第三章 二維有限解析法之簡介與應用

本章首先簡介二維有限解析法，並探討如何將二維有限解析法應用於坡地破壞計算，最後利用具有解析解之案例，測試與驗證有限解析法。

3.1 二維有限解析法簡介

有限解析法乃是根據線性化局部解析解離散控制方程式。二維有限解析法所應用之方程式為

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=Ru\frac{\partial\phi}{\partial x}+Rv\frac{\partial\phi}{\partial y}+RF \tag{3.1}$$

式中，R、u、v 與 F 可能為空間或 ϕ 之函數，且 RF 稱為源流項(source term)或驅動力項(forcing term)。若求解之控制方程式與式(3.1)不同，則控制方程式需經適當處理以符合式(3.1)，才可應用有限解析法。例如，若控制方程式中存在有混合微分項 $\partial^2\phi/\partial x\partial y$，則需將混合微分項納入 F 中。

利用對角卡氏座標系統可將模擬區域格網化，如圖 3.1 所示。由圖 3.1 可知，二維有限解析法中，存在有九點與五點兩種計算元素(computational element)。九點計算元素(九點法)應用於模擬區域內部或者規則邊界之元素，如圖 3.1 中元素 1 與元素 2 所示。然而，五點計算元素(五點法)則是應用於不規則邊界之元素，如圖 3.1 中元素 3 所示。

如前述，R、u、v 與F可能為空間或 ϕ 之函數，因此求解式(3.1)之解析解可能較為困難，所以將式(3.1)在每個計算元素內加以線性化，也就是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=2A\frac{\partial\phi}{\partial x}+2B\frac{\partial\phi}{\partial y}+g \qquad (3.2)$$

式中，$A=R_P u_P/2$，$B=R_P v_P/2$，$g=F_P R_P$，下標P表示計算元素中心點之位置，如圖 3.1 所示。吾人必須強調，如前述，若F中含有混合微分項$\partial^2\phi/\partial x\partial y$，則線性化過程中，$\left(\partial^2\phi/\partial x\partial y\right)_P$可藉由有限差分法加以近似，並視為一定值納入$g$中。以下分別簡介九點與五點有限解析法。

3.1.1 九點有限解析法

九點法應用於模擬區域內部元素或規則邊界之元素，依東邊、西邊、南邊與北邊之格網間距，即h_E、h_W、h_S與h_N可將其分為均勻格網或非均勻格網兩種計算元素，如圖 3.2 所示。若$h_E=h_W$且$h_S=h_N$時，稱為均勻格網。相反的，若$h_E\neq h_W$或$h_S\neq h_N$時，則稱為非均勻格網。非均勻格網中，又可依h_E、h_W、h_S與h_N之大小，概分為四種情況，也就是$h_E<h_W$、$h_N<h_S$，$h_E<h_W$、$h_N>h_S$，$h_E>h_W$、$h_N>h_S$以及$h_E>h_W$、$h_N<h_S$，如圖 3.2 所示。

以下利用$h_E<h_W$、$h_N<h_S$案例，如圖 3.2(a)所示，說明九點有限解析法之離散概念，其餘三種情況同理可得，在此不多贅述。若計算元素為不均勻格網時，較不易求得線性化方程式解析解。然而，利用內插技巧即可簡單地將非均勻格網變換至均勻格網，也就是內插出ϕ^*_{NW}、ϕ^*_{SE}、ϕ^*_{WC}、ϕ^*_{SC}以及ϕ^*_{SW}，如圖 3.2(a)所示，如此便可求解均勻格

網之解析解，其中均勻格網之水平格網間距(h)與垂直格網間距(k)分別為$h=h_E$以及$k=\ h_N$。

根據 Chen and Chen(1984a, b)假設計算元素北邊邊界之內插函數為線性函數與指數函數之組合，即

$$\phi_N(x) = a_N(e^{2Ax} - 1) + b_N x + c_N \tag{3.3}$$

吾人必須強調，式(3.3)乃為式(3.2)線性化方程式之解析解。因此，此線性函數與指數函數組合成之內插函數應可減少內插造成之誤差。此外，式(3.3)亦可做為求解計算元素局部解析解之邊界條件(見後續之說明)。利用三個格網點之函數值條件，也就是$\phi_{NW} = \phi_N(-h_W)$、$\phi_{NE} = \phi_N(h_E)$、$\phi_{NC} = \phi_N(0)$，則式(3.3)中之係數可分別表示為

$$a_N = \frac{\phi_{NW} h_E + \phi_{NE} h_W - \phi_{NC}(h_E + h_W)}{h_W(e^{2A\,h_E} - 1) + h_E(e^{-2A\,h_W} - 1)} \tag{3.4a}$$

$$b_N = \frac{(e^{-2A\,h_W})(\phi_{NE} - \phi_{NC}) - (e^{2A\,h_E} - 1)(\phi_{NW} - \phi_{NC})}{h_W(e^{2A\,h_E} - 1) + h_E(e^{-2A\,h_W} - 1)} \tag{3.4b}$$

$$c_N = \phi_{NC} \tag{3.4c}$$

將$x=-h_E$代入式(3.3)中，即$\phi^*_{NW} = \phi_N(-h_E)$，則可得到內插點$\phi^*_{NW}$與網格點$\phi_{NE}$、$\phi_{NW}$以及$\phi_{NC}$之關係如下

$$\phi^*_{NW} = (s-1)\phi_{NE} + \bar{s}\phi_{NW} + (2 - s - \bar{s})\phi_{NC} \tag{3.5}$$

其中

$$s=\frac{h_W(e^{2A\,h_E}+e^{-2A\,h_E}-2)}{h_W(e^{2A\,h_E}-1)+h_E(e^{-2A\,h_W}-1)} \tag{3.6a}$$

$$\bar{s}=s\frac{h_E}{h_W} \tag{3.6b}$$

同理，假設計算元素東邊邊界之內插函數為

$$\phi_E(y)=a_E(e^{2B\,y}-1)+b_E y+c_E \tag{3.7}$$

利用 $\phi_{SE}=\phi_E(-h_S)$ 、 $\phi_{NE}=\phi_E(h_N)$ 以 $\phi_{EC}=\phi_E(0)$ 等三個條件，式(3.7)之係數可分別表示為

$$a_E=\frac{\phi_{SE}h_N+\phi_{NE}h_S-\phi_{EC}(h_N+h_S)}{h_S(e^{2B\,h_N}-1)+h_N(e^{-2B\,h_S}-1)} \tag{3.8a}$$

$$b_E=\frac{(e^{-2B\,h_S}h_S-1)(\phi_{NE}-\phi_{EC})-(e^{2B\,h_N}-1)(\phi_{SE}-\phi_{EC})}{h_S(e^{2B\,h_N}-1)+h_N(e^{-2B\,h_S}-1)} \tag{3.8b}$$

$$c_E=\phi_{EC} \tag{3.8c}$$

將 $y=-h_N$ 代入式(3.7)中，也就是 $\phi_{SE}^*=\phi_E(-h_N)$ ，則可得到內插點 ϕ_{SE}^* 與網格點 ϕ_{NE} 、 ϕ_{SE} 以及 ϕ_{EC} 之關係為

$$\phi_{SE}^*=(t-1)\phi_{NE}+\bar{t}\phi_{SE}+(2-t-\bar{t})\phi_{EC} \tag{3.9}$$

其中

$$t=\frac{h_S(e^{2B\,h_N}+e^{-2B\,h_N}-2)}{h_S(e^{2B\,h_N}-1)+h_N(e^{-2B\,h_S}-1)} \tag{3.10a}$$

$$\bar{t} = t\frac{h_N}{h_S} \tag{3.10b}$$

同理如前述，ϕ_{WC}^* 、ϕ_{SC}^* 以及 ϕ_{SW}^* 亦可分別內插為

$$\phi_{WC}^* = (s-1)\phi_{EC} + \bar{s}\phi_{WC} + (2-s-\bar{s})\phi_P \tag{3.11}$$

$$\phi_{SC}^* = (t-1)\phi_{NC} + \bar{t}\phi_{SC} + (2-t-\bar{t})\phi_P \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\phi_{SW}^* = {} & (s-1)(t-1)\phi_{NE} + \bar{t}(s-1)\phi_{SE} + (s-1)(2-t-\bar{t})\phi_{EC} + \bar{s}(t-1)\phi_{NW} + \overline{st}\phi_{SW} + \\ & \bar{s}(2-t-\bar{t})\phi_{WC} + (t-1)(2-s-\bar{s})\phi_{NC} + \bar{t}(2-s-\bar{s})\phi_{SC} + (2-t-\bar{t})(2-s-\bar{s})\phi_P\end{aligned} \tag{3.13}$$

非均勻格網計算元素經由內插技巧變換至均勻格網後，再假設適當之邊界條件，即可求解均勻網格計算元素之解析解。與內插函數之假設形式相同(Tsai, 1993)，東邊、西邊、南邊與北邊邊界上之函數滿足線性函數與指數函數之組合，其中北邊之邊界條件為

$$\phi_N(x) = a_N^*(e^{2AX} - 1) + b_N^* x + c_N^* \tag{3.14}$$

以及

$$a_N^* = \frac{\phi_{NE} + \phi_{NW}^* - 2\phi_{NC}}{4\sinh^2 Ah} \tag{3.15a}$$

$$b_N^* = \frac{\phi_{NE} - \phi_{NW}^* - \cot Ah\left(\phi_{NE} + \phi_{NW}^* - 2\phi_{NC}\right)}{2h} \tag{3.15b}$$

$$c_N^* = \phi_{NC} \tag{3.15c}$$

根據四個邊界條件，如上所述，即可利用分離變數法(separation

variable)，求解式(3.2)在計算元素內之解析解(見 Chen and Chen (1984))。以($x=0$, $y=0$)代入所求得解析解函數中，即可將計算元素之中心點值(ϕ_P)表示為均勻格網計算元素其他八點格網點(ϕ_{NW}^*、ϕ_{SE}^*、ϕ_{WC}^* 、ϕ_{SC}^* 、ϕ_{SW}^* 、ϕ_{NE} 、ϕ_{EC} 、ϕ_{NC})以及源流項(驅動力項)之關係如

$$\phi_P = C_{NE}\phi_{NE} + C_{NW}\phi_{NW}^* + C_{SE}\phi_{SE}^* + C_{SW}\phi_{SW}^* + C_{EC}\phi_{EC} + C_{WC}\phi_{WC}^* + C_{NC}\phi_{NC} + C_{SC}\phi_{SC}^* + C_P R_P F_P \tag{3.16}$$

其中

$$C_{EC} = EBe^{-A\,h} \text{，} C_{NE} = Ee^{-A\,h-B\,k}$$

$$C_{WC} = EBe^{A\,h} \text{，} C_{NW} = Ee^{A\,h-B\,k}$$

$$C_{SC} = EAe^{B\,k} \text{，} C_{SE} = Ee^{-A\,h+B\,k}$$

$$C_{NC} = EAe^{-B\,k} \text{，} C_{SW} = Ee^{A\,h+B\,k}$$

$$C_p = \frac{A\,h}{2(A^2+B^2)}\left[C_{NW} + C_{WC} + C_{SW} - C_{NE} - C_{EC} - C_{SE}\right]$$

$$+\frac{B\,k}{2(A^2+B^2)}\left[C_{SW} + C_{SC} + C_{SE} - C_{NW} - C_{NC} - C_{NE}\right]$$

$$E = \frac{1}{4\cosh(Ah)\cosh(BK)} - AhE_2\coth(Ah) - BkE_2^*\coth(Bk)$$

$$EA = 2Ah\frac{\cosh^2(Ah)}{\sinh(Ah)}E_2 \text{，} EB = 2Bk\frac{\cosh^2(Bk)}{\sinh(Bk)}E_2^*$$

$$E_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m (\lambda_m h)}{\left[(Ah)^2 + (\lambda_m h)^2\right]^2 \cosh(\mu_m k)}$$

$$E_2^* = \left(\frac{h}{k}\right)^2 E_2 + \frac{Ak \cdot \tanh(Bk) - Bh \cdot \tanh(Ah)}{4AkBk \cdot \cosh(Ah)\cosh(Bk)}$$

$$\mu_m = \sqrt{A^2 + B^2 + \lambda_m^2} \text{ ，m=1,2,3....}$$

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h} \text{，m=1,2,3....} \tag{3.17}$$

因為內插值ϕ_{NW}^*、ϕ_{SE}^*、ϕ_{WC}^*、ϕ_{SC}^*以及ϕ_{SW}^*並非離散過程中所要求解之格網點值，利用內插值與格網點值之關係，如式(3.5)、式(3.9)與式(3.11)至式(3.13)，即可將式(3.16)改寫為(Chen and Chen 1984a)

$$\phi_P = \frac{1}{G}[b_{NE}\phi_{NE} + b_{NW}\phi_{NW} + b_{SE}\phi_{SE} + b_{SW}\phi_{SW} + b_{EC}\phi_{EC} + b_{WC}\phi_{WC} + b_{NC}\phi_{NC} + b_{SC}\phi_{SC} + C_P R_P F_P] \tag{3.18}$$

其中

$$G = 1 - C_{WC}(2 - s - \bar{s}) - C_{SC}(2 - t - \bar{t}) - C_{SW}(2 - s - \bar{s})(2 - t - \bar{t})$$

$$b_{NE} = C_{NE} + C_{NW}(s-1) + C_{SE}(t-1) + C_{SW}(s-1)(t-1)$$

$$b_{NW} = C_{NW}\bar{s} + C_{SW}\bar{s}(t-1)$$

$$b_{SE} = C_{SE}\bar{t} + C_{SW}\bar{t}(s-1)$$

$$b_{SW} = \overline{st}C_{SW}$$

$$b_{EC} = C_{EC} + C_{WC}(s-1) + C_{SE}(2 - t - \bar{t}) + C_{SW}(s-1)(2 - t - \bar{t})$$

$$b_{WC} = C_{WC}\bar{s} + C_{SW}\bar{s}(2 - t - \bar{t})$$

$$b_{NC} = C_{NC} + C_{SC}(t-1) + C_{NW}(2-s-\bar{s}) + C_{SW}(t-1)(2-s-\bar{s})$$

$$b_{SC} = C_{SC}\bar{t} + C_{SW}\bar{t}(2-s-\bar{s})$$

(3.19)

3.1.2 五點有限解析法

五點法如九點法如述，依東邊、西邊、南邊與北邊之格網間距，即 h_E、h_W、h_S 與 h_N，亦可分為均勻格網或非均勻格網，如圖 3.3 所示。若 $h_E = h_W = h_S = h_N = h$ 時，稱為均勻格網。相反的，若 h_E、h_W、h_S 與 h_N 其中一個有不相同時，則稱為非均勻格網。非均勻格網中，又可依 h_E、h_W、h_S 與 h_N 之大小，概分為四種情況，也就是 $h_W < h_E$、h_N、h_S，$h_E < h_W$、h_N、h_S，$h_S < h_E$、h_W、h_N 以及 $h_N < h_E$、h_W、h_S，如圖 3.3 所示。

以下利用 $h_W < h_E$、h_N、h_S 案例，如圖 3.3(a)所示，說明五點有限解析法之離散概念，其餘三種情況亦同理可得，在此不多贅述。若計算元素為不均勻格網時，較困難求得線性化方程式之解析解。然而，利用內插技巧即可簡單地將非均勻格網變換至均勻格網，也就是內插出 ϕ^*_{EC}、ϕ^*_{NC} 以及 ϕ^*_{SC}，如圖 3.3(a)所示，如此便可求解均勻格網之解析解，其中均勻格網之水平格網間距與垂直格網間距為 $h = h_W$。

假設計算元素之內插函數為線性函數與指數函數之組合，即

$$\phi(x) = a(e^{2Ax} - 1) + bx + c \tag{3.20}$$

此內插函數與九點法之內插函數相同亦可減少內插造成之誤差。利用三個格網點之函數值條件，也就是 $\phi_{WC} = \phi(-h_W)$、$\phi_{EC} = \phi(h_E)$、$\phi_P = \phi(0)$，

則式(3.20)中之係數可分別表示為

$$a = \frac{\phi_{WC} h_E + \phi_{EC} h_W - \phi_P (h_E + h_W)}{h_W (e^{2Ah_E} - 1) + h_E (e^{-2Ah_W} - 1)}$$

$$b = \frac{\phi_P - \phi_{WC} + a_N (e^{2Ah_E} - 1)}{h_W}$$

$$c = \phi_P \tag{3.21}$$

將 $x = h_W$ 代入式(3.3)中，即 $\phi_{EC}^* = \phi(h = h_W)$，則可得到內插點 ϕ_{EC}^* 與網格點 ϕ_{WC} 、ϕ_{EC} 以及 ϕ_P 之關係如下

$$\phi_{EC}^* = [\phi_{WC}(\frac{h_E(e^{2Ah_W} - 1) - h_W(e^{2Ah_E} - 1)}{h_E(e^{-2Ah_W} - 1) + h_W(e^{2Ah_E} - 1)})] + [\phi_{EC}(\frac{h_W(e^{2Ah_W} - 1) + h_W(e^{-2Ah_W} - 1)}{h_E(e^{-2Ah_W} - 1) + h_W(e^{2Ah_E} - 1)})]$$
$$+ [\phi_P(\frac{-(h_E + h_W)(e^{2Ah_W} - 1) + h_W(e^{2Ah_E} - e^{-2Ah_W})}{h_E(e^{-2Ah_E} - 1) + h_W(e^{2Ah_E} - 1)} + 1)] \tag{3.22}$$

同理如前述，ϕ_{NC}^* 以及 ϕ_{SC}^* 亦可分別內插為

$$\phi_{NC}^* = [\phi_{NC}(\frac{h_S(e^{2Bh_W} - 1) + h_W(e^{-2Bh_S} - 1)}{h_S(e^{2Bh_N} - 1) + h_N(e^{-2Bh_S} - 1)})] + [\phi_{SC}(\frac{h_N(e^{2Bh_W} - 1) - h_W(e^{2Bh_N} - 1)}{h_S(e^{2Bh_N} - 1) + h_N(e^{-2Bh_S} - 1)})]$$
$$+ [\phi_P(\frac{-(h_S + h_N)(e^{2Bh_W} - 1) + h_W(e^{2Bh_N} - e^{-2Bh_S})}{h_S(e^{2Bh_N} - 1) + h_N(e^{-2Bh_S} - 1)} + 1)] \tag{3.23}$$

$$\phi_{SC}^{*}=[\phi_{NC}(\frac{h_S(e^{-2Bh_W}-1)-h_W(e^{-2Bh_S}-1)}{h_S(e^{2Bh_N}-1)+h_N(e^{-2Bh_S}-1)})]+[\phi_{SC}(\frac{h_N(e^{-2Bh_W}-1)+h_W(e^{2Bh_N}-1)}{h_S(e^{2Bh_N}-1)+h_N(e^{-2Bh_S}-1)})]$$

$$+[\phi_P(\frac{-(h_S+h_N)(e^{-2Bh_W}-1)+h_W(e^{-2Bh_S}-e^{2Bh_N})}{h_S(e^{2Bh_N}-1)+h_N(e^{-2Bh_S}-1)}+1)] \tag{3.24}$$

由上述之內插點與計算點之關係式可將非均勻格網變換至均勻格網，如圖 3.4(a)。為了方便求得計算元素之解析解，因此透過旋轉座標，如圖 3.4(b)，可方便求得該計算元素之解析解。由圖 3.4(a)可知兩個座標系統間的關係式

$$\xi=\frac{x-y}{\sqrt{2}} \qquad \eta=\frac{x+y}{\sqrt{2}} \tag{3.25}$$

即可得ϕ_x、ϕ_{xx}、ϕ_y、ϕ_{yy}導函數

$$\phi_x=\frac{\phi_\xi+\phi_\eta}{\sqrt{2}} \tag{3.26}$$

$$\phi_{xx}=\frac{\phi_{\xi\xi}+\phi_{\eta\eta}}{2}+\phi_{\xi\eta} \tag{3.27}$$

$$\phi_y=\frac{\phi_\eta-\phi_\xi}{\sqrt{2}} \tag{3.28}$$

$$\phi_{yy}=\frac{\phi_{\xi\xi}+\phi_{\eta\eta}}{2}-\phi_{\xi\eta} \tag{3.29}$$

將式(3.26)至式(3.29)帶入式(3.2)整理後，可得

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = 2A^{'}\phi_{\xi} + 2B^{'}\phi_{\eta} + g \tag{3.30}$$

$$\text{其中，} A^{'} = \frac{A-B}{\sqrt{2}} \quad B^{'} = \frac{A+B}{\sqrt{2}} \tag{3.31}$$

透過座標旋轉後，其計算元素中心點P與其他四個格網點示意圖，如圖 3.4(b)所示，且由圖 3.4(b)可知$h^{'}$與h之關係式，如$h^{'} = h/\sqrt{2}$。

非均勻格網計算元素經由內插技巧變換至均勻格網後，再假設適當之邊界條件，即可求解均勻網格計算元素之解析解。

如圖 3.4(b)所示，假設上邊(即 NC-EC 邊界)、下邊(即 WC-SC 邊界)、左邊(即 NC-WC 邊界)與右邊(即 EC-SC 邊界)邊界上之函數滿足常數與指數函數之組合，其中上邊之邊界條件為

$$\phi_T(\xi) = a_T^*(e^{2A^{'}\xi} - 1) + c_T^* \tag{3.32}$$

其中

$$a_T^* = \frac{\phi_{EC}^* - \phi_{NC}^*}{e^{2A^{'}h^{'}} - e^{-2A^{'}h^{'}}} \tag{3.33a}$$

$$C_T^* = \frac{\phi_{NC}^* e^{2A^{'}h^{'}} - \phi_{EC}^* e^{-2A^{'}h^{'}}}{e^{2A^{'}h^{'}} - e^{-2A^{'}h^{'}}} \tag{3.33b}$$

根據四個邊界條件，其中上邊界，如上所述，即可利用分離變數法(separation variable)，求解式(3.2)在計算元素內之解析解(見 Tsai(1993), Tien (1993))。以($\xi = 0$, $\eta = 0$)代入所求得解析解函數中，即可將計算元素之中心點值(ϕ_P)表示為均勻格網計算元素其他四點格網點(ϕ_{WC}、

ϕ_{SC}^{*} 、 ϕ_{EC}^{*} 、 ϕ_{NC}^{*})以及源流項(驅動力項)之關係如

$$\phi_p = C_{EC}\phi_{EC}^{*} + C_{WC}\phi_{WC} + C_{SC}\phi_{SC}^{*} + C_{NC}\phi_{NC}^{*} + C_p g \tag{3.34}$$

其中，

$C_{EC} = e^{-A'h'-B'h'}E$ ， $C_{NC} = e^{A'h'-B'h'}E$ ， $C_{SC} = e^{-A'h'+B'h'}E$ ， $C_{WC} = e^{A'h'+B'h'}E$

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{-h'}{2(A'^2 + B'^2)}\left[C_{EC}(A' + B') + C_{NC}(-A' + B') + C_{SC}(A' - B') + C_{WC}(-A' - B')\right] \\ E &= \frac{1}{4\cosh(A'h')\cosh(B'h')} \end{aligned} \tag{3.35}$$

因為內插值 ϕ_{SC}^{*} 、 ϕ_{EC}^{*} 以及 ϕ_{NC}^{*} 並非離散過程中所求解之格網點值，利用內插值與格網點值之關係，如式(3.22)、式(3.23)與式(3.24)，即可將式(3.34)改寫為(Chen (1999))

$$\phi_P = \frac{1}{G}[b_{EC}\phi_{EC} + b_{NC}\phi_{NC} + b_{WC}\phi_{WC} + b_{SC}\phi_{SC}] \tag{3.36}$$

其中，

$$G = 1 - b_1 C_{EC} - b_2 C_{NC} - b_3 C_{SC}$$

$$b_{EC} = a_1 C_{EC}$$

$$b_{NC} = a_2 C_{NC} + a_3 C_{SC}$$

$$b_{WC} = C_{WC} + c_1 C_{EC}$$

$$b_{SC} = c_2 C_{NC} + c_3 C_{SC}$$

$$a_1 = \frac{h_W(e^{2A'h_W}-1)+h_W(e^{-2A'h_W}-1)}{h_E(e^{-2A'h_W}-1)+h_W(e^{2A'h_E}-1)}$$

$$a_2 = \frac{h_S(e^{2B'h_W}-1)+h_W(e^{-2B'h_S}-1)}{h_S(e^{2B'h_N}-1)+h_N(e^{-2B'h_S}-1)}$$

$$a_3 = \frac{h_S(e^{-2B'h_W}-1)-h_W(e^{-2B'h_S}-1)}{h_S(e^{2B'h_N}-1)+h_N(e^{-2B'h_S}-1)}$$

$$b_1 = \frac{-(h_E+h_W)(e^{2A'h_W}-1)+h_W(e^{2A'h_E}-e^{-2A'h_W})}{h_E(e^{-2A'h_W}-1)+h_W(e^{2A'h_E}-1)}+1$$

$$b_2 = \frac{-(h_S+h_N)(e^{2B'h_W}-1)+h_W(e^{2B'h_N}-e^{-2B'h_S})}{h_S(e^{2B'h_N}-1)+h_N(e^{-2B'h_S}-1)}+1$$

$$b_3 = \frac{-(h_S+h_N)(e^{-2B'h_W}-1)+h_W(e^{-2B'h_S}-e^{2B'h_N})}{h_S(e^{2B'h_N}-1)+h_N(e^{-2B'h_S}-1)}+1$$

$$c_1 = \frac{h_E(e^{2A'h_W}-1)-h_W(e^{2A'h_E}-1)}{h_E(e^{-2A'h_W}-1)+h_W(e^{2A'h_E}-1)}$$

$$c_2 = \frac{h_N(e^{2B'h_W}-1)-h_W(e^{2B'h_N}-1)}{h_S(e^{2B'h_N}-1)+h_N(e^{-2B'h_S}-1)}$$

$$c_3 = \frac{h_N(e^{-2B'h_W}-1)+h_W(e^{2B'h_N}-1)}{h_S(e^{2B'h_N}-1)+h_N(e^{-2B'h_S}-1)} \tag{3.37}$$

其中， $C_{EC}, C_{WC}....$等，如式(3.35)所示。

3.2 二維有限解析法之應用

本研究之主要目的在於，嘗試利用有限解析法，根據多孔彈性介質理論，分析坡地破壞潛勢。所以需求解地下水流控制方程式，如式(2.2)所示，以及土體靜力平衡方程式，如式(2.22)與式(2.23)所示。水流控制方程式可以直接利用上述九點以及五點有限解析法加以離散

化，但是土體靜力平衡方程式則不然，其理由如下所述。x方向之土體靜力平衡方程式，即式(2.22)，在計算元素內可線性化為

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2A\frac{\partial \phi}{\partial x} + 2BC\frac{\partial \phi}{\partial y} + g \tag{3.38}$$

其中，

$$A = \left(\frac{1}{2(2\mu+\lambda)} \frac{\partial(2\mu+\lambda)}{\partial x} \right)_P$$

$$B = \left(\frac{\mu}{2(2\mu+\lambda)^2} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right)_P$$

$$C = \left(\frac{\mu}{2\mu+\lambda} \right)_P$$

$$g = \left(\frac{\rho_w g}{2\mu+\lambda} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2\mu+\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{2\mu+\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_P \tag{3.39}$$

由式(3.38)與式(3.39)可知，$C \neq 1$與上述有限解析法中$C = 1$有所不同，所以上述九點與五點有限解析法，不能直接應用於x方向之土體靜力平衡方程式。同理，由式(2.23)可得知，y方向之土體靜力平衡方程式亦不可直接以有限解析法離散化。然而，吾人可以利用變數轉換技巧，將土體靜力平衡方程式轉換成有限解析法慣用之方程式，如式(3.2)所示。

若利用$x^* = x,\ y^* = \frac{y}{\sqrt{C}}$，則式(3.38)可轉換為

$$2A^{*}\frac{\partial \phi}{\partial x^{*}}+2B^{*}\frac{\partial \phi}{\partial y^{*}}=\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{*2}}+g \tag{3.40}$$

其中，$A^{*}=A$，$B^{*}=B\sqrt{C}$。此外，轉換後計算元素東邊、西邊、南邊與北邊之格網間距，分別為 $h_E^{*}=h_E$ 、 $h_W^{*}=h_W$ 、 $h_S^{*}=h_S/\sqrt{C}$ 與 $h_N^{*}=h_N/\sqrt{C}$，也就是東邊與西邊之格網間距不變，而北邊與南邊之格網間距則需除以 $\sqrt{C}$。因此，只要在上述九點與五點有限解析法中，將 B 以 $B\sqrt{C}$ 代替以及 h_N 、 h_S 分別以 $h_N/\sqrt{C}$ 、 $h_S/\sqrt{C}$ 代替，A 、 h_E 與 h_W 保持不變，即可利用慣用之有限解法求解土體靜力平衡方程式。

3.3 有限解析法之測試

上述中，吾人已簡介二維有限解析法，並詳述如何將傳統有限解析法擴充至坡地破壞潛能計算。本節將利用具有解析解之案例，測試有限解析法之特性與正確性。所使用之方程式如下所示

$$\phi_{xx}+C\phi_{yy}+F\phi_{xy}+g=2A\phi_x+2BC\phi_y \tag{3.41}$$

其中，A 、 B 、 C 、 F 為常數。若 g 滿足

$$g=F(-3x^2+\frac{3}{C}y^2)+6Ax^2y-\frac{2A}{C}y^3+2BCx^3-6Bxy^2 \tag{3.42}$$

則式(3.41)之解析解可表示為

$$\phi=x^3y-\frac{xy^3}{C} \tag{3.43}$$

模擬區域分別為梯形與圓形等不規則幾何形狀，如圖 3.5 和圖 3.6 所示。模擬時，水平方向間距為 $\Delta x=0.05$，垂直方向間距為 $\Delta y=0.025$，

邊界條件給定為解析解，如式(3.43)所示。在 $C = 20$ 以及 $F = 5$ 假設下，分別測試 $A = 15$、$B = 5$，$A = 0$、$B = 5$，以及 $A = 0$、$B = 0$ 等三種情況模擬結果之正確性。

當模擬區域為梯形時，$A = 15$、$B = 5$，$A = 0$、$B = 5$，以及 $A = 0$、$B = 0$ 等三種情況，在 x 軸座標為 0.55、1 以及 1.45 上沿 y 軸之模擬結果與解析解，分別如圖 3.7(a)、圖 3.8(a)與圖 3.9(a)所示。此外，當模擬區域為圓形時，$A = 15$、$B = 5$，$A = 0$、$B = 5$，以及 $A = 0$、$B = 0$ 在 x 軸座標為 0.75、1 上沿 y 軸以及 y 軸座標為 0.75、1 與 1.25 上沿 x 軸之模擬結果與解析解，分別如圖 3.7(b)-(c)、圖 3.8(b)-(c)以及圖 3.9(b)-(c)所示。

由圖 3.7 至圖 3.9 吾人可知，模擬結果與解析解極為吻合，顯示有限解析法之正確性。此外吾人亦可知，有限解析法具有準確計算不規則模擬區域之特性。