.1	自然界 Quasi-crystal 礦物圖與分子結構圖.....	17
圖 2.4.2	富勒烯分子結構.....	19
圖 2.5.1	克拉尼振沙圖形.....	22
圖 2.5.2	法拉第表面波振水圖形.....	23
圖 3.1.1	兩個單狹縫的繞射條紋.....	26
圖 3.2.1	圓形色盤.....	30
圖 3.2.2	旋渦、來源和水槽和馬鞍.....	33
圖 3.2.3	相位奇異點、最大值和馬鞍.....	34
圖 3.3.1	理論模擬的晶格結構和準晶格結構圖案.....	38
圖 3.3.2	理論模擬高階($q=16$ 、 21 和 30)的準晶格結構圖案.....	41
圖 3.3.3	不同初始相位理論計算圖.....	42
圖 3.3.4	準晶格結構圖案與對應相位圖.....	43
圖 4.1.1	實驗架構.....	46
圖 4.2.1	實驗模擬的晶格結構和準晶格結構圖案.....	48
圖 4.2.2	z 軸上不同位置之橫截面所產生之準晶格結構圖案...	50
圖 4.2.3	實驗上高階($q=16$ 、 21 和 30)的準晶格結構圖案.....	51
圖 4.3.1	傾斜角和特定相位準晶格結構圖案.....	54
圖 4.3.2	實驗驗證準晶格結構的圖案都隱含著相位結構.....	55
圖 5.3.1	實驗架構.....	60
圖 5.3.2	Super lattice 形式一.....	61
圖 5.3.3	Super lattice 形式二(Circle bundle).....	61
圖 5.4.1	3 對稱相對角度實驗與理論結構圖案.....	63
圖 5.4.2	3 對稱相位圖.....	64
圖 5.4.3	4 對稱相對角度實驗與理論結構圖案.....	65
圖 5.4.4	5 對稱相對角度實驗與理論結構圖案.....	67
圖 5.4.5	5 對稱相位圖.....	68
圖 5.4.6	6 對稱相對角度實驗與理論結構圖案.....	69
圖 5.4.7	理論模擬 Circle bundle-平移分布圖.....	72

圖 5.4.8	理論模擬與實驗模擬 Circle bundle-平移分布圖.....	72
圖 5.4.9	理論模擬 Circle bundle-旋轉分布圖.....	73
圖 5.4.10	理論模擬與實驗模擬 Circle bundle-旋轉分布圖.....	73
圖 5.4.11	8 對稱實驗模擬系列結構圖案.....	74
圖 6.1.1	平面波與準晶格干涉圖案.....	77
圖 6.1.2	不同距離下干涉圖案.....	78



第一章 緒論

1.1 研究動機

萬花筒(Kaleidoscope)發明學者布魯斯特爵士 (Sir David Brewster) 說過：「全世界最優美的幾何圖形，就在我們的周圍：葉子的網脈、花瓣的邊緣、蝸牛背的圖案、樹皮的紋路，上帝一定是個最偉大的雕刻家，是藝術靈感的泉源，藝術是上帝放在人心中最深的邏輯。」萊爾·華特森(Lyall Watson)也曾說過：「生命從無序之中產生圖樣，生命本身是由圖樣構成的，而其建構方式是宇宙與生俱來的；生命一直以來都是受這種力量影響。」[1]在自然界裡，可以發現一些有趣的對稱性，對這些圖樣深入的研究，就可以了解各種物理圖像的形成自有其規律包含動植物的紋路、礦物的紋理、甚至磁磚的排列方式、伊斯蘭教的幾何圖形、從數學的二項式定理及物理方程式中皆有圖樣的產生。Quasi-crystal非週期性規則的圖樣在1976年被Roger Penrose發現後，其無平移對稱而有特殊的旋轉對稱的性質，也影響後來的伊斯蘭教的幾何藝術[2, 3]。

1984年D.Shechtman發現將鋁-錳兩元素相互融合後並快速冷卻所產生的合金中有尋常的五對稱準晶格圖形，同年Ishimasa在鎳-鉻合金中發現12對稱的準晶格圖形[4]。另外還有一部分就是以沙子或液態物質來做媒介，以垂直振盪的方式來產生平面波，因其媒介的表層很薄，故其振盪會產生區塊性的移動，進而產生一些Quasi-crystal圖樣，其主要以Faraday wave function來分析其Quasi-crystal圖樣[5]。過去產生各種不同的Quasi-crystal圖樣方式中，有部分方式是以平面波疊加的方式來產生。本實驗是利用二維干涉與繞射的電腦輔助程式模擬與雷射光架構實驗做驗證。在自然界，光無時無刻都存在我們周

圍，因此藉由光的干涉和繞射，就可以呈現出各種漂亮的圖騰，也因為光的模擬跟擷取是容易被控制與重建，很適合用來實驗模擬光的干涉現象，在 1801 年 Thomas Young 從雙狹縫實驗中觀察到光干涉條紋，證實光的波動性，「光」的行為像是一種「波動」，一種不需要介質便能傳播的「波」，自然界如光子、電子或是原子，都能用一個微分方程式來描述，例如量子力學的薛丁格方程式。方程式的解即為波函數。因為波函數具有疊加性，能夠像波一樣互相干涉和繞射，適合用來觀察光的干涉現象。以雷射的同調性、穩定性與可調性，並且去設計有關聯性跟特殊性的系列圖騰，也經由實驗模擬驗證當初程式模擬所預計的規則性，當數個光源的相互干涉，將它定量並以不同旋轉角度去呈現，會有 n 個干涉平面波，並使用平面波疊加的方式，產生類似雙狹縫相互交疊的 Quasi-crystal 干涉，當光線經過障礙物邊緣獲通過狹縫(小孔)時所產生的微小擴散偏折，繞射作用會造成明暗相間的條紋。將數個干涉波的疊加強度顯影在接受器上，就會顯現出美麗又多變的 Quasi-crystal 圖樣。

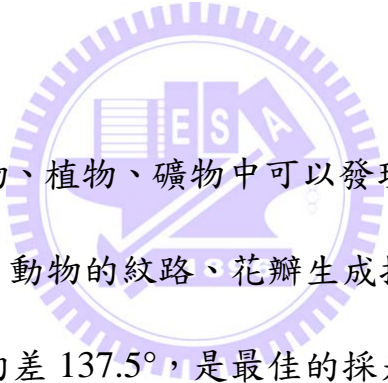
1.2 本論文結構

本論文第二章首先探討各種產生晶格、準晶格圖樣的方法及發現，接著說明對稱性探討、貼磚圖樣、伊斯蘭教圖騰及萬花筒圖形，其中許多圖案是從自然界礦物中或合金中發現，也有部分是從多光源干涉所曝光產生出的圖形，另外也有利用 Faraday wave 跟 Chladni 的實驗架構來震水或震沙，觀察其形成的圖樣。第三章是探討準晶格的理論架構跟分析，利用波疊加的原理來產生類似準晶格圖樣，並分析其圖形特性。第四章是從實驗上來產生並觀察準晶格圖樣分析。而第五章是針對超晶格圖形進行理論分析與實驗，發現實驗與理論都相當吻合。第六章是結論與未來發展的方向。

第二章 各式各樣的萬花筒圖騰

我們能從一般的平面鏡中看到鏡子前面物體的像，是因為鏡子前的物體所反射的光線，經過平面鏡反射後進入我們的眼睛。萬花筒圖樣，它主要運用的科學概念，就是利用稜鏡多重折射的原理，光線在萬花筒內的鏡子來回折射，萬花筒內的彩色碎紙經過三面鏡子所組成的稜鏡多重折射後，也就產生了各種不同的影像，而每一次的轉動又是另外一次折射的開始，所以又會出現另外一種不同的花樣組合！

2.1. 對稱



在自然界裡，從動物、植物、礦物中可以發現存在一些有趣的對稱性，包含昆蟲的翅膀、動物的紋路、花瓣生成排列與果實、植物葉序的生成，每層角度大約差 137.5° ，是最佳的採光與通風角度，是生物世界的黃金比例。礦物中元素合金、晶格的排列..等在微觀下會發現其週期性圖形。按幾何學意義，一個圖形在運動中看起來似乎不動，這個圖形就是對稱的。當物體沿直線移動一段距離，看上去並無變化。這樣的物體有規則的反覆出現的形象。單一個圖形不可能具有平移對稱性。但是規則的反覆出現的形象，例如磚牆，花紋地板和晶體點陣具有平移對稱性。點陣還能夠具有其他對稱性，但它們成為點陣必須具備平移對稱性。當單元晶胞具有其他對稱性時，晶胞在整個點

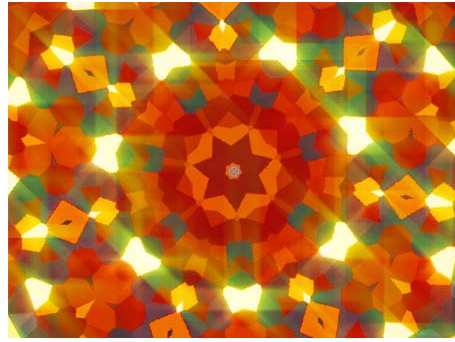
陣中重複，具有放大這些對稱性的效果，使這些對稱性顯示在肉眼可見的晶體上。

一個正方形繞著它的中心轉動 90 度後看上去和未轉動一樣，但如轉動 120 度，它的方位就變了。它具有轉動 90 度的徑向對稱，但沒有轉動 120 度的。正方形有對稱的轉動的四重軸 (4×90 度-360 度)，但沒有三重軸 (3×120 度-360 度)。例如海星有對稱的五重軸。正五邊形不可能配合成全方位都平滑的圖形。因此，如果地板是用正五角形瓷磚拼成，這個瓷磚地板必然有空隙。僅僅是具有一重、二重、三重、四重、六重轉動對稱的晶體能夠有平移對稱性。

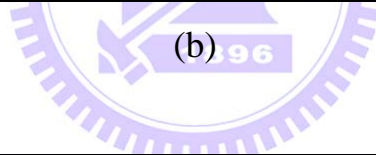
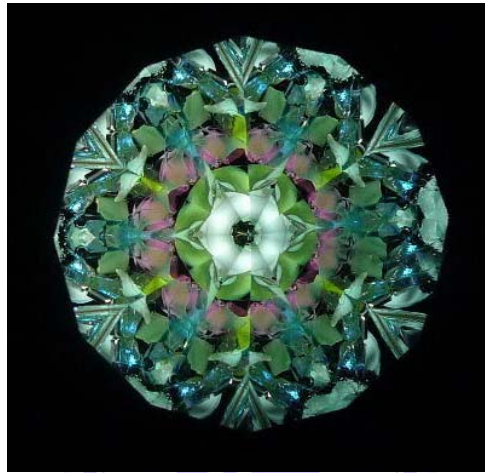
曾有植物學家分析，發現花長得愈對稱，不但愈得蟲媒的青睞，還製造最多的花蜜跟花粉；不對稱的花，就算幸運授了粉，長出來的種子也容易夭折。

2.2. 萬花筒圖騰

Crystal 圖樣就是最簡單的 Kaleidoscope(圖 2.2.1)圖樣，萬花筒 (Kaleidoscope)是在 1816 年，由蘇格蘭物理學家布魯斯特爵士 (Sir David Brewster) 所發明。布魯斯特主要從事光學和光譜研究，在童年時代就十分喜歡光學實驗，一生中的大部分時間都花在他所喜愛的光學上。有一次當他在使用多面鏡子研究光的性質時，看到了幾面對放置的鏡子裡經過多次反射呈現出來的景象，便放了一些花紙在鏡子組成的圓筒裡，結果，他看到了一些對稱的圖案，而且每變動一下花紙的位置，圖案就會變換一次。為了能使圖案不斷地變換，他將三面成角度的鏡子放在一個圓筒裡，再將花紙放在筒端的兩層玻璃間。隨着三角鏡中鏡子的角度變化，影像的數目也隨之變化；影像重疊後形成各種圖案，不停地轉動萬花筒就可以看到不斷變換的圖案。就這樣他製作出了只要輕輕轉動就能看到不同圖案的萬花筒。他將此發明命名為「Kaleidoscope」，申請專利而來。「Kaleidoscope」字源是希臘文，「Kalos」是美麗的意思、「eidos」是成像的意思、「scopes」是觀測器的意思，總合起來「Kaleidoscopes」就是美麗影像的觀測器，也就是萬花筒。他設計的萬花筒示意圖如下(圖 2.2.2)，他將兩片夾角 60 度的鏡子 L1、L2 放入管狀的遮蔽物中，只有尾端透光，他將管內的物體放在 L1 鏡子上，其在 L1 鏡面反射出第一個倒影；而其倒影



(a)



(b)



(c)

圖 2.2.1 各種不同的萬花筒圖樣

與本體的組合圖形在藉由 L2 反射產生出第二個倒影；另外 L2 藉由第二倒影的虛擬鏡面的反射在 L2 的 180 度產生了另一個虛擬鏡面，第二倒影也藉由此虛擬鏡片產生出第三倒影。這樣產生的圖樣非常的美麗。



2.3. Tiling 圖樣與伊斯蘭教圖樣

Tiling 圖樣是利用反射對稱來產生圖形，它不具有平移對稱特性，但卻有明顯的旋轉對稱的結構。於 1976 年由 Penrose 提出一種簡單的方法產生出五對稱圖形(圖 2.3.1)，利用「matching rules」來建構其基底圖形，並發現用五邊形建構圖形時，會有三種特殊的形狀(星形、船形與菱形)穿插在其五邊形中，後來又發現了 P2 與 P3 的兩種不同的組成方式，P2 是以鳶形及箭形所組成，而 P3 是由兩種不同角度之菱形所組成。一個「Penrose tiling」有非常值得注意的特性，尤其是下列幾點：

1. 它不具有週期性，也就是它沒有平移對稱的特性，更簡單的說就是原始圖樣的各方位的平移位置並未有相同圖形。
2. 在某個區域內的圖樣皆顯露出無限延伸的趨勢，這種特性在具有平移對稱的圖形中是很尋常的特性；但在於不具有平移對稱的圖形中這種特性是十分特殊的。
3. 它所產生的圖形是 Quasi-crystal 圖樣，它具有布拉格繞射定理的物理結構，這種結構以五對稱圖形為基底的遠距階層圖樣，這樣的階層圖樣表達出該圖形具有組織，雖然不具有平移對稱性，但具有旋轉對稱性。

Tiling 的特性啟發了後來的人嘗試研發其他不同的組合方式，如替

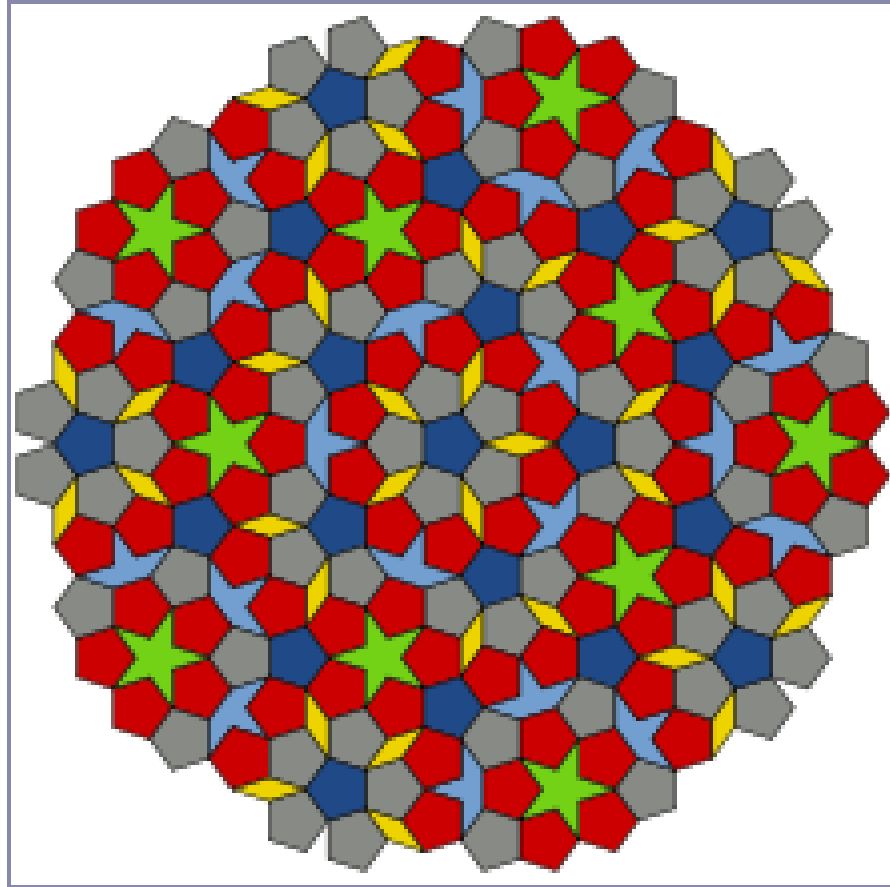


圖 2.3.1 Penrose 的方法產生出五對稱圖形

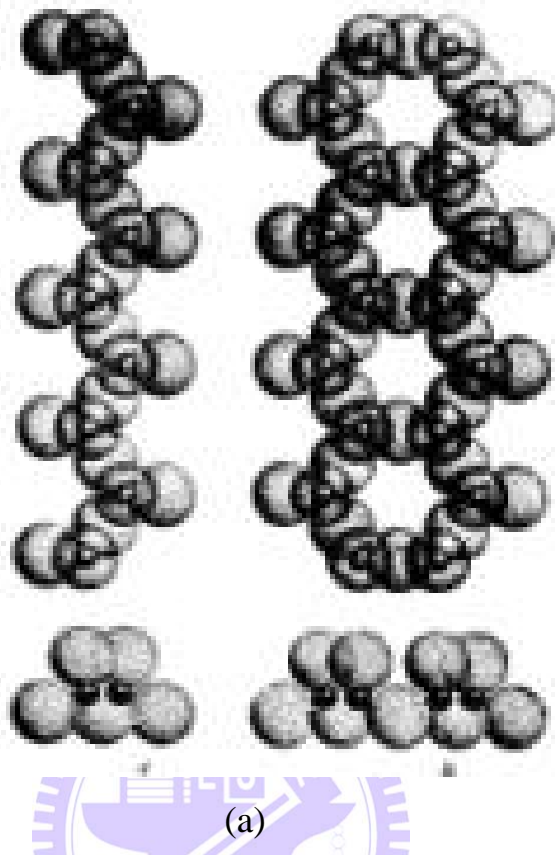
代法、剪下與投射組合法和覆蓋法等，讓圖樣產生更豐富也更多元化。

伊斯蘭圖樣的一個特徵就是複製，它的幾何圖樣與對稱以三種特殊的幾何特色出現：

1. 矩形庫法字母用於建築表面，以增添威嚴與肅穆。
2. 蔓藤花紋，螺旋形狀連續纏繞，起伏與接合，週期與節奏的感覺，在圖樣中非常顯著。
3. 以複雜的多邊形以及圓弧所圍繞的區域。

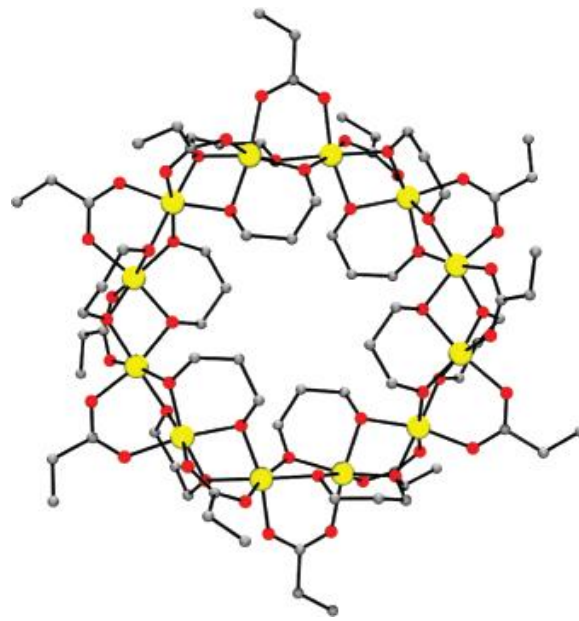
所用的幾何基礎是藉著複製格子，圖樣能無窮重複，盡可能填充空間，其特性是當觀賞者注視一幅圖樣時，眼神會隨線條連續”流動”，並看到許多複雜的結構與關係，眼睛沒有自然的聚焦點，這種特色在其他文化的幾何設計並不明顯，並遵守某些固定的原則，這些原則乃基於對自然律的觀察，其整體結構與各個部份之間有一種互相調和的比例關係，利用平移、旋轉、鏡射和滑動鏡射來建構，這個方式使伊斯蘭圖樣能無限延伸及更添加複雜豐富的色彩。

而伊斯蘭的圖案結構也跟許多的分子結構相同，如 $Be_3Al_2Si_6O_{18}$ (俗稱綠寶石) (圖 2.3.2) 及 Ferric wheel (三價鐵輪) (圖 2.3.3)。這種複製的結構是伊斯蘭圖樣的一種特徵，也是生物微觀層次一種很重要的特性，所以伊斯蘭教圖樣很適合用來探索一些分子結構。

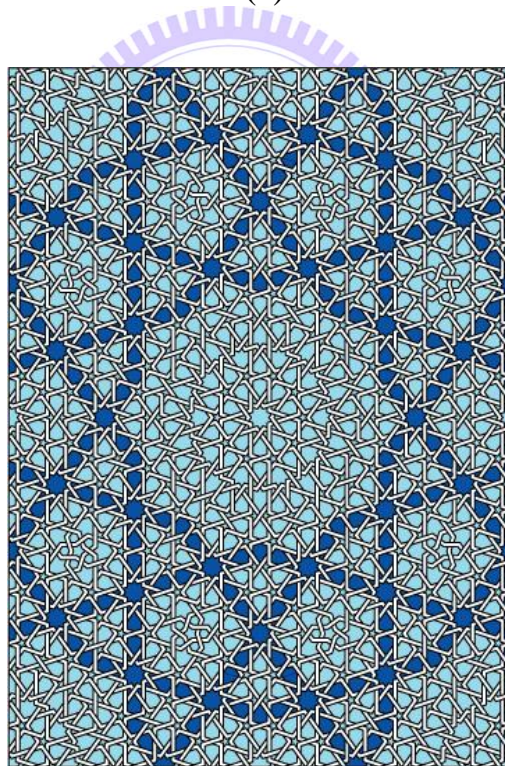


(b)

圖 2.3.2 (a) 綠寶石的分子結構 (b) 伊斯蘭教圖騰



(a)



(b)

圖 2.3.3 (a) 三價鐵輪的分子結構 (b) 伊斯蘭教圖騰

在中世紀伊斯蘭建築物的外牆都有幾何星形與多邊形的 girih 圖案。”girih 瓷磚法”證實伊斯蘭在設計上揭示了重要的數學突破，到了 15 世紀這些瓷磚圖案變得特別複雜，其中有些圖案被知名的數學家彭若斯在 1970 年提出而聞名於世的「準晶體」(quasicrystal) 結構，在 20 世紀 70 年代初 Roger Penrose 首先發現有名的 Penrose 圖案，在這項研究中，如果朝各方向無限延伸出去，圖樣永遠不會重複出現，這正是準晶體完美的結構特性。



2.4. 礦物中的 Quasi-crystal 圖樣

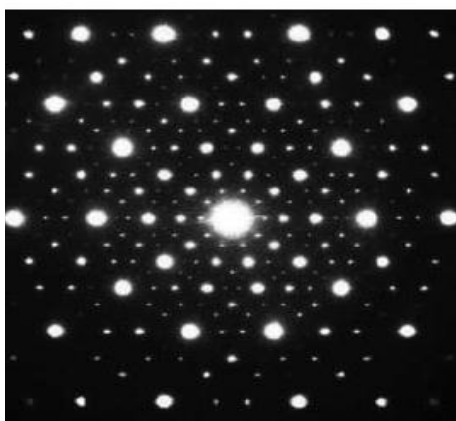
在自然界中有許多不同的礦物，而他們的晶格排列可區分為無結晶形、準結晶形及結晶形。無結晶形晶格的原子排列是混雜不規則的，它們不具有垂直及平行對稱及旋轉對稱的特性；結晶形晶格的原子排列是有垂直及平行對稱的，它的結構可以以同樣的原子或原子簇規則重複排列來表示；準結晶格的原子排列是具有旋轉對稱但不具有垂直及平行對稱的特性。在兩個世紀以前，科學家只發現於 2、3、4 與 6 軸對稱的晶格，其他如 5 與 7 軸對稱的晶格，甚至於更高階軸的對稱晶格未在礦物中發現。

準晶格的原子具有比原子更精巧且長程的對稱特性，它的原子的位置都分部在其對稱軸上，所以可以利用具週期性且有無理數比的多個波長來疊加描述[6]，而這種描述法可以產生出各式各樣不同的 quasi-crystal 圖案，包括其 5、7 及更高階旋轉對稱圖形。第一個發現有旋轉對稱的礦物是利用急速冷卻鋁錳合金產生出 20 對稱的準晶格[4]，之後有數百種產生準晶格的合金，但全數都是在實驗室中產生的，也得知目前最理想的化學劑量、溫度與冷卻狀況來產生 20 對稱準合金，但是還有許多未知的方式可以產生準晶格，所以發展出「粉末衍射探知法」。而 Peter Lu 等人鑑定 1986 年在俄羅斯山上發現一個 2 億年前礦石，其礦石包含銅、鋁與鋅的各種合金，這礦石經由穿

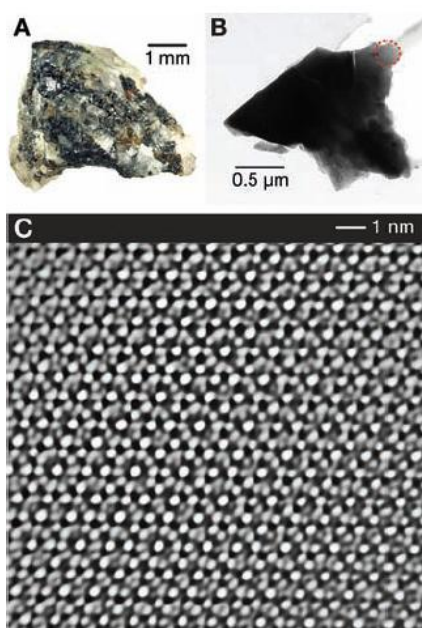
透式電子顯微鏡與 X-射線粉末衍射測量鑑定上千種的礦物，發現一種叫 Khatyrkite($Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$)的礦物，發現它有五對稱準晶格(圖 2.4.1)，這樣的結構在自然界中第一次被發現，也開啟新的準晶格探測的方向。

1912 年，勞厄證明晶體衍射 x 射線。原子有序地排列在晶體結構中，所散射的 x 射線在某個方向上互相加強。另一種富勒烯為 C60(Fullerene)，這個新的碳同素異形體(另兩種為鑽石(Diamond)和石墨(Graphite))有些特別，因為 C60 不是化合物，而是一種單質，但它從結構和性質上卻表現出了許多與平面烯烴相類似的化學性質，如果按照傳統化學命名法使人頗為為難。在數學上，富勒烯的結構都是以五邊形和六邊形面組成的凸多面體。最小的富勒烯是 C20，有正十二面體的構造。沒有 22 個頂點的富勒烯，之後都存在 C2n 的富勒烯，n = 12, 13, 14 ...等。暫時有 1812 種富勒烯，只有 C60 沒有相鄰的五邊形。由於富勒烯有很多很好的特性，例如:它的硬度比鑽石還硬，韌度比鋼強，導電性比銅強，而重量只是銅的六分之一，還可用來改變放射性元素的半衰期，所以它是材料科學重要一種元素。完全由碳組成的中空球型、橢圓型、柱型或管狀分子的總稱。其他名稱還有球碳和芙等，是於 1985 年發現的繼金剛石和石墨之後。

碳元素的第三種晶體形態。由於首次發現的富勒烯為 C60，並被命



(a)



(b)

圖 2.4.1 (a) Khatyrkite X-射線粉末衍射測量圖

(b) A. Khatyrkite-bearing 礦物原貌

B. 純 Khatyrkite 礦物

C. Khatyrkite 穿透式電子顯微鏡測量圖

名為（巴克明斯特·富勒）（圖 2.4.2）因拱形圓頂建築是由美國著名設計師巴克敏斯特·富勒（Richard Buckminster Fuller）設計的，Kroto 等人為了紀念這位偉大建築學家，所以將 C60 命名 Buckminsterfullerene，簡稱為富勒烯（Fullerene）或巴克球（Buckyball）。後來，隨著 C60 系列及其衍生物的不斷發現、製備和研究，於是便將包括 C60 在內由偶數個碳原子形成的籠狀分子通稱為 Fullerene。現在，Fullerene 的含義已遠遠超出這個範圍。



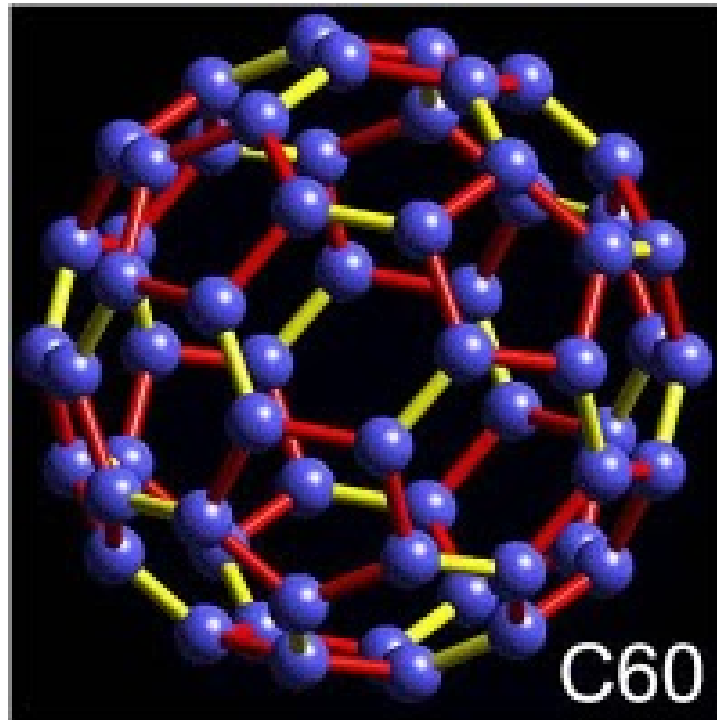


圖 2.4.2 富勒烯分子結構

2.5. 克拉尼圖形與 Faraday wave

德國物理學家克拉尼（Ernst Florenz Friedrich Chladni, 1756-1827）

所創造的克拉尼圖形：

(1) 圖形名字取自有「現代聲學之父」美譽的德國科學家克拉尼，因他是最先用數學方法分析聲波的人因此紀念他在聲學基礎理論的貢獻。

(2) 克拉尼在1809年以小提琴的弓弦代替銼刀振動金屬板演奏，利用金屬板的振動使金屬板上的細砂停留在節線上，排列出規則而對稱的美麗圖案，即著名的克拉尼圖形(Chladni Pattern)。

利用以下的方法而產生克拉尼圖形：

(1) 將弓弦接觸金屬板的邊緣處，當弓弦施力金屬板邊緣處摩擦金屬板時，金屬板會產生振動。而金屬板振動的狀態與金屬板的材質、金屬板的形狀、金屬板的支撐位置、金屬板的固定方式...等因素有關。

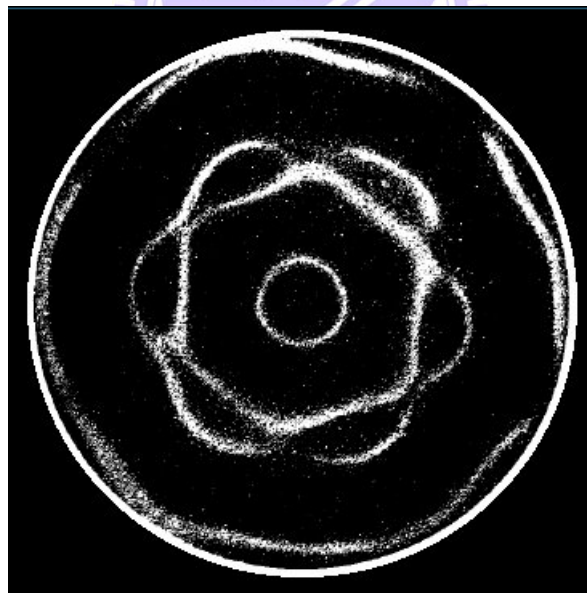
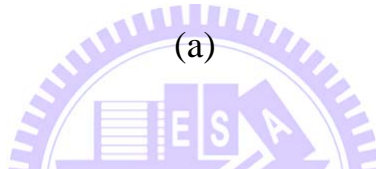
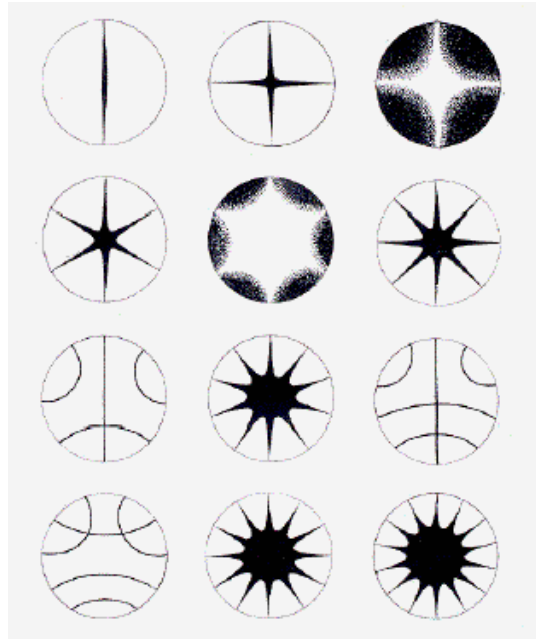
(2) 當拉動弓弦時，克拉尼發現金屬板有些地方的振動幅度最大（此位置稱為波腹），在波腹的細砂數量最少，而有些地方卻又是完全不振動（此位置稱為波節），在波節的細砂數量最多，即最初在波腹位置上跳動的細砂會移到波節位置，因而形成對稱美麗的克拉尼圖案。

當不同的樂器發出不同的聲音是因為空氣跟樂器發生不同的共振的混合。共振到底是什麼模樣？其實其中複雜的程度遠超一般的想

像。利用喇叭震動四方形的金屬板，然後在上灑上沙所形成的圖案，因為不同的共振態會讓不同的位置有不同的震動大小，所以沙有不同的分佈。一般來說沙會聚集在震動的節線上，也就是震動較小的地方。所以觀察沙的分佈就可以知道共振大約長什麼模樣，這些震動模式，跟樂器上聲音跟樂器的共振所發出的音色的基礎原理相同，也可以了解為什麼樂器會有那麼多特殊的聲音！

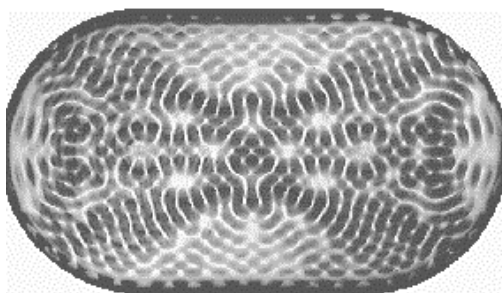
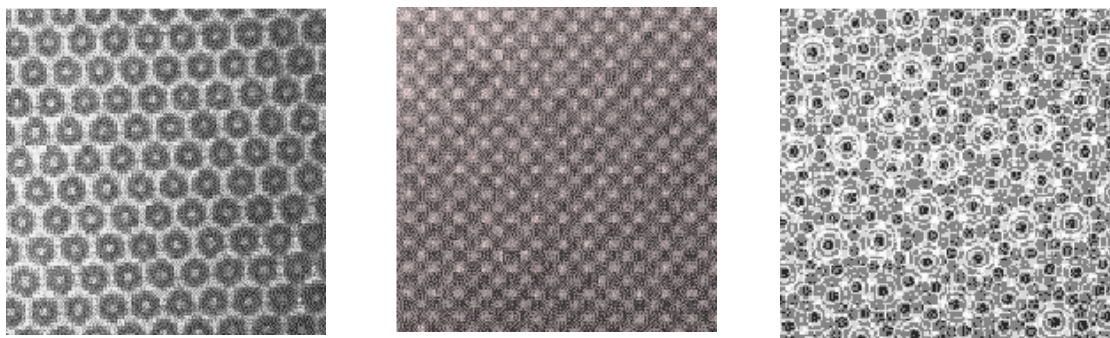
繩波在共振頻率震動時會產生一維駐波現象，不動的點稱為節點(nodes)，反節點(antinodes)為振幅最大的點，在一條線上傳遞的波，當遇到障礙產生反射時，與原來的行進波互相干擾產生駐波，就可以在線上看到振動劇烈的「波腹」和沒有振動的「波節」。

如果在平面上產生振動，當振動遇到邊緣反射時，也會和原來的波產生駐波，在平面上灑些細砂，細砂受到振動之後，便會在波節的地方聚集產生振沙圖形(圖 2.5.1)。另一種水槽的參量共振現象最早是由法拉第(Faraday)發現，將水槽水平置於一振動台上並在外加驅動下沿垂直方向作簡諧振動。當振幅超過一臨界值時，液面便產生規則駐波圖形，其驅動頻率接近系統原來頻率的兩倍，並發現不同的流體所產生的圖形也不同(圖 2.5.2)，其圖案多樣生動而有趣。

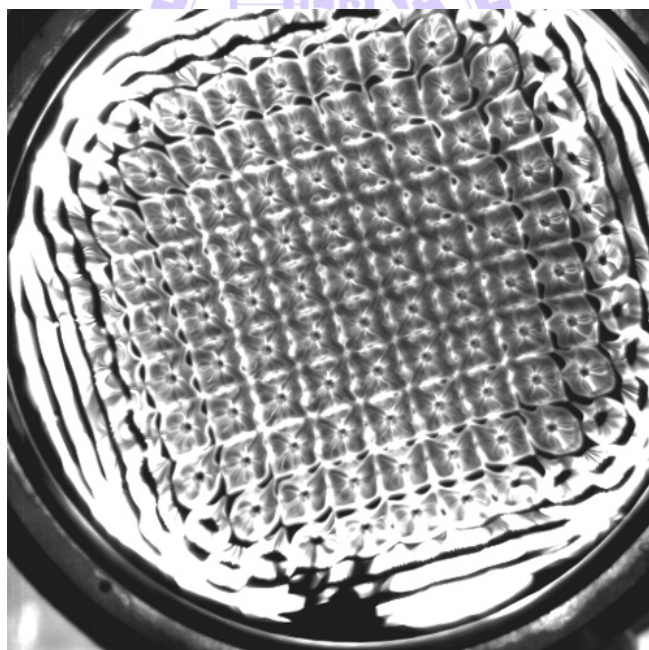


(b)

圖 2.5.1 克拉尼振沙圖形



(a)



(b)

圖 2.5.2 法拉第表面波振水圖形

第三章 電腦輔助產生 Quasi-crystal 圖像

Quasi-crystal 圖樣可利用數個光源的干涉來產生，光在傳播過程中，如果遇到與其波長尺寸相差不大的障礙物（或小孔、窄縫等）時，光會明顯偏離直線傳播的方向而發生衍射，其原理與全像微影技術相似，都是利用數個光源去干涉，再將其以定量的角度去旋轉，會產生 n 個干涉平面波，其數個干涉波的疊加強度顯影在接受器上[7]，因此多重光束干涉技術（Multi-beam interference technique）[8]常被用來產生光學的圖案，目的是為了模擬各種不同的準週期結構（quasi-periodic structures）的晶格。

3.1. Diffracting and non-diffraction

繞射是指光在行進過程中，通過小孔或遇到障礙物，造成波動的疊加，形成亮暗相間條紋的現象。繞射的種類依照通過小孔的維度，可分為圓孔繞射(circular aperture diffraction)與單狹縫繞射(single slit diffraction)。依照發明科學家使用不同方法產生的繞射，可分為布拉格繞射(Bragg diffraction)、夫琅禾費繞射(Fraunhofer diffraction)、菲涅耳繞射(Fresnel diffraction)。

繞射的原理根據海更士(Huygens)原理，下一個波的行為，可以由此波當作新波源演化而成。因此，當波長愈長、障礙物愈小或小孔與

波長接近時，因為相對的波動性顯著，因此容易觀察到繞射現象。若行進波被與波長大小相當或小於波長的物體所阻擋，則行進波會繞過這個物體繼續前進，當行進波遇到與波長大小相當或小於波長的孔時，則會以此孔為中心，形成環型波繼續前進。楊格(Thomas Young)在 1803 年第一次以雙狹縫干涉(double slit interference)實驗證實光的波動性，後來也作成單狹縫繞射。楊格的單狹縫實驗，產生的亮暗條紋中，中央亮帶的亮帶寬度是其他亮帶寬度的兩倍，而暗紋間隔都相同。而且暗紋間隔與其他亮帶寬度都等於 $\Delta y=r\lambda/b$ ，其中 r 為狹縫與屏幕的距離， b 是狹縫寬度， λ 為波長。後來因為這個實驗順利測出光的波長，證實了光的波動性，造成牛頓的粒子說被完全推翻。

由以上繞射公式可以發現：繞射條紋的寬度與波長成正比，因此當入射光為單色光時，繞射圖形也是單一顏色。但當入射光是複合光時，因為各種顏色繞射條紋寬度不相同，因此呈現色散的現象。例如：當太陽光經過單狹縫繞射，因為紫光波長最短，所以第一暗紋最先出現，因此呈現紫光的互補光，外圍出現的顏色也會是相同道理。因此，利用繞射產生色散的現象，也可用來證明光的波動性。(如圖 3.1.1) 為兩個單狹縫的繞射條紋，可以看到在垂直的兩個方向有兩條暗亮相間的條紋。至於圓孔的繞射條紋，則會形成以圓孔為中心的同心圓。

值得注意的是，如果狹縫水平放置，則繞射條紋會成鉛直方向；如果狹縫鉛直放置，則繞射條紋會成水平方向，這是因為繞射條紋會沿著

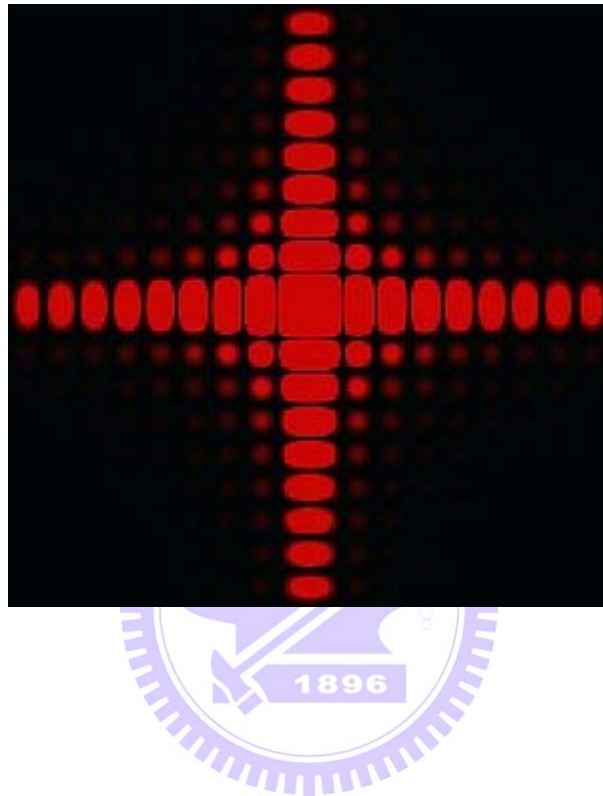


圖 3.1.1 兩個單狹縫的繞射條紋

受限制的方向展開，因此會垂直狹縫。

貝賽爾光束(Bessel beam) [9-14]與貝塞爾高斯光束(Bessel Gaussian) [15]沿著光軸方向具有近似恆定光照度而光場的橫截面具有窄光束分佈，這兩種光束具有傳播距離很遠而不發散的特性所以被稱為無繞射光束(non-diffraction beam)。

早在 1987 年第零階貝塞爾光場分佈之無繞射光束被提出來 [9,10]，其特點是在無邊界自由空間中傳播時，與光軸垂直的每個橫向取樣平面的光場照度峰值總能保持相同，橫向光照度分佈非常集中，此照度分佈具有很強的空間侷限性。這種光場在傳播的過程中並不會發生發散的現象，因此這類光束被稱作無繞射光束。此光束具有主光斑尺寸小的特點，而且具有較高的照度峰值、方向性好與傳播距離遠等優點。在實際的光學系統中，元件孔徑所產生的邊界條件是存在的，所以無法得到所需的無繞射光束。然而從電腦模擬和實驗結果證明在有限孔徑的條件下，近似貝塞爾分佈的光束仍然可以傳播到相當遠的一段距離並保持無繞射光束的主要特性。可以利用幾何軸向錐鏡(axicon)[16]、全像片[17]、圓對稱周期性光柵[18]、繞射式軸向錐鏡[19]、繞射光學元件[20]……等都可用來產生近似的無繞射光束。

3.2. singularity

Singularities 是指無法明確定義某些參數的位置，(如圖 3.2.1)圓形色盤的圓心，無法明確定義顏色，即為 Singularities。

研究 Singularities 基本上是因為它們普遍存在並且結構穩定。在光學中，奇異點可以分為 phase singularities 與 polarization singularities。檢視這些 Singularities 在當代物理其應用範圍相當有趣而且被現代命名為奇點光學(Singular Optics)。通常相位奇異點是在平面上的點和在空間上的線當強度消失這相位複數波場無法明確被定義。這模式只有跟 2D 向量場有關，在於 2D 量子波函數或光束的橫向係數。以方便制定數學形式：

$$\psi(x, y) = R(x, y) + iI(x, y). \quad (1)$$

$R(x, y)$ 和 $I(x, y)$ 是實數。定義 $\rho(x, y) = R^2(x, y) + I^2(x, y)$ 跟 $\theta(x, y) = \tan^{-1}[I(x, y)/R(x, y)]$ ，這純量場可以寫成如下式子：

$$\psi(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)} \exp[i\theta(x, y)]. \quad (2)$$

這位置在 $R(x, y)$ 和 $I(x, y)$ 同時為零，這樣振幅 $\sqrt{\rho(x, y)}$ 會消失而這相位 $\theta(x, y)$ 在這相位奇異點無法明確被定義。這些節點在 2D 平面是類似晶格轉位並且也稱為相位轉位。另一重要量與相位有關是這電流密度機率，一般式子如下：

$$\vec{j}(x, y) = \frac{\hbar}{m} \text{Im}[\psi^*(x, y) \nabla \psi(x, y)]. \quad (3)$$

將方程式(2)帶入式子(3)，這電流密度機率能夠用相位梯度 $\theta(x, y)$ 表示

$$\vec{j}(x, y) = \frac{h}{m} \rho(x, y) \nabla \theta(x, y). \quad (4)$$

根據基礎微積分，這旋度 \vec{j} 在所有位置上為零除了相位奇異點之外，因此相位奇異點也將到處流通的電流密度稱為旋渦。這旋渦應用在各種方面會有一致協調現象，像較複雜的超導薄膜，超流體，彈子微波，量子彈道運輸，液晶薄膜……等。

相位奇異點一個重要的特性是它的拓撲結構電荷(也被命名線圈數或轉位強度)被定義

$$s = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_C \nabla \theta(x, y) \cdot (dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y) \quad (5)$$

這裏 C 是任意封閉迴路，只有一個奇異點在裡面。如果相位流通逆時針方向(順時針)這電荷是正面的(消極)。依重要的拓撲學特性奇異點的符號規則表明電荷在一恆定的相位結構之鄰近奇異點必須有相對符號。由於這類似介於光學動量密度和電流密度機率，這光束振幅分布上的相位奇異點證實它本身也是光學旋渦。

光學旋渦緊密地與光學軌道角動量(OAM)有關。如同在前個部分所揭示，光學 OAM 因為廣泛的被應用而引起了興趣，例如原子誘捕，光學鑷子，光學扳手和量子信息。在奇點光學產生光學旋渦是其中主要題目。一般光學旋渦能夠被產生是經由基本高斯光束方式通過引起，例如圓柱形透鏡方式交換器，全息圖，螺旋相位板，幾何軸向錐鏡，單晶，跟玻璃楔形物。

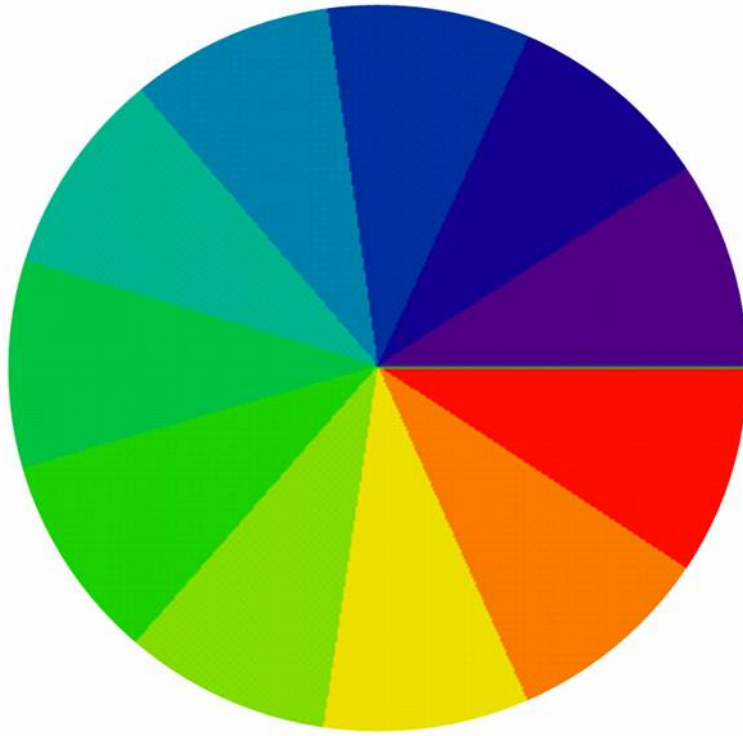


圖 3.2.1 圓形色盤

除此之外，光學旋渦的自發形成結構在雷射系統固體雷射上也有被報導，Na2 雷射和氫核被植入的垂直洞表面散發的雷射。旋渦形成的機制在氫核被植入的 VCSEL 由於橫模鎖，協助由雷射非線形性，幾乎退化 Laguerre 高斯方式。不同氫核被植入的 VCSEL，氧化物的近場橫模 VCSELS 被顯示類似於閉合量子台球波函數，是純粹真實的並且包含僅零的相位。然而，橫向場變得複雜，當它傳播在 VCSEL 洞並且包含複雜旋渦結構。除複數波之外相位奇異點，這奇異點在真實向量場的方向無法明確被定義即所謂的向量場奇異點，或簡略向量奇異點。根據數學表達式，2D 真實的向量場可以被寫成如下式子：

$$\vec{V}(x, y) = V_x(x, y)\hat{a}_x + V_y(x, y)\hat{a}_y. \quad (6)$$

這向量奇異點的位置在 $V_x(x, y)$ 跟 $V_y(x, y)$ 等於零同時這角度作用取決於角度函數。

$$\Theta(x, y) = \text{angle}[V_x(x, y), V_y(x, y)] \quad (7)$$

無法明確被定義。這拓撲學電荷的向量奇異點給於下式子：

$$I_p = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\Theta = \frac{1}{2\pi} \oint_C \nabla\Theta(x, y) \cdot (dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y) \quad (8)$$

被稱作 Poincaré index of zero，這輪廓 C 是一個非常小路徑在奇異點附近。這向量奇異點跟 Poincaré index 在 ± 1 可以被分類入旋渦、來源和水槽和馬鞍。(圖 3.2.2) (a) - (c) 展示真實的向量場的發行在旋渦、馬鞍和來源。這等高測定角函數位置的方向，這向量場顯示在(圖 3.2.2) (a)-(c) 在(圖 3.2.2) (a')-(c') 被描述。它能被看見旋渦和來源有他們的 Poincaré index 為 1 和一個馬鞍的 Poincaré index 為 -1。事實上電流

密度機率是一種較常見的向量場。這相位函數 $\theta(x, y)$ 的位置對應於電流密度 $\vec{j}(x, y)$ 向量奇異點被稱為關鍵點。這關鍵點相位提升旋渦、來源、水槽和馬鞍在電流密度是奇異點、極值和馬鞍。假設這向量場顯示在(圖 3.2.2) (a)-(c)是一些波函數的電流密度機率。我們描述波函數對應的相位結構，包含相位奇異點、最大值和馬鞍，分別在(圖 3.2.3) (a)-(c)。總而言之，當某一向量場被表示為純量函數的梯度，這些關鍵點純量函數變的重要。向量奇異點也廣範多樣地介入了物理。對於光波，向量奇異點是被孤立，在一個平面是不動的點，這電向量的方向，在一個線性被對立的真實向量場無法明確被定義。向量奇異點的特點在於空間結構和極化狀態相互關係以雷射方式實驗性地被觀察。在工作同時，向量奇異點植入在 VCSELs 的近場圖樣將被分析。

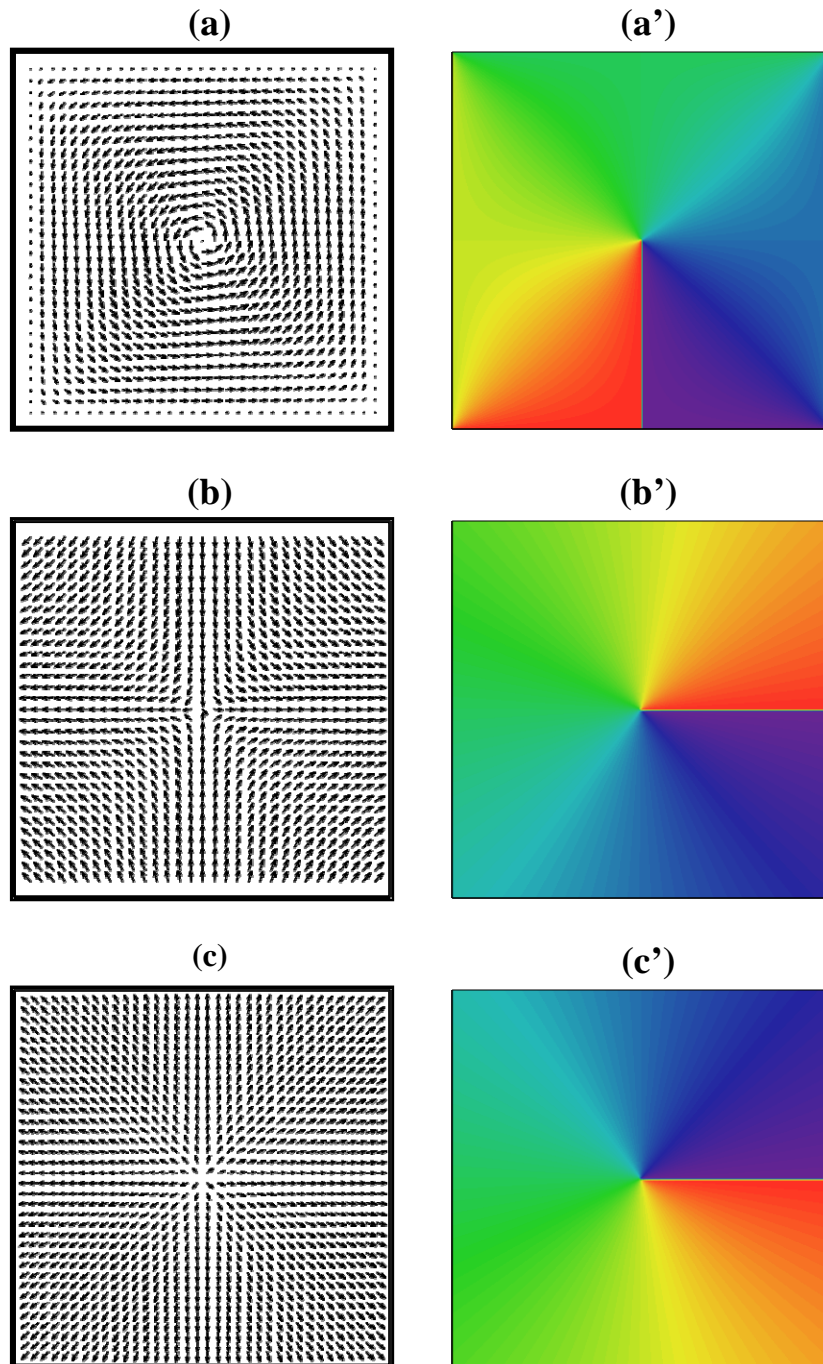


圖 3.2.2 旋渦、來源和水槽和馬鞍

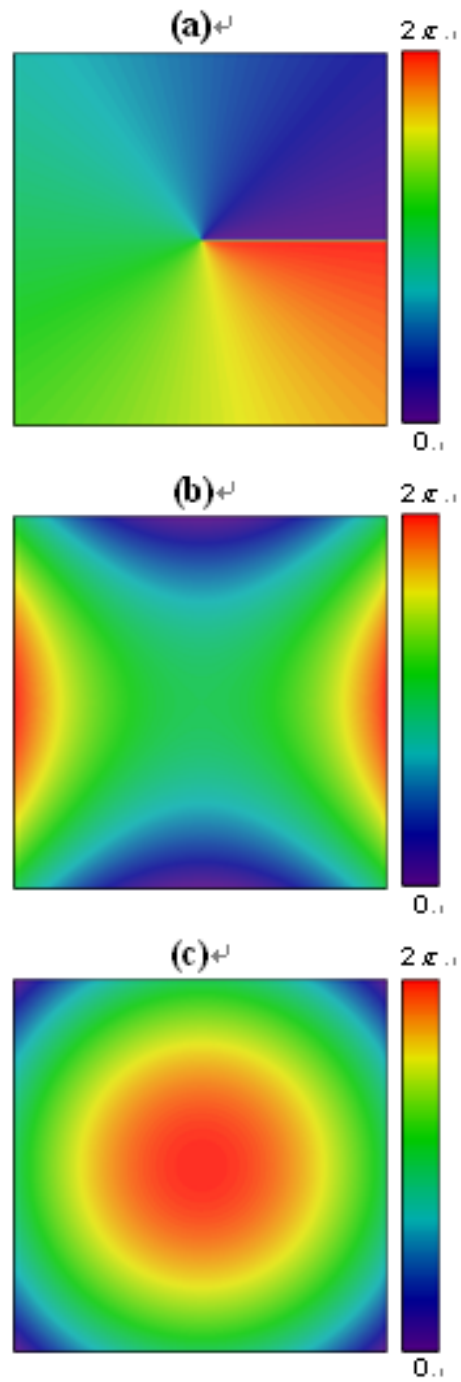


圖 3.2.3 相位奇異點、最大值和馬鞍

3.3. 理論計算與討論

將二維的晶格或準晶格結構之光學場，利用極座標來描述光罩上孔洞的位置以及屏幕上每一個位置點，藉由在極座標表示下的平面波之疊加定量描述這些光學場：

$$\psi_q(\rho, \phi) = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{i\varphi_s} e^{iK_s \cdot \rho} \quad (1)$$

$K_s = (K \cos(2\pi s/q), K \sin(2\pi s/q))$, $\rho = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$, q 是整數， A_s , K_s , 和 φ_s 分別是第 s 個平面波的振幅、橫向波向量和初始相位。其中 $q = 2, 3, 4, 6$ 的光學場 $\psi_q(\rho, \phi)$ 之強度會呈現出週期性晶格的圖案，這些圖案對應到標準的二維晶體結構；而其餘的 q 值的光學場 $\psi_q(\rho, \phi)$ 之強度所呈現出的圖案，則是對應到二維準晶格結構。準晶格結構的光學場和晶格結構的光學場有一個不同的地方，就是準晶格結構的光學場在 spatial translation 之下是不變的。為了方便說明起見，我們將 $A_s = 1/q$ 和 $\varphi_s = 0$ 帶入光學場 $\psi_q(\rho, \phi)$ 數學式之中：

$$\Psi_q(\rho, \phi; K) = \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{s=0}^{q-1} e^{iK\rho \cos(\phi - (2\pi \frac{s}{q}))} \quad (2)$$

(如圖 3.3.1)所示， $q=3$ 、 4 、 5 、 6 、 7 和 8 的光學場之強度所呈現的圖案。我們可以發現 $q=3$ 、 4 and 6 的圖案具有平移對稱性， $q=5$ 、 7 and 8 的圖案則具有準晶格結構。在我們的試驗設置上，擴束雷射光通過光罩上的孔洞時就會有一個光強度的分佈。事實上，光罩上的分佈就

是一種光學場，它在本實驗設置上就是輸入。本實驗設置的輸入是同調光的光強度分佈，我們利用極座標來描述此分佈，標示為 $u_0(\rho', \phi')$ 。我們將此輸入放置在焦距為 f 的透鏡之焦距平面上。從依據傅立葉光學的非涅耳綜合來看，實驗設置的輸入通過透鏡後，距離透鏡為 z 的距離之光學場分佈 $u(\rho, \phi, z)$ 如下式：

$$u(\rho, \phi, z) = \frac{-i}{\lambda f} e^{ik(f+z)} \iint u_0(\rho', \phi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2f}\left(1-\frac{z}{f}\right)} e^{-i\frac{2\pi\rho\rho'}{\lambda f} \cos(\phi-\phi')} \rho' d\phi' d\rho' \quad (3)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$ ，而 λ 是雷射光的波長。Durnin 等人[9] 使用具有一個半徑為 a 的細環狹縫之光罩，並使平行擴束光作穿過光罩上的環形狹縫，此時環形分佈的光學場就成為輸入，此輸入標示成

$u_0(\rho', \phi') = \delta(\rho' - a)$ 。將輸入 $u_0(\rho', \phi') = \delta(\rho' - a)$ 帶入 (3) 式，即可以得到輸出。我們發現，可以利用貝賽爾光束沿著 z 方向傳播來近似輸出。

數學上的近似如下：

$$u(\rho, \phi, z) = \frac{-i2\pi a}{\lambda f} e^{ik(f+z)} e^{i\frac{ka^2}{2f}\left(1-\frac{z}{f}\right)} J_0\left(\frac{2\pi a}{\lambda f} \rho\right) \quad (4)$$

$J_0(\cdot)$ 是第一類的零階之貝塞爾函數。如今我們的光罩設計成，孔洞在半徑為 a 的環上規律地分佈。當平行擴束光穿過光罩上的環狀分佈的孔洞，既形成環狀分佈的光學場，此光學場就是我們的輸入，此輸入近似地寫成

$u_0(\rho', \varphi') = \left(\frac{1}{q}\right) \delta(\rho' - a) \sum_{s=0}^{q-1} \delta(\varphi' - \varphi_s)$ 將輸入帶入 (3) 式，可得到輸出的光學場：

$$u(\rho, \phi, z) = \frac{-ia}{\lambda f} e^{ik(f+z)} e^{i\frac{ka^2}{2f}\left(1-\frac{z}{f}\right)} \Psi_q^*\left(\rho, \phi; \frac{2\pi a}{\lambda f}\right) \quad (5)$$

由(5)式告訴我們，輸出的光學場就是一道沿著 z 方向傳播的 pseudonondiffracting beam，而且 pseudonondiffracting beam 在 z 軸上的橫截面會呈現出晶格結構或準晶格結構的圖案。

理論上所模擬的圖案(如圖 3.3.1) 所示。利用孔洞上規則地環狀分佈之光罩，來產生晶格結構和準晶格結構的 pseudonondiffracting optical beams。因為光學配置基本上類似 Durnin 的方法，繞射長度整體特性幾乎和 pseudonondiffracting Bessel beam 一樣。



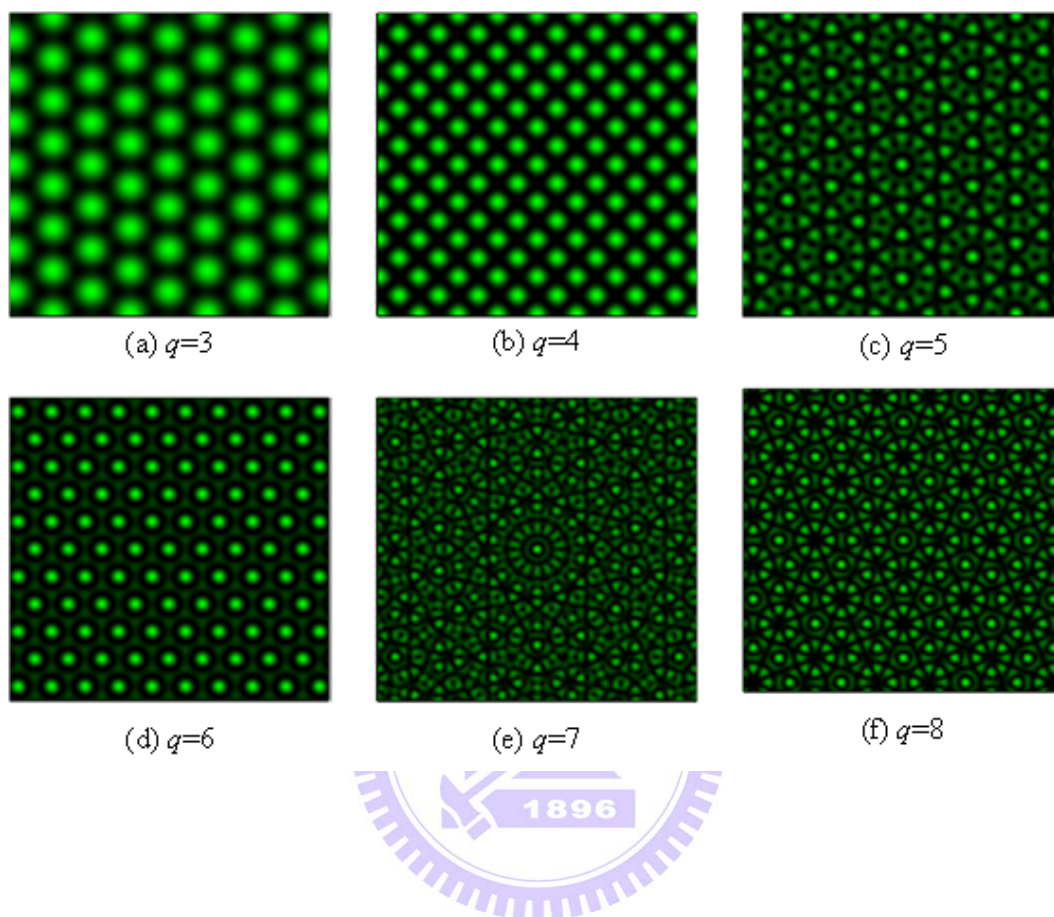


圖 3.3.1 理論模擬的晶格結構和準晶格結構圖案

利用光學探究較大的 q 值時，其準晶結構圖案之特性是耐人尋味的，因高階的準晶格結構圖樣會呈現出奇特的萬花筒圖樣，接下來將探討高階的準晶格結構圖案，由(圖 3.3.2)(a) - (c)顯示理論計算上，所得到 $q=16$ 、 21 和 30 的準晶格結構的圖案。高階的準晶格結構圖案的中央部分和貝賽爾光束相似。會有這樣的相似，是因為在 q 趨近無窮大的極限下所導致，即 $\lim_{q \rightarrow \infty} \Psi_q(\rho, \phi, K) = J_0(K\rho)$ 。

在上述計算中，每個平面波的初始相位皆為零，除了為零的相對相位之外，我們試著去模擬並觀察其圖形的變化，發現其圖形會因為其初始相位項 $\phi_s = 2\pi \cdot s/q$ 不同而改變，當 s 為常數時，其圖形皆為準晶格圖樣，但 s 不為常數時，其圖形會較為混亂，(如圖 3.3.3)所示為 $q=8$ 的準晶格圖騰且相位不為零的情況，其分別為 $s=1$ 、 $s=2$ 、 $s=3$ 和 $s=4$ 的理論計算結果，可以發現還是具有 8 對稱的對稱性的準晶格圖騰。所以，我們發現更多不同的 Quasi-crystal 圖樣。

一般而言，目前的晶格結構的圖案和準晶格結構的圖案屬於複數形式的光學場 (complex optical fields)。利用具有沒有規律的相位和振幅為零的孤立暗點 (isolated dark spots) 來描述複數形式的光學場的相位奇異點。數學表示上，我們習慣利用相位角場 (phase angle field) $\Theta(\rho, \phi) = \arctan(\text{Im}[\psi_q(\rho, \phi)] / \text{Re}[\psi_q(\rho, \phi)])$ 來描述相位奇異點，其中 $\text{Re}[\psi_q(\rho, \phi)]$ 和 $\text{Im}[\psi_q(\rho, \phi)]$ 分別是複數形式的光學場的實數部分和虛數

部分。環流狀的相位角場 $\Theta(\rho, \phi)$ 是具有奇異點的，在這個情況下，複數形式的光學場 $\psi_q(\rho, \phi)$ 的相位角是無法被定義的。(圖 3.3.4)(b)和(b')為對應(圖 3.3.4)(a)和(a')虛線方框內的部份，所對應到的相位角場 $\Theta(\rho, \phi)$ ，從(圖 3.3.4)(b)和(圖 3.3.4)(b')可以發現相位奇異點的特性。這些圖案的相位上有奇異點，因為光學場具有旋度特性，擁有軌道角動量，所以此類型的光學場被廣泛地應用於光學鑷子、對冷原子作誘捕與引導和光子的糾纏態。因此，利用光學方式產生的準晶格結構圖案，對將來的應用具有很大的潛力。



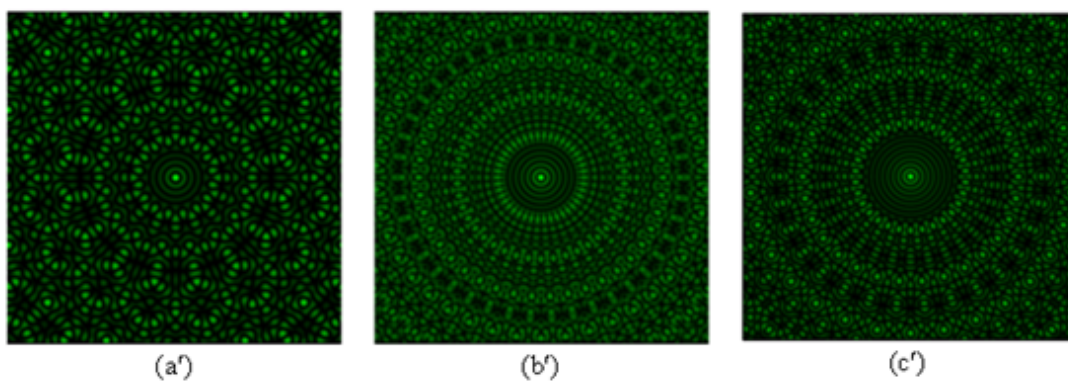


圖 3.3.2 理論模擬高階($q=16$ 、 21 和 30)的準晶格結構圖案

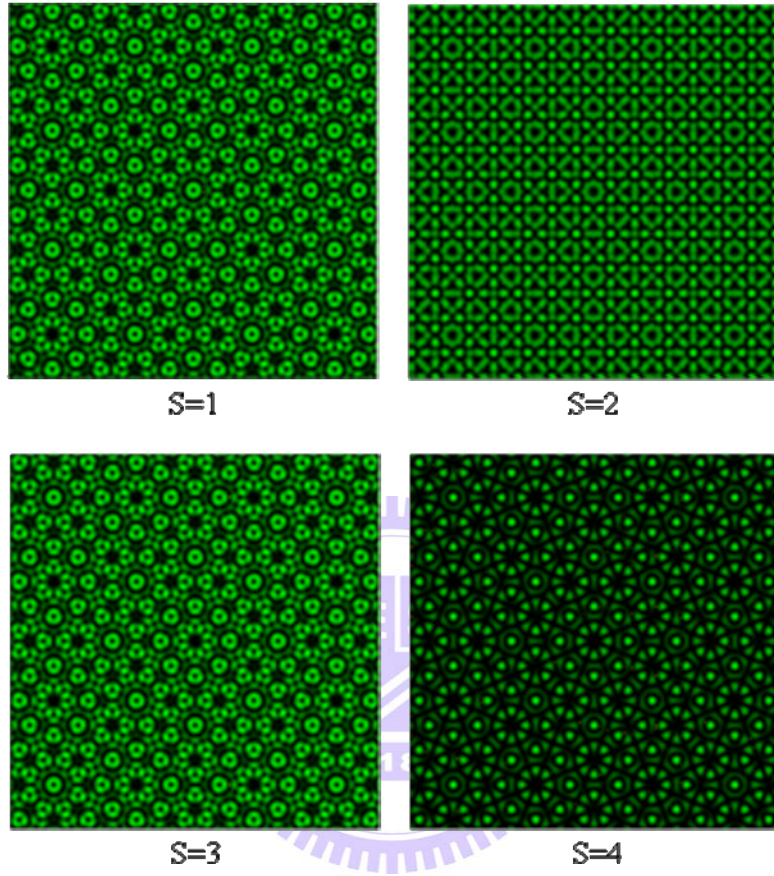


圖 3.3.3 不同初始相位理論計算圖

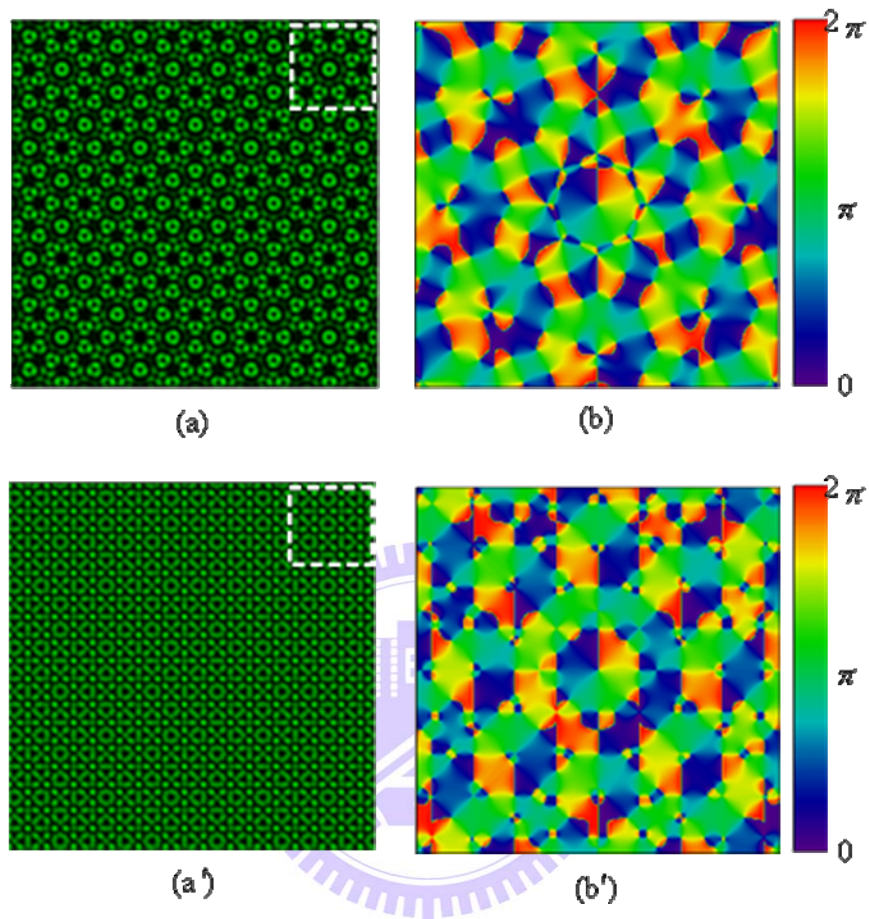


圖 3.3.4 準晶格結構圖案與對應相位圖

3.4. 結論

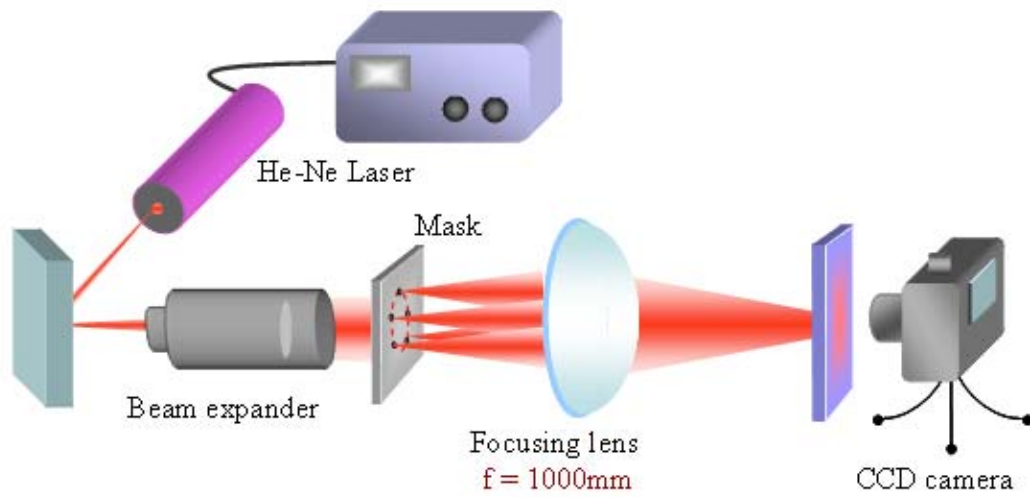
總而言之，我們利用較為簡單的方式來產生出一個概括所有類型 Quasi-crystal 圖樣的通式，也從方程式部分及圖像部分來證明其與平面波疊加的關係。接續上述的方式，我們試著找尋產生出不同一般類型的 Quasi-crystal 圖樣的方式，配合不同的初始相位，其不僅可以產生出一般的 Quasi-crystal 圖形，也可產生出不同類型的 Quasi-crystal 圖像。我們也發現當相對相位模組的 $q \rightarrow \infty$ ，其圖形的特性會與貝塞爾圖形完全相等。除了漂亮的圖騰之外，因為這些圖案的相位上有奇異點，因為光學場具有旋度特性，擁有軌道角動量，所以此類型的光學場被廣泛地應用於光學鑷子、對冷原子作誘捕與引導和光子的糾纏態。因此運用光學方式產生的準晶格結構圖案，對將來的應用具有很大的潛力。

第四章 光學中準晶格圖騰的產生

上一個章節為理論計算準晶格圖騰的結果，實際上要產生這樣的準晶格圖騰有許多方法，例如透過振水波的方式來產生，而本章節為結合傅式光學的理念，配合適當的光遮板，來產生各種不同對稱性的準晶格圖騰。

4.1 實驗架構

實驗架構(圖 4.1.1)，入射光源使用氦氖雷射帶有線性偏振且其波長為 632.8nm，輸出功率為 20mW。並利用光束擴束器使氦氖雷射的發散角小於 0.1 mrad。實驗前先使用雷射加工在鋼板設備 (laser stencil-cutting machine) 上鑿出應實驗須求的孔數分佈之光罩，其中孔洞的半徑和環形的半徑分別為 0.1 mm 和 5.0 mm。透鏡的焦距是 1000 mm，將孔數的大小與間距按照固定參數設定，透鏡聚焦參數設定完成後，再搭配數位相機記錄下在透鏡後面成像的干涉圖案。



4.2 實驗觀察與結果

利用極座標來描述光罩上的孔洞位置以及屏幕上的每個位置點，其中 $q=2, 3, 4, 6$ 的光學場之強度會呈現出週期性晶格的圖案，這些圖案對應到標準的二維晶體結構；其餘的 q 值光學場之強度所呈現出的圖案，則是對應到二維準晶格結構。由光學模擬與實驗上相互印證如圖 3.3.1 跟圖 4.2.1，可以發現 $q=3, 4$ and 6 的圖案具有平移對稱性， $q=5, 7$ and 8 的圖案則具有準晶格結構，即具有較高的旋轉對稱特性，並可產生出來其他基底的圖形。由(圖 4.2.1)(實驗上所拍攝圖樣)也透漏了在最佳的對準線的情況下，實驗可以清晰觀察到晶格結構和準晶格結構的干涉圖。實驗的圖案與理論模擬的圖案有相當高的一致性，使我們更加確定可以利用光罩上規則性地孔洞環狀分佈，來產生晶格結構跟準晶格結構的膺無衍射光束。並針對每一晶格結構揭取適當的大小範圍，使結構大小力求清晰與適中。

當繞射圖案只有在某一個特定有限距離 z_{\max} 內，能夠很明顯地被觀察到，我們稱之為傳播不變區間 (propagation-invariant region)，只要過了這個區間，繞射圖案的中心會迅速地變得模糊不清。nondiffracting 的傳播不變區間之所以有限，是來自於光束點的大小有限所導致。最大距離 z_{\max} 可以利用幾何方法推導出 $z_{\max} = R/\tan\theta$ ，其中 R 是每一道參與干涉的平面波光束來到聚焦透鏡上的半徑，而 θ

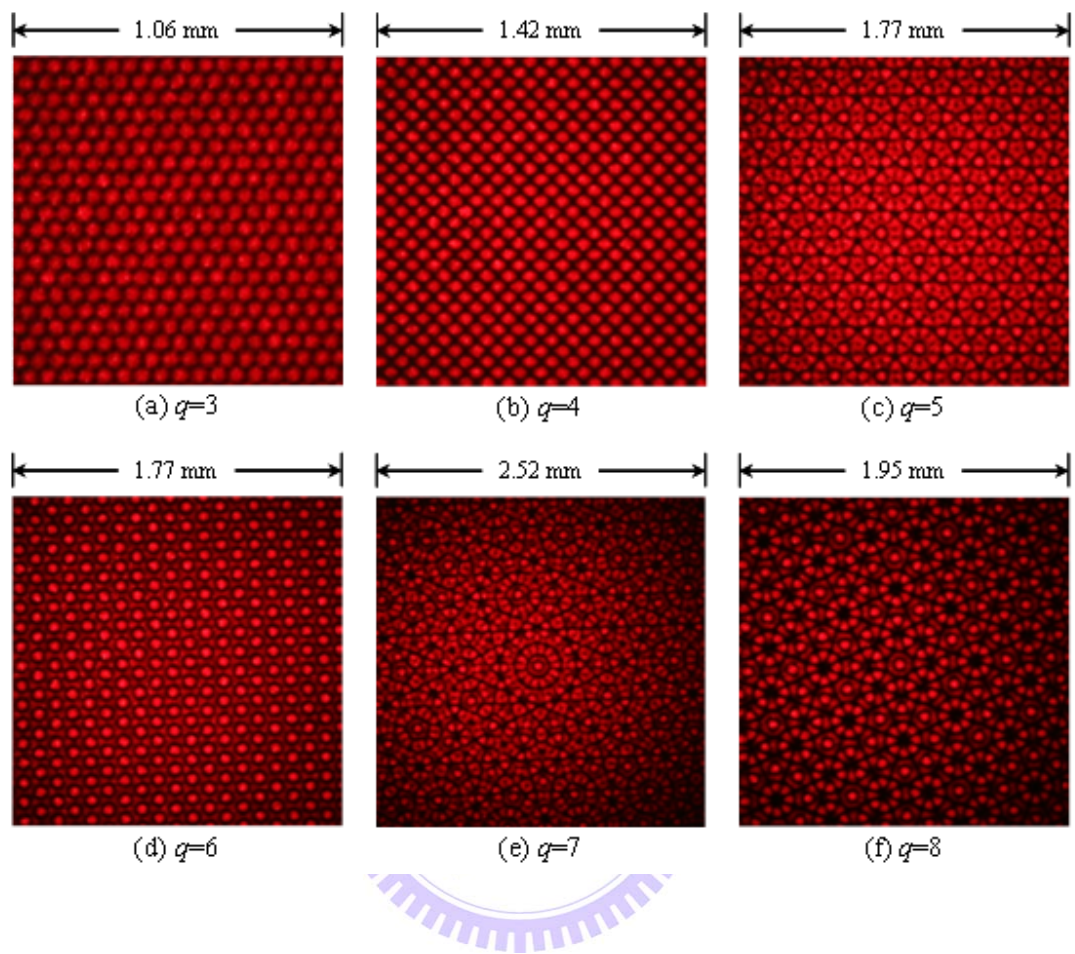
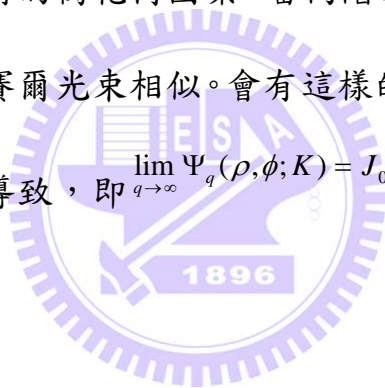


圖 4.2.1 實驗模擬的晶格結構和準晶格結構圖案

則是每一道參與干涉的平面波光束相對於光軸（optical axis）的入射角。在我們的實驗裡， R 和 θ 近似分別為是 2.0 mm 和 5 mrad。結果有限距離 z_{\max} 估計大約 400 mm，與實驗觀察非常吻合，(如圖 4.2.2) 在 z 軸上不同位置之橫截面，所產生的 $q=5$ 之準晶格結構圖案。經由實驗上，我們利用光學儀器來探究當 q 值較大時，即高階的準晶格結構圖案其特性是相當耐人尋味的。(圖 4.2.3)(a)-(圖 4.2.3)(c)顯示實驗上，所得到 $q=16$ 、21 和 30 的準晶格結構的圖案。高階的準晶格結構的圖案呈現出奇特的萬花筒圖案。當高階的準晶格結構圖案其中央部分會呈現出跟貝賽爾光束相似。會有這樣的相似，是因為在 q 趨近無窮大的極限下所導致，即 $\lim_{q \rightarrow \infty} \Psi_q(\rho, \phi; K) = J_0(K\rho)$ 。



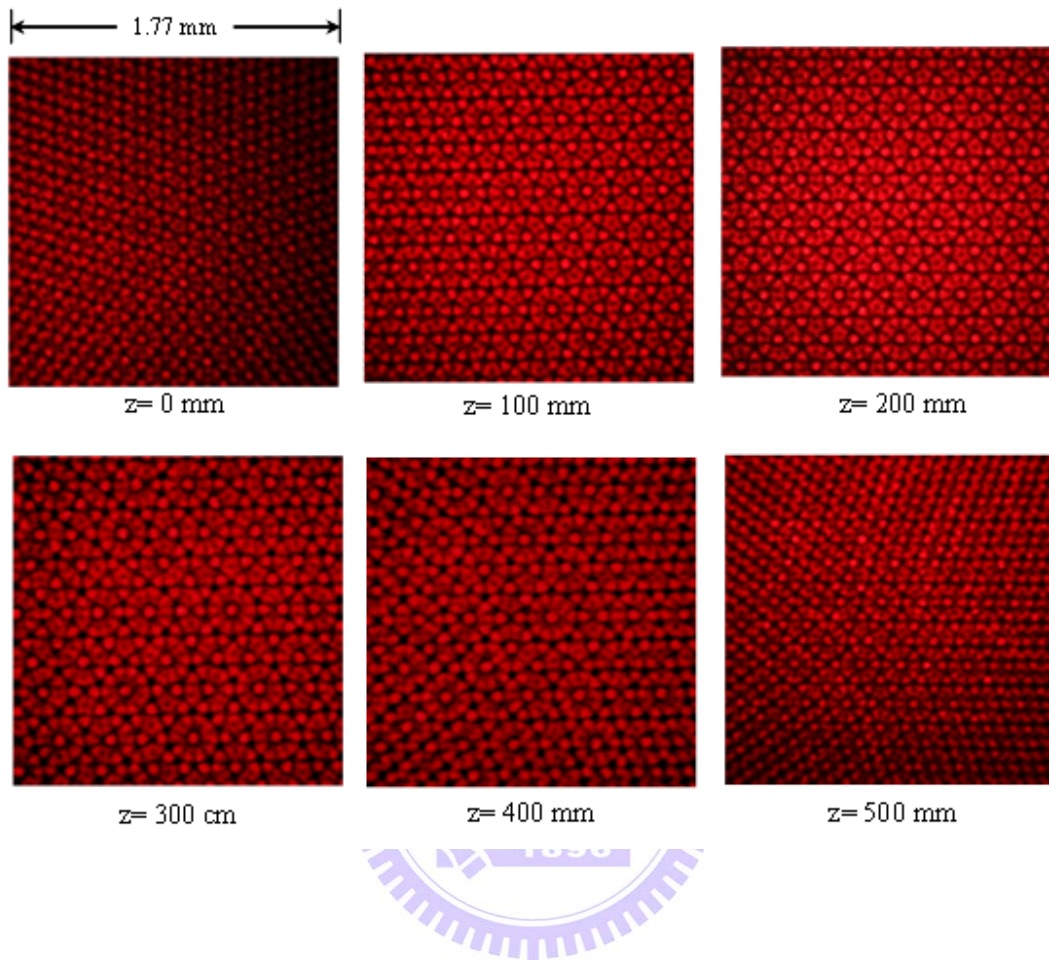


圖 4.2.2 z 軸上不同位置之橫截面所產生之準晶格結構圖案($q=5$)

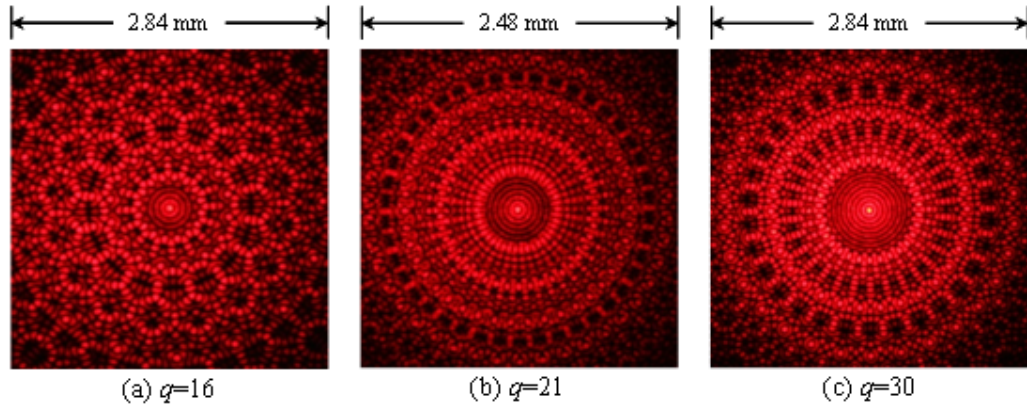


圖 4.2.3 實驗上高階($q=16$ 、 21 和 30)的準晶格結構圖案



4.3 實驗分析與討論

藉由將光罩相對光軸作輕微傾斜，亦會產生許多不同的準晶格結構的圖案。在實驗上，光罩相對於光軸作不同的微小的傾斜角，圖案可以不斷地重新再建構，其實這個現象在數學上，對應到那些具有某些特定相位 φ_s 的光學場 $\psi_q(\rho, \phi)$ ，雖然實驗上的傾斜角和特定相位 φ_s 之間的關係無法由數學表示。(圖 4.3.1) (a)和(圖 4.3.1) (a')顯示，在實驗上分別經由兩個不同傾斜角光罩，所產生的兩個不同結構的八邊形圖案。這兩個八邊形圖案，可經由理論模擬重建出來，即分別具有 $\varphi_s = s\pi/4$ and $\varphi_s = s\pi/2$ 的光學場 $\psi_s(\rho, \phi)$ ，(如圖 4.3.1)(b) and (圖 4.3.1)(b')所示。

一般而言，目前的晶格結構的圖案和準晶格結構的圖案屬於複數形式的光學場 (complex optical fields)。利用具有沒有規律的相位和振幅為零的孤立暗點 (isolated dark spots) 來描述複數形式的光學場的相位奇異點。數學表示上，我們習慣利用相位角場 (phase angle field) $\Theta(\rho, \phi) = \arctan(\text{Im}[\psi_q(\rho, \phi)]/\text{Re}[\psi_q(\rho, \phi)])$ 來描述相位奇異點，其中 $\text{Re}[\psi_q(\rho, \phi)]$ 和 $\text{Im}[\psi_q(\rho, \phi)]$ 分別是複數形式的光學場的實數部分和虛數部分。環流狀的相位角場 $\Theta(\rho, \phi)$ 是具有奇異點的，在這個情況下，複數形式的光學場 $\psi_q(\rho, \phi)$ 的相位角是無法被定義的。(圖 4.3.1)(b)和(圖 4.3.1)(b')的虛線方框內的部份，所對應到的相位角場 $\Theta(\rho, \phi)$ 的

contour plots 為(圖 4.3.1)(c)和(圖 4.3.1)(c')，從(圖 4.3.1)(c)和(圖 4.3.1)(c') 可以發現相位奇異點的特性。我們也使用一個正向入射的平面波與另一道準晶格光束的圖案作干涉來呈現出相位的結構。(圖 4.3.1)(a)和(圖 4.3.1)(a')為兩組不同對稱性準晶格結構圖案與傾斜平面波光束作干涉的實驗結果，為了驗證有相位結構的存在，而不是準晶格結構圖案本身所造成，因此我們加上一道平行光束並將傾斜的平面波光束去掉，而得到與(圖 4.3.1)(a)和(圖 4.3.1)(a')同一基底的兩組不同對稱性準晶格結構圖案與平行光束作干涉其實驗結果(如圖 4.3.2)(a) and(圖 4.3.2)(a')兩組對稱性準晶格結構圖案，為了與實驗結果作比較，(圖 4.3.2)(b)和(圖 4.3.2)(b')則是理論模擬所得的結果。實驗結果讓我們更加確定，準晶格結構的圖案都隱含著相位結構。

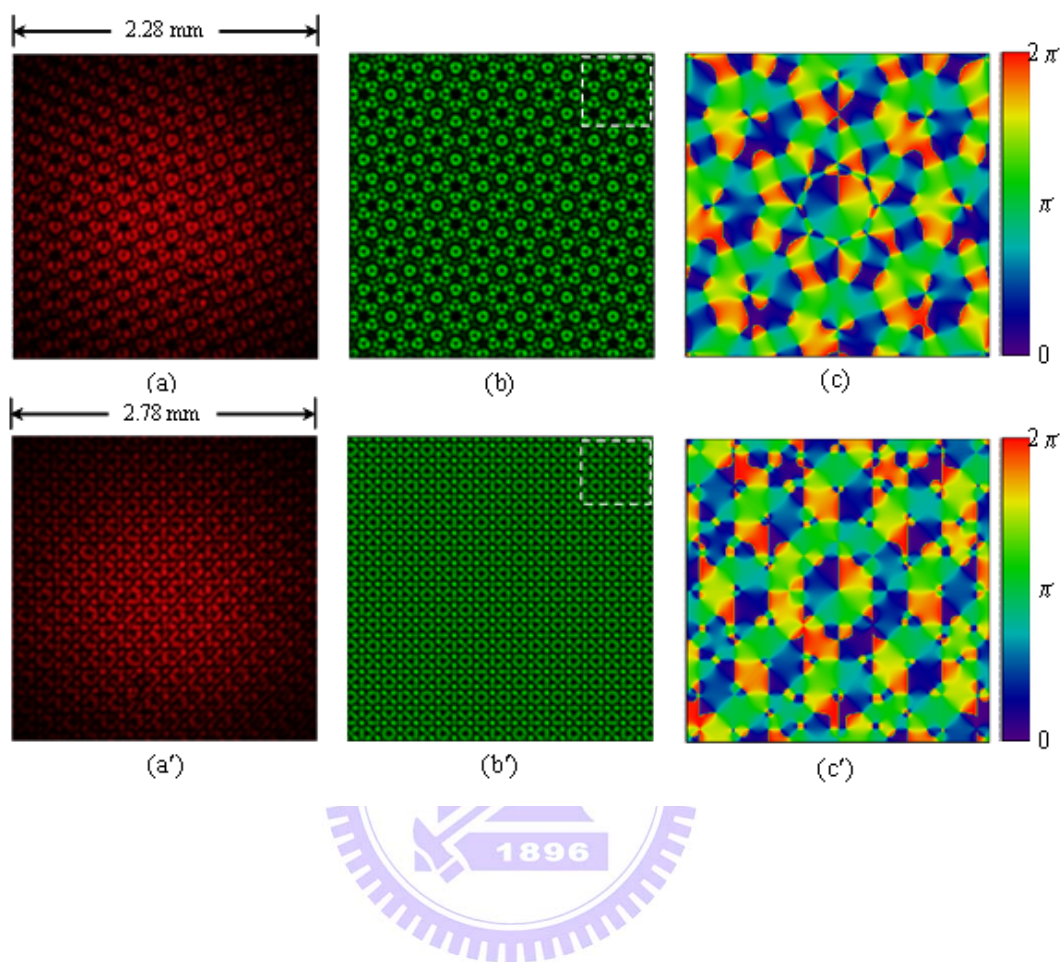


圖 4.3.1 傾斜角和特定相位準晶格結構圖案

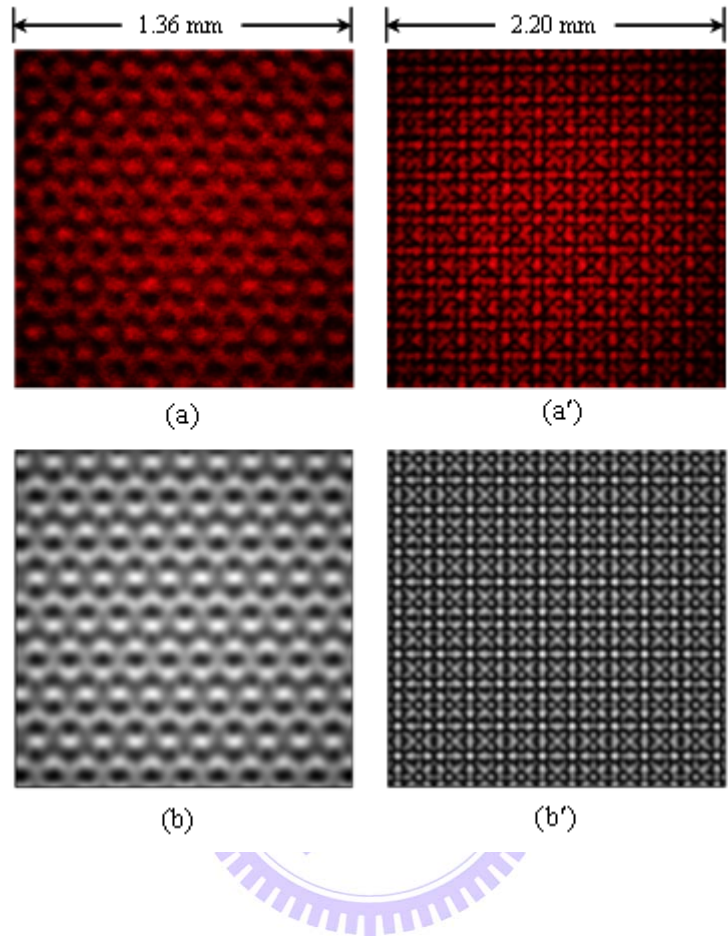


圖 4.3.2 實驗驗證準晶格結構的圖案都隱含著相位結構

4.4 結論

本章利用平面波疊加來產生 Quasi-Crystal patterns，將不同方向等距的平面波以干涉方式來產生，其中 $q=2, 3, 4, 6$ 的光學場之強度會呈現出週期性晶格的圖案，其餘的 q 值光學場之強度所呈現出的圖案，則是對應到二維準晶格結構。從實驗中發現 $q=3, 4$ and 6 的圖案具有平移對稱性， $q=5, 7$ and 8 的圖案則具有準晶格結構，即具有較高的旋轉對稱特性，並可產生出來其他基底的圖形。

因繞射圖案須在一特定有限距離內，才能夠很明顯地被觀察到，所以傳播不變區間由實驗結果知道有限距離 z_{\max} 估計大約 400 mm 當 q 值較大時，高階的準晶結構圖案其特性呈現出奇特的萬花筒圖案，其中央部分會呈現出跟貝賽爾光束相似。

使用一個正向的平面波與另一道準晶格光束的圖案作干涉來呈現出相位的結構，並進行實驗去驗證，讓我們更加確定，準晶格結構的圖案都隱含著相位結構。

第五章 Super lattice 圖像產生方式

目前探討的圖樣除了 crystal、quasi-crystal 之外，還有一種也具有排列規則的圖樣，即 Super lattice 圖像，此章節將針對 Super lattice 做一介紹並以光模擬實驗進行不同對稱組合的實驗，當光束干涉出來的條紋圖樣變化更複雜時，結構呈現出獨樹一格圖樣，其豐富又多變的圖樣也是一種 Kaleidoscope 結構光束之圖騰。

5.1 超晶格 Super lattice

超晶格是指兩個獨立但晶格相互作用的晶體，超晶格的波圖樣形成大部分由兩個六角晶格質相互影響組成。經由光學儀器模擬的超晶格圖樣，可以深入探究超晶格結構的特性而發揮其功能，並利用多重光束干涉技術（Multi-beam interference technique）來產生光學的圖案，目的是為了模擬各種不同的準週期結構（quasi-periodic structures）的晶格。

(超晶格-I)基本兩孔其相對角度是 22° ，影響頻率存在比例 6:7，在其他例子，波的成形完全是被兩個六角晶格相互疊加，其波長比 $\sqrt{3}$ ，兩孔相對角度 30° ，稱為(超晶格II獨特波圖樣)，顯示的圖樣揭示時間週期性條紋，會有六倍的對稱性，圖樣並不是經由簡單的振幅調整而變化。可以調整雷射光振幅的大小及其頻率來形成各式具有基底的光晶格。由超晶格-II態轉變到 12 倍準晶格圖樣，可觀察到其相對相位被改變在兩頻率間相互影響。

5.2 理論計算

將二維的晶格或準晶格結構之光學場，利用極座標來描述光罩上孔洞的位置以及屏幕上每一個位置點，藉由在極座標表示下的平面波之疊加定量描述這些光學場：

$$\psi_q^1(\rho, \varphi; K_1) = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{i\phi_s} e^{iK_1 \cdot \rho} \quad (1)$$

$$\psi_q^1(\rho, \varphi, \alpha; K_2) = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{i\phi_s} e^{iK_2 \cdot \rho} \quad (2)$$

式子(1)為單一準晶格結構，此章節希望經由 quasi-crystal 的結構光束上增加變化，若在準晶格結構光束上增加一相對角度，將原本的孔位數加上新增相對角度，所產生的結構光束稱為 Super lattice，其中 K 的分佈如下：

$$K_1 = (K \cos(\frac{2\pi}{q}s), K \sin(\frac{2\pi}{q}s)) \quad (3)$$

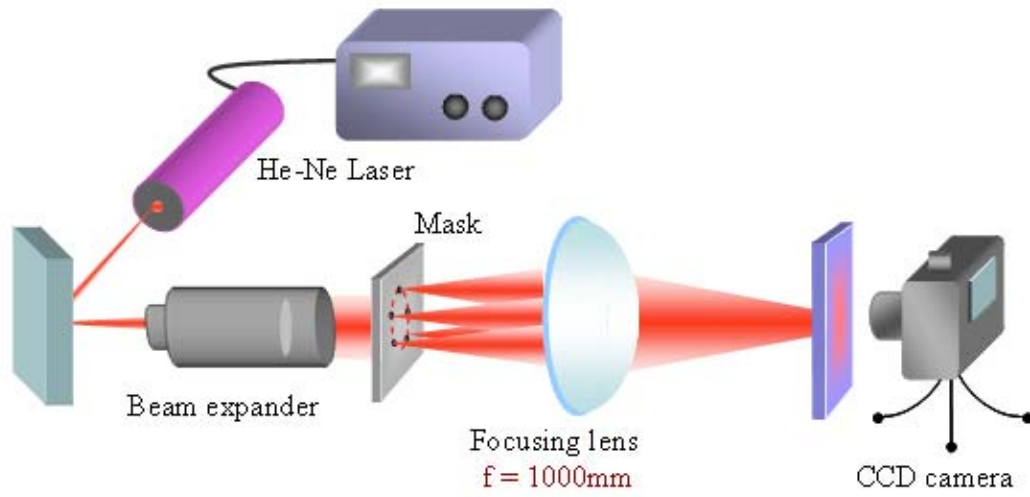
$$K_2 = (K \cos(\frac{2\pi}{q}s + \alpha), K \sin(\frac{2\pi}{q}s + \alpha)) \quad (4)$$

$$\rho = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \quad (5)$$

q 是整數，式子(2)為另一新增相對角度， α 是相對角度， A_s ， K_s ，和 ϕ_s 分別是第 s 個平面波的振幅、橫向波向量和初始相位。當這兩個相差一個角度的兩組準晶格再一次疊加後，即形成第一種 super lattice 形式的圖騰；第二種 super lattice 型式的圖騰，就是在原本的孔位數加上新增 Circle bundle 孔位數，再將兩組準晶格作疊加，即形成第二種 super lattice 形式的圖騰。

5.3 實驗架構

實驗架構(圖 5.3.1)，入射光源使用氦氖雷射帶有線性偏振且其波長為 632.8nm，輸出功率為 20mW。利用光束擴束器使氦氖雷射的發散角小於 0.1 mrad。實驗儀器架設與排列方式跟 quasi-crystal 圖像產生不同之處在於 Mask 孔位數的分佈方式，在此章節的實驗中包含兩種形式的 Super lattice，第一種形式是在 Mask 的環狀孔位數分佈上個別新增相對角度孔位(圖 5.3.2)；第二種形式是在 Mask 的環狀孔位數分佈上改變成 Circle bundle 孔位(圖 5.3.3)，實驗前先使用雷射加工在鋼板設備 (laser stencil-cutting machine) 上鑿出應實驗須求的孔數分佈之光罩，其中孔洞的半徑和環形的半徑分別為 0.1 mm 和 5.0 mm。透鏡的焦距是 1000 mm，將孔數的大小與間距按照固定參數設定，透鏡聚焦參數設定完成後，再使用數位相機記錄在透鏡後面成像的干涉圖案。



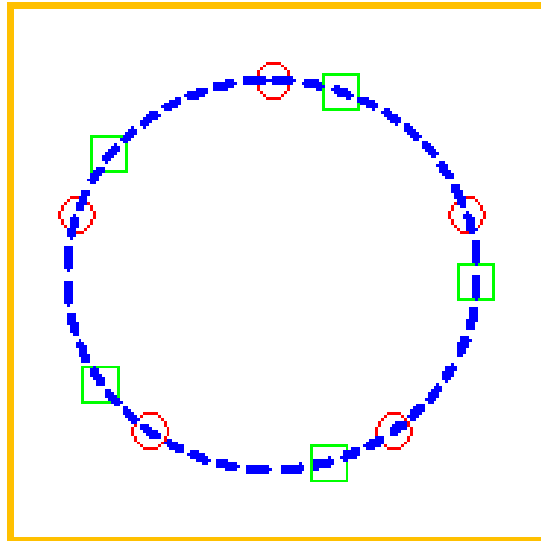


圖 5.3.2 Super lattice 形式一

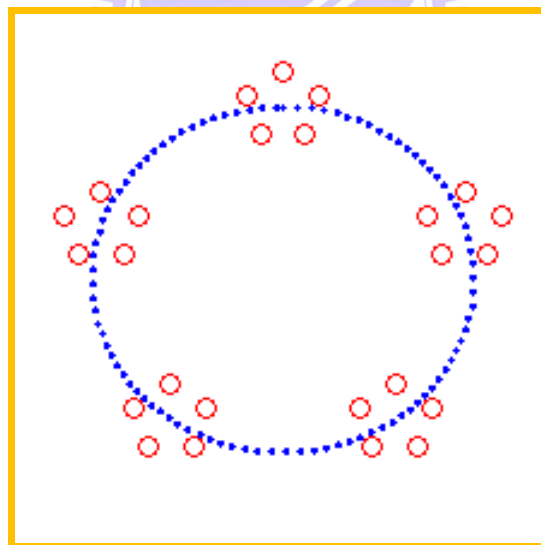


圖 5.3.3 Super lattice 形式二(Circle bundle)

5.4 實驗討論

Super lattice 利用數個光源去干涉，兩光源間有相對相位角度，所夾的角度會因圖像對稱性不同而有差異，選取的角度會隨著 Mask 所分佈的環上孔數而不同，會產生 n 個干涉平面波，其數個干涉波的疊加強度會顯影在接受器上，因增加相位角度上的差異所以圖樣會呈現比 quasi-crystal 漂亮的對稱性，其晶格結構就是所謂的 Super lattice 圖樣，當有相位差時，所呈現的圖樣更加豐富而多變。以 3 的對稱性來看，(如圖 5.4.1)(a)-(d)實驗操作與(a')-(d')理論模擬所取的角度 10 度、20 度、30 度，若角度取決過大，則容易跟 3 對稱性重複或是變成 3 對稱性的倍數，即 6、9 或其他 3 的倍數對稱性圖樣，若所取的角度太小，則干涉的條紋也會不明顯。角度的決定也跟孔位數量有相關，當孔位數量增加，所取的角度也會變小，但角度太小，干涉條紋就會不明顯，所以實驗的進行需要在適當的最佳範圍內才能得到最佳的圖樣。(圖 5.4.1)為 3 對稱性在環狀孔數分佈上新增相對角度孔位，(圖 5.4.2)為 3 對稱性相位圖，當 0 度時，是一個標準 3 對稱 quasi-crystal 圖樣，當 10 度時，內部呈現 3 對稱圖樣，外圍已有相互干涉的邊界出現，當 20 度時，內部 3 對稱圖樣線條變寬更加圓滑呈現小花圖樣，外圍因相互干涉的角度變大其邊界也趨向圓滑狀，當 30 度時，因角度變大以致內部 3 對稱圖樣範圍縮小，外圍也因相互干涉的角度變大

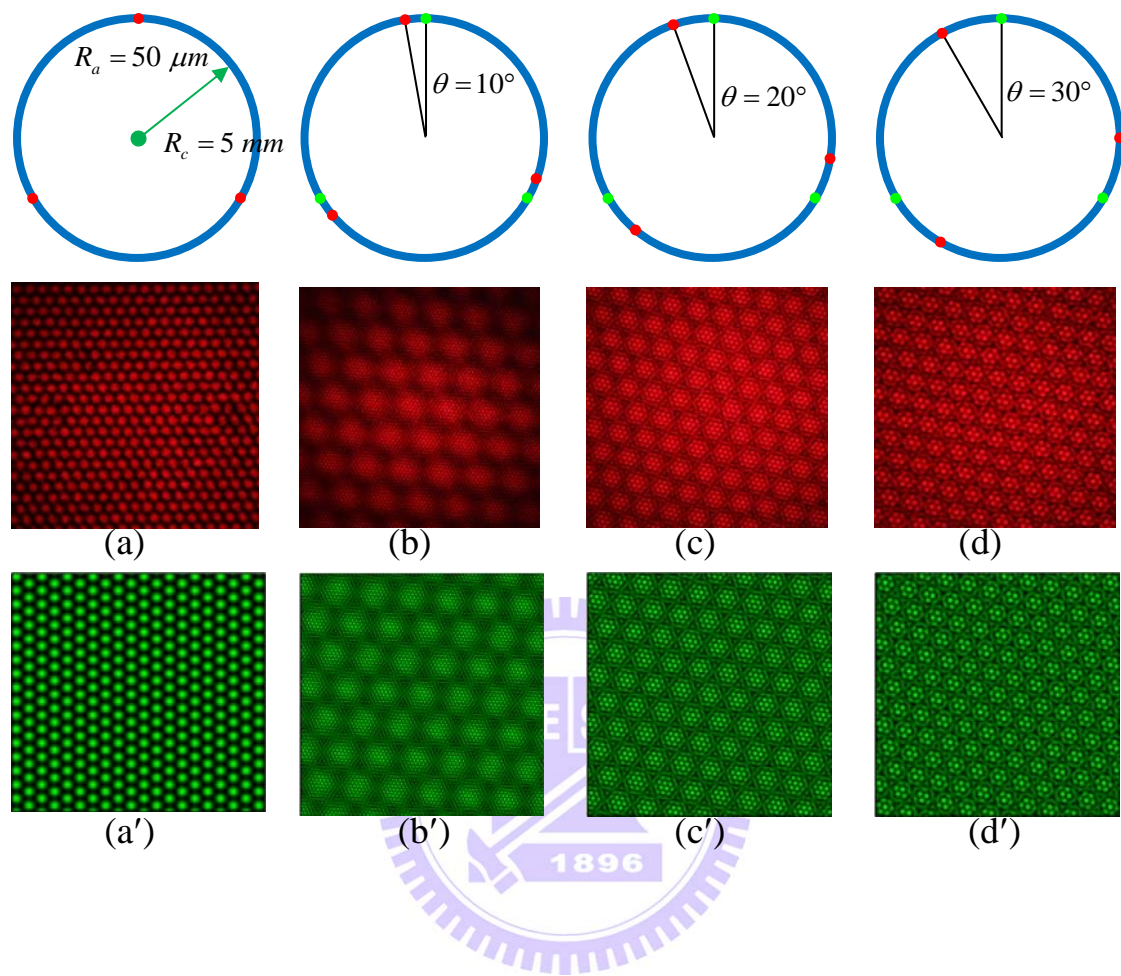


圖 5.4.1 3 對稱相對角度實驗與理論結構圖案

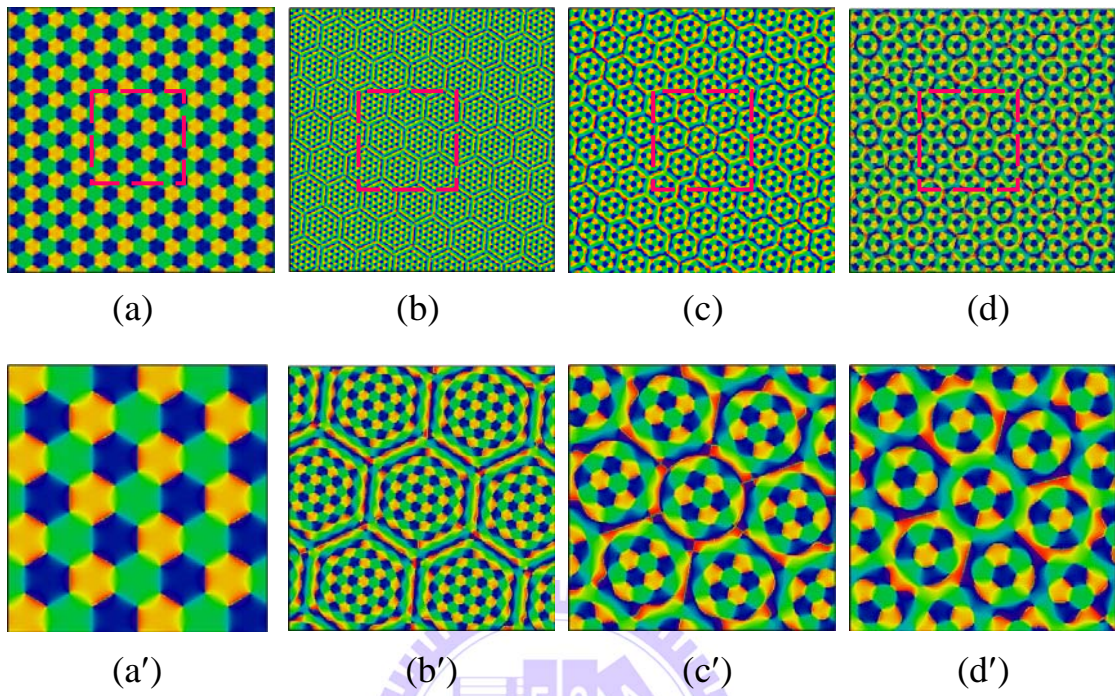
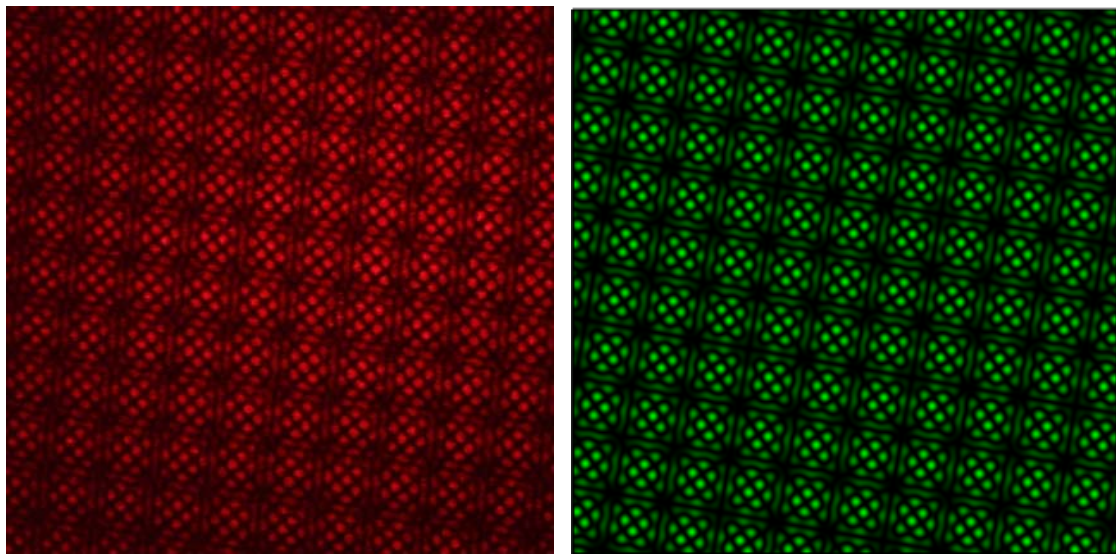


圖 5.4.2 3 對稱相位圖



(a)

(b)

圖 5.4.3 4 對稱相對角度實驗與理論結構圖案



其邊界已不明顯。(圖 5.4.3) (a)實驗操作與(a')理論模擬為 4 對稱圖樣，其結構相當特別，不管所取的角度是多少，呈現的圖樣都相同。(圖 5.4.4) (a)-(d)實驗操作與(a')-(d')理論模擬為 5 對稱性圖樣，(圖 5.4.5) 為 5 對稱性相位圖，當 0 度時，是一個標準 5 對稱 quasi-crystal 圖樣，當 10 度時，圖樣呈現旋轉對稱性，外為輪廓偏向線條狀，當 20 度時，圖樣呈現旋轉對稱性，外為輪廓偏向圓滑狀，當 30 度時，圖樣呈現旋轉對稱性，外為輪廓偏向圓滑狀，內部又延伸出自成一格的結構美，(圖 5.4.6) (a)-(d)實驗操作與(a')-(d')理論模擬為 6 對稱性圖樣，因孔位數變多會影響角度，所以在角度取決上會變小，當 0 度時，是一個標準 6 對稱 quasi-crystal 圖樣，當 5 度時，圖樣呈現平移對稱性，外為輪廓偏向線條狀，當 10 度時，圖樣呈現平移對稱性，外為輪廓偏向圓滑狀，自成一個小範圍，當 15 度時，圖樣呈現平移對稱性，外為輪廓偏向圓滑狀，自成一個小範圍，邊緣逐漸擴大，內部圓點變少，因此可以清楚簡單的從干涉圖樣中分辨出分別是幾對稱圖形，經由這樣的規則性一般也可以推測出高對稱性的圖樣。

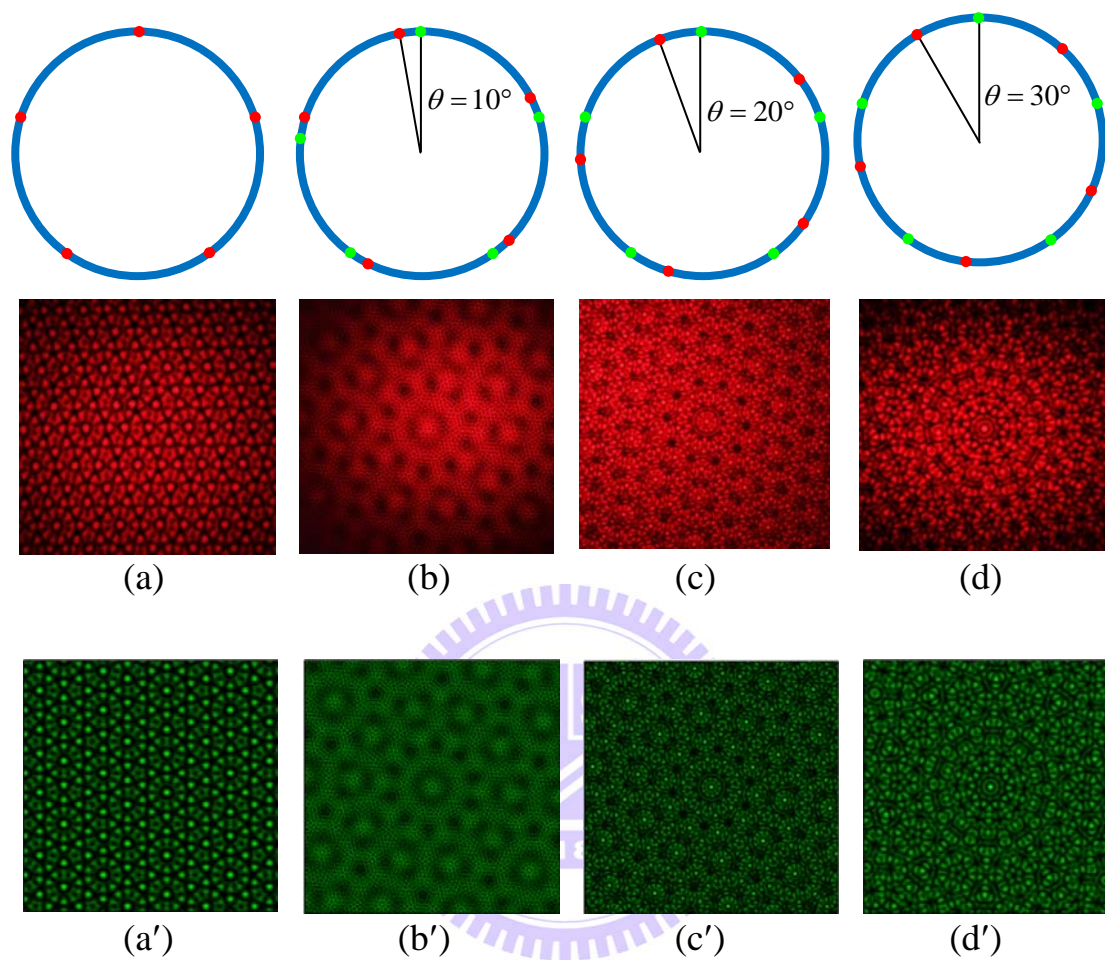


圖 5.4.4 5 對稱相對角度實驗與理論結構圖案

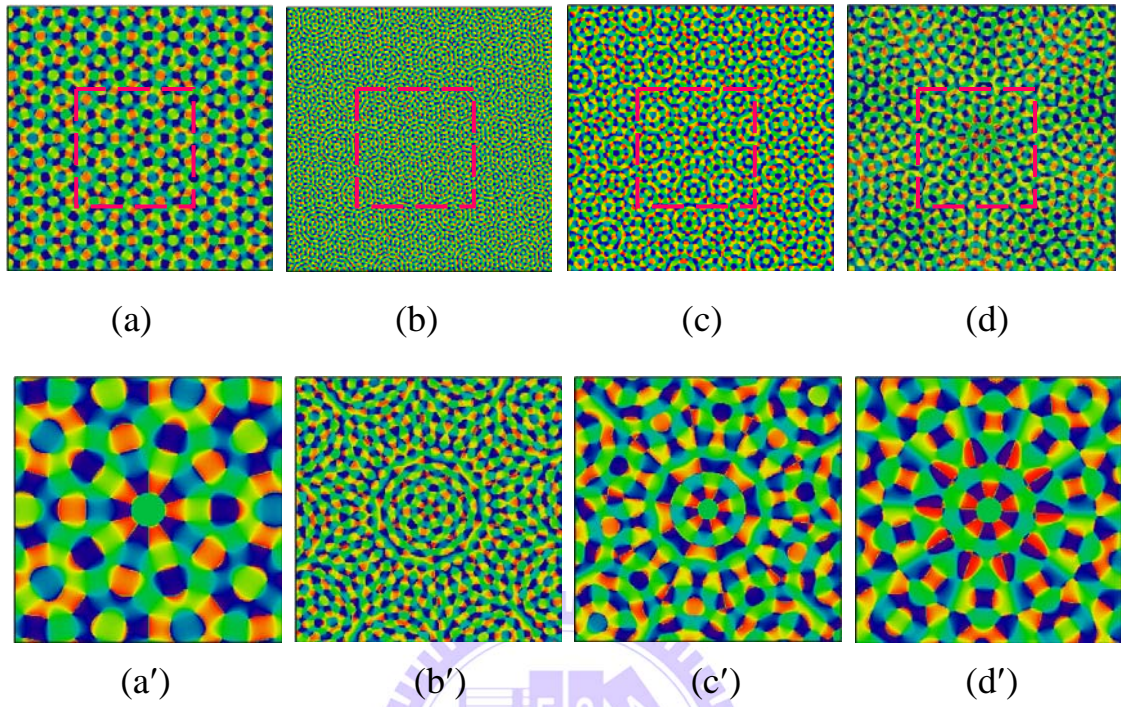


圖 5.4.5 5 對稱相位圖

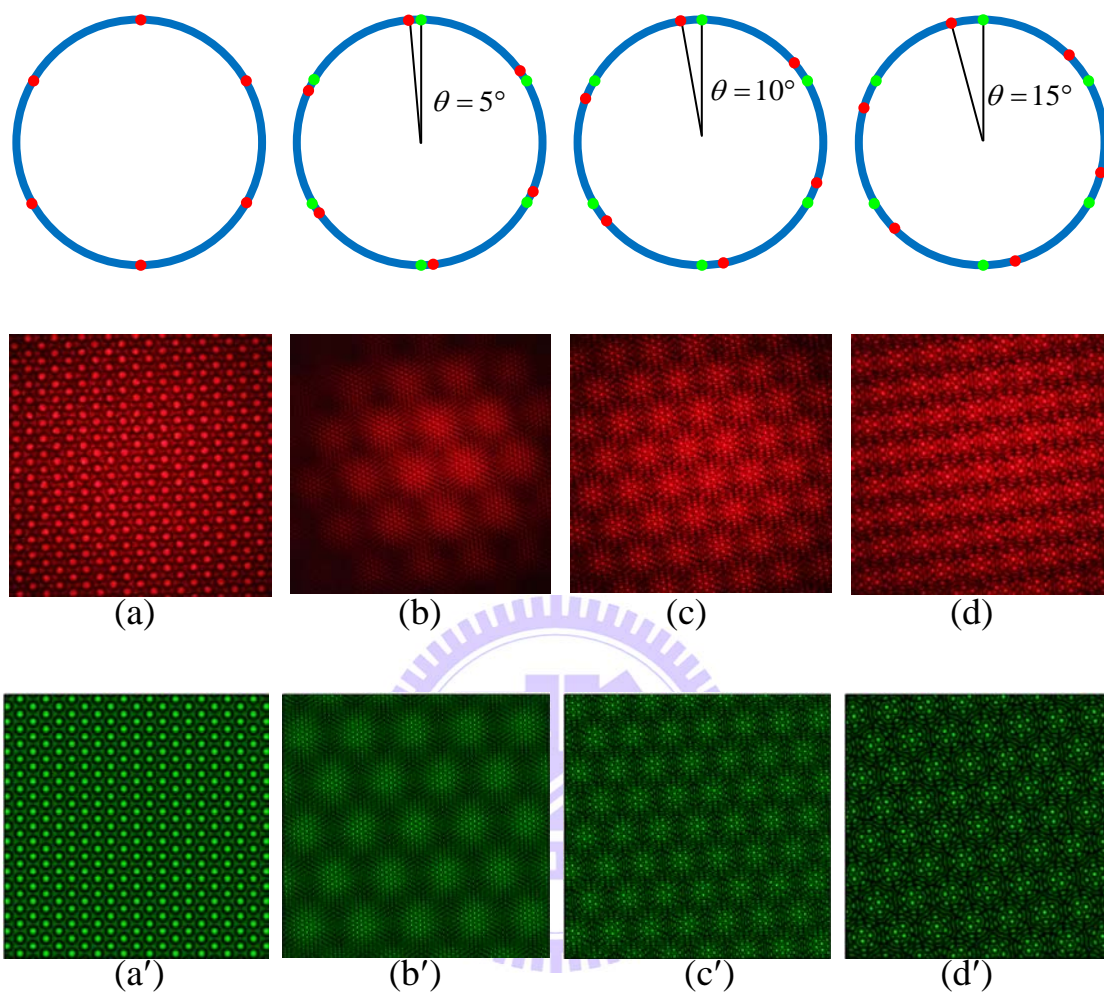
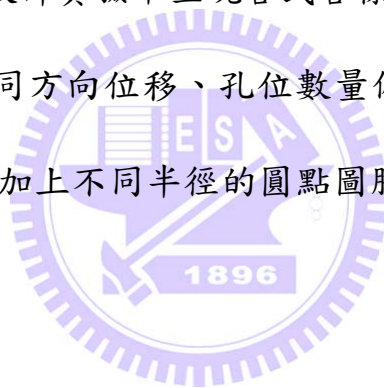


圖 5.4.6 6 對稱相對角度實驗與理論結構圖案

另一方面，Circle bundle也是利用數個光源去干涉，其架構可以看成兩層相互干涉的quasi-crystal，最外層是均分在大圓上的環狀光源干涉，內層是均分在小圓上的環狀光源干涉，當此兩層環上孔數在光源干涉下會產生 n 個干涉平面波，其數個干涉波的疊加強度顯影在接受器上，從接受器可以看到大圓的干涉在模擬圖樣中是小範圍圖樣，而小圓上的干涉在模擬圖樣中是大範圍圖樣，在了解圖樣變化前先將 A 訂定為大圓的「群數」， B 訂定為小圓的「點數」，以方便做分析，並將圖形分成 $A=B$ 跟 $A \neq B$ ，(如圖5.4.7)可以看出當 $A=B$ 時，圖形呈現的干涉圖騰中小範圍圖樣跟大範圍圖樣是相同的，即兩層晶格的相互干涉，當 $A \neq B$ 時，圖形呈現的干涉圖騰中小範圍圖樣是由群數造成；而大範圍圖樣是由點數造成，並將兩層不同晶格相互作用干涉，因此可以清楚簡單的從干涉圖樣中分辨出大圓跟小圓分別是幾對稱圖形，經由這樣的規則性一般也可以推測出高對稱性的圖樣，(如圖5.4.8)將我們實驗所拍攝圖樣跟模擬圖做一比較，結果是相當吻合的令人滿意，我們也設計了多種樣式的圖形，在這之前的孔位數圖樣設計都是正向(如圖5.4.7)，即單一個孔位數以平移方式360度作複製(每一個均為平移分佈圍繞大圓-群)，經由(圖5.4.8)驗證了實驗跟模擬的一致性；另外在(圖5.4.9)的圖樣設計是以不同的孔位數做360度旋轉分布(每一個均旋轉垂直圍繞大圓-群)，圖形形成的設計重點把握了幾何對稱基本

的平移、複製、旋轉跟鏡射原則，發現不同於平移分布的圖樣，又將呈現出另一種晶格圖形，也經由(圖5.4.10)驗證了實驗跟模擬的一致性，經由電腦模擬我們嘗試取了數百種圖樣，經過挑選較有趣與特別的圖樣，再以實驗手法加以驗證，圖樣也都如理論模擬預期的呈現。

除此之外，我們也將A:群數固定；B:點數作為變動項，以8對稱實驗模擬為例子，比較一系列的結構圖案(圖5.4.11)，發現這些圖樣相當的有趣，只要稍微變化就會呈現令人驚豔的華麗圖騰，也呼應了我們希望能藉由光學的設計實驗中呈現各式各樣的萬花筒圖斑，後續甚至可以類推出其他不同方向位移、孔位數量偏移、方向切線以及在Circle bundle中間另外加上不同半徑的圓點圖騰……等。



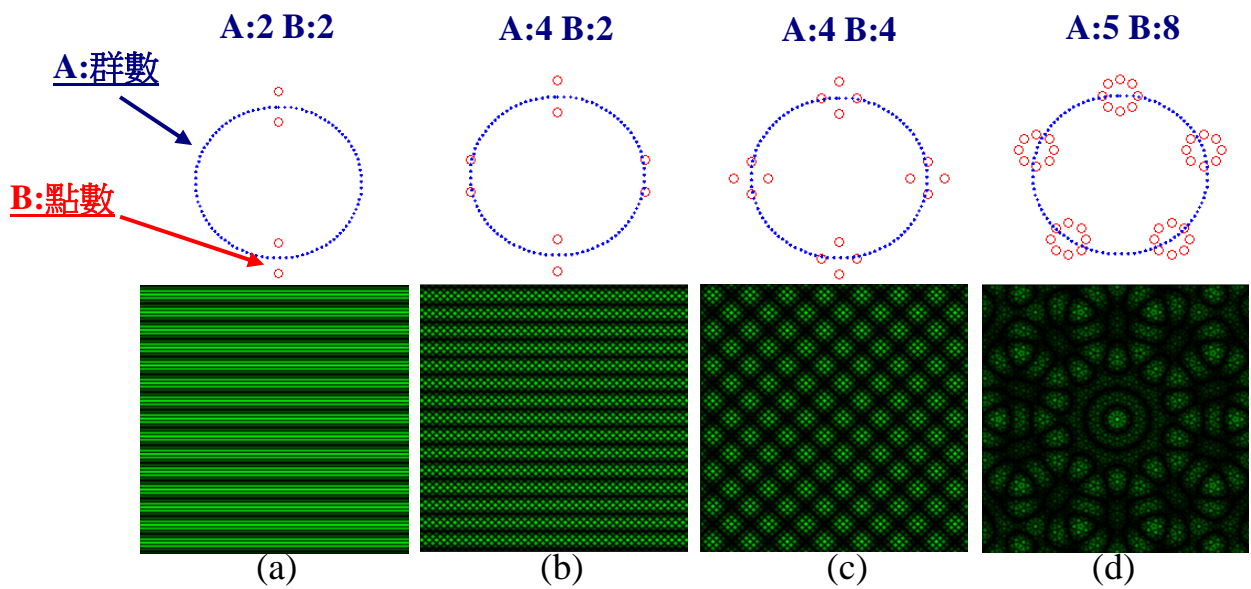


圖 5.4.7 理論模擬 Circle bundle-平移分布圖

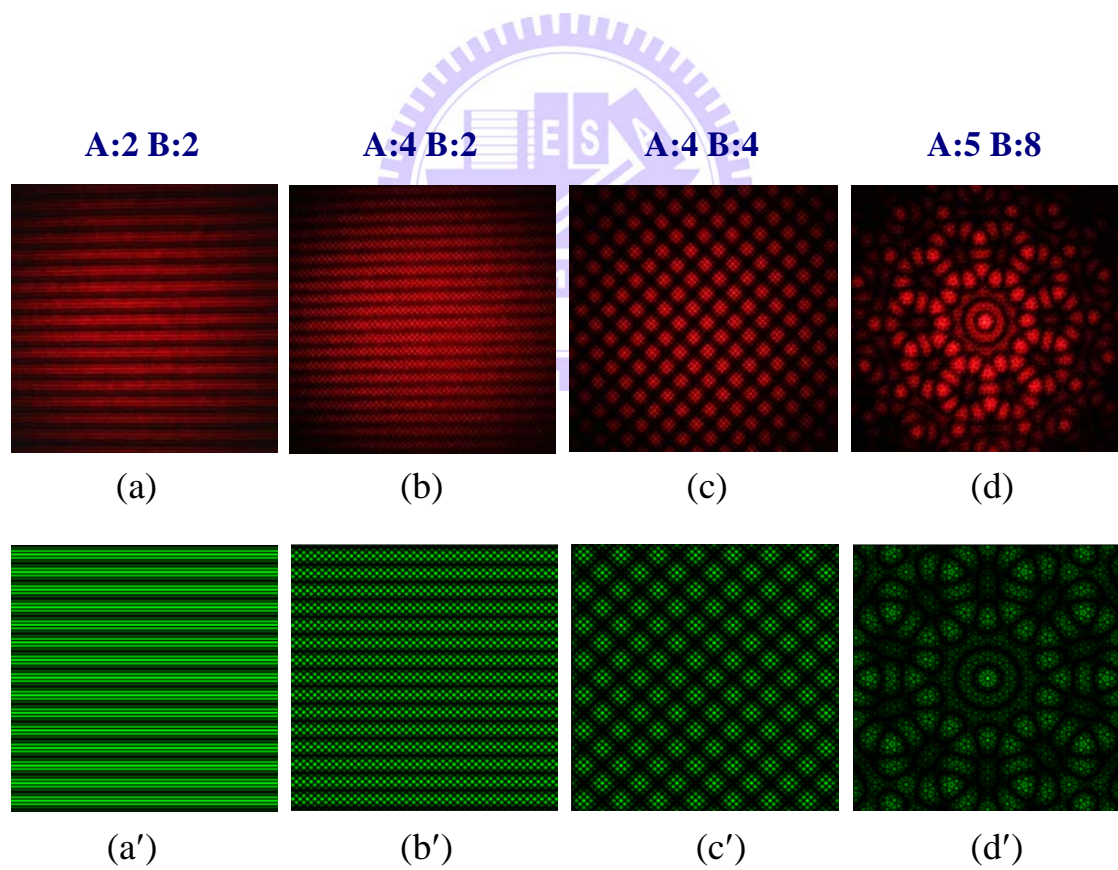


圖 5.4.8 理論模擬與實驗模擬 Circle bundle-平移分布圖

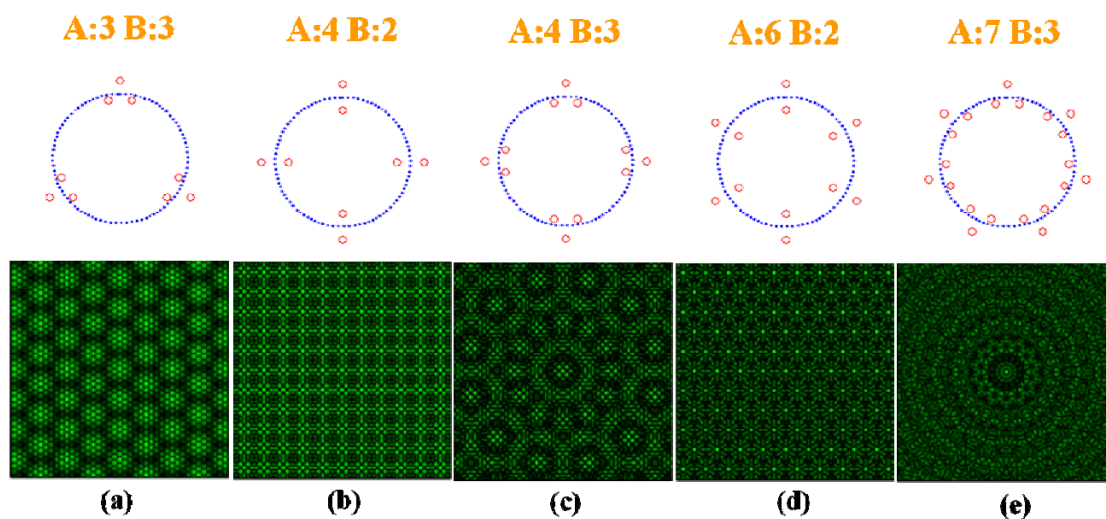


圖 5.4.9 理論模擬 Circle bundle-旋轉分布圖

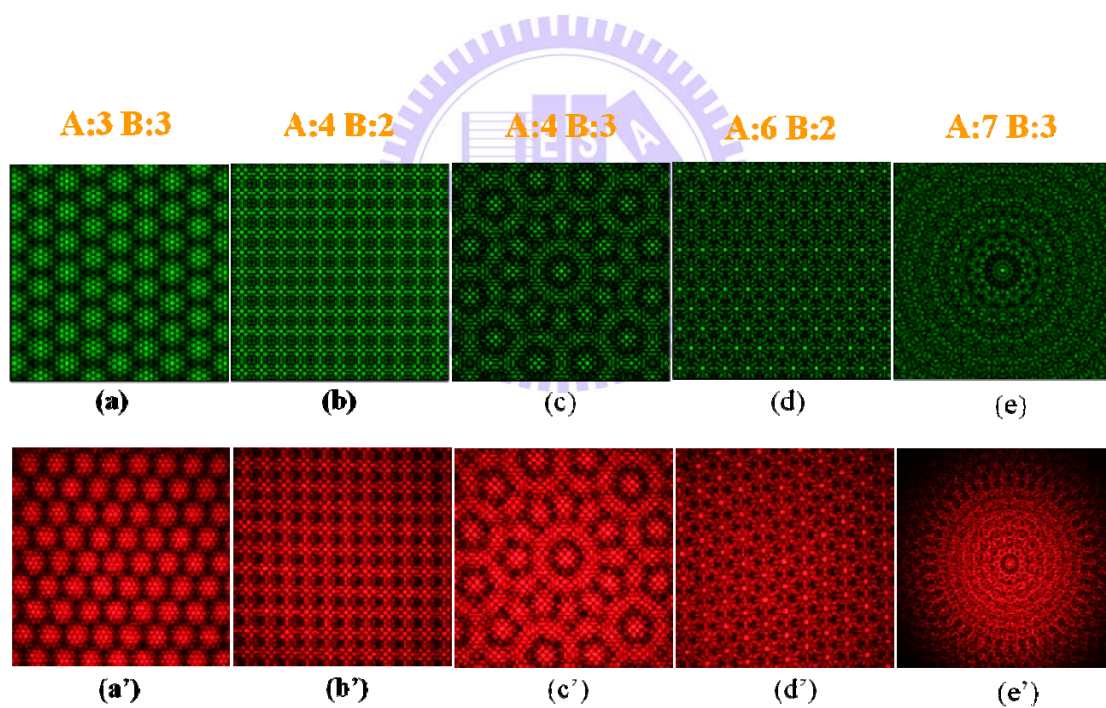


圖 5.4.10 理論模擬與實驗模擬 Circle bundle-旋轉分布圖

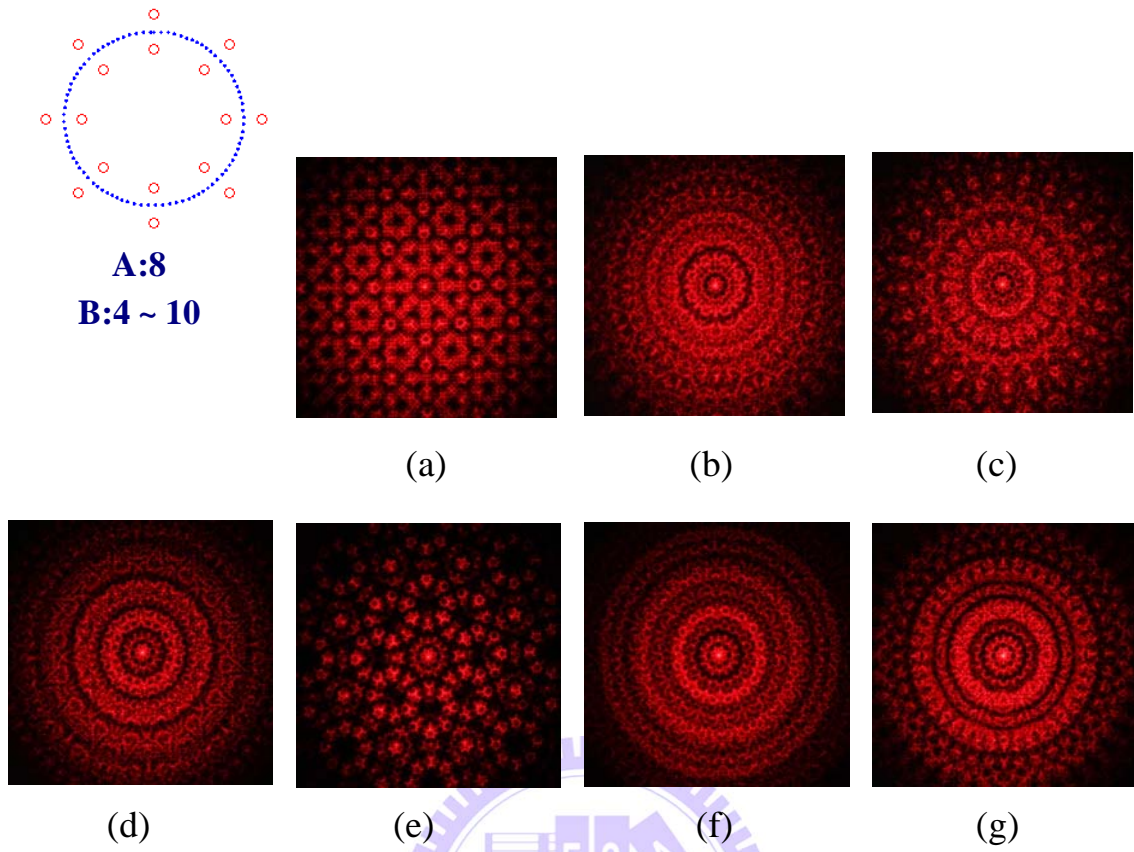


圖 5.4.11 8 對稱實驗模擬系列結構圖案

5.5 結論

從以上的實驗與理論圖樣可以知道，Super lattice 的圖樣延伸 quasi-crystal 的精神，第一種形式在 $q=3$ 、4 and 6 的圖案具有平移對稱性， $q=5$ 、7 and 8 的圖案則具有準晶格結構。因增加一相對相位角度，所以會有兩個圖樣相互干涉，在大範圍是 quasi-crystal 的圖樣，在小範圍則是另一層 quasi-crystal 的圖樣，但變化就比 quasi-crystal 更加豐富。此實驗經由低對稱推演出高對稱圖騰，甚至到更高對稱性時可以模擬出 Bessel function 的圖樣；第二種形式即 Circle bundle，在圖形形成的設計運用了幾何對稱基本的平移、複製、旋轉跟鏡射原則，所呈現出的華麗圖樣也都不盡相同，只要稍微變化就會有令人驚豔的圖騰，也呼應了我們希望能藉由光學的設計實驗中呈現各式各樣的萬花筒圖斑，後續甚至可以類推出其他不同方向位移、孔位數量偏移、方向切線以及在 Circle bundle 中間另外加上不同半徑的圓點圖騰……等。

因雷射儀器經由傅立葉轉換，由遠場轉換至近場，將系統的不穩定排除，方便我們揭取清晰無雜質的圖樣，利於實驗分析，圖樣幾乎是完美呈現，利用光學方法產生的 Super lattice 結構之光束可以用來發展新的材料，因此利用光學方法產生的準晶格結構之光束在應用層面上有很大的發展性。

第六章 結論與未來展望

6.1 結論與未來展望

本實驗經由光學模擬從 Quasi-crystal 圖形的產生到 Super lattice 圖像並延伸設計 Circle bundle 圖形，其呈現的圖形值得去探討，在未來工作上甚至可以類推出其他不同方向位移、孔位數量偏移、方向切線以及在 Circle bundle 中間另外加上不同半徑的圓點圖騰，在 Circle bundle 圖騰中間另外加上不同半徑的圓點(如圖 6.1.1)(a)-(c)理論模擬與(a')-(c')實驗模擬，中間部分多增加一點光源作干涉，因為不同半徑的圓點相互影響所造成的干涉，圖形也變複雜，跟中間無點光源干涉的圖形又不相同。

在(如圖 6.1.2)當 z 的距離不同時，即透鏡距焦的距離不同時，所干涉呈現出的圖樣並不受影響。



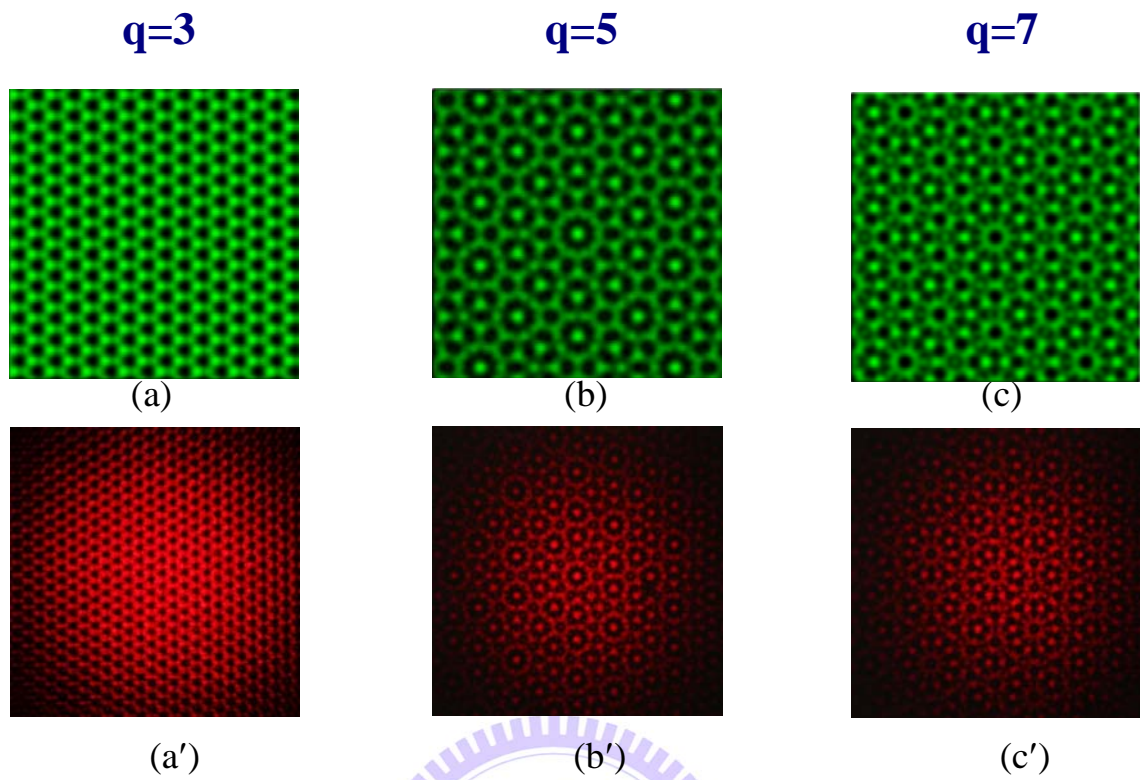


圖 6.1.1 平面波與準晶格干涉圖案

$q=5$

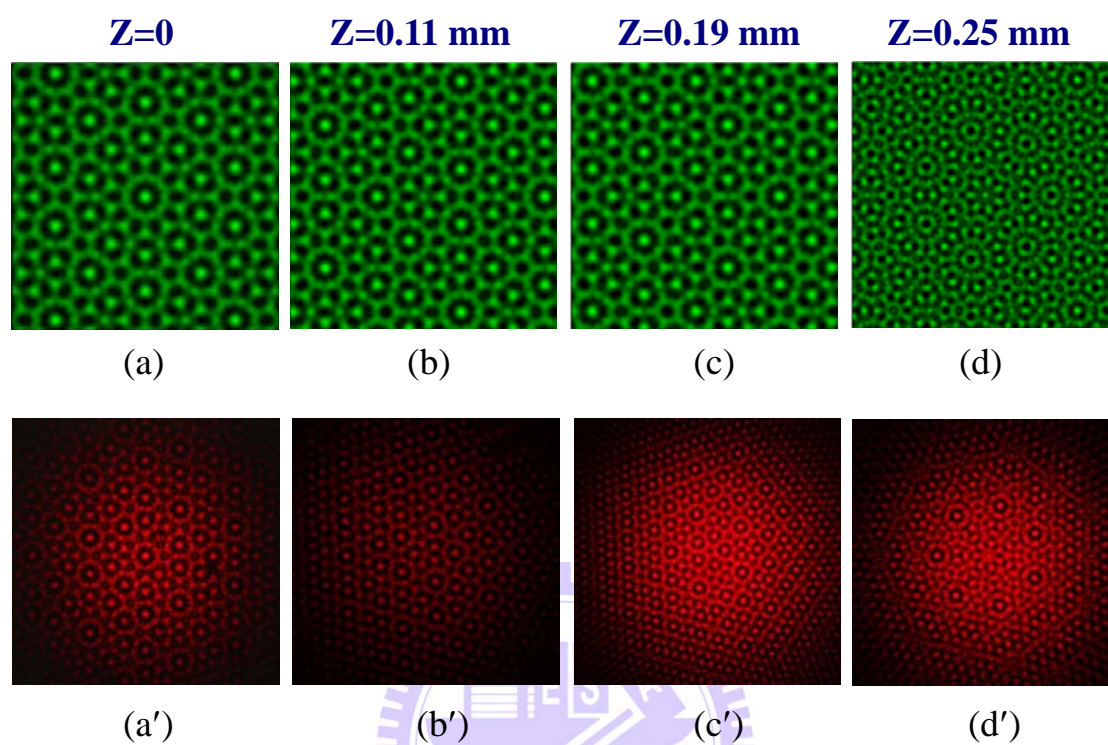


圖 6.1.2 不同距離下干涉圖案

參考文獻

- [1] Hardy, G.H., "A Mathematician's Apology", Cambridge University Press, Cambridge (1977).
- [2] E. Makovicky, "Five-fold Symmetry", World Scientific, 67–86., Singapore- London (1992).
- [3] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, "Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture", *Science* 315, 1106–1110 (2007).
- [4] T. Ishimasa, H.U. Nissen, and Y. Fukano, "New ordered state between crystalline and amorphous in Ni-Cr particles", *Phys Rev Lett* 55 (1985).
- [5] P. H. Wright and J. R. Saylor, "Patterning of particulate films using Faraday waves", *Review of Scientific Instruments*, volume 74, Number 9 (September 2003).
- [6] L. Bindi, P. J. Steinhardt, N. Yao, and P. J. Lu, "Natural quasi-crystals", *Science* 324,1306-1309 (June 10 2009).
- [7] J. Li, Y. Liu, X. Xie, P. Zhang, B. Liang, L. Yan, J. Zhou, G. Kurizki, D. Jacobs, K. S. Wong, and Y. Zhong, "Fabrication of photonic crystals with functional defects by one-step holographic lithography", *OPTICS EXPRESS*,12899-12904 (August 18 2008).
- [8] X. Wang, C. Y. Ng, W. Y. Tam, C. T. Chan, P. Sheng, *Adv. Mater.* 15,1526(2003).
- [9] J. Durnin, J. J. Miceli, J. H. Eberly, "Diffractive-free beams," *Phys. Rev. Lett.* 58, 1499-1501(1987).
- [10] J. Durnin, "Exact solution for non-diffracting beam," *J. Opt. Soc. Am. A.*, 4(4),657(1987).

- [11] V. V. Kotiyar, S. N. Khonina, and V. A. Soifer, "Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes," *J.Mod.Opt.* 43, 1231-1239(1995).
- [12] C. Paterson and R. Smith, "Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms," *Opt.Commun.* 124, 121-130(1996).
- [13] C. Paterson and R. Smith, "Helicon waves: propagation-invariant waves in a rotating coordinate system," *Opt. Commun.* 124, 131-140(1996).
- [14] L. Niggli, T. Lanzl, M. Maier, "Properties of Bessel beams generated by periodic gratings of circular symmetry," *J.Opt. Soc. Am. A* 14, 27-33(1997).
- [15] K. M. Iftexharuddin, A. A. S. Awwal, M. A. Karim, "Gaussian-to-Bessel beam transformation using a split refracting system," *Appl.Opt.* 32(13), 2252(1993).
- [16] R. M. Herman, T. A. Wiggins, "Production and uses of diffractionless beams," *J.Opt. Soc.Am. A*, 8, 932,(1991).
- [17] J. Turunen, et al., "Holographic generation of diffraction free beams," *Appl.Opt.*, 27, 3959(1988).
- [18] L. Niggli, et al., "Properties of Bessel beams generated by periodic gratings of circular symmetry," *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(1), 27(1997).
- [19] P. Vahiman, et al., "Electromagnetic analysis of nonparaxial Bessel beams generated by diffractive axicons," *J.Opt. Soc. Am. A*, 14(8), 1817(1997).
- [20] R. Piestun, et al., "Control of wave-front propagation with diffractive elements," *Opt. Lett.* 18(11), 771(1994).