

國立交通大學

理學院應用科技學程

碩士論文

圓柱波導管中大菲涅耳數的  
光學圖斑形成與幾何圖形

Optical pattern formation and its geometry in a  
large-Fresnel-number cylindrical waveguide

研究生：黃淑美

指導教授：陳永富 教授

中華民國 100 年 6 月

# Optical pattern formation and its geometry in a large-Fresnel-number cylindrical waveguide

學生：黃淑美

指導教授：陳永富

教授

國立交通大學理學院碩士在職專班  
應用科技組

## 摘要

我們將綠光雷射聚焦至三種不同長度的圓柱型波導管中，觀察其所產生的圖斑。實驗結果發現由光干涉所產生的圖斑與古典的圓型彈子球檯周期性軌跡相同，而且依然具有波干涉的特性。這些週期性的運行軌跡在理論分析上，可用圓柱型波導管的基本模態干涉疊加產生，理論模擬的結果與實驗相當吻合。然而在使用較短的波導管時，觀察到越短的光導管呈現出越不完整圖像，這部分的實驗現象不能以波的形式模擬詮釋，我們改以粒子性的光速追跡方式進行理論模擬，成功的重建實驗所得的光斑圖案，清楚的揭示光導管長度對圖案成形的影響。以往使用波導主要觀察基本模  $TE_{1,1}$ ，無從針對此種幾何圖形進行更深入的探討，藉由本文的研究可連接光的波動性與粒子性之間的特性。

optical pattern formation and its geometry in a large-Fresnel-number  
cylindrical waveguide

student : Shu-Mei Huang

Advisors : Dr. Yung-Fu Chen

Department of Science  
National Chiao Tung University

ABSTRACT

With a large-aperture circular light pipe, the transverse optical quasiscattered resonance modes related to periodic orbits in circular billiards are experimentally observed. The experimental quasiscattered modes are numerically confirmed to be the linear superposition of nearly degenerate Bessel eigenstates. Furthermore, some incomplete patterns are observed in the shorter waveguides, and these incomplete near-field patterns also could be restructured by ray tracing method. As a conclusion, the relevant features between the particle nature and wave properties of light could be successfully linked.

## 誌 謝

很快，兩年就過去了，在實驗室的這段時間裡，學到很多，得到很多。最感謝的是陳永富老師，這兩年的教導，不論學業上還是人生智慧上，對我的幫助是永恆的。還有，直接帶領我學習的林毓捷學姊跟梁興馳學長，這兩位讓我的實驗與論文內容更臻完美。重要的還有，實驗室裡的學長學姊們，老大、黃哲彥、黃仕樟、黃依蘋、張漢龍、黃文政、余彥廷、莊威哲、黃郁仁、李易純、陳毅帆、林坤毅、董容辰、舜子及陳建至，對這些學長學姊們，只有一句話：『 What can I do without you!! 』。

# 目 錄

中文摘要	.....	i
英文摘要	.....	ii
誌謝	.....	iii
目錄	.....	iv
圖表目錄	.....	v
一、	簡介/序言 .....	1
1.1	研究動機與目的.....	1
1.2	論文組織.....	2
二、	波與粒子的雙重性與圖斑形成.....	3
2.1	波粒二重性.....	3
2.2	圖斑形成.....	8
三、	古典圓形彈子球檯.....	14
3.1	基本數學概念.....	14
3.2	圓形彈子球之週期性古典軌跡之形成.....	17
四、	圓柱波導與 Bessel Function.....	27
4.1	圓柱波導.....	27
4.2	Bessel function 歷史 .....	30
4.3	對應於圓形彈子球檯的波函數.....	30
4.4	從 Bessel function 到週期性古典軌跡.....	33
五、	以雷射實驗實現具有軌跡圖案的光斑.....	36
5.1	實驗架構.....	36
5.2	實驗觀察與結果.....	36
5.3	結果比較與討論.....	43
六、	結論與未來展望.....	49
參考文獻	.....	52

## 圖表目錄

圖 2.1.1	雙狹縫實驗架構示意圖	5
圖 2.1.2	電子的雙狹縫實驗產生的干涉條紋	6
圖 2.1.3	光電效應示意圖	7
圖 2.2.1	大自然圖形	9
圖 2.2.2	Faraday wave	10
圖 2.2.3	Chladni pattern	12
圖 2.2.4	光學圖斑	13
圖 3.1.1	直角坐標系上的直線	15
圖 3.2.1	一維方形彈子球邊界	18
圖 3.2.2	一維方形彈子球位置對時間變化	19
圖 3.2.3	二維方形彈子球檯邊界	20
表 3.2.1	(p,q)為有理數的二維方形彈子球檯軌機	22
圖 3.2.4	二維圓形彈子球檯邊界	23
表 3.2.2	圓形彈子球檯與完全剩餘系	24
表 3.2.3	(p,q)比值為無理數	26
圖 4.1.1	矩形波導管結構示意圖	28
圖 4.1.2	圓形波導示意圖	29
圖 4.3.1	(a)Bessel function 的一維圖形 (b)Bessel function 的二維圖形 (c)Bessel function 的三維圖形	32
圖 4.4.1	Bessel 理論模擬圖形	35
圖 5.1.1	實驗架構示意圖	37
圖 5.1.2	以 35cm 光纖光導管在無活動孔徑板的原始近場圖像	38
圖 5.2.1	(a)35cm 光纖光導管實驗圖形 (b)粒子性模擬圖形 (c)波動 性模擬圖形	40
圖 5.2.2	(a)35cm 光導實驗圖形 (b)12cm 光導實驗圖形 (c)5cm 光導 實驗圖形	42
圖 5.3.1	(a)依序為 35cm、12cm、5cm 光導管實驗所得(3,1)模態 (b) 理論模擬產生的相對(3,1)模態	45
圖 5.3.2	(a)依序為 35cm、12cm、5cm 光導管實驗所得(5,2)模態 (b) 理論模擬產生的相對(5,2)模態	46
圖 5.3.3	(a)依序為 35cm、12cm、5cm 光導管實驗所得(4,1)模態 (b) 理論模擬產生的相對(4,1)模態	47
圖 5.3.4	(a)依序為 35cm、12cm、5cm 光導管實驗所得(7,3)模態 (b) 理論模擬產生的相對(7,3)模態	48
圖 6.1.1	(a)以 35cm 光導實驗所得(5,2)模態圖形 (b)光速追跡理論模 擬圖形	50

圖 6.1.2 (a)以 35cm 光導實驗所得(25,6)模態圖形 (b)光速追跡理論 51  
模擬圖形.....

# 第一章 簡介

## 1.1. 研究動機與目的

自然界充滿各式奧妙的圖形，包含氣體的對流、水面的漣漪、向日葵花盤、宇宙星體的排列..等等，這些有趣的圖案形成一直廣為人們探索。在數理中，針對各式的靜態與動態的週期性行為有多面向的探討，涵括太陽週期行為、晶體的晶格週期性位勢、植物外形的週期性圖斑等等，這些都各有其週期性的循環。此多樣化的週期性圖形因其特殊的幾何結構，在多個領域皆佔有重要角色。本論文以光學的角度，使用具有高度穩定性與良好同調性的雷射系統為主軸，對此類的 periodical pattern 做更深入的研究。實驗的架構主要以一波長 532nm 的綠光雷射投射於三個不同長度的光纖光導管，觀察其產生的數個變化豐富的週期性軌跡並比較其間的差異。

實驗所使用的光導管，其傳導概念為英國物理學家 J.J. 湯姆森於 1893 年提出<sup>[1]</sup>，係以全反射方式使電磁波於導體空間中維持高效率傳波，達到無介質耗損並減低導體本身的電阻磨耗，其傳導概念已廣泛應用於無線電通訊、光通訊、雷達導航及各學術領域的研究上，皆貢獻很大的實質效益。然而過去的研究主要觀察的是基本模  $TE_{1,1}$ ，在本實驗中我們特別針對大菲涅耳數(Large Fresnel number)的模態來研究其空間中的幾何結構。

在本論文中我們觀察這些實驗得到的圖形，配合模擬其 *bessel wave* 的疊加，連接古典幾何軌跡的結構，提供波與粒子的連接性更直觀的類比，也提供給特殊函數研究領域有更多圖像式的思考。

## 1.2. 論文組織

第二章概述電子的波粒二重性及多樣的圖斑，第三章先探討基本數論的數個概念，由直線方程式、同餘、有理數、無理數、及完全剩餘系帶入圓形彈子球檯的古典軌跡，第四章的開始先介紹波導管及 Bessel function，再由 Bessel function 的疊加到圓形彈子球檯的古典軌跡，第五章討論實驗所觀察到的現象，以綠光雷射投射於光導管中，分別傳導出不同的週期性軌跡，再以實驗於三種不同長度的光導管，比較其間的差異，也更深入的探討與比較其各種模態與現象間的差異，第六章為結論及未來可能的發展方向。



## 第二章 光與粒子的雙重性及圖斑形成

一切物質都有類波的屬性，量子物理的核心理論即是非常微小的空間中(如原子)，物質的粒子(如電子)會同時兼具粒子與波的特性。探討光是波還是粒子，從 1704 年 Newton 提出粒子性，於 1801 年 Thomas Young 雙狹縫實驗觀察到干涉條紋證實光的波動性，到 1905 年 Einstein 光電效應引入光量子概念展示出光的粒子性，此時開始意識到光同時具有波動與粒子二重性，即電磁波具有粒子特性，而屬於粒子的電子，也有波的特性，之後到了 1924 年 De Broglie 提出物質波，認為所有物質都跟光一樣具有波粒二重性。

二十世紀初量子力學建立，認為自然界所有的粒子，如光子、電子或是原子，都能用一個微分方程式，如薛丁格方程式來描述。這個方程式的解即為波函數。波函數具有疊加性，能夠像波一樣互相干涉和繞射，同時，也被解釋為描述粒子出現在特定位置的機率幅。這樣，粒子性和波動性就統一在一個解釋中<sup>[2]</sup>。

### 2.1 波粒二重性

波粒二象性指微觀粒子有時顯示出波動性(粒子性不明顯)，有時顯示出粒子性(波動性不明顯)，在不同條件下分別表現波動和粒子的性質。一切微觀粒子都具有波粒二象性，日常生活中觀察不到物體的波動性，主要為質量太大，導致德布羅意波長比可觀察的限度要小很多<sup>[3]</sup>。

1704 年 Newton 著成《光學》，其中詳述了光的粒子理論，認為光是由非常微小的微粒組成的，而普通物質是由較粗微粒組成。在此更早，荷蘭物理學家克里斯蒂安·惠更斯提出了光的波動理論，解釋光波

如何形成波前，直線傳播，但該理論於某些方面無法突破，加上不敵 Newton 的學術光環，當時仍以光為粒子，到了 1801 年 Thomas Young 以雙狹縫實驗觀察到光的干涉條紋，人們才注意到光的確實有波動性質。

(圖 2.1.1)為雙狹縫實驗架構示意圖，單色光源通過單一狹縫，通過的光繞射到有兩狹縫的不透明檔板，通過兩狹縫的光為同調光波並為兩個新的點光源，記錄偵測屏障上通過狹縫的光波數據，觀察到明亮與黑暗交錯的干涉圖案，通過兩狹縫的光波互相干涉，證實光的波動性質。之後，陸續有其它研究使用不同材質進行雙狹縫實驗，觀察到電子、分子..等等都具有波動特性，如圖 2.1.2 以電子做雙狹縫實驗，能觀察到粒子性的電子出現如波的干涉條紋。

反之，證明光具有粒子性的代表性實驗為光電效應，圖 2.1.3 為光電效應示意圖，1905 年 Einstein 引用 Planck 量子原理推算出光電效應。Planck 發現光的能量並非連續性，並進一步假設輻射能量為少量不停釋出的量子，每一量子有能量 E，而 E 取決於頻率，量子能量公式為：

$$E = h \cdot f \quad , \quad h \approx 6.62618 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

說明一道輻射的頻率越高其能量也越高。光電效應中解釋光的量子化效應，將一束特定光線照射在金屬上，光的頻率高於一臨界值，金屬會吸收光子並發射電子，臨界值取決於金屬材料，發射出的電子能量取決於光的頻率，且電子的產生為瞬時的，與光的照射時間長短無關，Einstein 提出光必定由波長有關的能量單位所組成，即為光子，此現象說明光的粒子性，是光波的粒子，也就是光波具有粒子的性質，光量子的個數與電磁波振幅(即電磁場強度)平方成正比。

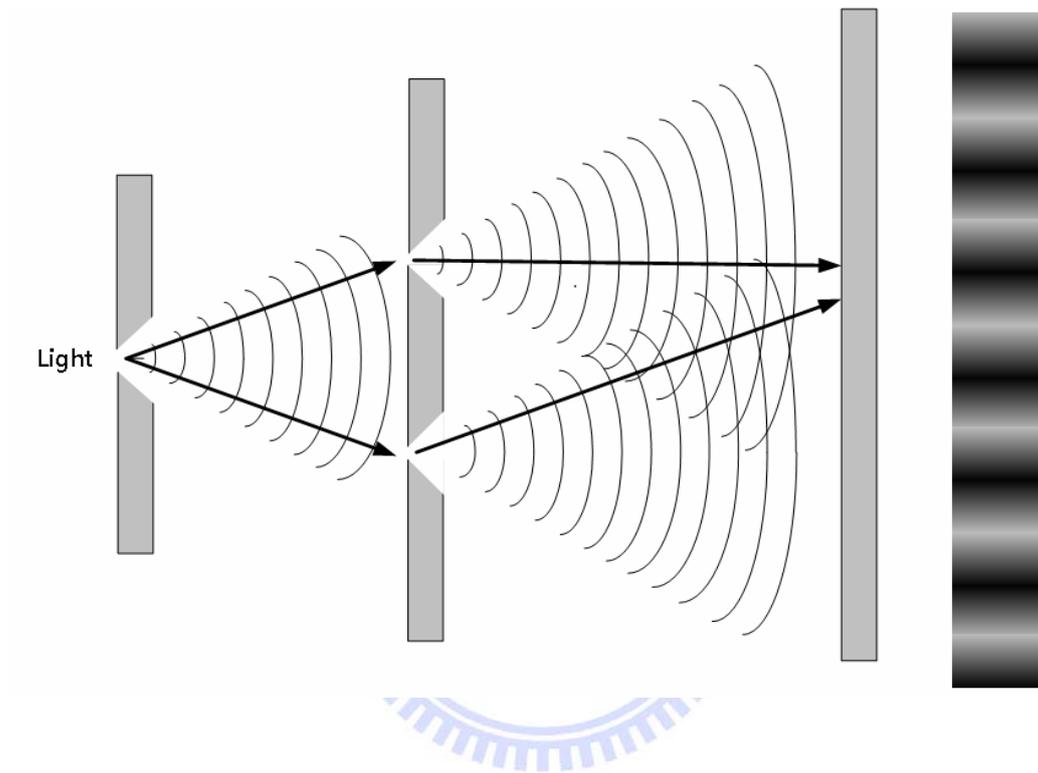


圖 2.1.1 雙狹縫實驗架構示意圖

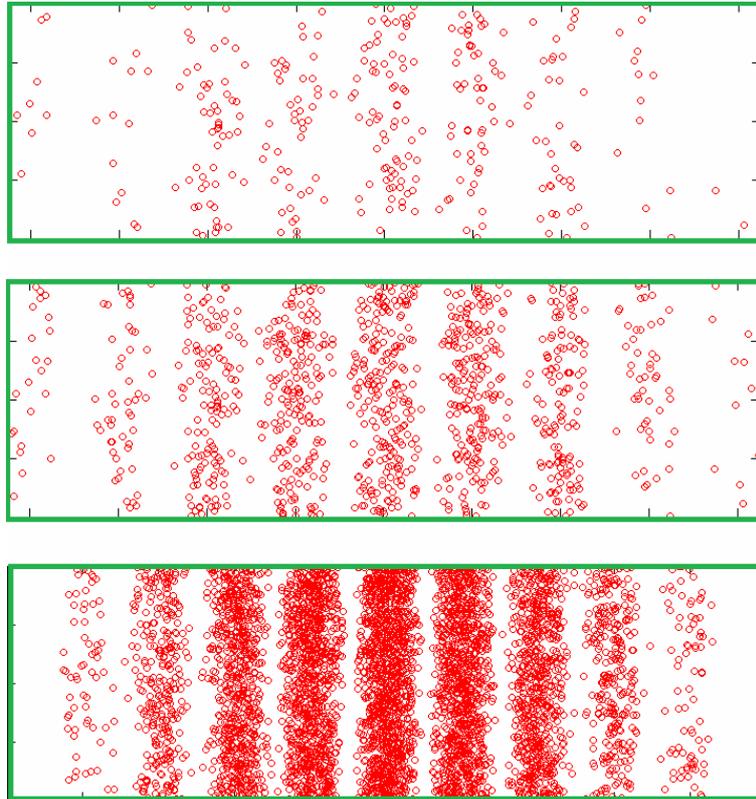


圖 2.1.2 電子的雙狹縫實驗產生的干涉條紋

$$E_{\text{photo}} = h\nu$$

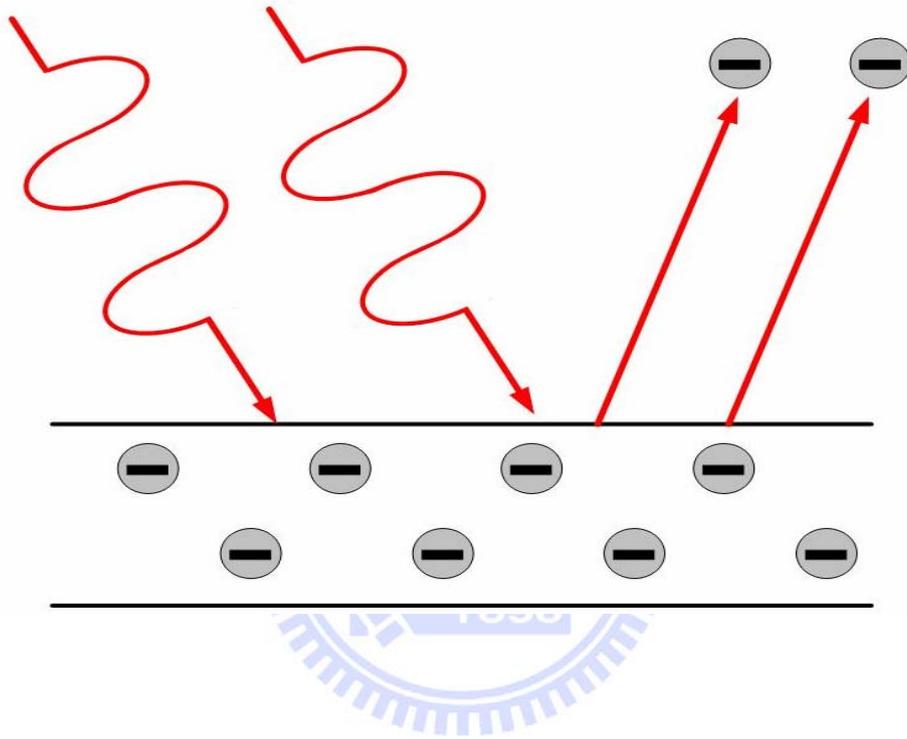


圖 2.1.3 光電效應示意圖

從 Thomas Young 的雙狹縫實驗證實光的波動性，與 Einstein 的光電效應證明光的粒子性，兩者充分說明光具有粒子特性也具有波動特性，即屬於波動的電磁波具有粒子特性，而屬於粒子的電子也有波動特性。1924 年，De Broglie 提出物質波，每種物質都有波粒二象性，一個物質粒子也具有波動性，其能量與動量取決於物質波的頻率與波數。到了 1926 年奧地利學者薛丁格(Schrödinger)對此波粒二象性，創建了薛丁格方程式，方程式的解為波函數，用以描述粒子的量子行為。

## 2.2 圖斑形成

自然成形的圖斑多姿多采無邊無際(圖 2.2.1)，多數的圖斑有對稱與和諧的比例，從植物到動物、靜態到動態、元素晶體排列到宇宙星體排列、氣體、液(流)體、固體等等，這些美麗的圖斑也應用在生活裡，如建築的貼磚圖騰與伊斯蘭教圖騰，圖斑的形態有週期性、非週期性、對稱、非對稱、混亂、螺旋等等。對這些圖斑深入的探索，可了解自然界裡各物理自有其形成規律，如同植物葉序的生成，每層角度差約是  $137.5^\circ$ ，對其採光與通風都是最佳，這是生物世界的黃金比例，精巧奧妙又豐富。

規則變化的圖案，一直是人們探索的方向，於 1831 年，法拉第(Faraday)使用一裝有水的容器於垂直方向振盪，當振幅超過一鄰界值時，液面便產生規則駐波圖形，其振盪頻率為外加振盪頻率的一半，並發現不同的流體所產生的圖形也不同(圖 2.2.2)，其圖案多樣，生動有趣。十九世紀初期，克拉德尼(Ernst Chladni)將細砂均勻撒在一平版上，然後以小提琴的弓在平板邊緣拉彈，使平板產生特定頻率的振動，



圖 2.2.1 大自然圖形

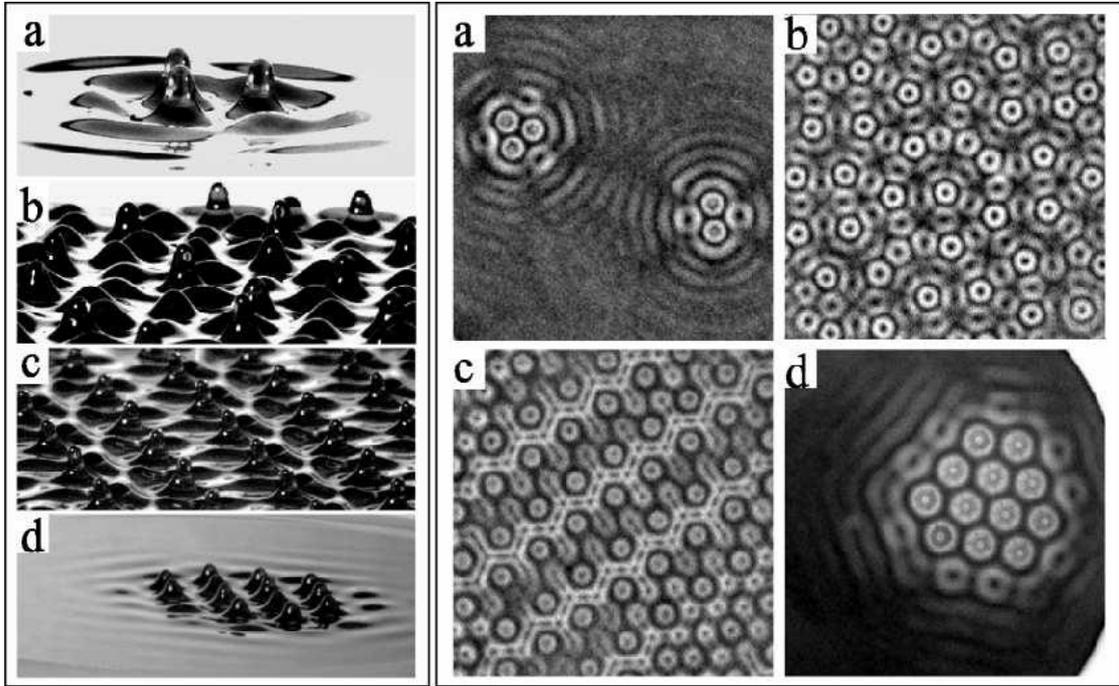


圖 2.2.2 Faraday wave

可觀察到細砂會停留在沒有振動的結線上，產生共振圖案(圖 2.2.3)，當平板具有均勻的密度且對稱的形狀，則共振圖案會隨著變化，呈現各種不同的對稱圖案。

利用光學的方式可觀察到一樣的週期性圖斑(圖 2.2.4)，本論文使用雷射經由光導管投射出週期性軌跡的圖斑，針對這些圖斑做深入的探討，藉以雷射的同調性、穩定性與可調性，便於控制及重建此類的圖斑，使我們更易於研究這些複雜且多變的圖形。



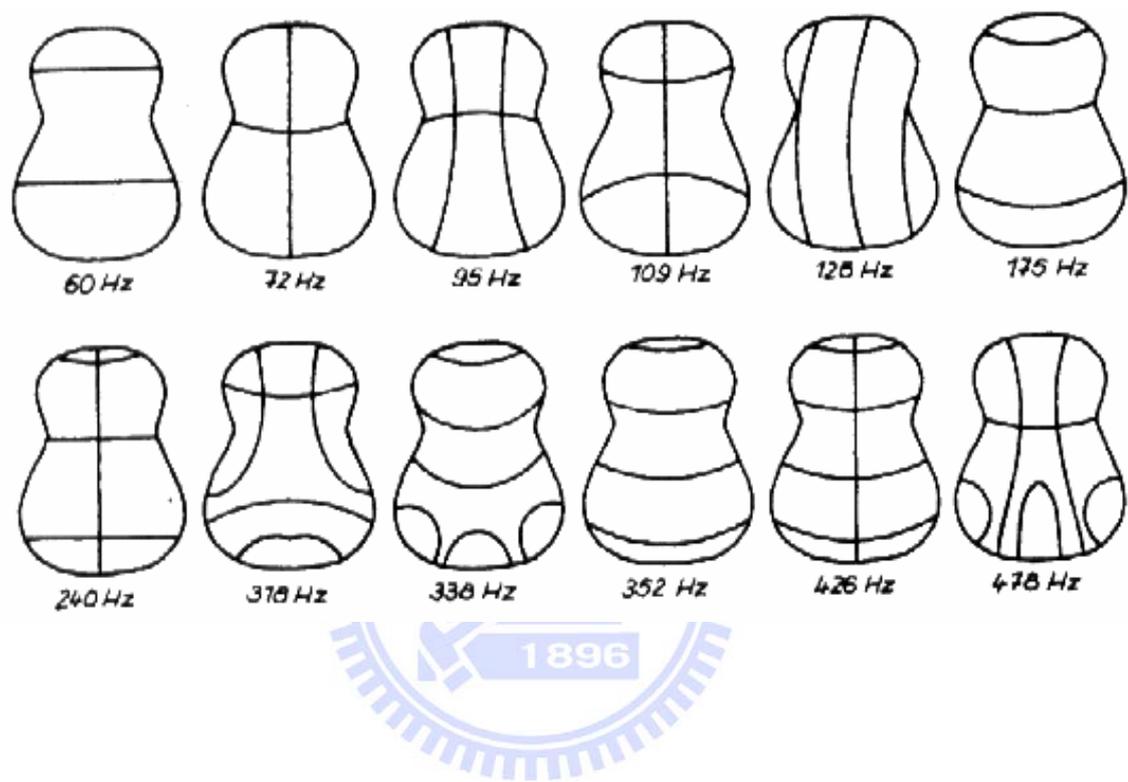


圖 2.2.3 Chladni pattern

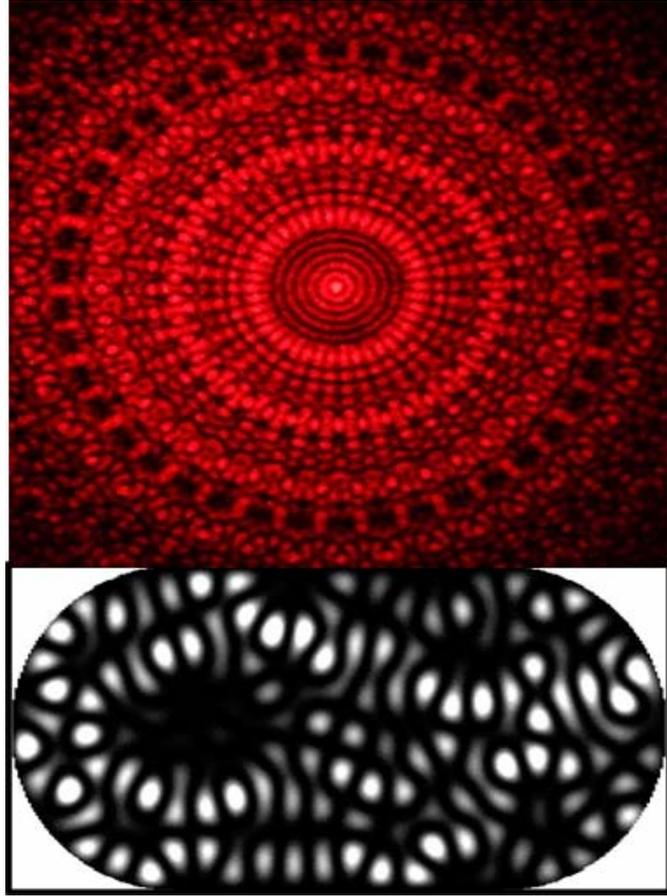


圖 2.2.4 光學圖斑

### 第三章 古典圓形彈子球檯

在侷限邊界裡的彈子球，其運行路徑隨著邊界而表現，假設彈子球為彈性碰撞並且無能量損失，則連續碰撞的入射角及反射角維持一定值，可觀察到多階的古典週期軌跡。在探討彈子球運行軌跡前，先了解一些基本的數學關聯性，將這些基本數學運用於彈子球的週期性運動軌道。

#### 3.1 基本數學概念

平面的特定兩點決定一條直線(圖 3.1.1)，直線是最簡單的幾何圖形，利用函數可以延伸得一直線函數，稱為”兩點式”的直線方程式，線上任一點皆符合下列直線方程式[4]:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \quad (2.1)$$

一個點加上方向，也可決定一直線，如同直線是具有方向性的線條，以斜率表現，其直線方程式稱作”點斜式”:

$$(y-y_0) = m(x-x_0) \quad (2.2)$$

另一方式，以 Y 軸上的截距和斜率可決定一直線，方程式稱為”斜截式”:

$$y-y_0 = mx \quad (2.3)$$

接著簡述同餘的概念，最早是由德國數學家高斯引用此同餘的概念與符號，基本的定義為:

$a \equiv b(\text{mod } m) \Rightarrow m|(a-b)$  讀為 a 同餘 b, 模 m。其代表意義即為兩整數

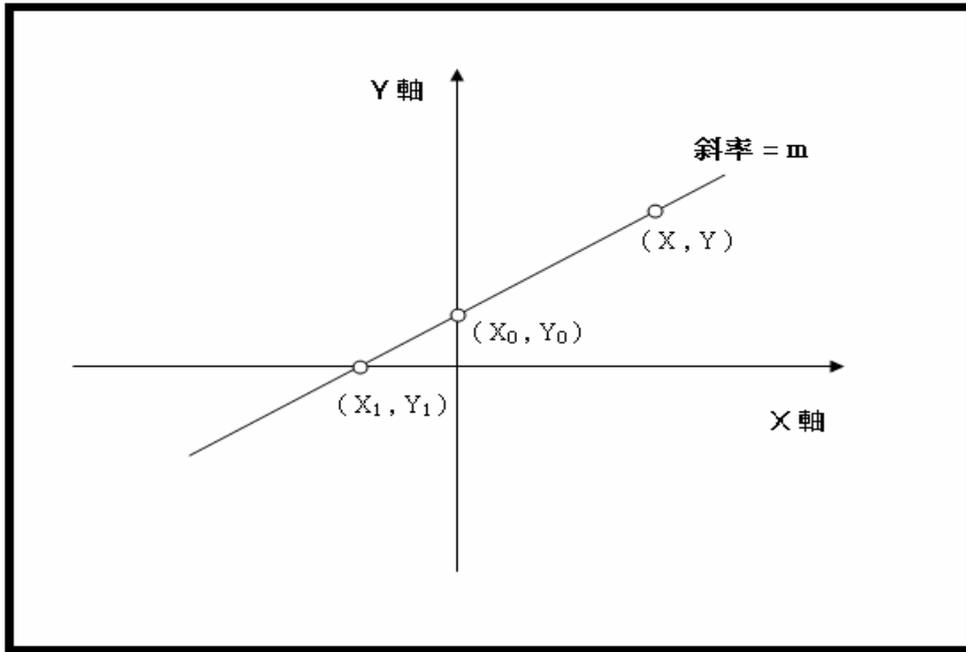


圖 3.1.1 直角坐標系上的直線

$a, b$  除以整數  $m$  得到同樣餘數。

完全剩餘系為同餘的一重要概念，即將所有整數除以一正整數  $m$ ，餘數相同的分為一類，則可分為餘數為 0、餘數為 1.. 到餘數為  $m-1$  個，共  $m$  類，稱為以  $m$  為除數的剩餘類，在這  $m$  個剩餘類裡各取一數，此  $m$  個數組成的集合，即稱為以  $m$  模的完全剩餘系，產生的集合裡共有從 0 至  $(m-1)$  個整數，且此集合裡的每個數除以  $m$  皆得不同餘數，如  $\{0,1,2,3,4\}$  是 5 的一個完全剩餘系，意即一個以正整數  $m$  為模的完全剩餘系，具有下列特性：

- (1) 一個完全剩餘系為  $m$  個整數組成的集合
- (2) 完全剩餘系的元素，兩兩不同餘
- (3)  $(a,m)=1$ ， $x$  為  $m$  的完全剩餘系，則  $ax+b$  也是  $m$  的完全剩餘系

接下來，介紹有理數與無理數的定義與概念：

- (1) 有理數是一個整數  $a$  和一個非零整數  $b$  的比，通常寫作  $a/b$  故又稱作分數，有理數的小數為有限或為循環，所有有理數的集合表示為  $Q$  定義為  $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$
- (2) 無理數有一重要定理，任一質數的平方根皆為無理數。不是有理數的實數遂稱為無理數，即不能寫作兩整數之比，若寫成小數型式，小數點之後的數字有無限多個，並且不循環。無理數加或減有理數必得無理數，無理數乘上不等於 0 的有理數必得無理數。

### 3.2 圓形彈子球之週期性古典軌跡之形成

週期性軌道(periodic orbits, PO)指在一封閉的邊界裡，彈子球運動行徑隨著空間變化並作週期性的重複軌跡，在彈子球的追跡中，週期性軌道(PO)扮演重要的角色，也是鏈結古典和量子力學的重要橋梁。

首先討論在一維封閉盒子內的彈子球，其邊界為  $-\frac{a}{2} \sim \frac{a}{2}$  (圖

3.2.1)，彈子球位置無法出現在邊界外，形成一個無限位能井，則彈子球在盒子內的位置  $x$  與時間  $t$  關係中(圖 3.2.2)，於第一週期，可以表示為以下兩個方程式：

$$\begin{cases} x = vt - \frac{1}{2}a, 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ x = -vt + \frac{3}{2}a, \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.2.1)$$

引入同餘的概念，其他週期的位置與時間之運動方程式可表示成：

$$\begin{cases} x = v \times (t \bmod T) - \frac{1}{2}a, 0 \leq (t \bmod T) < \frac{T}{2} \\ x = -v \times (t \bmod T) + \frac{3}{2}a, \frac{T}{2} \leq (t \bmod T) < T \end{cases} \quad (3.2.2)$$

形成一個振幅  $\frac{a}{2}$  且週期為  $\frac{2a}{v}$  的三角波。

接下來，我們利用一維的位置與時間方程式，推廣至二維方形的彈子球軌跡方程式，一個二維的彈子球檯(圖 3.2.3)，可視為  $x$ 、 $y$  二個方向垂直且獨立的彈子球運動，在  $x$  方向速度為  $V_x$  週期為  $a/V_x$ ，在  $y$  方向速度為  $V_y$  週期為  $a/V_y$ ，其  $x$ 、 $y$  二個方向的位置時間關係亦要符合以上三角波函數， $x$ 、 $y$  兩方向的運動合成了二維彈子球檯的圖形。加以考慮三個參數  $(p, q, \phi)$ ， $V_y:V_x=p:q$  其中  $\phi$  ( $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ) 代表彈子球的

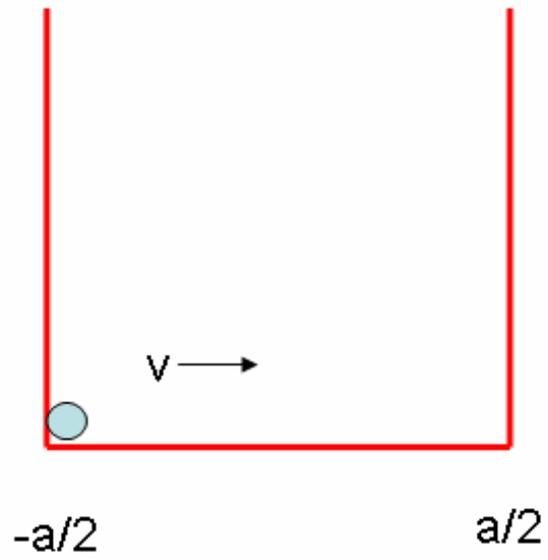


圖 3.2.1 一維方形彈子球邊界

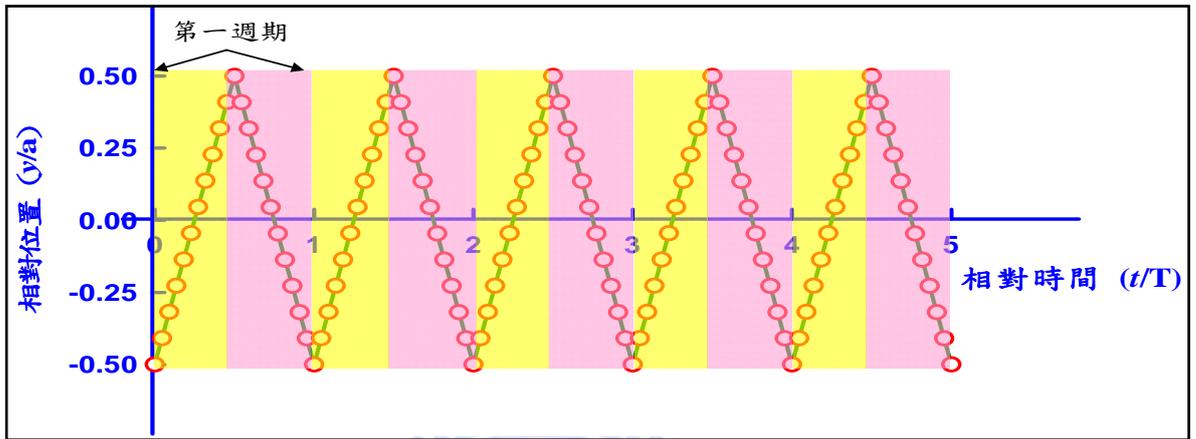


圖 3.2.2 一維方形彈子球位置對時間變化

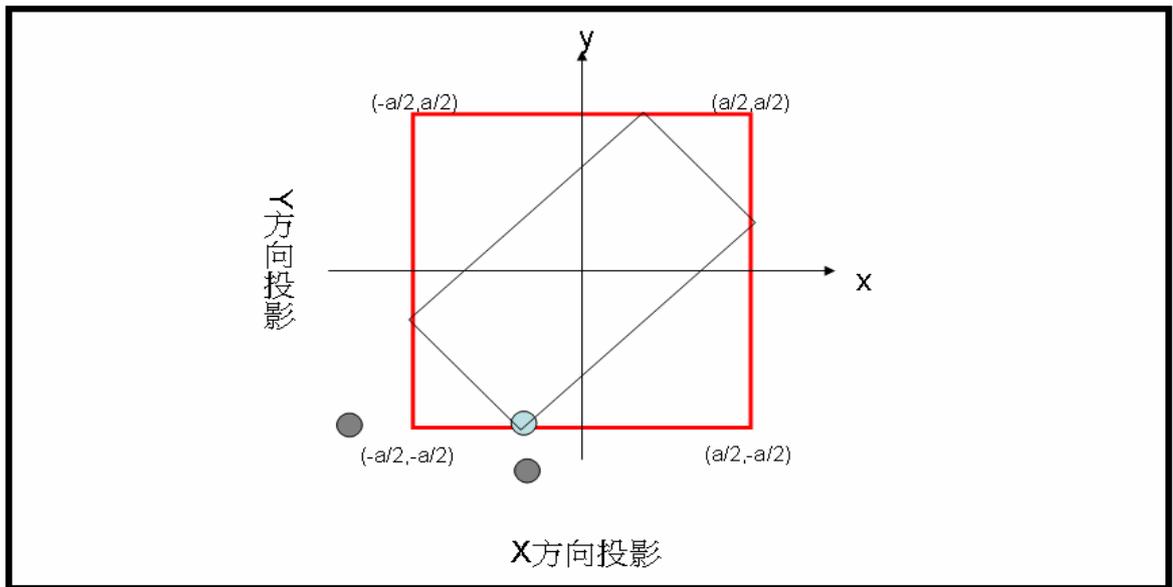


圖 3.2.3 二維方形彈子球檯邊界

起始位置(表 3.2.1) ,  $p$  為  $x$  軸方向碰撞的次數,  $q$  為  $y$  軸方向碰撞的次數, 改變不同參數比較彈子球的軌跡變化, 如起始位置不在原點且  $p, q$  兩者互質時, 當比值為有理數時, 整個圖形成為一封閉圖形, 或是結束於邊界端點, 當  $p, q$  提高至  $(5, 13)$ , 可發現整個圖形碰撞邊界更多次, 但最終仍成為一封閉性的週期性軌道。

接下來, 改變邊界條件, 改以一圓形彈子球檯(圖 3.2.4), 探討彈子球的軌跡, 圓形彈子球檯與方形彈子球檯屬於軸對稱的邊界不同, 具點對稱性質, 故圓形彈子球檯能表現與方形彈子球檯不同的數學性質。假定彈子球在球檯中為彈性碰撞, 不損失能量, 入射角及反射角維持一定值, 每次的碰撞距離也是固定, 將碰撞距離視為圓中的一弦, 令其路徑的圓心角為  $\alpha$ , 命  $\alpha = \frac{q}{p}\pi$ , 可將  $p$  視為將圓心均分為  $p$  等分, 於圓周上打  $p$  個點, 而  $q$  代表每隔幾個點畫上連線(表 3.2.2), 當  $q=1$  時隨著  $p$  的增加, 畫成一個多邊形, 且其圖形越接近圓形的邊界, 引入完全剩餘系的性質, 將圓形彈子球檯的軌跡視為一個以  $p$  為模的剩餘系, 所有的碰撞組成一完全剩餘系, 則  $p, q$  兩個為互質的整數時, 代入不同的  $q$  仍會是一個完全剩餘系, 表現出的圖形仍是一封閉而完整的路徑, 每次彈子球從一點出發, 經過圓周上  $p$  個不同的點後, 必會回到其原出發點上, 所以, 當  $q=1$  時, 不同的  $p$  可以產生出以  $p$  為模的多邊形, 例如, 如果  $p$  大於 5, 且  $p$  與  $q$  互質, 而  $1 < q < p$ , 則會產生  $p$  角星形,  $p$  值增大軌跡接近邊界, 圖形趨於圓周。

於圓形彈子球中, 隨意給彈子球一起始條件, 經過連續碰撞後, 反射角維持不變且每次和邊界的碰撞距離皆相等, 其軌跡經多次碰撞後不會如同矩形邊界, 佈滿整個區域, 彈子球隨著不同起始條件會有不同半徑的同心圓禁止區域, 彈子球在禁止區域內出現的機率為零,

$\phi$ (p,q)	Different phase				
(1,1)					
(2,1)					
(3,2)					
(5,13)					

表 3.2.1 (p,q)為有理數的二維方形彈子球檯軌跡

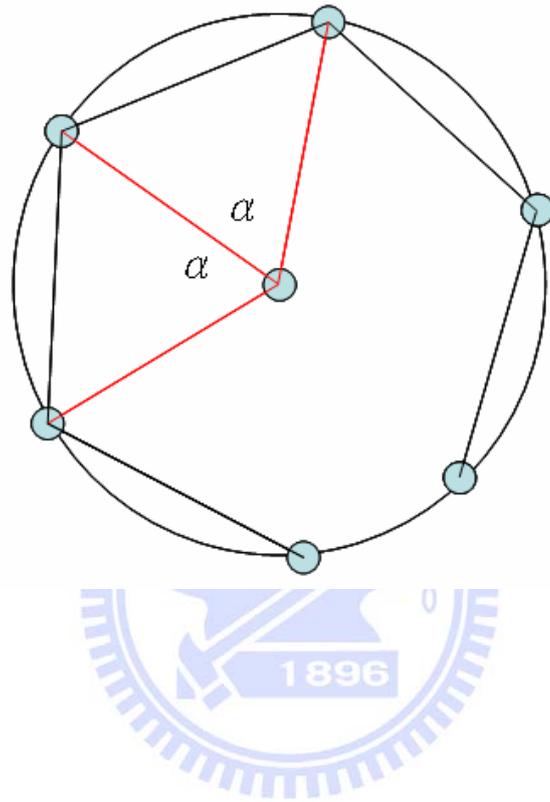


圖 3.2.4 二維圓形彈子球檯邊界

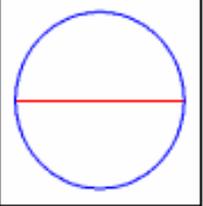
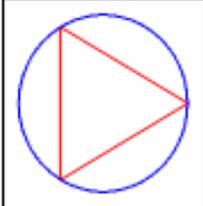
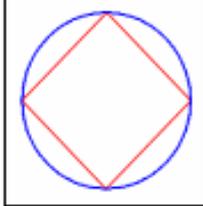
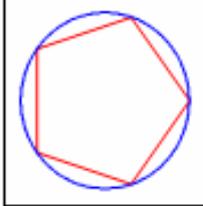
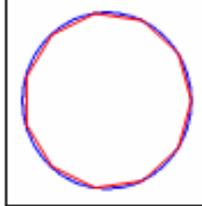
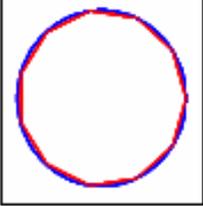
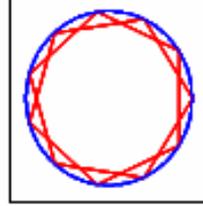
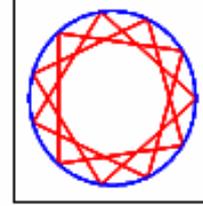
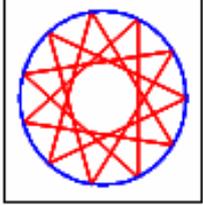
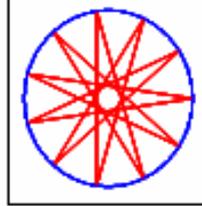
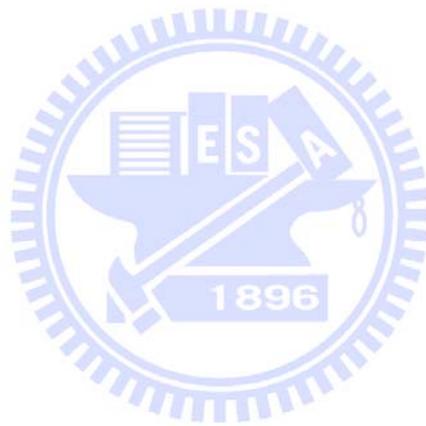
				
(1,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(11,1)
				
(11,1)	(11,2)	(11,3)	(11,4)	(11,5)

表 3.2.2 圓形彈子球檯與完全剩餘系

當  $p, q$  兩者互質而比值為有理數時，整個軌跡圖形成為一封閉圖形；若  $p, q$  兩者間比值為無理數(表 3.2.3)，圓周角  $2\pi$  無法被  $\alpha$  等切割，則其位置不重覆，不形成封閉路徑，隨著碰撞次數的增加，軌跡也會越來越密，描繪多次碰撞後的軌跡形狀如同一甜甜圈，但軌跡在中央處仍形成一禁止區域。

週期性軌跡定理將混亂或不穩定的系統以區域性等價來修正其軌跡為更平滑，可將某些動態系統其必要特性更清晰的表達，便於我們分析其動力系統的特性。



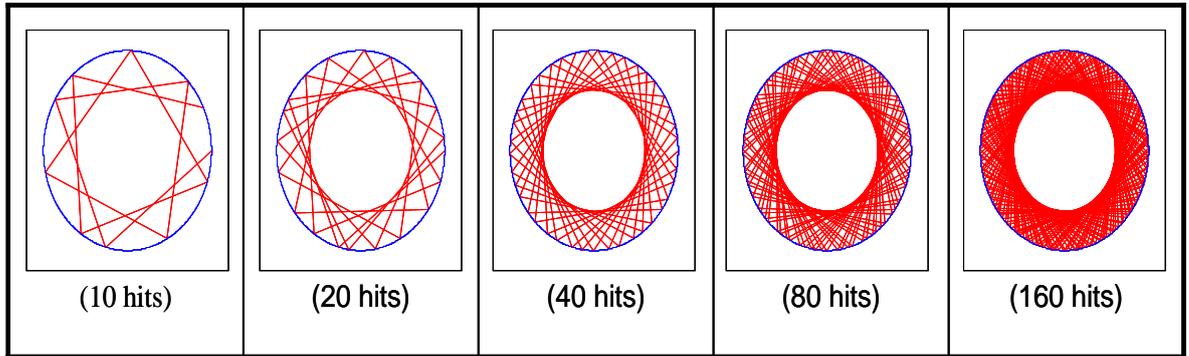


表 3.2.3 (p,q)比值為無理數

## 第四章 圓柱波導與 Bessel Function

### 4.1 圓柱波導

波導(Wave Guide, WG)是利用光從高折射率介質到低折射率介質的界面時，入射角超過臨界角而產生的內部全反射現象，使得光束限制在波導內部來回反射前進(圖 4.1.1)，常見有圓柱波導與矩形波導，光纖是波導裡最普遍被應用的一種。

波導管內電磁波分佈狀況稱為模態(Mode)，分為兩類：

#### (1) 橫電場波(Transverse Electric Wave, TE)

電場與傳播方向垂直，傳播方向上為磁場沒有電場，稱為 TE Wave

#### (2) 橫磁場波(Transverse Magnetic Wave, TM)

磁場與傳播方向垂直，傳播方向上為電場沒有磁場，稱為 TM Wave

電磁波斜向入射到波導管(WG)中，因入射角度之不同，形成內部反射波不同的相位速度變化，造成波導管不同模態之變化。圖 4.1.2 為圓形波導示意圖，在 X 軸及 Y 軸方向之電場或磁場分佈形狀會有週期性變化，若在 X 軸方向出現 n 個電場最大值(不論正或負)，在 Y 軸方向出現 m 個電場最大值，若為電磁波則此模態為  $TE_{mn}$  模態，電磁波模態中最簡單的為  $TE_{10}$  模態[5]。

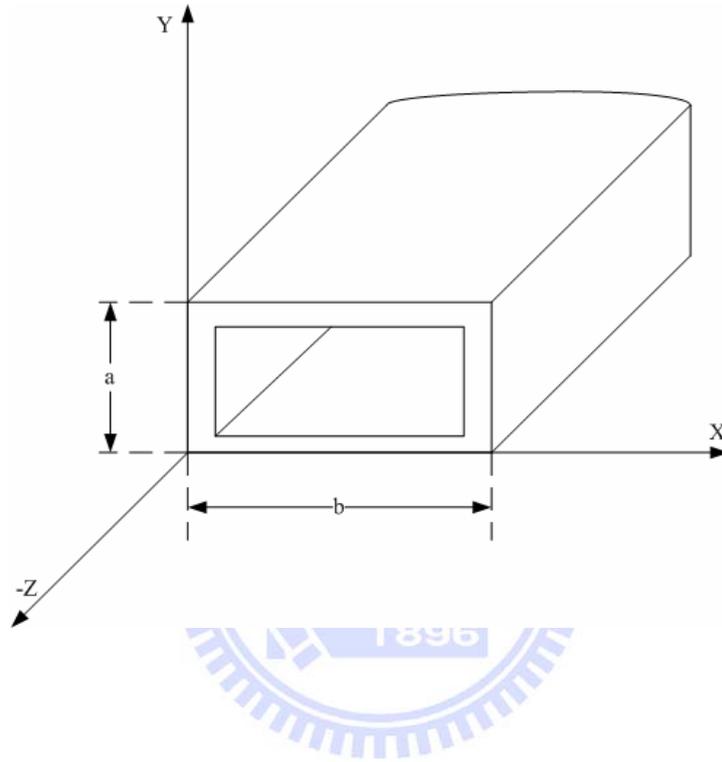


圖 4.1.1 矩形波導管結構示意圖

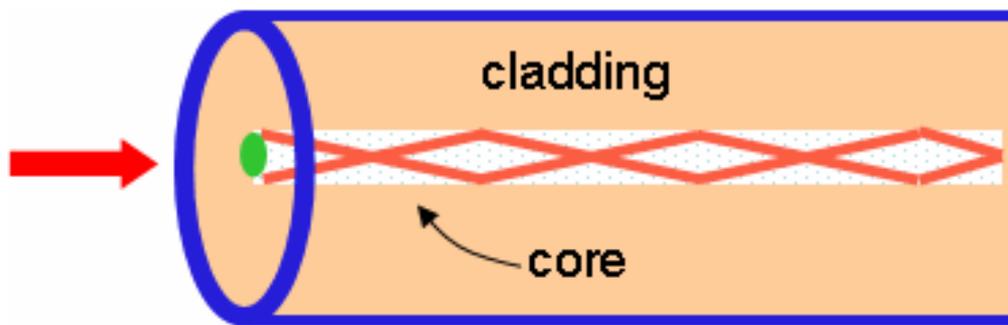


圖 4.1.2 圓形波導示意圖

## 4.2 Bessel Function 之歷史

18 世紀中葉，瑞士數學家丹尼爾·伯努利在研究懸鏈振動時，提出 Bessel function 的幾個正整數階特例，丹尼爾的叔叔雅各·伯努利及拉格朗日等數學大師都對 Bessel function 做過研究，直到 1817 年，德國數學家 Friedrich Bessel 研究開普勒提出的三體引力系統運動問題時，第一次有系統地提出 Bessel function 的總體理論框架，之後便以他的名字命名，因為是於拉普拉斯方程在圓柱坐標上的求解過程中發現也被稱為圓柱函數或圓柱諧波[6]。

## 4.3 對應於圓形彈子球檯的波函數

在二維圓形邊界條件下的薛丁格方程式解的形式，即為 Bessel function，為求圓柱坐標解的波方程式，一開始是對圓柱座標或球座標下使用分離變數法求解拉普拉斯方程和亥姆霍茲方程時得到[7]。亥姆霍茲方程的橢圓偏微分方程表達式如下：

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0 \quad (4.1)$$

將  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$  及  $\varphi(r, \phi) = R(r) \cdot \Phi(\phi)$  代入

$$\left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + k^2 r^2 \right) R(r) \Phi(\phi) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi(\phi) \cdot R(r) = 0 \quad (4.2)$$

將式子整理後，令  $\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi(\phi) = -m^2$  且  $kr=x$  可得下列式子：

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) \right] \cdot J_m(x) = 0 \quad (4.3)$$

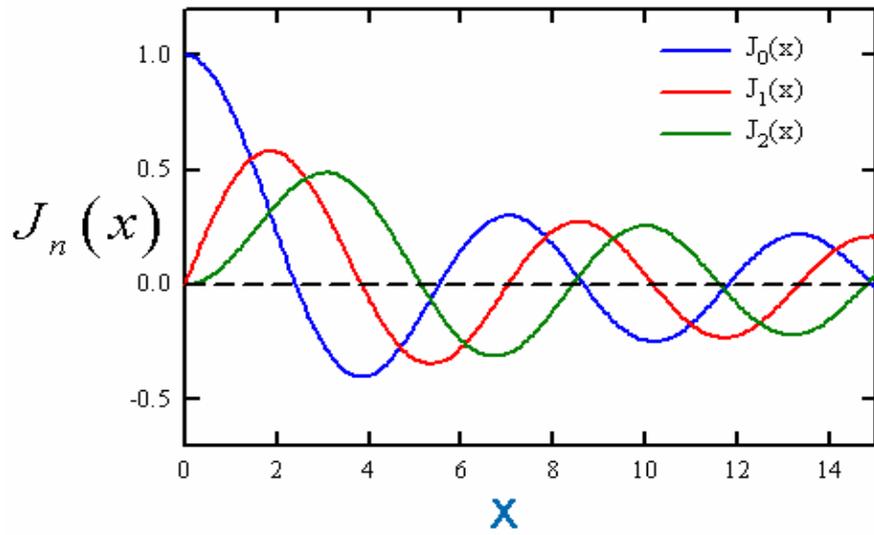
可導出 Bessel function 的關係式。而其 Bessel function 的積分式如下：

$$J_m(x) = \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin \theta} \cdot e^{-im\theta} d\theta \quad (4.4)$$

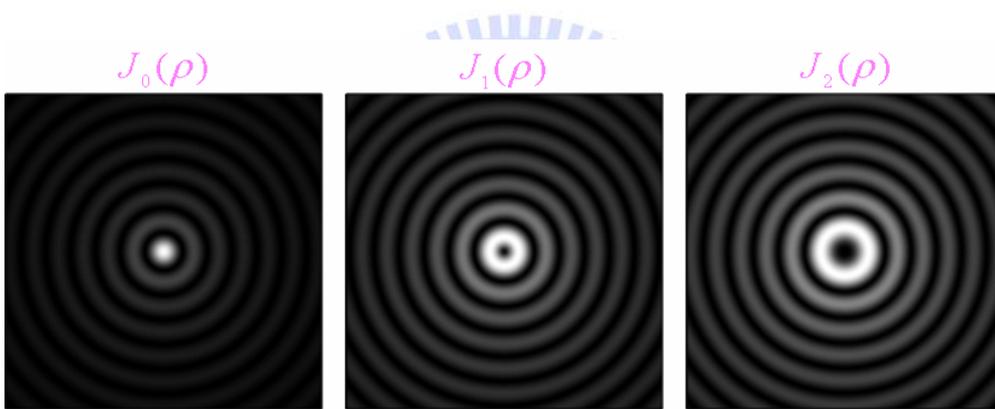
利用程式模擬 Bessel function 的二維及三維圖形(圖 4.3.1)，在二維的圖形中，當  $m$  慢慢增加，其波鋒會由內慢慢擴張，在三維圖形中，當  $m=0$  時，圖形中央一定為亮點； $m$  值增加時，中心的亮點會擴張成亮圈， $m$  值越大其亮圈的半徑就越大。

Bessel function 在研究波傳播及相關靜態位能的領域很有幫助，諸如圓柱形中波導的電磁波傳播、圓柱體中的熱傳導問題與信號處理中的調頻合成，都有很大的助益，而其特性在本實驗中也有非常重要的共通性。

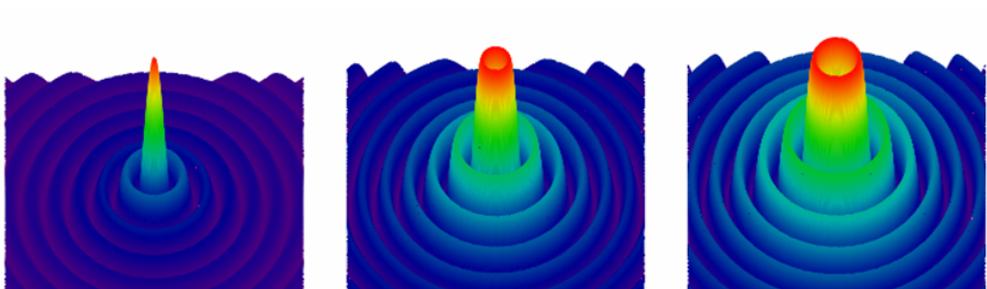




(a)



(b)



(c)

圖 4.3.1 (a) Bessel function 的一維圖形 (b) Bessel function 的二維圖形  
(c) Bessel function 的三維圖形

#### 4.4 從 Bessel Function 到週期性古典軌跡

Bessel function 為圓形彈子球的本徵態，具有無限的對稱性，利用 Bessel function 當做基底，可以疊加出存在於圓形彈子球檯的古典軌跡，藉由此種線性疊加方式找出產生週期性古典軌跡圖樣的通式。

在半徑為  $R$  的圓形彈子球檯，其極座標的歸一化量子本徵態

$\psi_{m,n}(r, \theta)$  為：

$$\psi_{m,n}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi R J_{m+1}(k_{m,n} R)}} J_m(k_{m,n} r) e^{im\theta}, m \in Z, n \in N \quad (4.4.1)$$

$J_m$  為  $m$  階的 Bessel function。

依圓形彈子球檯的邊界條件進一步可以找出其對應的本徵值  $k_{m,n}$ ，換言之， $J_m(k_{m,n} R) = 0$  而量子數  $m, n$  分別地對應為方向角 (azimuthal) 方向和徑向方向波的量子化，更明確的說， $k_{m,n} = z_{m,n} / R$  且  $z_{m,n}$  為 Bessel function  $J_m(z)$  的第  $n$  個根。在量子數夠大中，其  $k_{m,n}$  可用 Wentzel-Kramers-brillouin (WKB) 方法求得

$\sqrt{k_{m,n}^2 (R^2 - R_0^2) - m \cos^{-1}(R_0 / R)} = (n + 3/4)\pi$ ，而  $R_0 = m/k_{m,n}$  為波到彈子球圓心的最短距離。

於封閉性的週期性軌道  $(p, q)$  中，到原點 (origin) 的最短距離為  $R_0$ ， $R_0 = R \cos(q\pi/p)$ ， $p$  為一個週期於圓邊界上的折返點數， $q$  為每隔  $q$  個點連成一弦，其量子化條件可寫成  $k_{m,n} R \sin(q\pi/p) = [m(q/p) + n + (3/4)]\pi$ 。

而在量子系統裡的週期性古典軌跡可採用光譜裡同一  $|k_{m,n}|$  的本徵態相干疊加產生，在  $u \in Z$  且  $m_0 \gg |qu$  的條件下，本徵態  $\psi_{m_0+pu, n_0-qu}$  是

以  $\psi_{m_0, n_0}$  為能量中心，近乎簡併（nearly degenerate）的模態群。而對應

於古典軌跡(p,q)的同調態因此可利用  $\psi_{m_0+pu, n_0-qu}$  寫為：

$$\Psi_{m_0, M}^{p, q}(r, \theta; \theta_0) = (2M + 1)^{-1/2} \sum_{u=-M}^M e^{i(m_0+pu)\theta_0} \psi_{m_0+pu, n_0-qu}(r, \theta) \quad (4.4.2)$$

其  $\theta_0$  為起始點 M 為疊加的項數。圖 4.4.1 為程式模擬圖樣，圖 4.4.1 中(a)-(d)與(e)-(h)的週期參數  $m_0$  分別為 200 與 100，固定整數  $M=3$ ，較大的 M 主要為配合一固定的  $m_0$ ，以產生更強的局部化程度，接著固定參數  $\theta_0=0$  以方便於計算，因參數  $\theta_0$  改變圖形旋轉之角度外並不影響空間狀態。

這些圖形與彈子球檯軌跡圖相同(圖 3.2.2)，這也符合愛因斯坦的波粒二重性概念與德布羅伊的物質波概念，與古典彈子球檯軌跡最大的相異處為在軌跡轉折處會看到如波一樣的干涉條紋。本實驗研究的波導管裡電磁波的古典軌跡，也就可回歸到數個 Bessel function 疊加的示意圖。

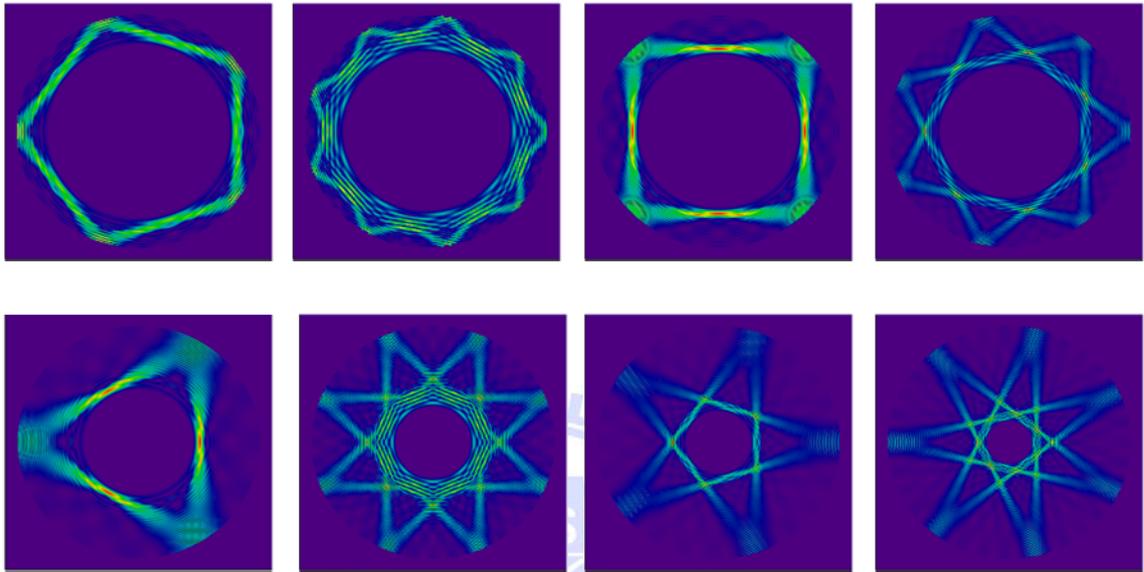


圖 4.4.1 Bessel 理論模擬圖形

## 第五章 以雷射實驗實現具有圖案軌跡的光斑

### 5.1 實驗架構

在實驗的架構上(圖 5.1.1), 我們使用一線性偏振且波長為 532 nm (綠光) 的高斯雷射光作為入射光源, 接著放置一擴束器以調整光的發散角至小於 0.1 mrad, 後接著一可移動的活動式孔徑板, 來控制入射光的發散角, 接著放置一焦距為 25mm 的凸透鏡, 藉由調整其前後與左右位置, 控制入射光的發散角, 使光聚焦至光導管內, 使用的光導管分別為直徑 1.7 mm 長度 35 cm 與直徑 1.5mm 長度 12cm, 於光導管之後接一焦距為 8 mm 的成像凸透鏡, 經由調整此透鏡相對於光導管的距離, 成像從近場到遠場的圖形變化至屏幕上, 利用電腦控制顯示器(CCD)相機拍攝記錄不同位置的成像圖形。

### 5.2 實驗觀察與結果

由第三章的介紹可知, 當提供適當的邊界條件時, 雷射光可在光導管內部疊加出古典彈子球軌跡, 經由光導管的內部全反射, 將入射光源以同相並均稱的傳導輸出, 移開置於擴束器與聚焦凸透鏡之間的活動孔徑板, 以 532 nm (綠光) 的高斯雷射投射到一長度 35cm 直徑 1.7mm 的光纖光導管, 可觀察到如圖 5.1.2 的原始近場圖像, 圖像呈現均稱的光斑分佈, 仔細觀察並可隱約看到一些不規則的古典軌跡, 當放置一活動孔徑板於擴束器與凸透鏡之間, 藉由調整凸透鏡角度以改變光源入射角度與範圍, 可看到光導管內光的共振集中於一些週期性的軌道上, 產生數種不同  $p/q$  比的圖斑, 實驗觀察到如(圖 5.2.1)(a)

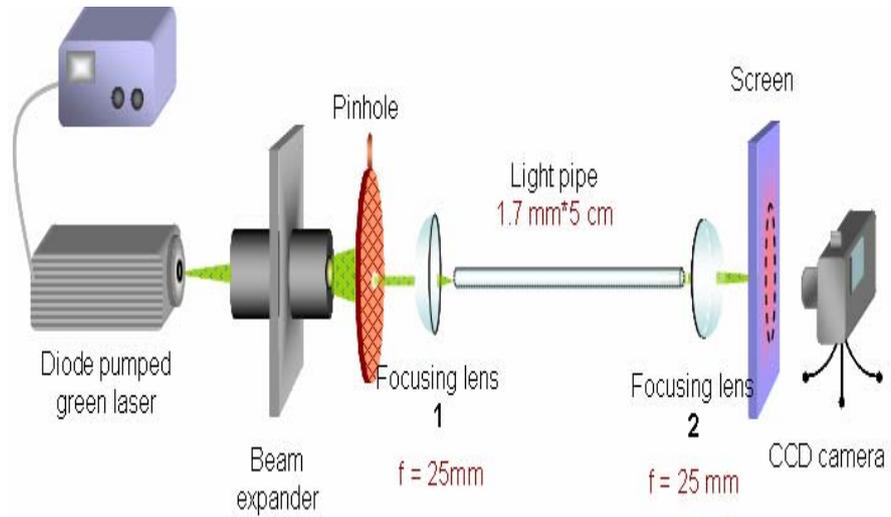


圖 5.1.1 實驗架構示意圖

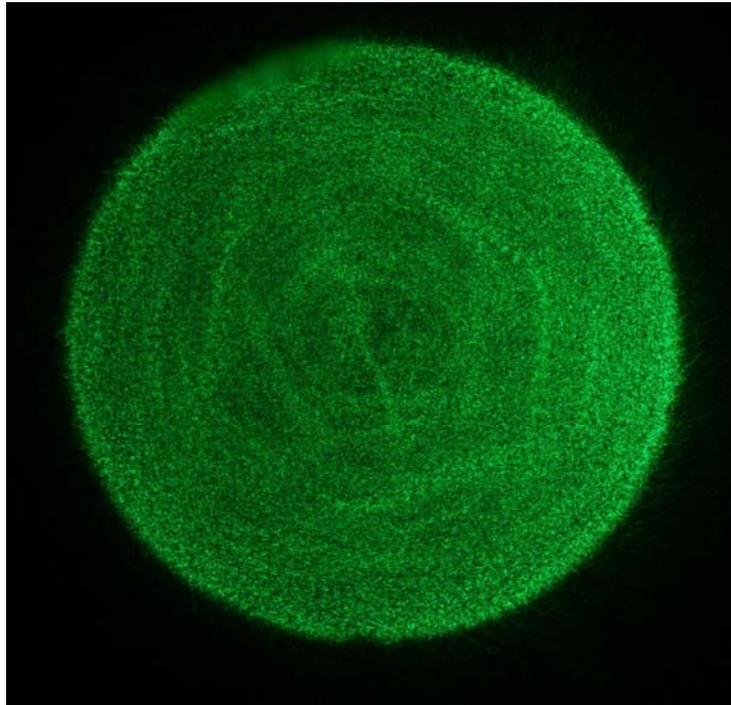


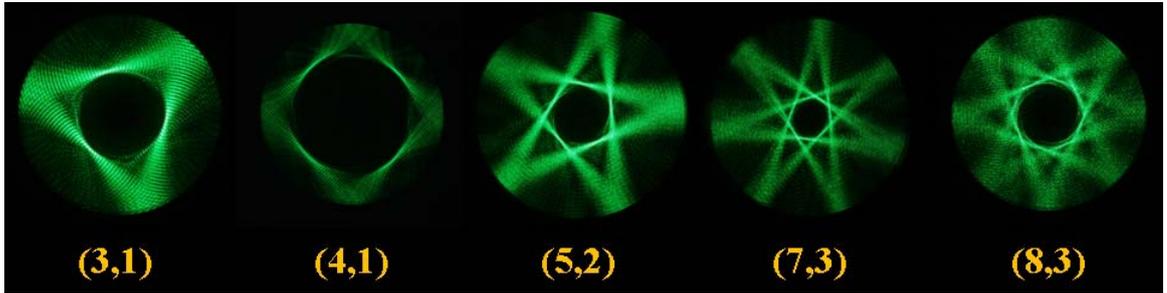
圖 5.1.2 以 35cm 光纖光導管在無活動孔徑板的原始近場圖像

較低  $p/q$  比的近場圖形，這些圖形如同圓形古典彈子球軌跡圖樣，其運行路徑為一封閉軌跡並具有週期性，且隨著不同起始條件，會有不同半徑的同心圓禁止區域。

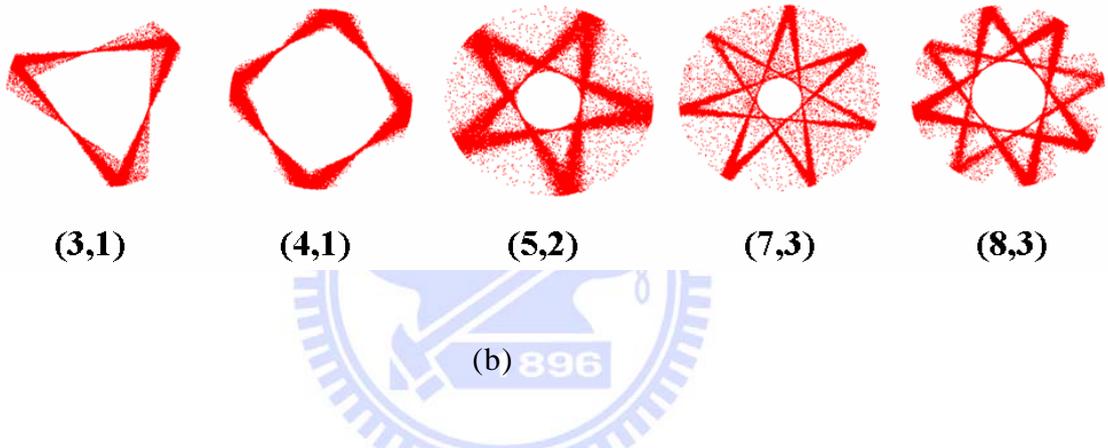
圖 5.2.1(a) 為實驗得到的五個近場圖形，藉由調整放置於擴束器與光導管間的凸透鏡，控制其前後左右角度，以改變光源投射至光導管的入射角度，可得到不同  $p, q$  比的圖形，圖 5.2.1(a) 的  $p, q$  比值分別為  $(3,1)$ 、 $(4,1)$ 、 $(5,2)$ 、 $(7,3)$ 、 $(8,3)$ ，從這些近場圖形中，可清楚的觀察到以下的狀況：軌跡之間的接點出現類似波的干涉疊加、靠近圓中心時軌跡較亮較細較清晰、軌跡靠近邊界時稍暗且較寬較模糊、整張圖像隱約的佈滿如同 Bessel function 的同心圓、中心同心圓存在不明顯的螺線旋渦、不論  $p, q$  比值如何皆會於中心產生一同心圓的禁止區域、當  $p$  越大則圖形越趨於圓周且中心同心圓也越大、當  $p$  固定而  $q$  越大則中心同心圓越小。

利用光束追跡的方式，以粒子性模擬實驗的近場圖形，得到圖 5.2.1(b) 的五個模態圖形，比較實驗圖形與模擬圖形，可觀察到兩者有以下相同的形態：靠近圓中心時軌跡較細較集中、靠近邊界時軌跡較寬且較發散、皆於中心產生一同心圓的禁止區域。而模擬圖形相對於實驗圖形有以下的差異：模擬圖形中，其軌跡交接點無類似於波的干涉條紋、圖像無隱約的佈滿如同 Bessel function 的同心圓。

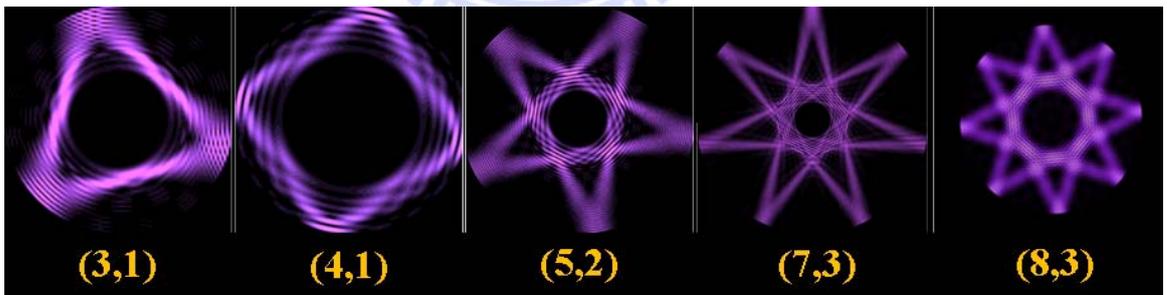
利用 Bessel 疊加的方式，以波動性模擬實驗的近場圖形，得到圖 5.2.1(c) 的五個模態圖形，比較實驗圖形與模擬圖形可觀察到兩者有以下相同的形態：其軌跡交接點有類似於波的干涉條紋、整張圖像隱約的佈滿如同 Bessel function 的同心圓、軌跡於靠近圓中心較亮靠近邊界較暗、皆於中心產生一同心圓的禁止區域。Bessel 疊加模擬圖形相



(a)



(b)



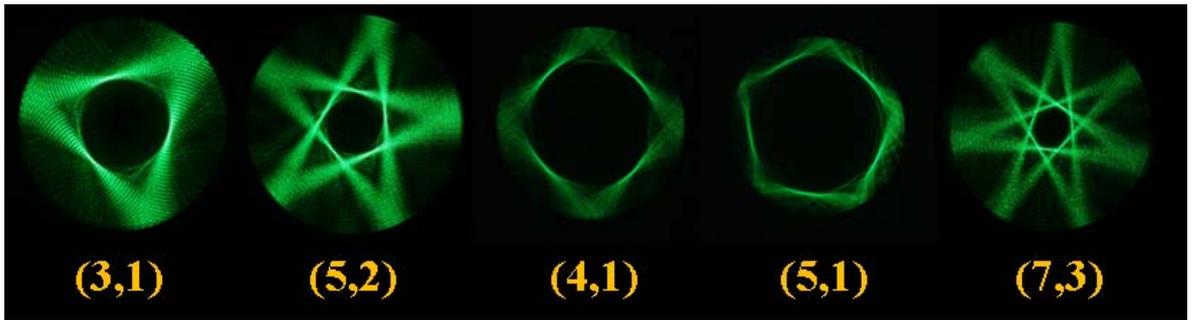
(c)

圖 5.2.1 (a)35cm 光纖光導管實驗圖形 (b) 粒子性模擬圖形 (c) 波動性模擬圖形

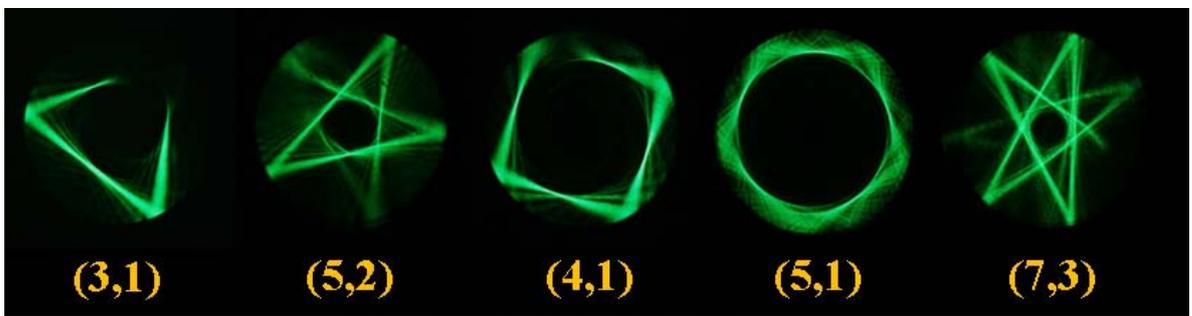
對於實驗圖形的差異較小。比較實驗與模擬的圖形，實驗所得圖形幾乎等同於 Bessel 疊加圖形。

接下來，固定實驗裝置的位置與角度，微幅調整凸透鏡，更換不同的傳導光導管。分別使用三個相同材質、相同直徑而長度不同的光導管，用近乎一樣的入射角度，拍下三個光導管所產生的相同  $p,q$  比圖形。以相同  $p,q$  比的狀態下，觀察光在不同長度光導管所得到的傳導結果，比較其間的圖形差異。三個光導管的長度分別為 35cm、12cm 及 5cm，得到如圖 5.2.2(a)-(c) 的近場圖像， $p,q$  比依序為 (3,1)、(5,2)、(4,1)、(5,1)、(7,3)。圖 5.2.2(a) 為 35cm 光導管的實驗圖形；圖 5.2.2(b) 為 12cm 光導管的實驗圖形；圖 5.2.2(c) 為 5cm 光導管的實驗圖形，以同樣入射角的角度，5cm 長度的光在 (5,1) 及 (7,3) 模態下軌跡只有片段，無法呈現完整的圖像，因此僅放置 (3,1)、(5,2)、(4,1) 三張圖像。

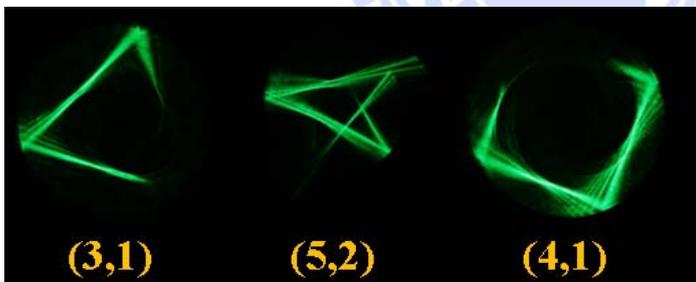
比較三個不同長度的光導管所產生的成像圖形，可發現一主要最大差異，較長光導管其圖形為完整且封閉的軌跡，較短光導管則軌跡只有片段，其圖形不完整，且不為封閉週期，由以上實驗的結果，觀察到較短光導管，其圖形軌跡有明顯截斷的現象，而此種現象無法以 Bessel 的波疊加方式，做清楚的模擬與解釋，接著在本論文的 5-3 節，我們將針對此類現象，更深入的探討。



(a)



(b)



(c)

圖 5.2.2 (a) 35cm 光導實驗圖形 (b) 12cm 光導實驗圖形 (c) 5cm 光導  
實驗圖形

### 5.3 結果比較與討論

我們以粒子性的光束追跡方式，令  $\theta$  為入射角， $\Delta\theta$  為控制光入射的發散角， $\Delta\phi$  控制週期性軌跡(PO)分佈的寬度， $L_z$  為光導管長度， $\rho$  為光導管半徑， $L_{po}$  為一完整週期軌跡的長度， $k$  表示入射光的動量，可分為沿著光導管行進方向的動量表示為  $k_z$ ，與垂直光導管側向的動量  $k_t$ ，關係表示如下：

$$\vec{k} = k_z \hat{a}_z + k_t \hat{a}_t \quad (5.1)$$

$$k_z = k \cos \theta \quad , \quad k_t = k \sin \theta \quad (5.2)$$

所以側向與  $z$  方向的動量比值如下：

$$\frac{k_t}{k_z} = \tan \theta = \frac{L_t}{L_z} \quad (5.3)$$

而光在光導管中  $z$  方向跑的長度為實際光導管的長度  $L_z$ ，而光在光導管中側向所跑的長度為  $L_t$ ，表示如下：

$$L_t = L_z \tan \theta \quad (5.4)$$

給予一  $\Delta\theta$  值，會產生一組相對應的  $L_{tmax}$  與  $L_{tmin}$ ，當兩者相差大於  $L_{po}$ ，則圖像可以形成為一完整的封閉運行軌跡；反知當兩者相差小於  $L_{po}$ ，則圖形成像呈現截斷，不能形成完整的封閉軌跡。

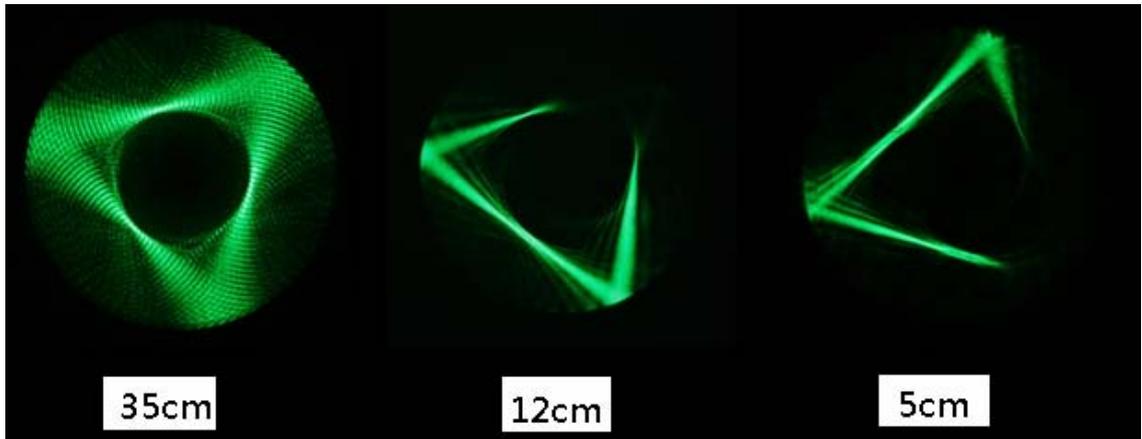
接下來，針對三種長度光導管實驗所產生的成像，用理論模擬得到相對的圖形，比較理論模擬與實際的成像圖形，探討三種光導管的主要差異點，發現光導管較短則軌跡不完整且不為封閉週期。

固定程式所有參數，僅改變  $L_z$  參數值，設定  $\theta$  為  $5^\circ$ ， $\Delta\theta$  為  $5^\circ$ ， $\Delta\phi$  為  $2^\circ$ ，以理論模擬三個光導管的(3,1)模態圖形，設定  $L_z=35\text{cm}$ 、 $12\text{cm}$

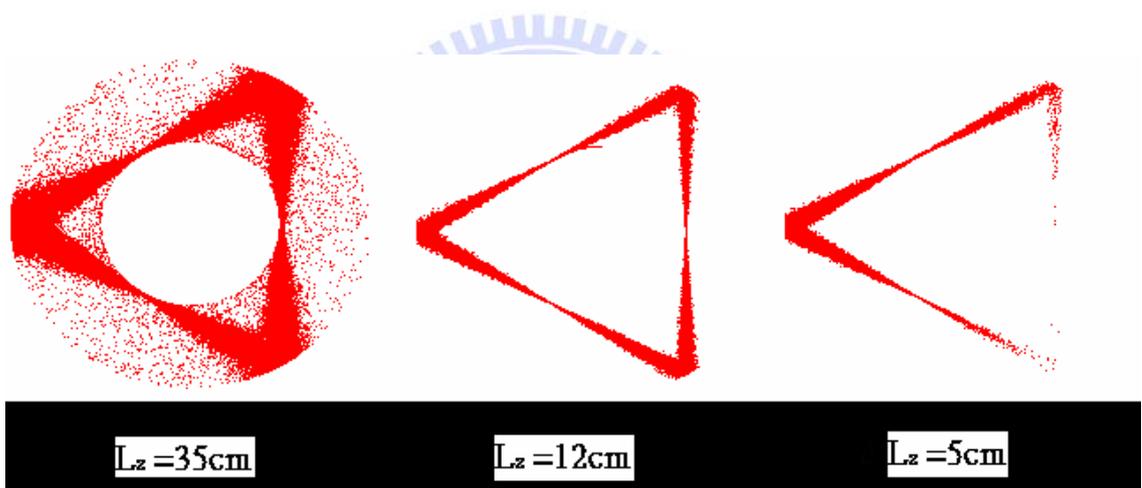
與 5cm 可分別得到圖 5.3.1 (b)三個圖形，比較實驗與理論圖形，明顯看出較小  $L_z$  則圖形軌跡出現截斷現象，雖圖形整體可識別為(3,1)模態圖形，但其軌跡不完整且不封閉。接著繼續使用程式模擬比對於圖 5.2.2 三種光導管的(5,2)、(4,1)與(7,3)模態圖形，分別產生圖 5.3.2 至圖 5.3.4 的模擬圖形，比對實驗圖形與理論模擬結果，皆非常符合。

由以上結果可知，當適當光導管長度時，可以使運動的軌跡成像為一條封閉的週期圖形；但當光導管長度較短時，則成像為不完整且不封閉的圖形；反之當光導管長度較長時，成像為多條封閉週期所疊加的圖形，因為光導管較長，其運形軌跡較多次的疊加。由理論模擬的結果所得的圖形與實驗圖形相比較非常吻合。

在此次的實驗，光傳導而產生的圖形，為明顯的波動性質，而利用不同長度光導管，可觀察到圖形的截斷現象，而此現象只能以粒子性解釋，再次的驗證，光同時具有波動與粒子二重性。

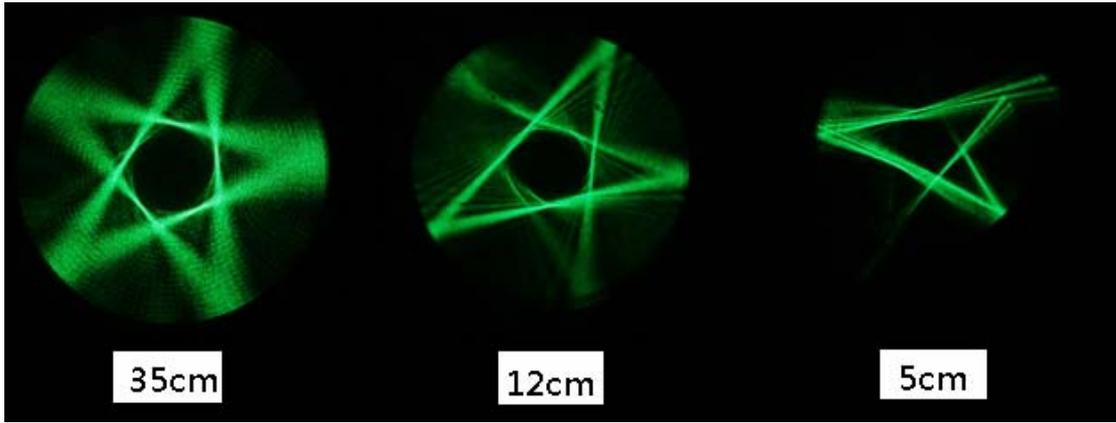


(a)

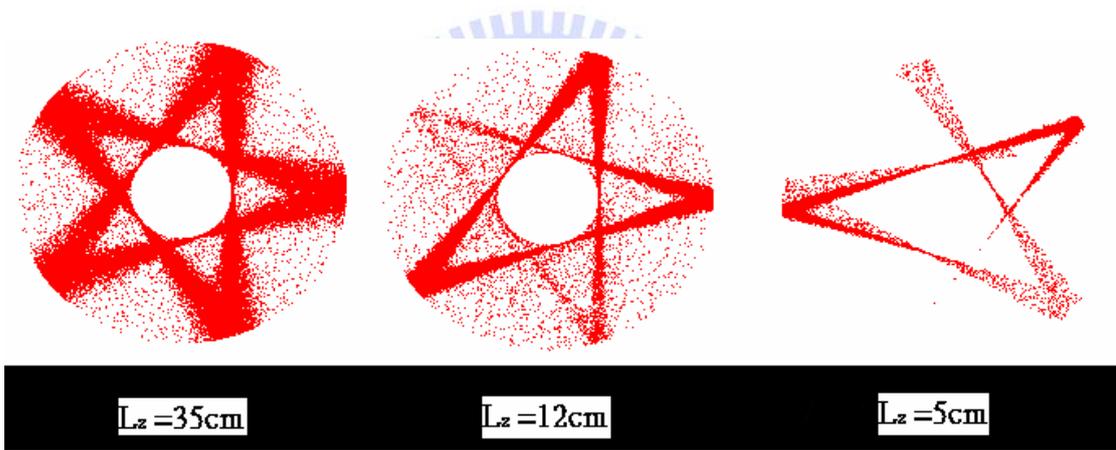


(b)

圖 5.3.1 (a) 依序為 35cm、12cm 及 5cm 光導管實驗所得(3,1)模態 (b) 理論模擬產生的相對(3,1)模態

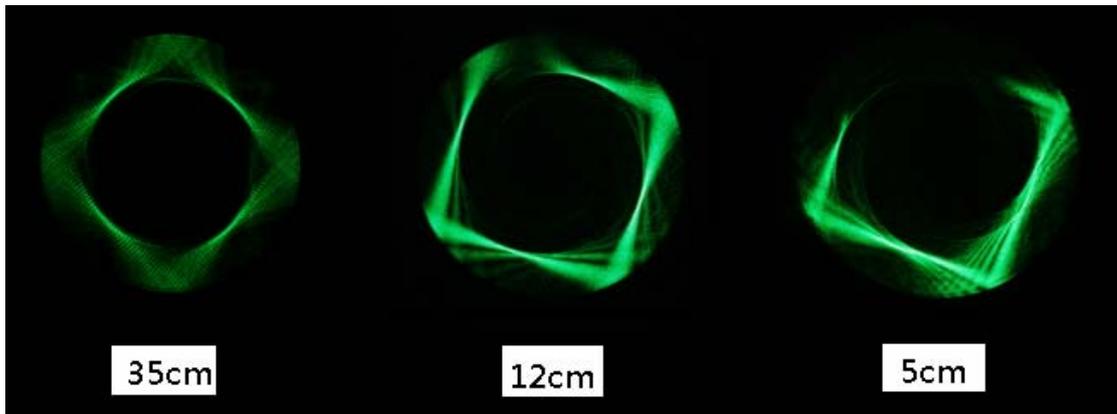


(a)

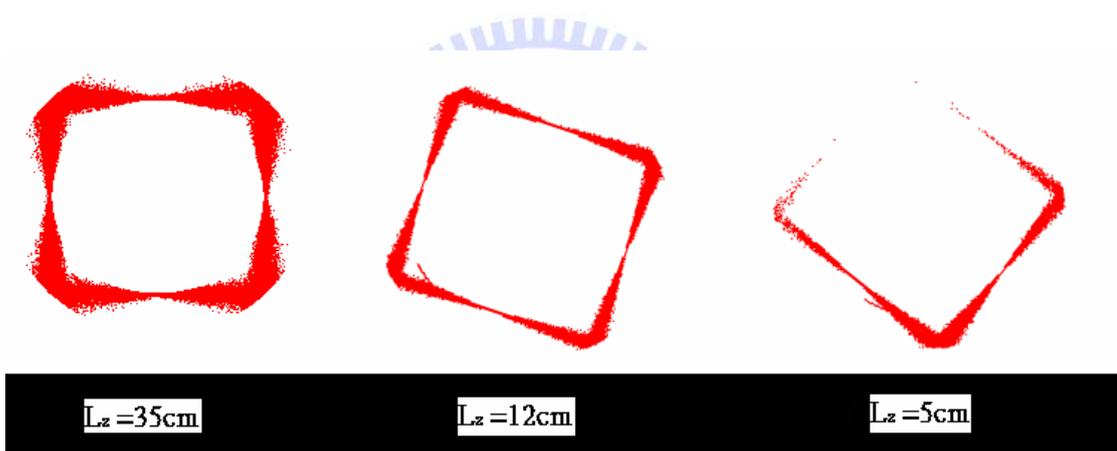


(b)

圖 5.3.2 (a) 依序為 35cm、12cm 及 5cm 光導管實驗所得(5,2)模態 (b) 理論模擬產生的相對(5,2)模態

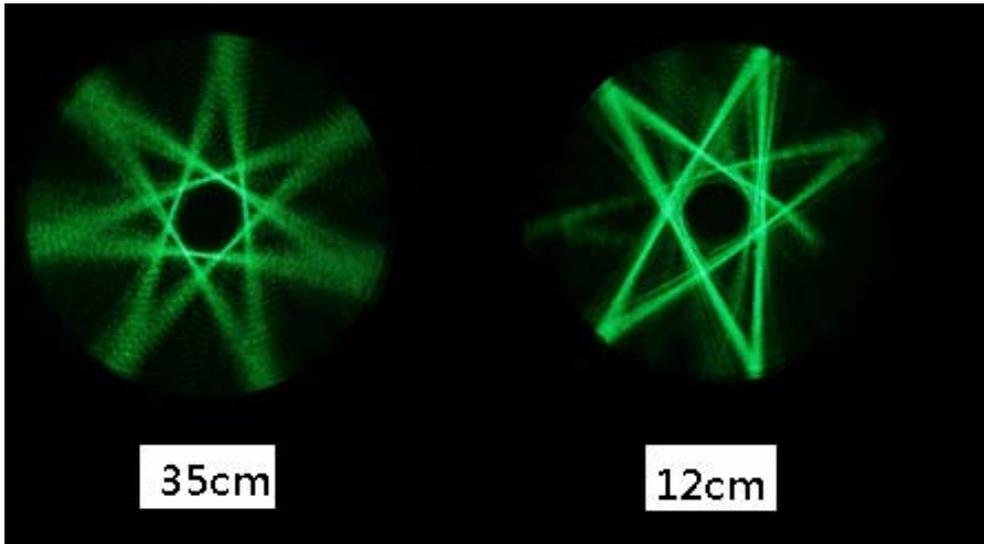


(a)

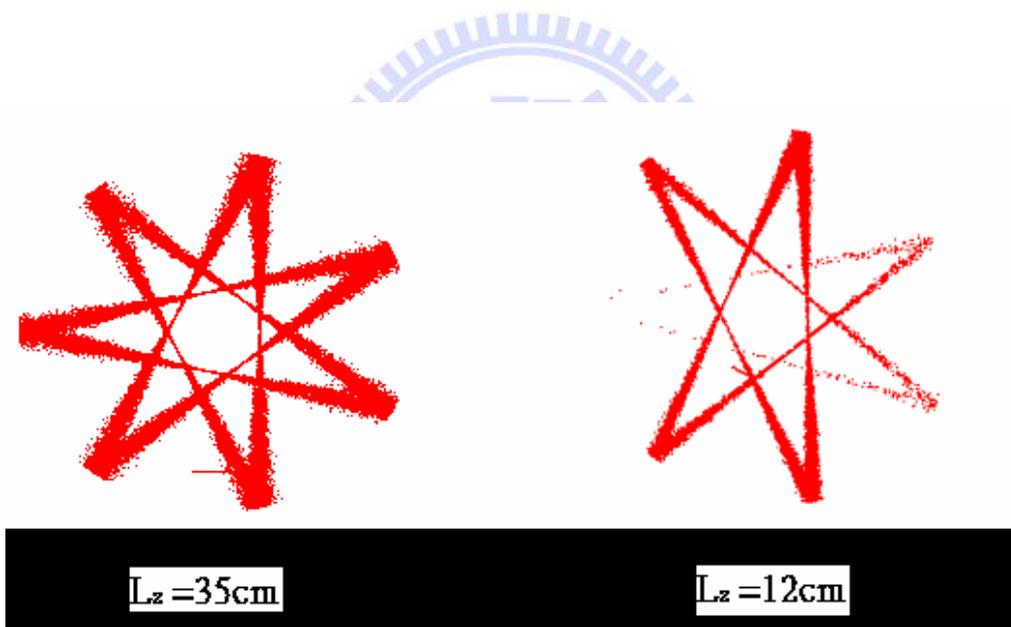


(b)

圖 5.3.3 (a) 依序為 35cm、12cm 及 5cm 光導管實驗所得(4,1)模態 (b) 理論模擬產生的相對(4,1)模態



(a)



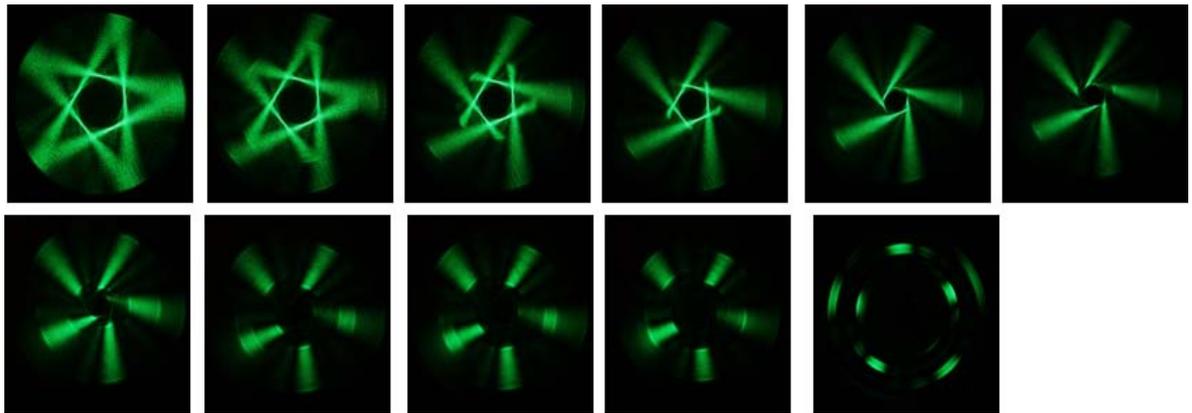
(b)

圖 5.3.4 (a) 依序為 35cm、12cm 及 5cm 光導管實驗所得(7,3)模態 (b) 理論模擬產生的相對(7,3)模態

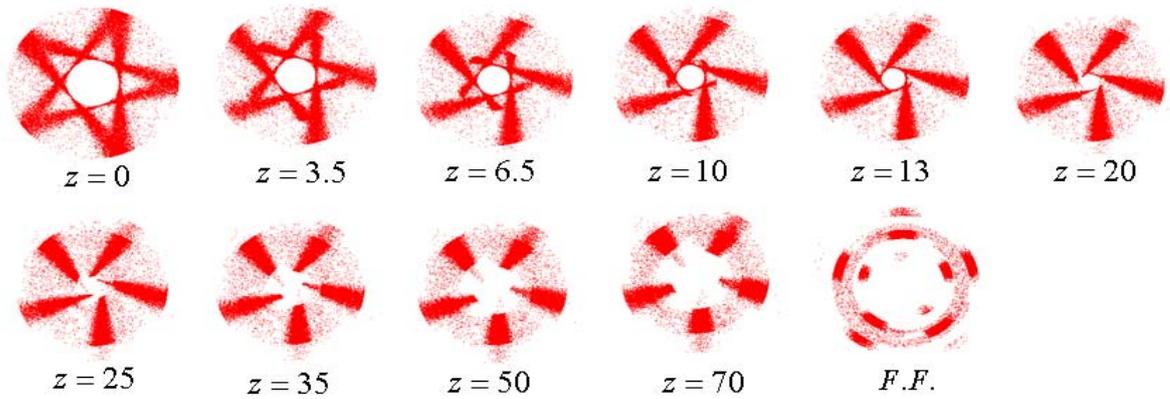
## 第六章 結論與未來展望

利用光經由光導管傳導的結果，成像圖形呈現光的波動特性，改變光導管的長度，可觀察到截斷的圖形，而此現象只能以粒子特性的理論模擬，這樣的實驗架構建立起古典與量子力學的關聯性。之後希望能藉由改變其它實驗條件，以產生更多有趣的現象，如同此次實驗所得近場到遠場的圖形(圖 6.1.1 及 6.1.2)，其成像的變化過程中，軌跡以螺旋狀慢慢往外擴散，最後形成有數個亮點的螺旋光圈，這些現象經由更多的參數調整與條件改變，加以配合理論模擬，可更深入的比較與探討，期望之後得到更條理化的解釋且令人驚奇的結果。

另一方面，除了圓柱型的光導管，可利用不同形狀的光導管，觀察不同邊界條件所傳導出不同的圖斑成像。近期，也有數個期刊發表探討關於一樣入射角度而分別利用左旋與右旋的雷射光，所產生的成像差異，這些有趣的現象，都是以後能在更長遠研究的方向。

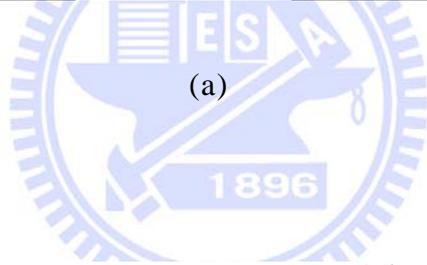
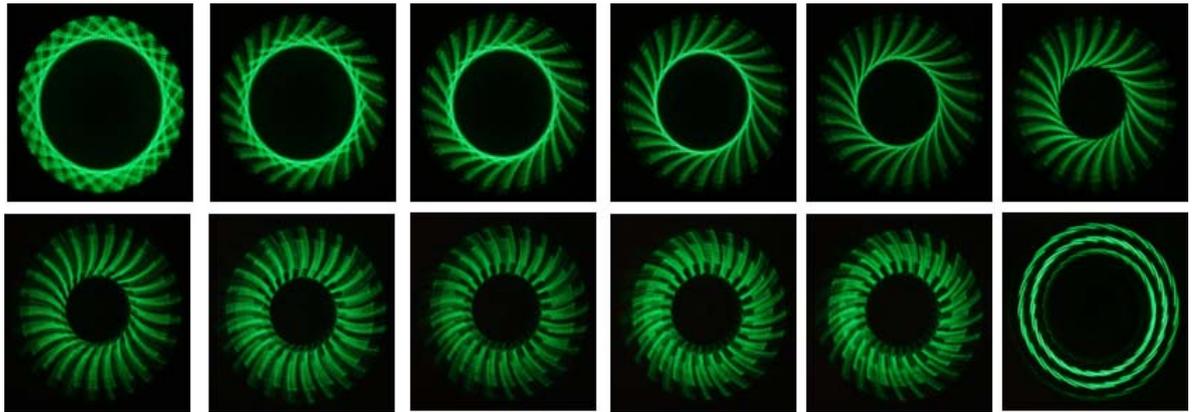


(a)

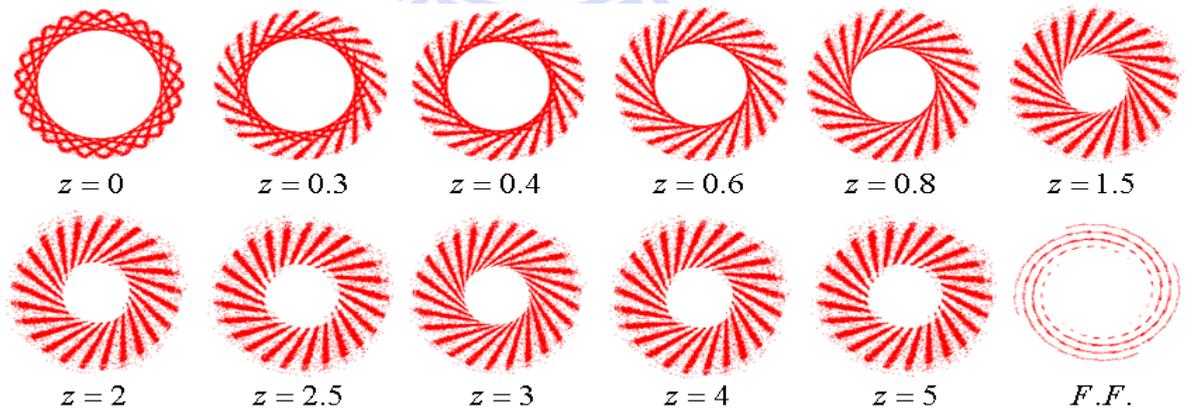


(b)

圖 6.1.1 (a)以 35cm 光導實驗所得(5,2)模態圖形 (b) 光束追跡理論模擬圖形



(a)



(b)

圖 6.1.2 (a)以 35cm 光導實驗所得(25,6)模態圖形 (b) 光束追跡理論模擬圖形

## *References*

- [1] <http://en.wikipedia.org/wiki/Waveguide>.
- [2] <http://profleeclub.ep.nctu.edu.tw/~wilee/proflee4/public/articles/130/index.phtml>.
- [3] <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B3%A2%E7%B2%92%E4%BA%8C%E8%B1%A1%E6%80%A7>.
- [4] 李金航, 自然科學中的數學概念, 碩士論文, 國立交通大學理學院應用科技學程, 98年.
- [5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Waveguide\\_\(optics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Waveguide_(optics)).
- [6] <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B4%9D%E5%A1%9E%E5%B0%94%E5%87%BD%E6%95%B0>.
- [7] 李渝龍, 利用電腦輔助視覺化研究準晶格圖樣, 碩士論文, 國立交通大學理學院應用科技學程.