


## 第二章 理論基礎

本研究將連續對稱無限延展天然坡地，簡化為飽和、垂向二維問題且僅分析山脊至山谷間之穩態破壞潛勢，如圖 1.2 所示。本章將介紹分析連續對稱無限延展天然坡地破壞潛能所使用之理論基礎，包括水流控制方程式、土體靜力平衡方程式、邊界條件以及摩爾-庫倫破壞準則，並定義破壞潛能。

### 2.1 控制方程式

#### 2.1.1 水流控制方程式

在地下水流動符合達西定律(Darcy's Law)以及土體為等向(isotropic)之假設下，二維穩態地下水流控制方程式可表示為


$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.1)$$

式中， $K$  為水力傳導係數(hydraulic conductivity)， $h$  為水頭(hydraulic head)。式(2.1)可進一步表示為

$$K \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

若再假設土體為均質(homogenous)，即  $K$  值不隨空間變化，則式(2.2)可化簡為

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

### 2.1.2 土體靜力平衡方程式

在土體之變形為小應變(small deformation)假設下，應變(strain)與位移(displacement)之關係可表示為

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.6)$$

式中  $\varepsilon_{yy}$  及  $\varepsilon_{xx}$  為正向應變， $\varepsilon_{xy}$ 、 $\varepsilon_{yx}$  為剪應變， $u_x$  及  $u_y$  則分別代表  $x$  及  $y$  方向上的位移量。

在不考慮土體之慣性力(inertial force)下，二維土體靜力平衡方程式可表示為

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = -\rho_t g_x \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\rho_t g_y \quad (2.8)$$

其中， $\sigma_{xx}$  及  $\sigma_{yy}$  為作用在垂直於  $x$  軸與  $y$  軸平面上的正向應力， $\sigma_{xy}$ 、 $\sigma_{yx}$  為沿平面的剪應力， $g_x$ 、 $g_y$  分別為  $x$  及  $y$  方向的重力加速度， $\rho_t$  為土體與水混和之巨積密度(bulk density)，可表示為

$$\rho_t = (1-n) \cdot \rho_s + n \cdot \rho_w \quad (2.9)$$

式中， $\rho_s$  為土壤密度， $\rho_w$  為土壤內孔隙水密度， $n$  為孔隙率。

根據土壤力學大師 Terzaghi (1925)所提出之有效應力觀念 (effective stress)概念，土壤之有效應力與總應力以及孔隙水壓之關係可表示為

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (2.10)$$

式中， $\sigma'_{ij}$  為有效應力張量， $\sigma_{ij}$  為總應力張量， $p$  為孔隙水壓， $\delta_{ij}$  表示 Kronecker delta。

將式(2.10)代入式(2.7)及式(2.9)，並只考慮  $y$  方向的重力加速度，即  $g_x = 0$ ，且以  $g$  代表  $g_y$ ，則可得

$$\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial x} = -\rho_t g + \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.12)$$

若定義水頭(hydraulic head)為

$$h = \frac{p}{\rho_w g} + y \quad (2.13)$$

將式(2.13)代入式(2.11)及式(2.12)，則可得

$$\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y} = \rho_w g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial x} = (\rho_t - \rho_w)g + \rho_w g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.15)$$

若假設土體為彈性體且等向，利用式(2.4)至式(2.6)則土體之有效應力

與位移之關係可表示為

$$\sigma'_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (2.16)$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

$$\sigma'_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

式中， $E$  為楊氏模數(Young's modulus)， $\nu$  為波松比(poisson's ratio)。

式(2.16)至式(2.18)稱為本構關係(constitutive law)。

將式(2.16)至式(2.18)代入式(2.14)及式(2.15)，則可得土體靜力平衡方程式為

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial(2\mu + \lambda)}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \rho_w g \frac{\partial h}{\partial x} - (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.22)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial(2\mu + \lambda)}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} = (\rho_t - \rho_s)g + \rho_w g \frac{\partial h}{\partial y} - (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.23)$$

其中， $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ； $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  為拉梅常數(Lame constant)。若進一

步假設土體為均質，則式(2.22)與式(2.23)可簡化為

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\mu}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\rho_w g}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{(\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{(2\mu + \lambda)}{\mu} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \frac{(\rho_t - \rho_w)g}{\mu} + \frac{\rho_w g}{\mu} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{(\mu + \lambda)}{\mu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \quad (2.25)$$

## 2.2 邊界條件

### 2.2.1 水流邊界條件

如圖 1.2 所示，由於研究區域為對稱之關係，所以左、右邊界，即 O-B 與 A-C 邊界，為零流量邊界。此外下邊界，即 O-A 邊界，假設為零流量邊界。因此，左、右及下邊界之水流邊界條件可分別表示如下：

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, y) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(L, y) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (2.28)$$

此外，由於飽和狀態，坡面上給定為水頭邊界條件，即

$$h(x, Y) = Y(x) \quad (2.29)$$

其中， $Y(x)$  為坡面高程，可表示為

$$Y(x) = (H_1 + H_2) - \frac{H_2}{L} \cdot x \quad (2.30)$$

其中， $L$  為計算區域之水平距離， $H_2$  為邊坡高度， $H_1$  為邊坡坡趾水平面至下邊界深度，如圖 1.2 所示。

### 2.2.2 土體邊界條件

除了坡面上外，其他邊界上之應力分布狀況(即動力(dynamic)邊界條件)皆無法得知，所以只能給定位移邊界條件(即運動(kinematic)邊界條件)。由於地形對稱關係，所以 O-B 及 A-C 邊界上之水平位移為零，且垂向位移在水平方向之梯度為零，即

$$u_x(0, y) = 0 \quad (2.31)$$

$$u_x(x_A, y) = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}(0, y) = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}(x_A, y) = 0 \quad (2.34)$$

假設下邊界（即 O-A 邊界上）之水平與垂直位移分別為零，即

$$u_x(x, 0) = 0 \quad (2.35)$$

$$u_y(x, 0) = 0 \quad (2.36)$$

此外，坡面上之邊界條件則給定無牽引力(traction-free)作用之邊界條件(Malvern(1969))，即

$$\sigma'_{xx}(x, Y)n_x + \sigma'_{yx}(x, Y)n_y = 0 \quad (2.37)$$

$$\sigma'_{yy}(x, Y)n_y + \sigma'_{yx}(x, Y)n_x = 0 \quad (2.38)$$

其中， $n_x$  及  $n_y$  為垂直邊坡面上之單位向量在  $x$  及  $y$  方向的分量。

### 2.3 摩爾-庫倫破壞準則

摩爾(Mohr,1900)提出材料之廣義破壞理論，材料之破壞並非發生在最大正向應力處，而是在正向應力與剪應力達到一臨界組合時發生破壞，如圖 2.1 所示，破壞面上之正向應力與剪應力為一函數關係，可表示為

$$\tau_f = f(\sigma) \quad (2.39)$$

式(2.39)稱為破壞包絡線(failure envelope)，其中， $\tau_f$ 為剪應力， $\sigma$ 為正向力。

也就是，當土體內某平面上之正向應力及剪應力之關係中，若在破壞包絡線下方，則該平面不會發生剪力破壞，如圖 2.1 之 A 點所示；若在破壞包絡線上方，則表示土體發生破壞，如圖 2.1 之 B 點所示；然而，正向應力與剪應力之關係不會發生在破壞包絡線上方，因為土體早已發生破壞，如圖 2.1 之 C 點所示。

由圖 2.1 可知，一般材料之破壞包絡線為一曲線，也就是破壞面上之正向應力與剪應力之函數並非為線性。但是，對於大多數之土壤而言，破壞面上之正向應力與剪應力近似線性函數關係(Coulomb,1776)，如圖中實線所示，即

$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi \quad (2.40)$$

式(2.40)即為所謂之摩爾-庫倫破壞準則，其中， $c$ 為凝聚力(cohesion)。

若土體為砂質土壤則凝聚力為零，本研究僅考慮砂質土壤之坡地破壞潛能分析。 $\phi$ 為內摩擦角(angle of internal friction)(Lambe and Whitman(1979))，其各種土壤之典型內摩擦角值如表 2.1 所示。對於飽和土壤之摩爾-庫倫破壞準則，只要將式(2.40)中之應力改變為有效


應力即可，即

$$\tau'_f = c + \sigma' \tan \phi \quad (2.41)$$

其中， $\tau'_f$  為有效剪應力， $\sigma'$  為有效正向應力。

## 2.4 破壞潛能之定義

根據水流控制方程式(式(2.5))，土體靜力平衡方程式(式(2.24)與式(2.25))以及邊界條件(式(2.26)至式(2.38))，即可求解出坡地之水平與垂向位移量，即  $u_x$  與  $u_y$ 。再利用位移與應變關係以及應變與應力的關係，如式(2.16)至式(2.18)，即可求出土體中任一點所承受之應力狀態，也就是， $\sigma'_{xx}$ 、 $\sigma'_{yy}$  與  $\sigma'_{yx}$ 。如此，便可以計算出最大與最小主軸應力(principle stress)，即


$$\sigma_1 = \frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma'^2_{yx}} \quad (2.42)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma'^2_{yx}} \quad (2.43)$$

其中， $\sigma_1$  及  $\sigma_3$  分別為最大及最小主軸應力。

根據摩爾圓(Mohr's circle)理論，利用最大及最小主軸應力，即可求得土體中任一點任意平面上之正向應力與剪應力，若摩爾圓與破壞包絡線相切，則表示土體發生剪力破壞，如圖 2.2 所示。由圖 2.2 可得下列重要關係式



$$-\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{|\tau'_{\max}|}{-\sigma'_m} = \sin \phi \quad (2.44)$$

其中， $\tau'_{\max}$  為最大剪應力， $\sigma'_m$  為平均正向應力。

因此吾人可以利用最大剪應力與平均正向應力兩者之比值，作為判斷土體是否破壞之指標，即破壞潛能(failure potential)， $\Phi$ 。所以，破壞潛能可表示為

$$\Phi = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{|\tau'_{\max}|}{-\sigma'_m} \quad (2.45)$$

由式(2.45)可知，破壞潛能介於 1~0 之間

本章已說明分析坡地破壞潛能之理論基礎，包括地下水流控制方程式、土體靜力平衡方程式、邊界條件以及摩爾-庫倫破壞準則，並定義破壞潛能。接下來，吾人將簡介有限解析法，探討如何將有限解析法應用於坡地破壞潛能計算，並測試有限解析法之特性。