

目錄

摘要.....	i
Abstract.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
符號說明.....	ix
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 文獻回顧.....	1
1.3 研究方法與步驟.....	2
1.4 章節介紹.....	3
第二章 控制方程式及邊界條件.....	4
2.1 控制方程式.....	4
2.2 渦度流線型態之控制方程式.....	5
2.3 邊界條件及起始條件.....	7
第三章 數值方法.....	10
3.1 分割操作有限解析法.....	10
3.2 混合有限差分法.....	14
3.3 Cubic-Spline 內插特性法.....	16
第四章 穴流之模擬比較.....	19
4.1 離散化方程式.....	19
4.1.1 分割操作有限解析法.....	19
4.1.2 混合有限差分法.....	22

4.1.3 Cubic-Spline 內插特性法.....	23
4.2 結果比較.....	25
第五章 結論與建議.....	28
5.1 結論.....	28
5.2 建議.....	29
參考文獻.....	30
附錄一.....	64
附錄二.....	65
附錄三.....	66
附錄四.....	70



表目錄

表 4.1 渦度中心及其相對應之流線函數值.....	37
----------------------------	----



圖目錄

圖 1.1 研究流程圖.....	38
圖 2.1 穴流簡圖.....	39
圖 3.1 有限解析法均勻網格示意圖.....	39
圖 3.2 分割有限解析法示意圖.....	40
圖 3.3 特性曲線示意圖.....	41
圖 3.4 二維內插示意圖.....	41
圖 4.1 格網點示意圖.....	42
圖 4.2 分割操作有限解析法計算流程圖.....	43
圖 4.3 速度內插示意圖.....	44
圖 4.4 CS 內插特性法計算流程圖.....	45
圖 4.5 雷諾數 100 於格網點 41×41 之渦度與流線穩態比較圖.....	46
圖 4.6 雷諾數 400 於格網點 41×41 之渦度與流線穩態比較圖.....	47
圖 4.7 雷諾數 1000 於格網點 41×41 之渦度與流線穩態比較圖.....	48
圖 4.8(a) 雷諾數 100 於格網點 41×41 之 x 方向速度比較圖.....	49
圖 4.8(b) 雷諾數 100 於格網點 41×41 之 y 方向速度比較圖.....	49
圖 4.9(a) 雷諾數 400 於格網點 41×41 之 x 方向速度比較圖.....	50
圖 4.9(b) 雷諾數 400 於格網點 41×41 之 y 方向速度比較圖.....	50
圖 4.10(a) 雷諾數 1000 於格網點 41×41 之 x 方向速度比較圖.....	51
圖 4.10(b) 雷諾數 1000 於格網點 41×41 之 y 方向速度比較圖.....	51
圖 4.11(a) 分割操作有限解析法雷諾數 100 格網點 41×41 流線圖.....	52
圖 4.11(b) 分割操作有限解析法雷諾數 100 格網點 41×41 渦度圖.....	53
圖 4.12(a) 混合有限差分法雷諾數 100 格網點 41×41 流線圖.....	54

圖 4.12(b) 混合有限差分法雷諾數 100 格網點 41×41 渦度圖.....	55
圖 4.13(a) CS 內插特性法雷諾數 100 格網點 41×41 流線圖.....	56
圖 4.13(b) CS 內插特性法雷諾數 100 格網點 41×41 流線圖.....	57
圖 4.14(a) 混合有限差分法雷諾數 1000 格網點 41×41 流線圖.....	58
圖 4.14(b) 混合有限差分法雷諾數 1000 格網點 41×41 渦度圖.....	59
圖 4.15(a) CS 內插特性法雷諾數 1000 格網點 41×41 流線圖.....	60
圖 4.15(b) CS 內插特性法雷諾數 1000 格網點 41×41 渦度圖.....	61
圖 4.16 雷諾數 1000 格網點 61×61 之渦度與流線穩態比較圖.....	62
圖 4.17(a) 雷諾數 1000 於相同格網點 61×61 之 x 方向速度比較圖.....	63
圖 4.17(b) 雷諾數 1000 於相同格網點 61×61 之 y 方向速度比較圖.....	63



符號說明

A, B : 常數

A_x, B_x : 操作因子

$a_s, b_s, c_s, a_w, b_w, a_e$ 與 b_e : 係數

$C_{wc}, C_{ec}, C_{sw}, C_{se}$ 與 C_{sc} : h, τ, A 與 B 之函數

h : 空間間隔

i, j : 網格空間座標

L : 長或寬

n : 網格時間座標

p : 流場壓力

R_e : 雷諾數

t : 時間座標

u : x 方向之速度

U : 速度

x, y : 空間座標

Δt : 時間間隔

Δx : 空間間隔

Φ : 計算中各相關變數

Φ_q : 第 n 各時間間隔中，在 q 點之待求應變數值

Φ_l : 第 $n-1$ 各時間間隔中，在 l 點之應變數值

ε : 空間或時間之函數

τ : 時間間隔

v : y 方向之速度

ρ : 流體密度

ν : 流體之黏滯係數

ψ : 流線函數

Ω : 渦度



第一章 緒論

1.1 研究動機與目的

近年來，隨著電腦科技蓬勃的發展，數值計算已成為科學家與工程師解析問題之重要工具。以往常利用實驗方式解析問題，不但可能花費較長時間，亦造成人力及金錢的浪費。然而，數值模擬卻較為簡單方便。因此，數值計算已廣泛應用於各個研究領域中。

本研究之目的在於，探討已使用在計算水力學中可準確模擬移流擴散(advection-diffusion)現象之三種數值方法，包括分割操作有限解析法(fractional-step finite analytic method)、混合有限差分法(hybrid finite-difference scheme)與 cubic-spline 內插特性法，應用於計算流體動力學(computational fluid dynamics)之比較研究。在計算流體動力學中，穴流(cavity flow)之模擬已經被視為測試數值方法的標準檢驗(standard benchmark)。經由穴流模擬不但可以測試數值方法之準確性與特性外，亦是評估數值方法是否可進一步應用於複雜流場計算之重要步驟。因此，本研究利用穴流渦度、流線及流場之模擬結果，比較分割操作有限解析法、混合有限差分法與 cubic-spline 內插特性法數值方法三種方法之特性，並評估進一步利用於計算流體動力學之可行性。

1.2 文獻回顧

有關穴流之相關研究文獻，大體上可以分為兩種，一種是以流場視覺化技術來觀察流場之實驗研究，另一是以數值方法進行流場之數值模擬。在實驗方面，二維穴流實驗最早是由 Pan and Acrivos (1967) 對 Batchelor (1956)理論適用性之驗證。Koseff and Street (1984)利用染

料追跡的視覺化技術，對三維穴流做了一系列實驗，讓世人對三維穴流有較清楚的架構。

另外數值方面，Burggraf (1966)首次使用渦度-流線函數方程式法 (vorticity-streamfunction formulations method)，其計算之最高雷諾數僅為 400。接著各種數值方法開始被使用來研究各類穴流問題，例如 Bozeman (1973)、Benjamin and Denny (1979)、Agarwal (1981)、Schreiber and Keller (1983)。而 Ghia et al. (1982)之計算亦使用渦度-流線函數方程式法並配合多重網格法(multigrid method)，首次在計算模擬中將雷諾數提高到 10,000。由於精確的計算，明顯發現其主旋流與上下游次旋流的強度及大小，而其模擬結果最常被採用於其他各種數值方法之比較基準，堪稱穴流模擬結果之典範，如 Ramaswamy et al. (1992)、Spotz (1998)、Zhang (2003)等。此外，G. de Vahl Davis (1983)使用二階中央差分法求解渦度流線方程式，提出二維穴流之標準檢驗解。Chen and Chen (1984)首次有限解析法模擬穴流。Botella and Peyret (1998)則直接以原始變數方程式來模擬穴流。在 80 年代後期則有許多數值方法應用至三維穴流，如 Freitas et al. (1985)、Kato et al. (1990)、Babu and Korpela (1994)與 Chiang(1998)等。

1.3 研究方法與步驟

本研究將分割操作有限解析法、混合有限差分法及 cubic-spline 內插特性法等三種數值方法，應用於常見計算流體動力學之穴流模擬。研究中，首先敘述穴流控制方程式以及其渦度流線型態，再分別簡單說明分割操作有限解析法、混合有限差分法、cubic-spline 內插特性法等三種不同的數值方法，接著模擬穴流問題，並繪出其計算結果以及比較分析，最後討論與建議，研究流程如圖 1.1。

1.4 章節介紹

第一章為緒論，首先闡述本研究之動機與目的，並回顧文獻，再提出研究方法與步驟，與介紹本文章節。

第二章為控制方程式及邊界條件，主要介紹穴流之控制方程式及其渦度流線型態，並將之無因次化後加以整理，接著簡單說明邊界條件及起始條件。

第三章為數值方法，闡述分割操作有限解析法、混合有限差分法與三次內插特性法。

第四章為穴流之模擬比較，將控制方程式、起始條件及邊界條件加以離散化，計算穴流問題，分別顯示其模擬結果與比較分析。

第五章為結論與建議，除了對本研究之成果作綜合性之歸納說明外，並對未來研究方向提出建議。



第二章理論基礎

本章簡述求解穴流(cavity flow)流體運動現象所使用之控制方程式、邊界條件，以及初始條件。

2.1 控制方程式

對不可壓縮(imcompress)之流體，其密度均勻且黏滯係數為常數。假設初始時流場為靜止的，下壁面施以一固定速度 U 向右移動，左、右及上壁面皆為固定的，如圖 2.1 所示。連續方程式(continuity equation)和動量方程式(momentum equation)分別為(2.1)式和(2.2)式所示：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.2b)$$

式中 u 與 v 分別為 x 與 y 方向之速度(velocity)、 p 為流場壓力(pressure)、 ρ 為流體密度(density)、 ν 為流體之黏滯係數(viscosity)。

其邊界條件可表示為

當 $x=0$ 之左壁面時

$$u(0, y, t) = 0 \quad (2.3)$$

$$v(0, y, t) = 0 \quad (2.4)$$

當 $x=1$ 之右壁面時

$$u(1, y, t) = 0 \quad (2.5)$$

$$v(1, y, t) = 0 \quad (2.6)$$

當 $y=0$ 時下壁面時

$$u(x, 0, t) = U \quad (2.7)$$

$$v(x, 0, t) = 0 \quad (2.8)$$

當 $y=1$ 時上壁面時

$$u(x, 1, t) = 0 \quad (2.9)$$

$$v(x, 1, t) = 0 \quad (2.10)$$

而起始條件可假設為

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (2.11)$$

$$v(x, y, 0) = 0 \quad (2.12)$$

若直接以原始變數，即 u 、 v 與 p ，求解(2.1)式與(2.2)式，可能因為連續方程式中沒有出現壓力變數，造成數值計算困難。將(2.1)式與(2.2)式改寫為渦度流線型態之方程式，即可避免上述困難。

2.2 渦度流線型態之控制方程式

(2.1) 式與 (2.2) 式可改寫為流線函數方程式 (stream function equation) 與渦度傳輸方程式 (vorticity transport equation) 所組成之聯立方程式，如下所示：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.14)$$

式中， ψ 為流線函數(stream function)， Ω 為渦度(vorticity)，可表示為

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.15)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.17)$$

定義無因次參數項如下：

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (2.18)$$

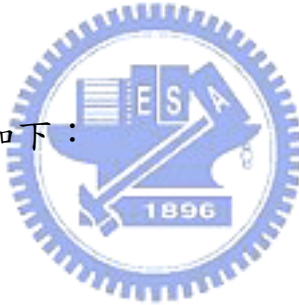
$$y^* = \frac{y}{L} \quad (2.19)$$

$$t^* = \frac{tU}{L} \quad (2.20)$$

$$u^* = \frac{u}{U} \quad (2.21)$$

$$v^* = \frac{v}{U} \quad (2.22)$$

$$\Omega^* = \frac{\Omega L}{U} \quad (2.23)$$



$$\psi^* = \frac{\psi}{UL} \quad (2.24)$$

其中，上標*為無因次變數， U 為速度， L 可表示為長或寬。

利用上述無因次參數，將(2.13)式無因次化後得到

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = -\Omega^* \quad (2.25)$$

同理將(2.14)式無因次化後可得

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial y^*} = \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.26)$$

式中， R_e 為雷諾數(Reynolds number)，可表示為 $R_e = UL/\nu$ 。為了簡化方程式的表示，在之後的章節中，將不在於變數右上角加上星號，雖然沒有星號加註於右上角，但同樣皆屬於無因次化後的方程式。

2.3 邊界條件及起始條件

根據模擬概述，除了方型槽下壁面以速度 U 向右移動之外，其餘壁面皆保持靜止，在滿足無滑動條件(no-slip condition)之情況下，渦度流線型態之邊界條件可假設為

當 $x=0$ 之左壁面時

$$\psi(0, y, t) = 0 \quad (2.27)$$

$$\Omega(0, y, t) = -\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x=0} \quad (2.28)$$

$$v(0, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.29)$$

當 $x=1$ 之右壁面時

$$\psi(1, y, t) = 0 \quad (2.30)$$

$$\Omega(1, y, t) = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=1} \quad (2.31)$$

$$v(1, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.32)$$

當 $y=0$ 時下壁面時

$$\psi(x, 0, t) = 0 \quad (2.33)$$

$$\Omega(x, 0, t) = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \quad (2.34)$$

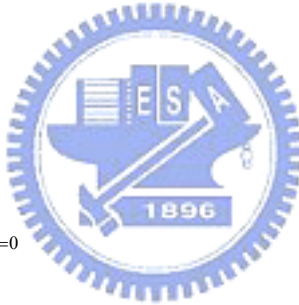
$$u(x, 0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 1 \quad (2.35)$$

當 $y=1$ 時上壁面時

$$\psi(x, 1, t) = 0 \quad (2.36)$$

$$\Omega(x, 1, t) = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{y=1} \quad (2.37)$$

$$u(x, 1, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0 \quad (2.38)$$



而渦度流線型態之起始條件可假設為

$$\psi(x, y, 0) = 0 \quad (2.39)$$

$$\Omega(x, y, 0) = 0 \quad (2.40)$$



第三章 數值方法簡介

由第二章可知，研究中穴流計算所使用之控制方程式，如(2.25)式與(2.26)式所示。其中，(2.25)式，即流線方程式，屬於帕松方程式(poission equation)之型態，可以利用中央差分法求解。(2.26)式為渦度方程式，屬於對流擴散方程式(convection-diffusion equation)型態，研究中分別使用分割有限解析法、混合有限差分法與 CS 內插特性法模擬。為方便起見，利用二維對流擴散方程式簡介數值方法，如下所示：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

其中， $\Phi = \Omega$ ， u, v 為速度， x, y 為空間座標， t 為時間座標， $\varepsilon = 1/R_e$ 。

3.1 分割操作有限解析法

有限解析法(finite analytic method)是由佛羅理達大學陳景仁教授(C. J. Chen)於 1980 年提出，已應用於計算流體力學多年，如 Chen et al. (1981)、Chen and Chen (1984)、Chen et al. (1987)、Aksoy and Chen (1992)、Chen et al. (1995)。不同於有限差分法(finite difference method)使用泰勒級數展開(Taylor series expansion)原理，以及有限元素法(finite element method)使用內插函數(interpolation function)與權重函數(weighting function)，有限解析法利用局部解析解(local analytic solution)離散控制方程式。有限解析法因擁有局部解析解之特性，所以為無條件穩定(unconditionally stable)之數值方法，並具有自動上風法(automatically upwinding)之功能。

在一維有限解析法中，局部解析解之獲得有兩種方式，一是在局部計算元素(local computational element)上將控制方程線性化後，給予

適當之起始條件(initial condition)與邊界條件(boundary condition)，利用分離變數法(method of separation variable)，求得局部解析解；另一種是利用有限差分法，先將時間微分項(time derivative)差分後視為源流(source term)，再求得局部解析解。上述兩種不同獲得局部解析解之方法，其主要之差別在於前者是時間及空間的解析解，而後者僅是空間的解析解。後者又稱為混合有限解析法(hybrid finite analytic method)。然而，對於二維以及三維問題，由於難以同時獲得時間及空間上的解析解，所以都利用混合有限解析法。

在混合有限解析法中，因為時間微分項使用差分近似，容易產生數值擴散(numerical diffusion)。Tsai and Chen (1995)提出時間權重因子(time-weighting factor)，以改善時間微分項之差分。使用時間權重因子可以有效減少數值擴散，但缺點在於預測修正(predictor-corrector)計算過程中會增加數值計算時間，尤其是對三維問題。另一種改善時間差分產生數值擴散之方法，乃是由 Lu et al. (1990)、Lu and Shi (1990)、Lu and Chen (1992)、Yang and Li (1992)等所提出之交替混合有限解析法(alternating direction scheme of hybrid finite analytic method)，利用一維混合有限解析法，結合交替隱式法(alternating direction implicit method)(Peaceman and Rachford, 1995)，以增加時間項的精度。此外，Li et al. (1992)使用拉普拉斯轉換(Laplace transform)，並應用於一維傳輸問題有不錯結果，然而由於拉普拉斯轉換僅能應用於線性且可轉換邊界條件(transposable boundary condition)之間距，以及反拉普拉斯轉換(Inverse Laplace transform)計算可能造成困難，因此較不適用於二維及三維問題等實際問題。

分割操作有限解析法(fractional-step finite analytic method)(Tsai et al., 2005)則是利用具有時間及空間皆為解析解的一維有限解析法，配

合分割法(fractional steps)(Yanenko, 1971、Tsai et al., 2001、Tsai et al., 2002)，以改善混合有限解析法處理時間近似問題。以下說明分割操作有限解析法。

一維移流擴散方程式如下：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

式中， u 與 ε 可能為空間或時間之函數。

在局部計算元素 $2h \times \tau$ 區域中，如圖 3.1 所示，其中 h 為空間間隔， τ 為時間間隔，可將(3.2)式線性化為

$$2A \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

式中， $A = u_i^n / 2 \varepsilon_i^n$ ， $B = 1 / \varepsilon_i^n$ 。

假設起始條件與邊界條件分別為

$$\Phi(x, 0) = a_s (e^{2Ax} - 1) + b_s x + c_s \quad (3.4)$$

$$\Phi(-h, t) = a_w + b_w t \quad (3.5)$$

$$\Phi(h, t) = a_e + b_e t \quad (3.6)$$

其中根據起始條件及邊界條件，求解(3.3)式在計算元素上之解析解。(3.4)式至(3.6)式中的係數 a_s 、 b_s 、 c_s 、 a_w 、 b_w 、 a_e 與 b_e 可以利用元素邊界點之值求得，見附錄一。

以 $(x=0, y=0)$ 代入所求得解析解函數中，即可將計算元素點 i 之 Φ_i 與其相鄰五點之代數式表示為，如圖 3.1：

$$\Phi_i^n = C_{WC} \Phi_{i-1}^n + C_{EC} \Phi_{i+1}^n + C_{SW} \Phi_{i-1}^{n-1} + C_{SE} \Phi_{i+1}^{n-1} + C_{SC} \Phi_i^{n-1} \quad (3.7)$$

式中，係數 C_{WC} 、 C_{EC} 、 C_{SW} 、 C_{SE} 與 C_{SC} 為 h 、 τ 、 A 與 B 之函數(Chen and Chen, 1982)，見附錄二。

(3.7)式可進一步改寫為

$$A_x \Phi_i^n = B_x \Phi_i^{n-1} \quad (3.8)$$

其中

$$A_x \Phi_i = -C_{WC} \Phi_{i-1} + \Phi_i - C_{EC} \Phi_{i+1} \quad (3.9)$$

$$B_x \Phi_i = C_{SW} \Phi_{i-1} + C_{SC} \Phi_i + C_{SE} \Phi_{i+1} \quad (3.10)$$

式中， A_x, B_x 為操作因子(operator)。

使用分割法將二維方程式即(3.1)式，沿座標方向分解成兩個一維方程式，表示如下：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

同(3.8)式，將(3.11)式與(3.12)式分別利用一維有限解析法，沿著 x 方向與 y 方向如圖 3.2，則二維移流擴散方程式可表示為

$$A_x \Phi_{i,j}^* = B_x \Phi_{i,j}^{n-1} \quad (3.13)$$

$$A_y \Phi_{i,j}^n = B_y \Phi_{i,j}^* \quad (3.14)$$

其中

$$\begin{aligned}
A_x \Phi_{i,j} &= -C_{WC} \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j} - C_{EC} \Phi_{i+1,j} \\
B_x \Phi_{i,j} &= C_{SW} \Phi_{i-1,j} + C_{SC} \Phi_i + C_{SE} \Phi_{i+1,j}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

與

$$\begin{aligned}
A_y \Phi_{i,j} &= -C_{WC} \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j} - C_{EC} \Phi_{i,j+1} \\
B_y \Phi_{i,j} &= C_{SW} \Phi_{i,j-1} + C_{SC} \Phi_{i,j} + C_{SE} \Phi_{i,j+1}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

式中，上標*代表中間值，(3.15)式中的係數 C_{WC} 、 C_{EC} 、 C_{SW} 、 C_{SE} 與 C_{SC} ，可同(3.7)式中 $h = x_{i+1} - x_i$ 、 $A = u_{i,j}^n / 2\varepsilon_{i,j}^n$ 與 $B = 1/\varepsilon_{i,j}^n$ 求得。(3.16)式中的係數 C_{WC} 、 C_{EC} 、 C_{SW} 、 C_{SE} 與 C_{SC} 亦同(3.7)式中 $h = y_{i+1} - y_i$ 、 $A = v_{i,j}^n / 2\varepsilon_{i,j}^n$ 與 $B = 1/\varepsilon_{i,j}^n$ 求得。

3.2 混合有限差分法簡介

Crank-Nicholson 二階中央差分法與 Crnak-Nicholson Galerkin 有限元素法是兩種非常簡單可利用於計算移流擴散方程式之數值方法。雖然兩種數值方法都非常簡單但容易產生數值振盪，數值振盪之主因在於修正式(modified equation)之第三階微分項(third-order derivative term)，若是修正式所截取的領導誤差項(leading error term)為奇數階則產生震盪的數值結果，反之偶數階則產生消散的數值結果。若誤差項得以消除，則可得到更好的數值結果。

Tsai et al. (2002) 提出將 Crank-Nicholson 二階中央差分法與 Crnak-Nicholson Galerkin 有限元素法 經由必要條件作線性結合進而消除數值誤差之方法，稱之混合有限差分法。以下說明混合有限差分法。

利用 Crank-Nicholson 二階中央差分法將(3.2)式離散化得

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{c}{4}-\frac{s}{2}\right)\Phi_{i-1}^n + (1+s)\Phi_i^n + \left(\frac{c}{4}+\frac{s}{2}\right)\Phi_{i+1}^n - \left(\frac{c}{4}+\frac{s}{2}\right)\Phi_{i-1}^{n-1} - (1-s)\Phi_i^{n-1} \\ & - \left(-\frac{c}{4}+\frac{s}{2}\right)\Phi_{i+1}^{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

式中， s 可表示為 $s = \varepsilon \tau / h^2$ ， c 可表示為 $c = u \tau / h$ 。

(3.17)式之修正式為

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + u \frac{h^2}{12} (2 + c^2) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + O[h^2] = 0 \quad (3.18)$$

利用 Crnak-Nicholson Galerkin 有限元素法將(3.2)式離散化得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}-\frac{c}{4}-\frac{s}{2}\right)\Phi_{i-1}^n + \left(\frac{2}{3}+s\right)\Phi_i^n + \left(\frac{1}{6}+\frac{c}{4}-\frac{s}{2}\right)\Phi_{i+1}^n - \left(\frac{1}{6}+\frac{c}{4}+\frac{s}{2}\right)\Phi_{i-1}^{n-1} \\ & - \left(\frac{2}{3}-s\right)\Phi_i^{n-1} - \left(\frac{1}{6}-\frac{c}{4}+\frac{s}{2}\right)\Phi_{i+1}^{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.19)式之修正式為

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + u \frac{h^2}{12} c^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + O[h^2] = 0 \quad (3.20)$$

利用線性結合，消去第三階微分項，將(3.20)式 $\times (2 + c^2)$ 減(3.18)

式 $\times c^2$ 後，得到混合有限差分法之差分式如下：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}+\frac{c^2}{12}-\frac{c}{4}-\frac{s}{2}\right)\Phi_{i-1}^n + \left(\frac{2}{3}-\frac{c^2}{6}+s\right)\Phi_i^n + \left(\frac{1}{6}+\frac{c^2}{12}+\frac{c}{4}-\frac{s}{2}\right)\Phi_{i+1}^n \\ & - \left(\frac{1}{6}+\frac{c^2}{12}+\frac{c}{4}+\frac{s}{2}\right)\Phi_{i-1}^{n-1} - \left(\frac{2}{3}-\frac{c^2}{6}-s\right)\Phi_i^{n-1} \\ & - \left(\frac{1}{6}+\frac{c^2}{12}-\frac{c}{4}+\frac{s}{2}\right)\Phi_{i+1}^{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

(3.21)式之修正式為

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + u \frac{h^2}{12} (1 - 2c^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + O(h^4) = 0 \quad (3.22)$$

(3.22)式與(3.18)式及(3.20)式的差異在於(3.22)式已經消除第三項微分誤差項，減少了數值振盪的主要誤差。除外，若庫倫數為零，則(3.22)式同於(3.18)式，但(3.22)式的四階精度仍比(3.18)式的二階精度來的準確。吾人在此強調(3.17)式與(3.19)式之線性結合，須遵守其必要條件，詳細內容參見附錄三。

混合有限差分法同樣使用分割法(Yanenko,1971)輕易地將一維擴充至二維與三維問題。二維傳輸方程式即(3.1)之求解，使用分割法沿座標方向分解成兩個一維方程式，參見 3.1 節，再分別使用混合有限差分法即(3.21)式求解。

3.3 Cubic-spline 內插特性法

Massau (1889)最早根據特性法以圖解方式計算時間變量流問題。此後，特性法已被廣泛地應用於各種問題之求解，譬如 Vardy (1977)以及 Wiggert and Sundquist (1977)應用於管內變量流之計算，Lai (1986,1988,1994)應用特性法於河川變量流之計算，Yang et. al. (1992)應用於明渠流突變流之計算。

特性法中，內插方式嚴重影響計算之精度。Dobbins 和 Bella (1968)指出利用線性內插法，會產生嚴重之數值誤差。為了提高特性法之精度，Holly and Preissmann (1977)利用特性法配合赫米特三次(Hermite cubic)內插，提出二點四階之三次內插特性法，並應用於一維及二維移流擴散方程式，獲得不錯之計算結果。Yang 和 Wang(1988)改良 HP 特性法，克服庫倫數(Courant number)需小於 1 之限制。Yang et. al.(1991a, 1991b)及 Yang and Chiu (1993)利用時間延後(reachback)技巧，提高 HP 特性法之精度，並將其應用於一維、二維移流擴散方程

式以及明渠變量流之計算。

由於 HP 特性法需要額外求解空間或時間之微分方程式，造成計算量增加。Schohl and Holly (1991)則將特性法配合 cubic-spline 內插，簡稱 CS 內插特性法，應用於一維移流方程式，其計算結果之精度與 HP 特性法相近。Karpik and Crockett (1997)、cubic-spline 內插法(Gerald 和 Wheatley, 1999)、Stefanovic and Stefan (2001)將 CS 特性法，進一步應用於二維移流擴散方程式之計算。Tsai et al. (2004)進一步將 CS 特性法明渠流之計算。以下說明 CS 內插特性法。

將(3.1)式改寫為全微分形式如下：

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.23a)$$

沿著特性線

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{和} \quad \frac{dy}{dt} = v \quad (3.23b)$$



式中， $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ 表示物質導數(material derivative)。

分別對(3.23a)式與(3.23b)式由座標點 l 積分至座標點 q (如圖 3.3 所示)得

$$\int_{\Phi_l}^{\Phi_q} d\Phi = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dt \quad (3.24a)$$

沿著特性線

$$x_q - x_l = \int_{t_{n-1}}^{t_n} u dt \quad \text{及} \quad y_q - y_l = \int_{t_{n-1}}^{t_n} v dt \quad (3.24b)$$

利用梯形法則，(3.24a)式與(3.24b)式可變為

$$\Phi_q - \Phi_l = \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_q^{t_n} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_l^{t_{n-1}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_q^{t_n} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_l^{t_{n-1}} \right] \quad (3.25a)$$

與

$$x_q - x_l = (u_q + u_l) \frac{\Delta t}{2} \quad \text{及} \quad y_q - y_l = (v_q + v_l) \frac{\Delta t}{2} \quad (3.25b)$$

式中， Φ_q 表示第 n 各時間間隔中，在 q 點之待求應變數值， Φ_l 表示第 $n-1$ 各時間間隔中，在 l 點之應變數值。由(3.25b)式可以得到座標點 (x_l, y_l) ，式中 u_q 值與 v_q 無法預測，分別先以 u_l 與 v_l 替代後，重複疊代至收斂為止。通常座標點 (x_l, y_l) 並不會恰好落在網格點上，因此 Φ_l 值時可使用 CS 內插法求得。而等式右邊則利用中央差分近似(central difference approximation)求解。

在求解 Φ_l 的過程中，如圖 3.4 所示，先求得 \overline{ab} 線上之 N 個 Φ 值，其座標位置分別在 $(x_l, y_1), (x_l, y_2), \dots, (x_l, y_N)$ 。其中座標點 (x_l, y_1) 之 Φ 值，利用 x 方向上之座標點 $(x_1, y_1), (x_2, y_1), \dots, (x_M, y_1)$ ，使用一維 CS 內插法(見附錄四)求得。同理座標點 $(x_l, y_2), \dots, (x_l, y_N)$ 亦可分別求得。再則，利用 \overline{ab} 線上已求得之 Φ 值，同理沿著 y 方向使用一維 CS 內插法，進而計算出 Φ_l 。同理，若是先利用 y 方向再延著 x 方向內插，換句話說，即先求得 \overline{cd} 線上之 M 個內插 Φ 值，進而計算出 Φ_l ，亦可獲得相同之結果，Ruan (1997)、de Boor (1992)、Press et al.(1986)。

第四章 穴流之模擬比較


本章首先分別說明分割操作有限解析法、混合有限差分法與 CS 內插特性法於控制方程式、起始條件與邊界之離散化，並簡述其求解步驟，最後比較穴流模擬結果。

4.1 離散化方程式

將穴流區域之長與寬分割成 M 與 N 格點區間，如圖 4.1，下壁面向右移動速度為無因次單位 1。 $\Delta x = 1/M$ ， $\Delta y = 1/N$ 分別為 x 與 y 方向之空間間隔， Δt 為時間間隔。

4.1.1 分割操作有限解析法

利用分割有限解析法，如(3.11)式與(3.12)式，可將渦度控制方程式，即(2.26)式，離散化為


$$-C_{WC}\Omega_{i-1,j}^* + \Omega_{i,j}^* - C_{EC}\Omega_{i-1,j}^* = C_{SW}\Omega_{i-1,j}^{n-1} + C_{SE}\Omega_{i+1,j}^{n-1} + C_{SC}\Omega_{i,j}^{n-1} \quad (4.1)$$

$$-C_{WC}\Omega_{i,j-1}^n + \Omega_{i,j}^n - C_{EC}\Omega_{i,j+1}^n = C_{SW}\Omega_{i,j-1}^* + C_{SE}\Omega_{i,j+1}^* + C_{SC}\Omega_{i,j}^* \quad (4.2)$$

(4.1)式中的係數 C_{WC} 、 C_{EC} 、 C_{SW} 、 C_{SE} 與 C_{SC} 為 Δx 、 Δt 、 $A = u_{i,j}^n/2R_e$ 與 $B = 1/R_e$ 之函數，而(4.2)式中的係數 C_{WC} 、 C_{EC} 、 C_{SW} 、 C_{SE} 與 C_{SC} 為 Δy 、 Δt 、 $A = v_{i,j}^n/2R_e$ 與 $B = 1/R_e$ 之函數，見附錄二。

使用中央差分法，可將流線控制方程式，即(2.25)式，離散化為

$$\frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} = -\Omega_{i,j}^n \quad (4.3)$$

同理，使用中央差分法，並利用流線函數，如(2.15)式與(2.16)式，將速度表示為

$$u_{i,j}^n = \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \quad (4.4a)$$

$$v_{i,j}^n = -\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \quad (4.4b)$$

流線之邊界條件可表示為：

當 $i=1$ 之左壁面時

$$\psi(1, j) = 0 \quad (4.5)$$

當 $i=M$ 之右壁面時

$$\psi(M, j) = 0 \quad (4.6)$$



當 $j=1$ 之下壁面時

$$\psi(i, 1) = 0 \quad (4.7)$$

當 $j=N$ 之上壁面時

$$\psi(i, N) = 0 \quad (4.8)$$

而渦度之邊界條件，可利用流線函數以及中央差分得到如下所示：

當 $j=1$ 之下壁面時

使用中央差分法，(2.34)式與(2.35)式可改寫成

$$\Omega(i,1) = -\frac{\psi(1,j) - 2\psi(0,j) + \psi(-1,j)}{(\Delta y)^2} \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\psi(1,j) - \psi(-1,j)}{2\Delta y} = 1 \quad (4.10)$$

將(4.10)式代入(4.9)式得到

$$\Omega(i,1) = \frac{2(\psi(i,1) - \psi(i,2))}{(\Delta y)^2} - \frac{2}{\Delta y} \quad (4.11)$$

當 $i=1$ 之左壁面時，同理，利用(2.28)式與(2.29)式可得到

$$\Omega(1,j) = \frac{2(\psi(1,j) - \psi(2,j))}{(\Delta x)^2} \quad (4.12)$$

當 $i=M$ 之右壁面時，同理，利用(2.31)式與(2.32)式可得到

$$\Omega(M,j) = \frac{2(\psi(M,j) - \psi(M-1,j))}{(\Delta x)^2} \quad (4.13)$$

當 $j=N$ 之上壁面時，同理，利用(2.37)式與(2.38)式可得到

$$\Omega(i,N) = \frac{2(\psi(i,N) - \psi(i,N-1))}{(\Delta y)^2} \quad (4.14)$$

渦度與流線之起始條件如下：

$$\Omega(i,j) = 0 \quad (4.15)$$

$$\psi(i,j) = 0 \quad (4.16)$$

根據起始條件、邊界條件，本問題之求解步驟為：

1. 設定所需參數與起始條件，見(4.15)式與(4.16)式。
2. 利用起始條件與渦度方程式，見(4.1)式與(4.2)式，求解第 n 個時間間格時之渦度 $(\Omega_{i,j}^n)^k$ 。
3. 利用步驟2所求之 $(\Omega_{i,j}^n)^k$ ，代入流線方程式，見(4.3)式，求解第 n 個時間間格時之流線 $(\psi_{i,j}^n)^k$ 。
4. 利用步驟3所求之 $(\psi_{i,j}^n)^k$ ，求解 x 與 y 方向速度 $(u_{i,j}^n)^k$ 與 $(v_{i,j}^n)^k$ ，見(4.4)式。並求解第 n 個時間間格時渦度之邊界條件，見(4.11)式至(4.14)式。
5. 重複步驟2至步驟3，求解 $(\Omega_{i,j}^n)^{k+1}$ 與 $(\psi_{i,j}^n)^{k+1}$ ，判別是否收斂。
6. 若未達收斂條件，則重複步驟2至步驟4，求解 $k=k+1$ 之渦度、流線及速度等，直至收斂為止，如圖4.2。收斂條件則定義為：

$$\left| \frac{(\psi_{i,j}^n)^{k+1} - (\psi_{i,j}^n)^k}{(\psi_{i,j}^n)^k} \right| \leq \sigma \quad \text{和} \quad \left| \frac{(\Omega_{i,j}^n)^{k+1} - (\Omega_{i,j}^n)^k}{(\Omega_{i,j}^n)^k} \right| \leq \sigma \quad (4.17)$$

式中，上標 k 為疊代次數， σ 為誤差容許範圍。

7. 檢查是否達到所需時間，若未達時間，則 $n=n+1$ 重複步驟2至步驟6，達到時間為止。

4.1.2 混合有限差分法

利用混合有限差分法，如(3.21)式，將渦度方程式即(2.26)式離散化為

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} - \frac{c}{4} - \frac{s}{2} \right) \Omega_{i-1,j}^* + \left(\frac{2}{3} - \frac{c^2}{6} + s \right) \Omega_{i,j}^* + \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} + \frac{c}{4} - \frac{s}{2} \right) \Omega_{i+1,j}^* = \\ & - \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} + \frac{c}{4} + \frac{s}{2} \right) \Omega_{i-1,j}^{n-1} - \left(\frac{2}{3} - \frac{c^2}{6} - s \right) \Omega_{i,j}^{n-1} - \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} - \frac{c}{4} + \frac{s}{2} \right) \Omega_{i+1,j}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} - \frac{c}{4} - \frac{s}{2} \right) \Omega_{i,j-1}^n + \left(\frac{2}{3} - \frac{c^2}{6} + s \right) \Omega_{i,j}^n + \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} + \frac{c}{4} - \frac{s}{2} \right) \Omega_{i,j+1}^n = \\ & - \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} + \frac{c}{4} + \frac{s}{2} \right) \Omega_{i,j-1}^* - \left(\frac{2}{3} - \frac{c^2}{6} - s \right) \Omega_{i,j}^* - \left(\frac{1}{6} + \frac{c^2}{12} - \frac{c}{4} + \frac{s}{2} \right) \Omega_{i,j+1}^* \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.18) 式中， s 可表示為 $s = \Delta t / R_e \Delta x^2$ ， c 可表示為 $c = u_{i,j}^n \Delta t / \Delta x$ 。(4.19)

式中， s 可表示為 $s = \Delta t / R_e \Delta y^2$ ， c 可表示為 $c = v_{i,j}^n \Delta t / \Delta y$ 。

除此之外，流線方程式之離散化如(4.3)式，速度之離散化如(4.4)式，邊界及起始條件如(4.5)式至(4.18)式與(4.11)式至(4.16)式。而求解步驟同上述 4.1.1 節，主要差別僅於求解渦度時使用不同之數值方法而已。

4.1.3 CS 內插特性法

使用 CS 內插特性法，如(3.25a)，其中等式右邊之座標點 q 之 $\partial^2 \Omega / \partial x^2$ 與 $\partial^2 \Omega / \partial y^2$ 之離散化，可使用中央差分法，如下所示

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right|_q^{t_n} + \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right|_q^{t_n} = \frac{\Omega_{i-1,j}^n + 2\Omega_{i,j}^n - \Omega_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\Omega_{i,j-1}^n + 2\Omega_{i,j}^n - \Omega_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \quad (4.20)$$

而座標點 l 之 $\partial^2 \Omega / \partial x^2$ 與 $\partial^2 \Omega / \partial y^2$ 之離散化，則利用 $\Omega_{i,j}^{n-1}$ 近似如下

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right|_l^{t_{n-1}} + \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right|_l^{t_{n-1}} = \frac{\Omega_{i-1,j}^{n-1} + 2\Omega_{i,j}^{n-1} - \Omega_{i+1,j}^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{\Omega_{i,j-1}^{n-1} + 2\Omega_{i,j}^{n-1} - \Omega_{i,j+1}^{n-1}}{\Delta y^2} \quad (4.21)$$

將(4.20)式與(4.21)式，代入渦度控制方程式，即(2.26)式，可得到

$$\Omega_{i,j}^n - \Omega_l^{n-1} = \frac{\Delta t}{2R_e \Delta x^2} [(\Omega_{i-1,j}^n - 2\Omega_{i,j}^n + \Omega_{i+1,j}^n) + (\Omega_{i-1,j}^{n-1} - 2\Omega_{i,j}^{n-1} + \Omega_{i+1,j}^{n-1}) + (\Omega_{i,j-1}^n - 2\Omega_{i,j}^n + \Omega_{i,j+1}^n) + (\Omega_{i,j-1}^{n-1} - 2\Omega_{i,j}^{n-1} + \Omega_{i,j+1}^{n-1})] \quad (4.22)$$

式中， Ω_l 表示第 $n-1$ 各時間間隔中，在 l 點之應變數值。由(3.25b)式可以得到座標點 (x_l, y_l) ，式中 u_q 與 v_q 值無法預測，先以 u_l 與 v_l 替代後初始值，利用線性內插求得 u_q 與 v_q ，如圖 4.3，重複疊代至收斂為止。通常座標點 (x_l, y_l) 並不會恰好落在網格點上，因此 Ω_l 值時可使用 CS 內插法求得。

除此之外，流線方程式之離散化如(4.3)式，速度之離散化如(4.4)式，邊界及起始條件如(4.5)式至(4.8)式與(4.11)式至(4.16)式。

根據起始條件、邊界條件，本問題之求解步驟為：

1. 設定所需參數與起始條件，見(4.15)式與(4.16)式。
2. 利用特性線，見(3.24b)式，求得座標點 (x_l, y_l) 。
3. 利用起始條件以及 CS 內插法，見 3.3 節，求解第 n 個時間間格時之渦度移流部分 $(\Omega_l^{n-1})^k$ 。
4. 利用步驟 3 所求之 $(\Omega_l^{n-1})^k$ ，代入渦度方程式，見(4.22)式，求解第 n 個時間間格時之渦度 $(\Omega_{i,j}^n)^k$ 。
5. 利用步驟 4 所求之 $(\Omega_{i,j}^n)^k$ ，代入流線方程式，見(4.3)式，求解第 n 個時間間格時之流線 $(\psi_{i,j}^n)^k$ 。
6. 利用步驟 5 所求之 $(\psi_{i,j}^n)^k$ ，求解 x 與 y 方向速度 $(u_{i,j}^n)^k$ 與 $(v_{i,j}^n)^k$ ，見(4.4)式。並求解第 n 個時間間格時渦度之邊界條件，見(4.11)式至(4.14)式。
7. 重複步驟 2 至步驟 5，求解 $(\Omega_{i,j}^n)^{k+1}$ 與 $(\psi_{i,j}^n)^{k+1}$ ，判別是否收斂。

- 8.若未達收斂條件，則重複步驟 2 至步驟 7，求解 $k = k + 1$ 之渦度、流線及速度等，直至收斂為止，如圖 4.4。收斂條件如(4.17)式。
- 9.檢查是否達到所需時間，若未達時間，則 $n = n + 1$ 重複步驟 2 至步驟 8，達到時間為止。

4.2 結果分析比較

分別將分割操作有限解析法、混合有限差分法與 CS 內插特性法，於雷諾數 100、400 與 1000，並使用相同網格數為 41×41 之情況下，模擬其流線、渦度與速度。模擬時間至穩定狀態(steady state)，其流線及渦度之模擬結果如圖 4.5 至圖 4.7。穴流中心線上之速度分布圖，如圖 2.1，分別為在 $y = 1/2$ 水平中心線上 x 方向之速度 u 分佈圖，與在 $x = 1/2$ 垂直中心線上 y 方向之速度 v 分佈圖，並依據 Ghia et al. (1982)之計算結果作為比較基準，如圖 4.8 至圖 4.9。渦度中心點(vortex center)及其相對應之流線函數值之數值比較，如表 4.1。

由圖 4.5 與圖 4.8 顯示，在雷諾數 100 時，除了分割混合有限解析法稍有差異之外，混合有限差分法與 CS 內插特性法之結果相似，就速度分布圖而言，分割操作有限解析法有明顯的誤差，而混合有限差分法非常準確，CS 三次內插特性法則在 y 方向速度有些許誤差。而表 4.1 更明確看出，混合有限差分法擁有三者之中最為準確的結果。

若將雷諾數提升至 400，如圖 4.6 與圖 4.9 顯示，分割有限解析法已經無法求解，僅有混合有限差分法與 CS 內插特性法之穩態模擬結果，而兩者之流線與渦度情況已經有所不同，混合有限差分法之渦度圖較 CS 內插特性法於在下邊界有輕微之震盪現象，以速度分布圖來看，兩者皆有誤差產生，CS 內插特性法之結果略比混合有限差分法近似。表 4.1 則明確顯示，兩者的誤差皆有所提高，但 CS 內插特

性法較混合有限差分法準確。

最後在雷諾數 1000 時，如圖 4.7 與圖 4.10，可以輕易看出兩者之渦度圖在下邊界附近皆有震盪現象，但混合有限差分法仍比 CS 內插特性法嚴重，且混合有限差分法之流線圖也出現輕微之振盪現象，以速度分布圖來看，兩者產生明顯之誤差。表 4.1 顯示，CS 內插特性法仍比混合有限解析法準確。

另外，依照不同雷諾數之流場現象，可以發現渦旋區域隨著雷諾數增加而變大，速度分布曲度變化隨之更加明顯，而渦度中心亦會隨著雷諾數的增加逐漸往幾何中心($x=1/2, y=1/2$)移動。

綜合以上結果評估，分割操作有限解析法之精度計算比混合有限差分法及 CS 內插特性法差，分割操作有限解析法有明顯數值誤差。另外，於雷諾數低時，混合有限差分法略為準確，而雷諾數高，則反之，CS 內插特性較為準確。混合有限差分法與 CS 內插特性法之模擬結果分析，大體而言，CS 內插特性法優於混合有限差分法。就模擬過程而言，除了分割混合有限解析法，混合有限差分法與 CS 內插特性法都可以於不同雷諾數下達到穩態，故兩者皆為穩定之數值方法，但 CS 內插特性法需要額外求解特性線，因此，混合有限差分法較 CS 內插特性法建構簡單且計算效率高。

另外，分割操作有限解析法、混合有限差分法與 CS 內插特性法，於雷諾數 100 與 1000，並使用相同網格數為 41×41 之情況下，其流線及渦度之模擬結果於不同時間 $T=1、3、5、10、20$ 與 60，如圖 4.11 至圖 4.15。於雷諾數 100 時，如圖 4.11 至 4.12 顯示，除分割操作有限解析法之模擬結果有明顯差異之外，混合有限差分法及 CS 內插特性法在時間 $T=60$ 時與穩態之流線與渦度幾乎無異，表示其短時間內可快速達到穩態。而在高雷諾數時，如圖 4.14 至圖 4.15 看出，混合

有限差分法之模擬結果與 CS 內插特性法有所不同。

若使用混合有限解析法與 CS 內插特性法，於雷諾數 1000，將網格數提高至 61×61 之情況下加以比較，如圖 4.16。圖 4.16 與圖 4.7 比較發現，混合有限差分法與 CS 內插特性法在邊界之震盪現象皆有所減少，但前者之震盪現象仍比後者明顯。而兩者於中心線之速度分布比較圖，如圖 4.17，圖 4.17 與圖 4.15 比較，更可以看出兩者與 Ghia et al. 之數據已經相當接近，故縮小網格間距皆可以提高兩者數值計算之精確度。另外，由表 4.1 顯示，雷諾數 100 時，提高網格數為 61×61 後，CS 內插特性法已經取代混合有限差分法更加接近基準值，另外，在雷諾數 1000 時，兩者與 Ghia et al. 之相對誤差皆減少至 0.08 以下，而 CS 內插特性之準確性仍略為優秀。結果發現，隨著網格數提高後，CS 內插特性法之模擬結果有較好之趨勢，相對於混合有限差分法有更明顯的精度改善，不僅在速度分布方面與混合有限差分法相當，且在渦度中心比較方面仍比混合有限差分法準確。

第五章 結論與建議

5.1 結論

本研究利用穴流模擬，比較分割操作有限解析法、混合有限差分法與 CS 內插特性法之計算結果。模擬發現，除了分割操作有限解析法有不同的模擬結果之外，混合有限差分法與 CS 內插特性法於不同雷諾數 100、400 與 1000 皆可以計算出穩態之流場，具有穩定性。故混合有限差分法與 CS 內插特性法皆為穩定之數值方法，而分割操作有限解析法仍有改善空間，其結果如下所述：

1. 於雷諾數 100 時，分割操作有限解析法產生數值誤差，混合有限差分法之準確性略優於 CS 內插特性法。
2. 於雷諾數 400 時，分割操作有限解析法已無法計算，CS 內插特性法之準確性略優於混合有限差分法。
3. 於雷諾數 1000 時，CS 內插特性法與混合有限差分法有明顯數值誤差，但 CS 內插特性法之準確性略優於混合有限差分法。
4. 對於提高網格數，混合有限差分法與 CS 內插特性法精準度皆可以同時提升，但 CS 內插特性法準確度之提升較優於混合有限差分法。

5.2 建議

本研究僅以穴流之模擬為主要依據，建議將來可以進一步探討之方向，如下以供參考：

1. 在分割操作有限解析法的文獻中，其應用於移流擴散方程式有不錯的結果，但在計算流體力學問題，卻無法得到優越的成果，或許以有限解析法(Chen and Chen, 1984)而言，有非恆定項(unsteady

term)與混亂對流項(perturbed convection term)之偏向(deviation)速度影響。故分割操作有限解析法求解問題時，尚能加以改善。

2. 本研究所使用相同大小之格網點間距，對於邊界需要較細網格點來解析的地方而言，可能無法正確模擬出現象，且邊界容易產生震盪現象。若使用非等間距網格點來模擬流場，對於邊界之細微現象，應該有更進一步之準確度，亦可以減少邊界之震盪現象。

3. 現實流場問題中，不僅是二維空間的現象，若可以將穴流模擬提升至三維，則更能顯示其真實流況，以及應用於更廣泛之狀況模擬。而計算流體力學中，尚有其他不同模擬情況，如繞流、階後流與突擴流等，故還能更進一步比較其優缺之參考研究。



- Akosy, H., and Chen, C. J. (1992) "Numerical solution of Navier-Stokes equations with nonstaggered grid using finite analytic method" Numerical Heat Transfer Part B, 21, 287-306
- Agarwal, R. K. (1981) "A third-order-accurate upwind scheme for Navier-Stokes solution at high Reynolds numbers" AIAA. Pap., 19, 81-0112
- Babu, V., and Korpela, S. A. (1994) "Numerical solution of the incompressible, three-dimensional Navier-Stokes equations" Comput. Fluids, 23, 675-691
- Burggraf, O. R. (1966) "Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows" Journal of Fluid Mech., 24, 113-151
- Bozeman, J. D., and Dalton, C. (1973) "Numerical study of viscous flow in a cavity" Journal of Computational Physics, 12, 348
- Bathchelor, G. K. (1956) "on steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number" Journal of Fluid Mech., 1, 77-90
- Benjamin, A. S., and Denny, V. E. (1979) "On the convergence of numerical solution for 2-D flows in a cavity at large Reynolds number" Journal of Computational Physics, 33, 340-358
- Botella, O., and Peyret, R. (1998) "Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow." Computers and Fluids, 27, 113-151
- Chen, H. C., and Chen, C. J. (1982) The finite analytic method, Inst. of Hydr. Res., Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa
- Chen, H. C., and Chen, C. J. (1984) "Development of finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier-Stokes equation" Journal of Computational Physics, 53, 209-226
- Chen, C. J., Bravo, R. H., Chen, H. C., and Xu, Z. (1995) "Accurate

- discertization of incomperssible three-dimensional Navier-Stokes equation” Journal of Numerical Heat Transfer, 27, 371-392
- Chen, C. J., Naser-Neshat, H., and Ho, K. S. (1981) “Finite analytic numerical heat transfer in two-dimendional cavity flow” Numerical heat Transfer, 4, 179-197
- Chen, C. J., Yu, C. H., and Chandran, K. B. (1987) “Finite analytic solution of unsteady laminar flow past disc-valves” Journal of Engineering Mechanics, 113, 1147-1162
- Chiang, T. P., Sheu, W. H., and Hwang, R. R. (1998) “Effect of Reynolds number on the eddy structure in a lid-driven cavity” International Journal for Numerical Methods in Fluids, 26, 557-579
- Dobbins, W. E., and Bella, D. A. (1968) “Difference modelling of stream pollution” Journal of Saniyary Engineering Division, ASCE, 94, 995-1016
- De Boor, C. (1992) Spline Toolbox: For Use With MATLAB, Math Works, Inc., Natick, Mass.
- Freitas, C. J., Street, R. L., Findikakis, A. N., and Koseff, J. R. (1985) “Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity” International Journal for Numerical Methods in Fluids, 5, 561-575
- Gerald, C. F., and Wheatley, P. O. (1999) “Applied numerical analysis” Addison-Wesley publish company, 6, 238-245
- G. de Vahl Davis (1983) “Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution” International Journal for Numerical Methods in Fluids, 3, 249-264
- Ghia, U., Chia, K. N., and Shin, C. T., (1982) “High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a

- multigrid Method” *Journal of Computational Physics*, 48, 387-411
- Holly, F.M. Jr. and Preissmann, A. (1977), “Accurate calculation of transport in two dimensions” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 103, 1259-1277
- Karpik, S.R., and Crockett, S.R. (1997), “Semi-Lagrangian” algorithm for two-dimensional advection-diffusion equation on curvilinear coordinate meshes” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 123, 389-401
- Kato, Y., Kawai, H., and Tanahashi, T. (1990) “Numerical flow analysis in a cubic cavity by the GSMAC finite-element method” *JSME INT. J. Ser. II*, 33, 649-658
- Koseff, J. R., and Street, R. L., (1984) “On end wall effects in a lid-driven cavity flow” *ASME Journal of Fluids Engineering*, 106, 385-389
- Li, S. G., Ruan, F., and McLaughlin, D. (1992) “A space-time accurate method for solving solute transport problem” *Water Resources Research*, 28, 2297-2306
- Lu, J., Chen, G., and Shi, G. (1990) “Hybrid schemes of finite analytic method for solving Burgers equations” *Journal of Wuhan University of hydraulic and Electric Engineering*, 23, 33-42
- Lu, J., and Shi, G. (1990) “A kind of FAM for solving convective-diffusion equation” *Chinese J. of Computational Physics*, 7, 179-188
- Lu, J., and Chen, G. (1992) “Alternating direction scheme of hybrid finite analytic method for solving convection-diffusion equation” in *Flow Modeling and turbulence Measurements*, edited by Z. Liang, C. J. Chen, and S. Cai, Hemisphere, Washington, 210-218

- Lai, C. (1986) "Numerical modeling of unsteady open channel flow"
Advances in Hydrosience, V.T. Chow and B.C. Yen, eds., 14,
Academic Press, Orlando, Fla., 161-333
- Lai, C. (1988) "Comprehensive method of characteristics models for flow
simulation" Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 114,
1074-1097
- Lai, C. (1994) "Multicomponent-flow analyses by multimode method of
characteristics" Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 120,
378-395
- Massau, J. (1889) "L'intégration graphique, and Appendice au ménoire
sur l'intégration graphique" Assoc. des Ingénieurs sortis des Ecoles
Spéciales de Gand, Belgium, Annales, 12, 185-444
- Pan, F., and Acrivos, A. (1967) "Steady flows in rectangular cavitys"
Journal of Fluid Mech., 28, 643-655
- Peaceman, D. W., and Rachford, H. H. (1955) "The numerical solution of
parabolic and elliptic differnece equation" J. Soc. Ind. Appl. Math., 3,
28-41
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T. (1986)
Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Cambrige
Univ. Press., New York
- Prasad, A. K., and koseff, J. R. (1989) "Reynolds number and end-wall
effects on a lid-driven cavity flow" Physics of Fluids A , 1, 208-218
- Ramaswamy, B., Tue, T. C., and Akin, T. E. (1992) "Finite-element
analysis of unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations"
Numerical Heat Transfer, Part B, 21, 147-182
- Ruan, F., and McLaughlin, D. (1999) "An investigation of

- Eulerian-Lagrangian methods for solving heterogeneous advection-dominated transport problems” *Water Resources Research*, 35, 2359-2373
- Schohl, G. A., and Holly, F.M. Jr. (1991) “Cubic-spline interpolation in Lagrangian advection computation”, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 117, 248-253
- Stefanovic, D. L. and Stefan, H. G. (2001) “Accurate two-dimensional simulation of advection-diffusion-reactive transport”, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 127, 728-737
- Spotz, W. F. (1998) “Accuracy and performance of numerical wall boundary conditions for steady, 2D, incompressible streamfunction vorticity” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28, 737-757
- Schreiber, R., and Keller, H. B. (1983) “Driven cavity flows by efficient numerical techniques” *Journal of Computational Physics*, 49, 310-333
- Tsai, W. H., and Chen, C. J. (1995) “Unsteady finite-analytic method for solute transport in ground-water flow” *Journal of Engineering Mechanics*, 121, 230-243
- Tsai, T. L., Ynag, J.C., and Huang, L. H. (2002) “Hybrid finite-difference scheme for solving the dispersion equation” *Journal of Hydraulic engineering*, 128, 1-78
- Tsai, T. L., Ynag, J.C., and Huang, L. H. (2001) “An accurate integralbased scheme for advection-diffusion equation” *Commun. Numer. Methods Eng.*, 126, 470-479
- Tsai, T. L., Chiang, S. W., and Yang, J. C. (2004) “Characteristics method

- with cubic-spline interpolation for open channel flow computation”
International Journal for Numerical Methods in Fluids, 46, 663-683
- Tsai, T. L., Tseng, C. M. , and Ynag, J.C. (2005) “Fractional steps scheme of finite analytic method for advection-diffusion equation” *Journal of Engineering Mechanics* (in press)
- Vardy, A.E. (1977) “On the use of the method of characteristics for the solution of unsteady flows in networks” *Proceedings, 2nd International Conference on Pressure Surges*, British Hydromech Res. Assoc., Fluid Engineering Cranfield England, H2, 15-30
- Wiggert, D.C., and Sundquist. M.J. (1977) “Fixed-grid characteristics for pipeline transients” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 103, 1403-1416
- Yang, J.C., and Hsu E.L. (1991) “On the use of reachback characteristics method for calculation of dispersion” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12, 225-235
- Yang, J.C., Chen, K.N., and Lee, H.Y. (1991) “Investigation of use of reachback characteristics method for 2d dispersion equation” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 13, 841-855.
- Yang, J.C., Chen, K.N., and Lee, H.Y. (1992) “An accurate computation for rapidly varied flow in open channel” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 14, 361-374
- Yang, J.C., and Chiu, K.P. (1993) “Use of characteristics method with cubic interpolation for unsteady-flow computation” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16, 329-345
- Yaneko, N. N. (1971) *The method of fractional steps: the solution of problems of mathematical physics in several variables*, Springer,

New York

- Yang, Y. S., and Li, W. (1992) “Alternating direction scheme of hybrid finite analytic method for solving Navier-Stokes equation” in Flow Modeling and Turbulence Measurements, edited by Z. Liang, C. J. Chen, and S. Cai, Hemisphere, Washington, 198-203
- Zhang, J. (2003) “Numerical simulation of 2D square driven cavity using fourth-order compact finite difference schemes” Computer and Mathematics with Applications., 45, 43-52



表 4.1 渦度中心及其相對應之流線函數值

		Ghia et al.	FSSFA		HFD		MOC	
Re100	Grid	129×129	41×41	61×61	41×41	61×61	41×41	61×61
	ψ	0.10342	0.14064(0.359)	0.13353(0.291)	0.10316(0.00251)	0.10367(0.00242)	0.10284(0.00561)	0.10347(0.00048)
	$\Omega_{v,c}$	3.16646	3.54383(0.3119)	3.8281(0.209)	3.17639(0.00314)	3.14675(0.00622)	3.24747(0.0256)	3.14812(0.00579)
	(x,y)	(0.62,0.27)	(0.58,0.33)	(0.58,0.3)	(0.65,0.33)	(0.62,0.27)	(0.65,0.28)	(0.62,0.27)
Re400	Grid	129×129	41×41		41×41		41×41	
	ψ	0.11391	-		0.10633(0.0665)		0.10699(0.0607)	
	$\Omega_{v,c}$	2.29469	-		2.22153(0.0319)		2.23584(0.0256)	
	(x,y)	(0.56,0.4)	-		(0.55,0.38)		(0.55,0.38)	
Re1000	Grid	129×129	41×41		61×61		41×41	61×61
	ψ	0.11793	-		0.09551(0.1901)	0.10882(0.0772)	0.09994(0.1525)	0.11043(0.0636)
	$\Omega_{v,c}$	2.04968	-		1.75071(0.1458)	1.93069(0.0581)	1.89919(0.0734)	1.97271(0.0376)
	(x,y)	(0.53,0.44)	-		(0.53,0.43)	(0.53,0.43)	(0.53,0.43)	(0.53,0.43)

附註 1：Ghia et al. (1982)，FSSFA 表示為分割操作有限解析法，HFD 表示為混合有限差分法，MOC 表示為 CS 內插特性法。

附註 2：粗體表示為較接近 Ghia et al. 之值。

附註 3：括弧內表示為與 Ghia et al. 之相對誤差值。

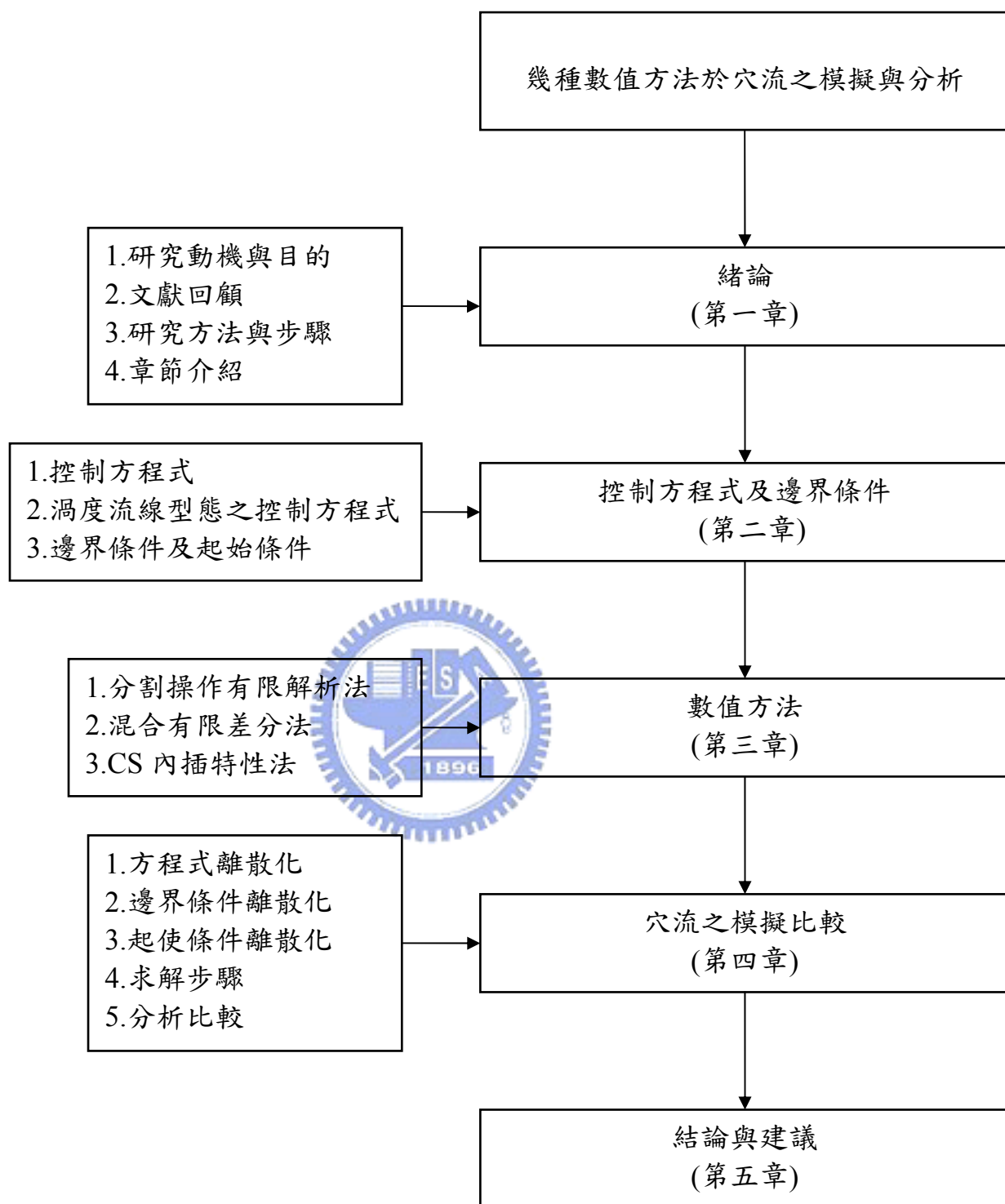


圖 1.1 研究流程圖

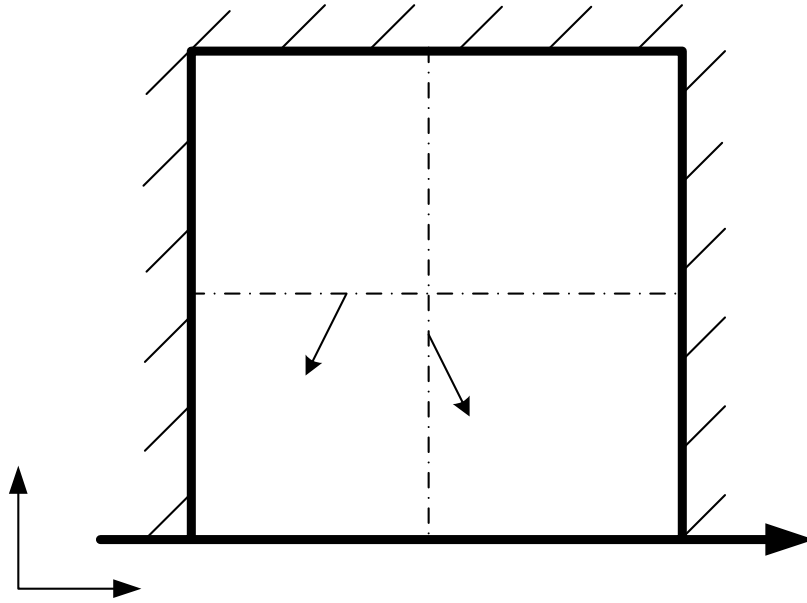


圖 2.1 穴流簡圖

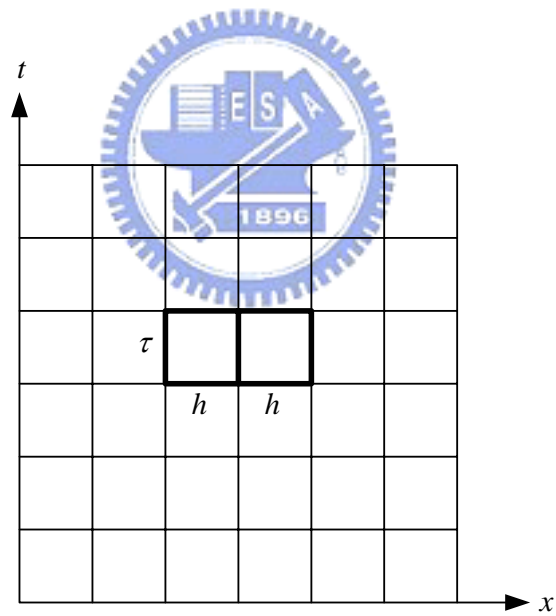
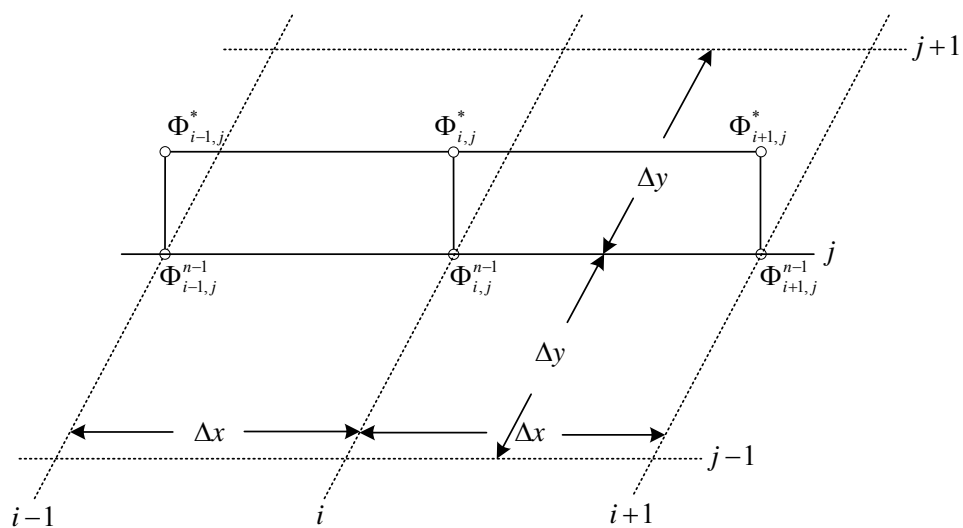
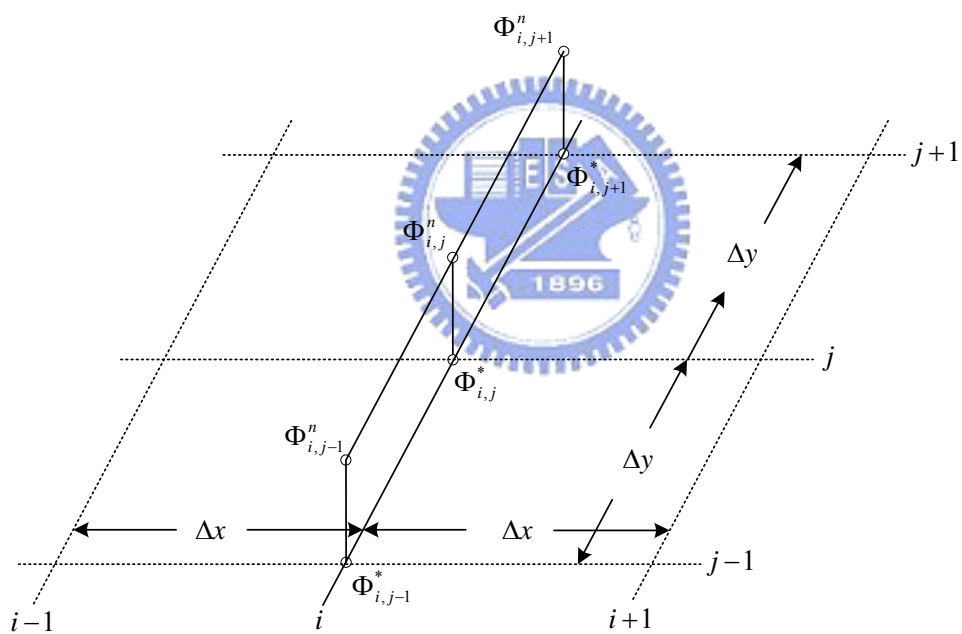


圖 3.1 有限解析法均勻網格示意圖

y



Sweep in x dirextion



Sweep in y dirextion

圖 3.2 分割有限解析法示意圖

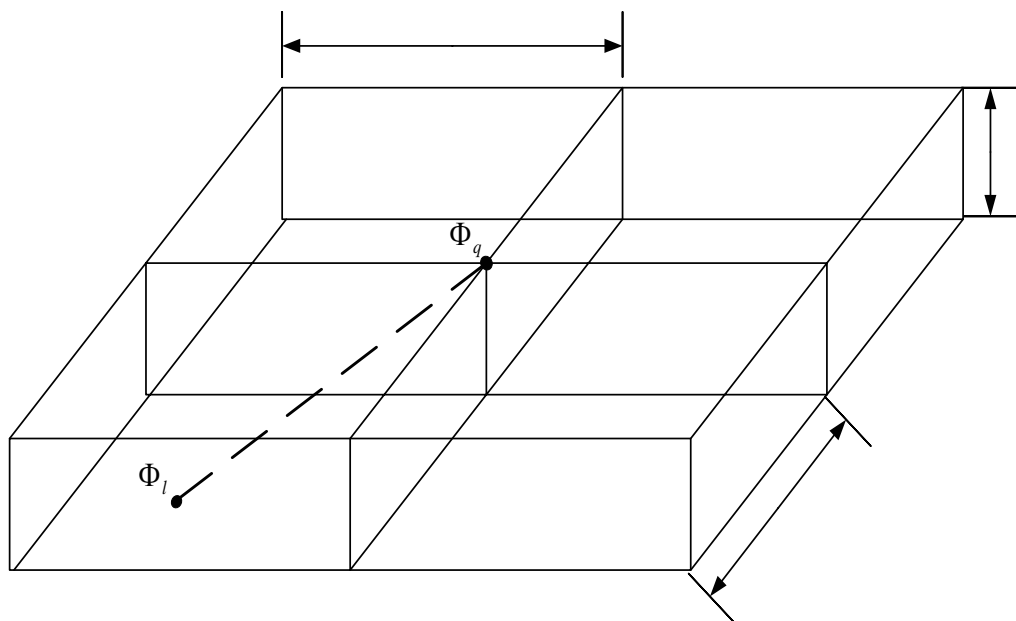


圖 3.3 特性曲線示意圖

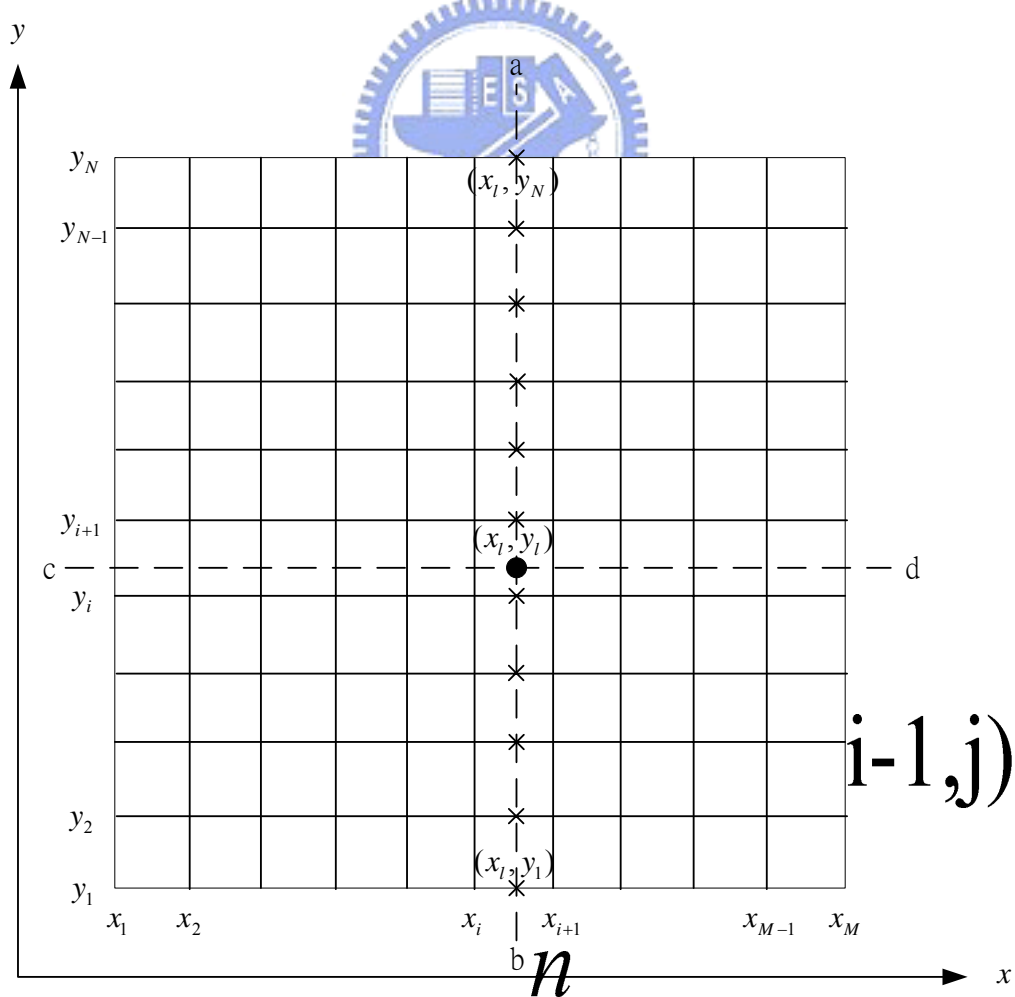


圖 3.4 二維內插示意圖

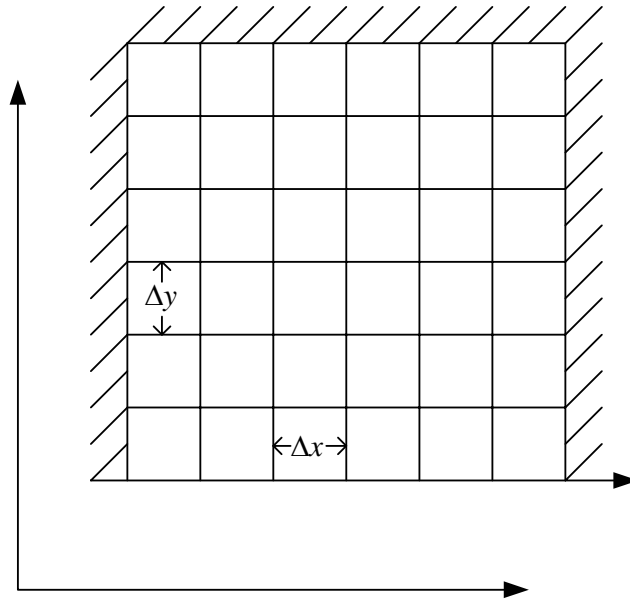


圖 4.1 格網點示意圖



y j=

j

j

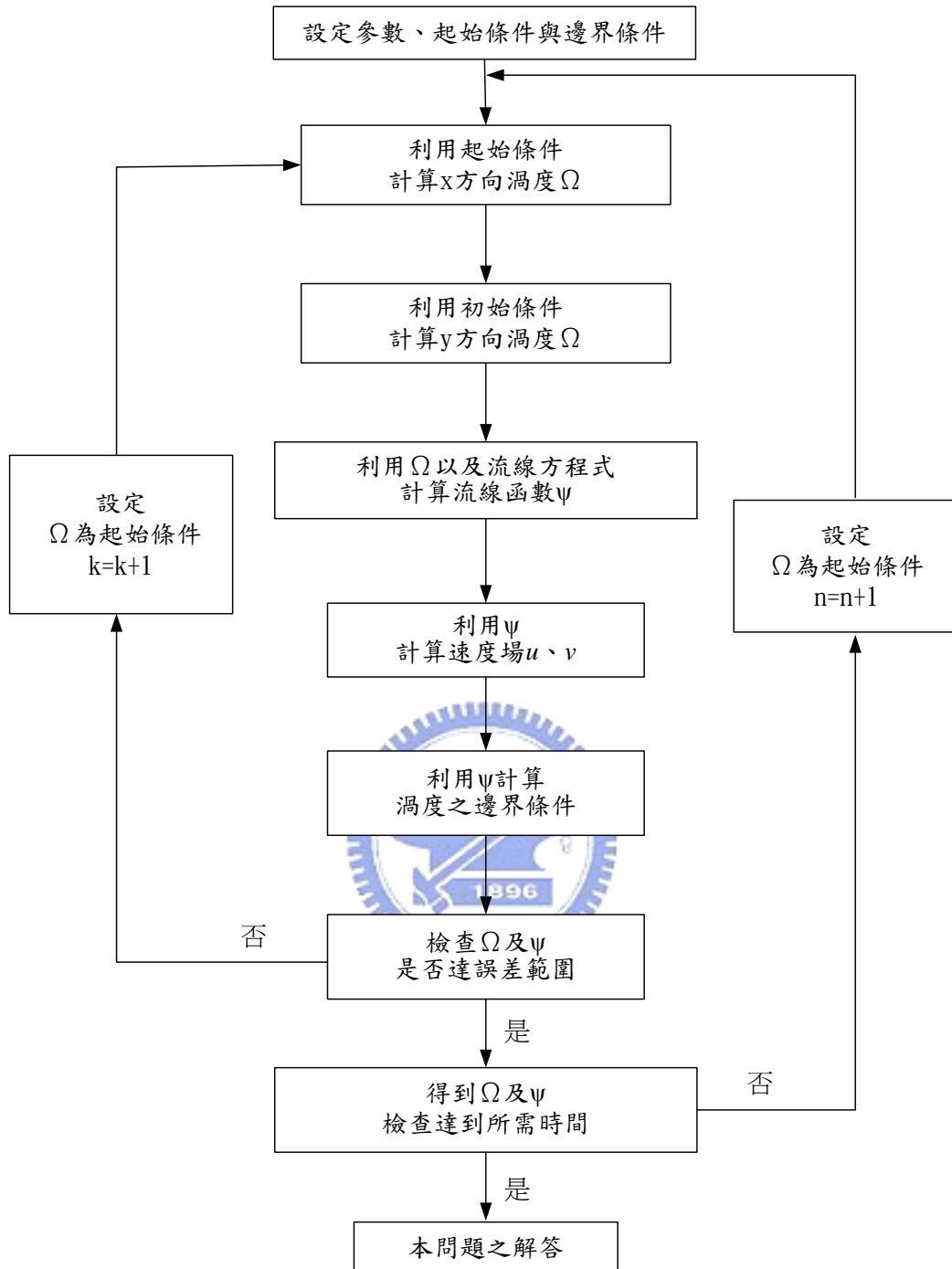


圖 4.2 分割操作有限解析法計算流程圖

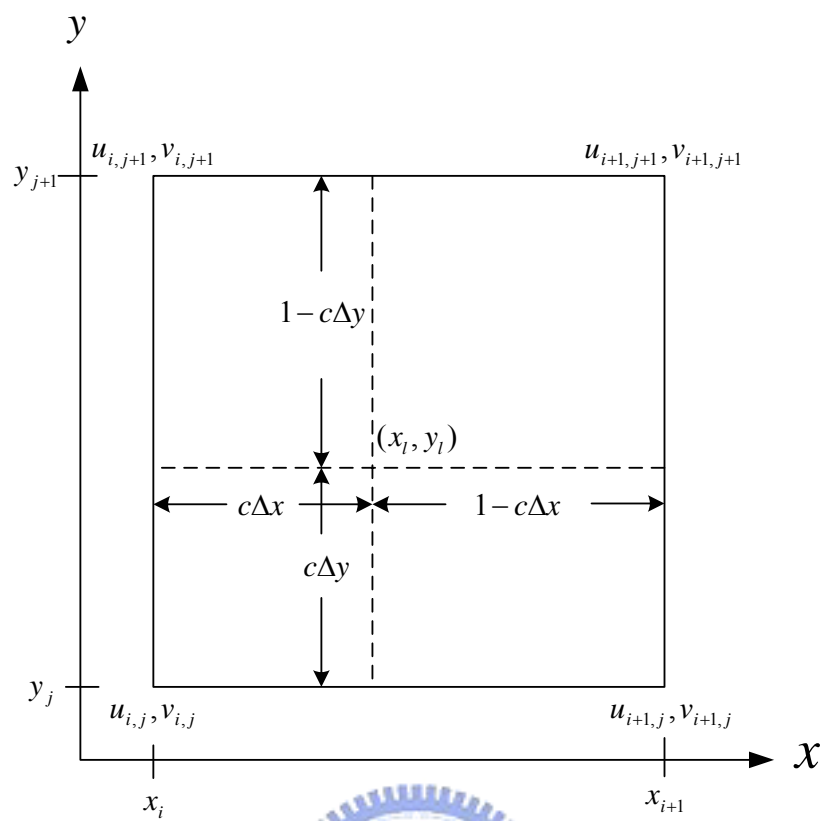


圖 4.3 速度內插示意圖

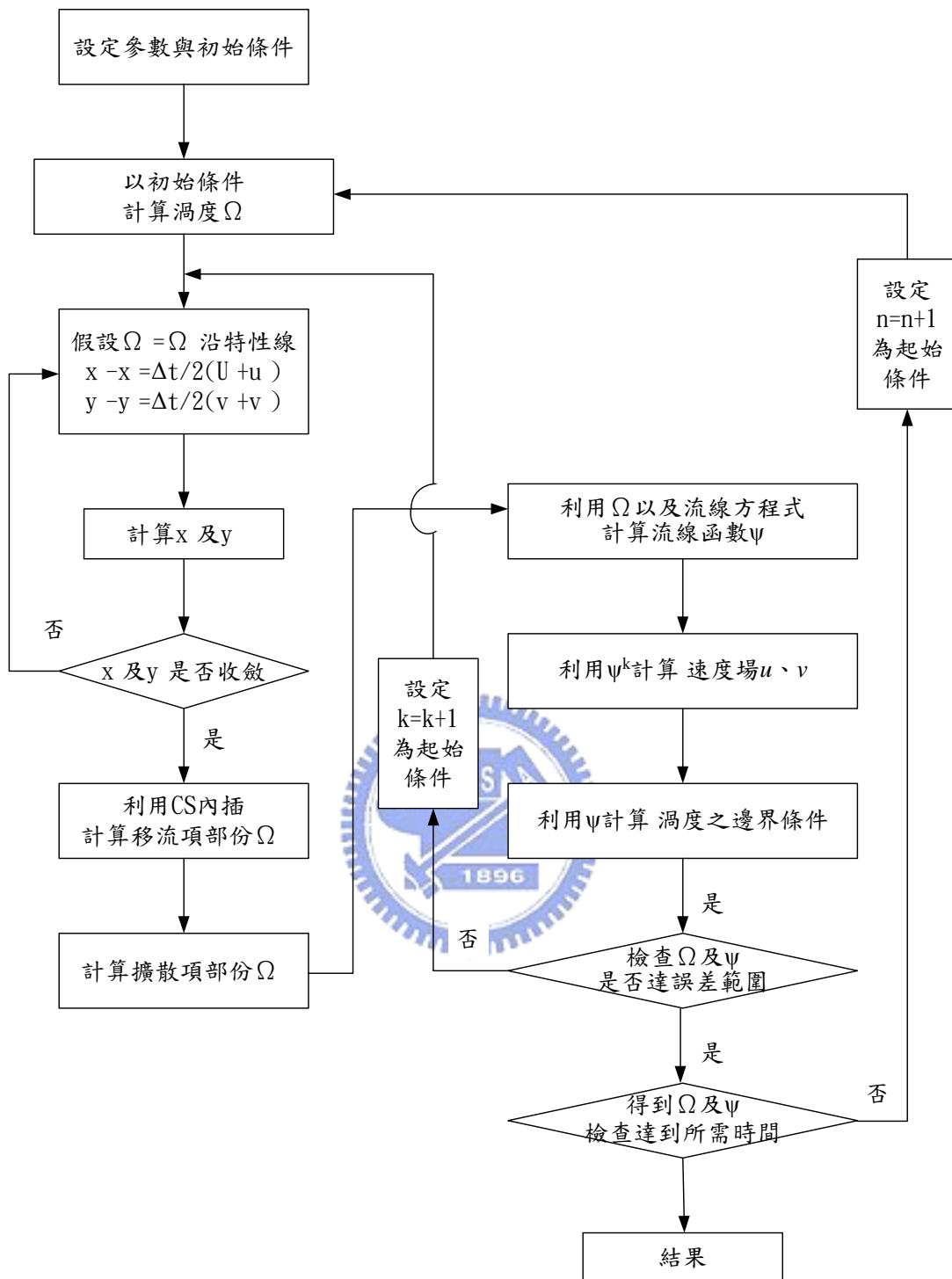
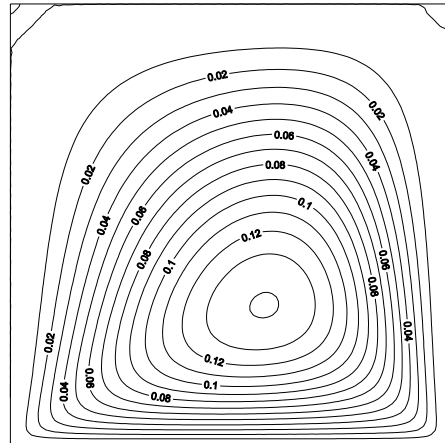
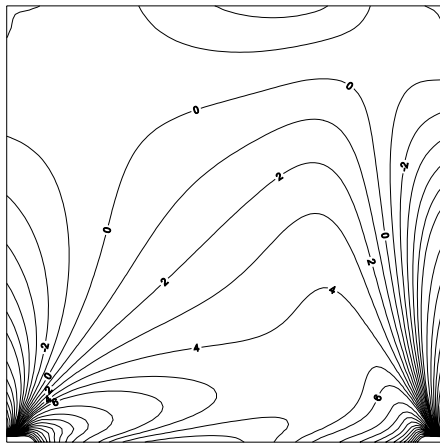
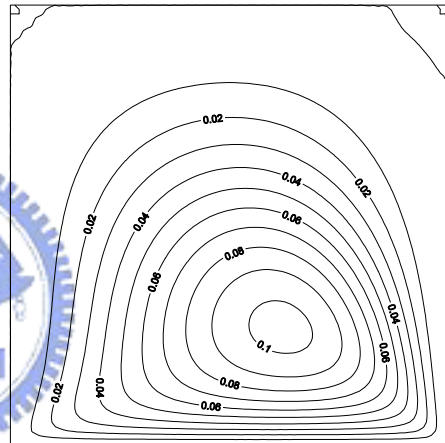
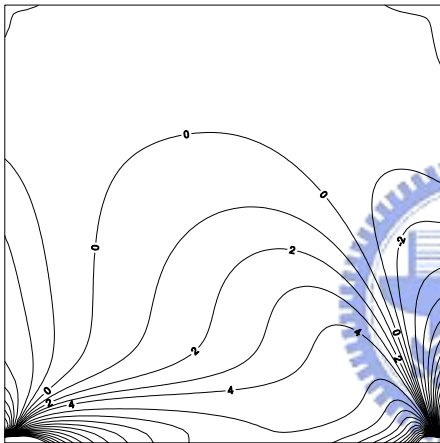


圖 4.4 CS 內插特性法計算流程圖



1.0



y

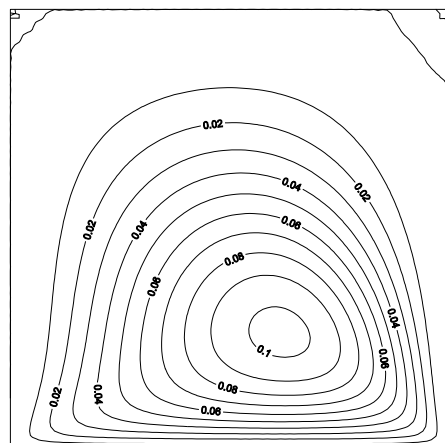
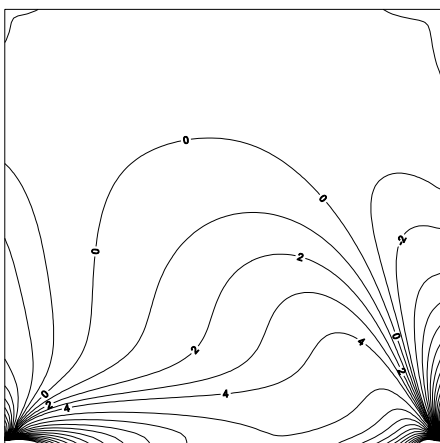


圖 4.5 雷諾數 100 於格網點 41×41 之渦度與流線穩態比較圖
(a、b)分割操作有限解析法(c、d)混合有限差分法(e、f)CS 內插特性法

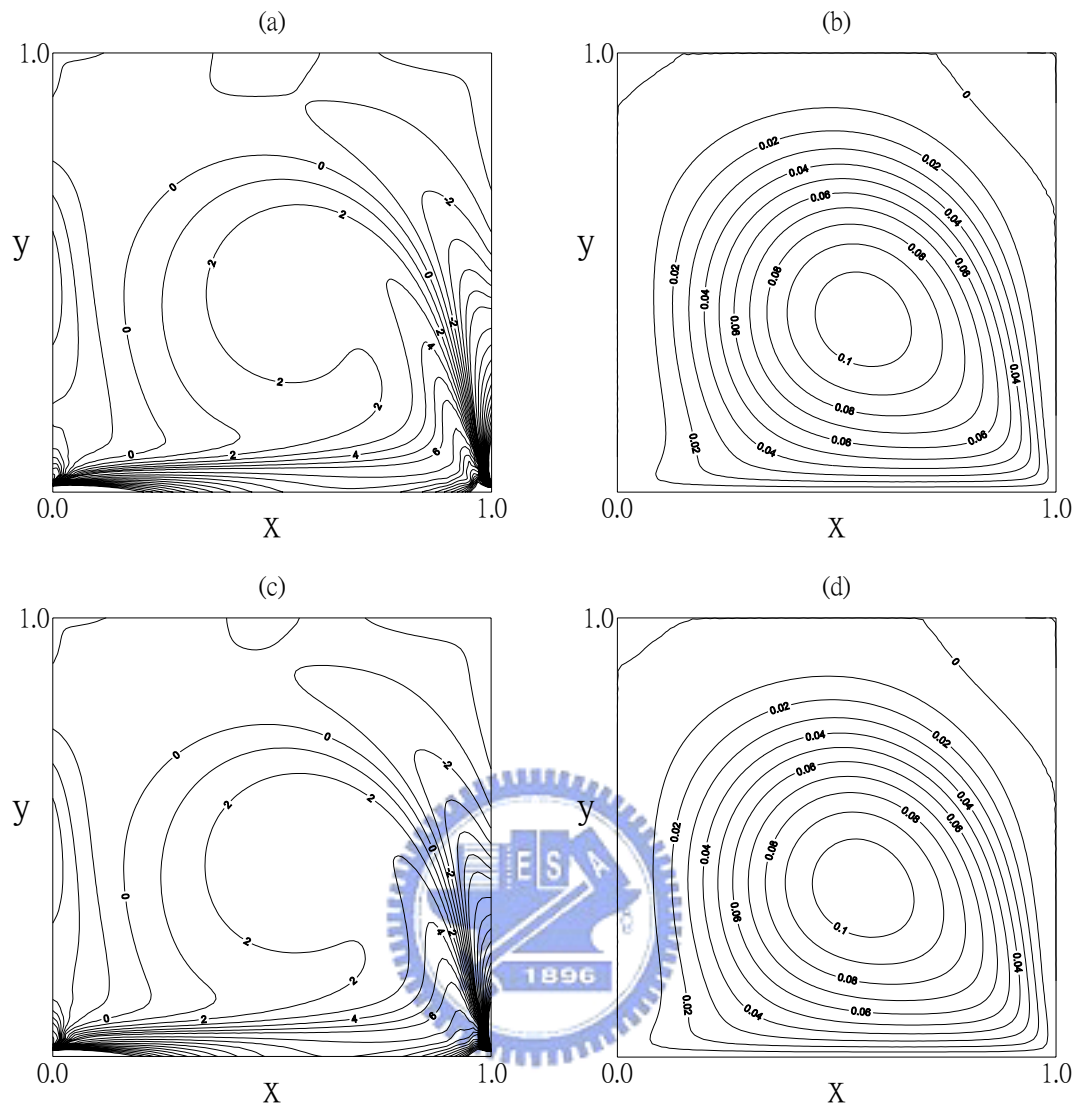


圖 4.6 雷諾數 400 格網點 41×41 之渦度與流線穩態比較圖
(a、b)混合有限差分法(c、d)CS 內插特性法

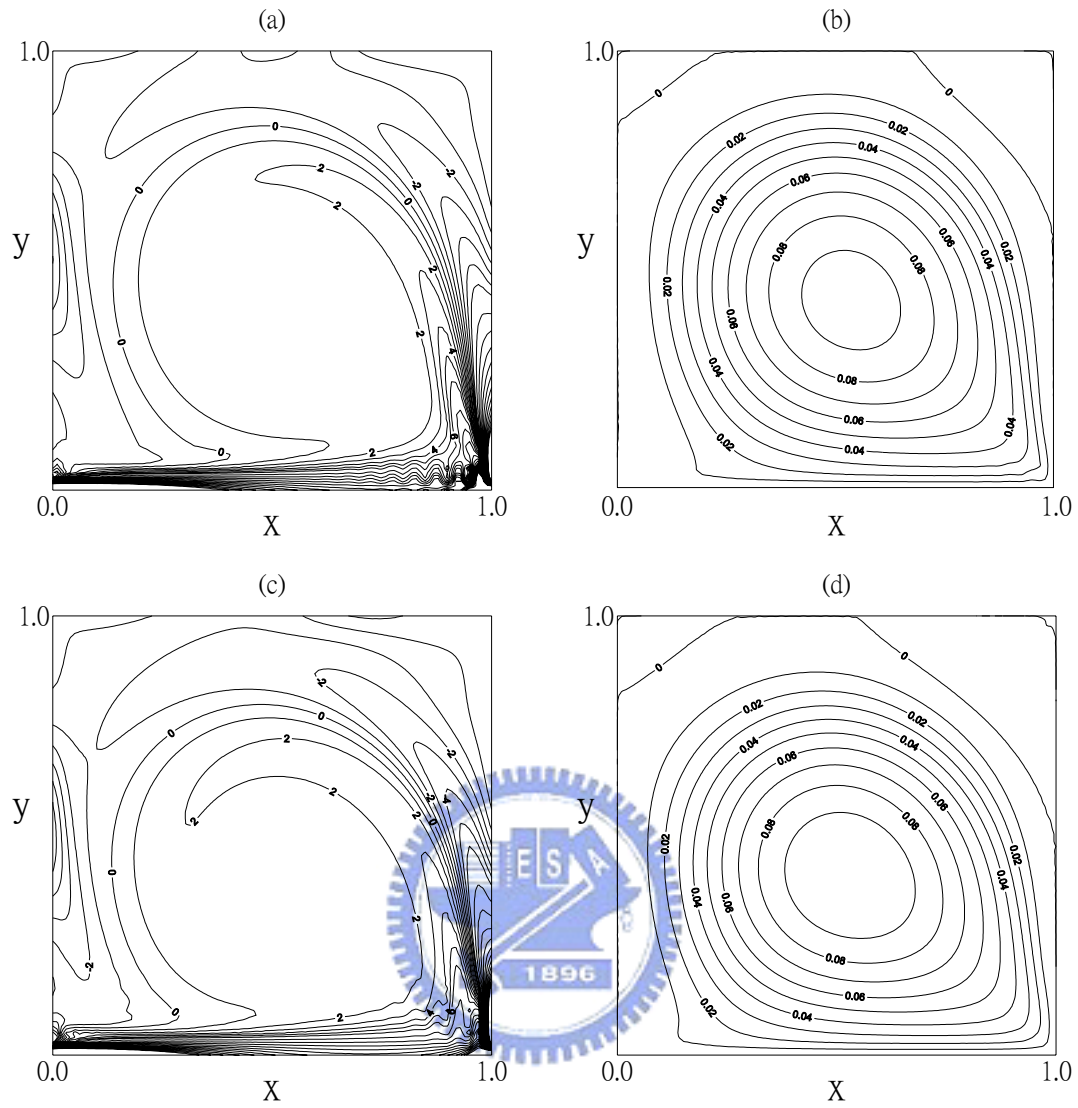


圖 4.7 雷諾數 1000 格網點 41×41 之渦度與流線穩態比較圖
(a、b)混合有限差分法(c、d)CS 內插特性法

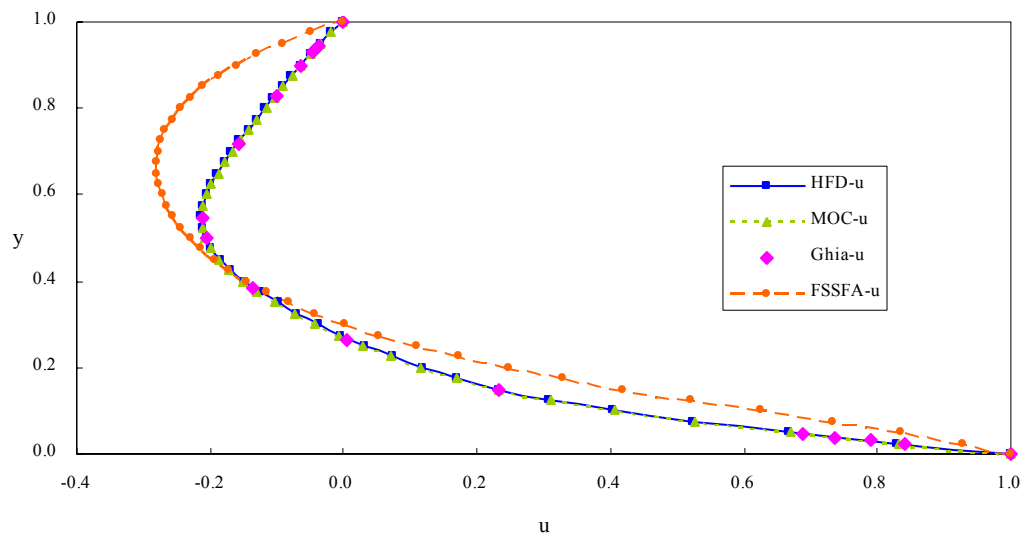


圖 4.8(a) 雷諾數 100 於相同格網點 41x41 之 x 方向速度比較圖

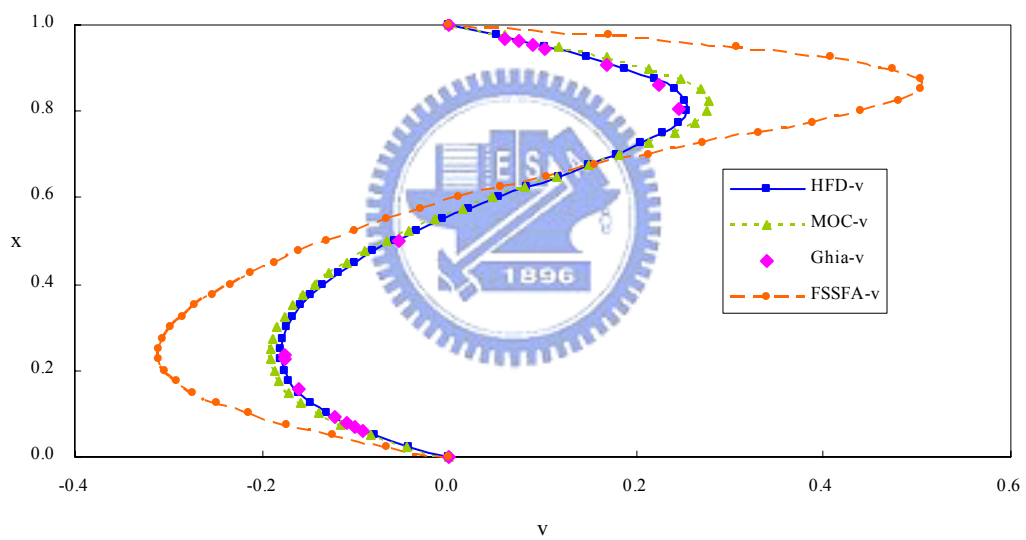


圖 4.8(b) 雷諾數 100 於相同格網點 41x41 之 y 方向速度比較圖

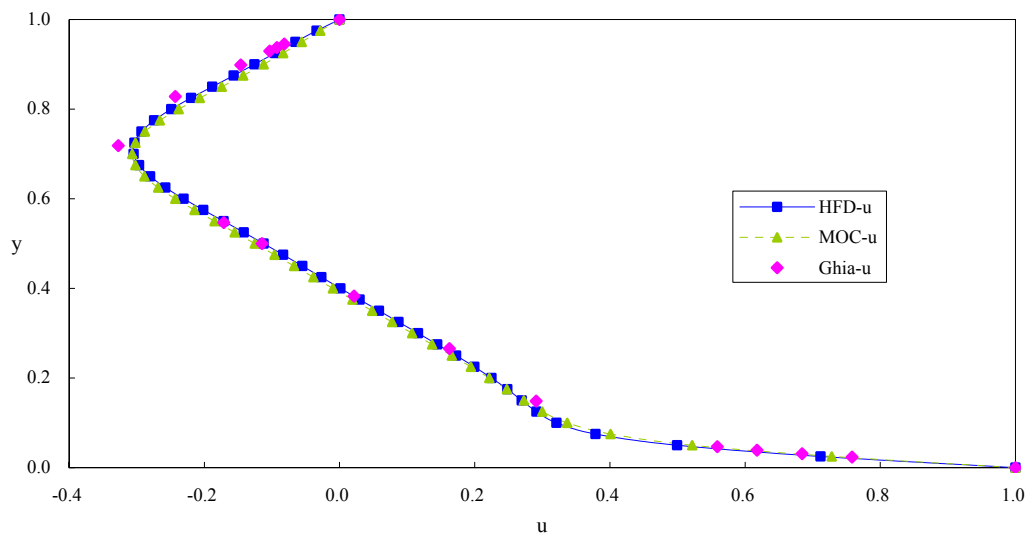


圖 4.9(a) 雷諾數 400 於相同格網點 41×41 之 x 方向速度比較圖

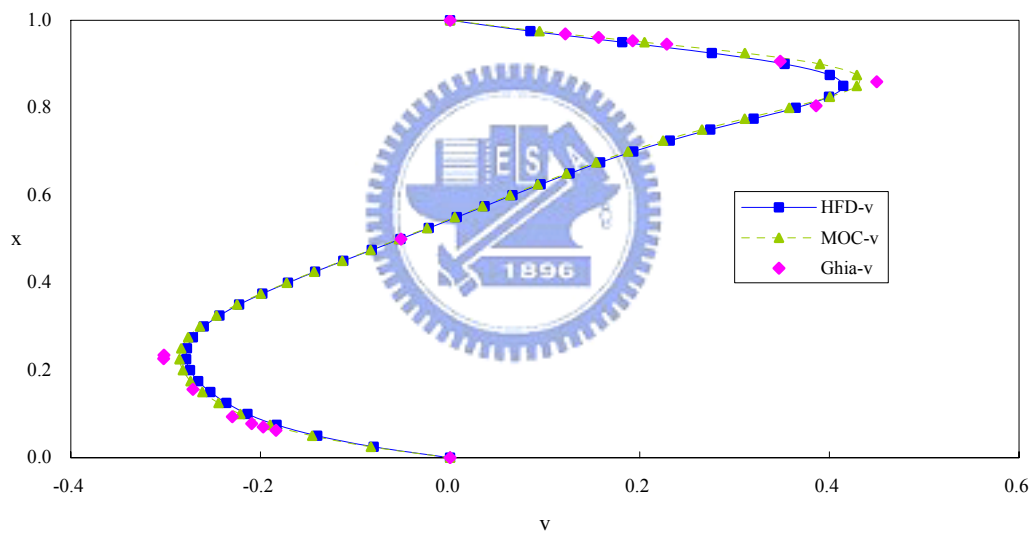


圖 4.9(b) 雷諾數 400 於相同格網點 41×41 之 y 方向速度比較圖

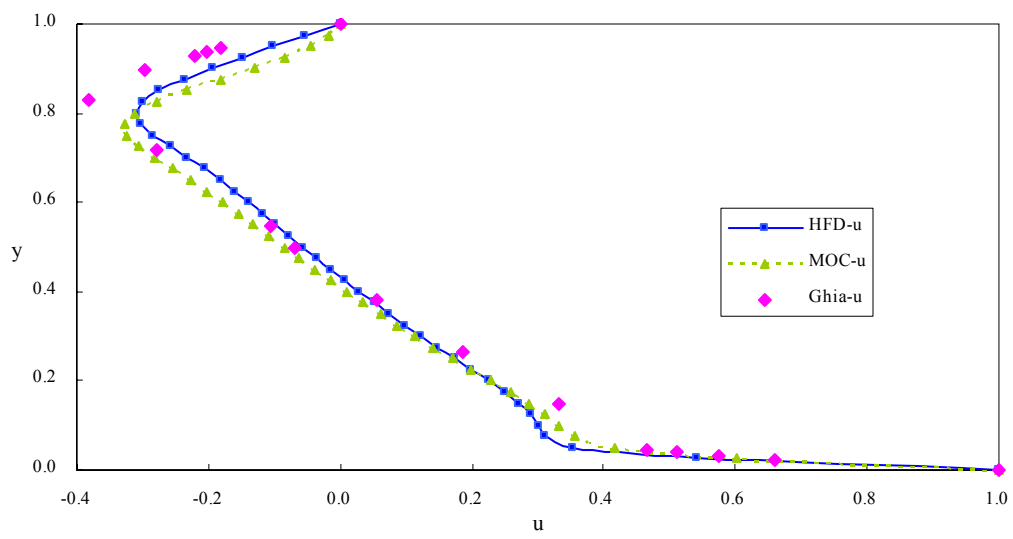


圖 4.10(a) 雷諾數 1000 於相同格網點 41x41 之 x 方向速度比較圖

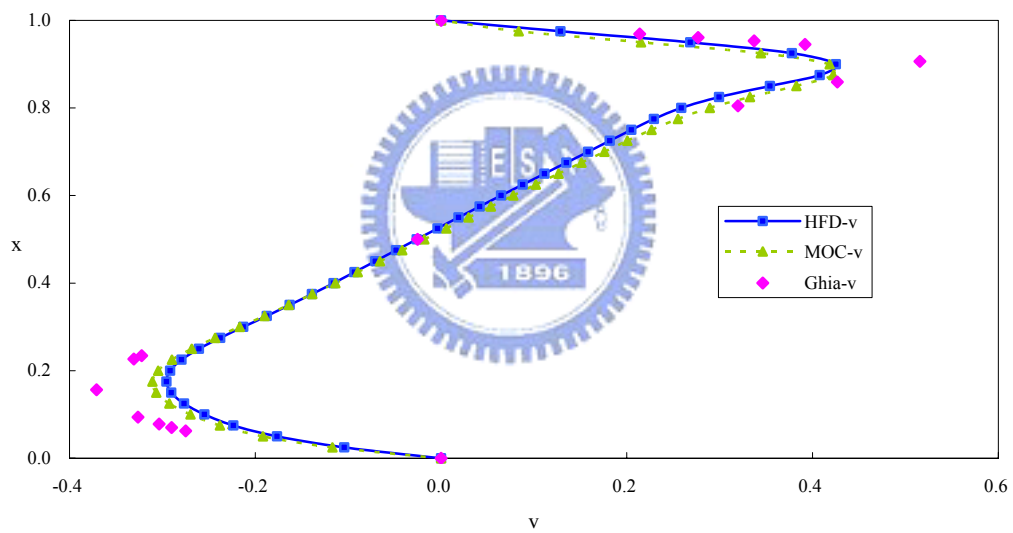


圖 4.10(b) 雷諾數 1000 於相同格網點 41x41 之 y 方向速度比較圖

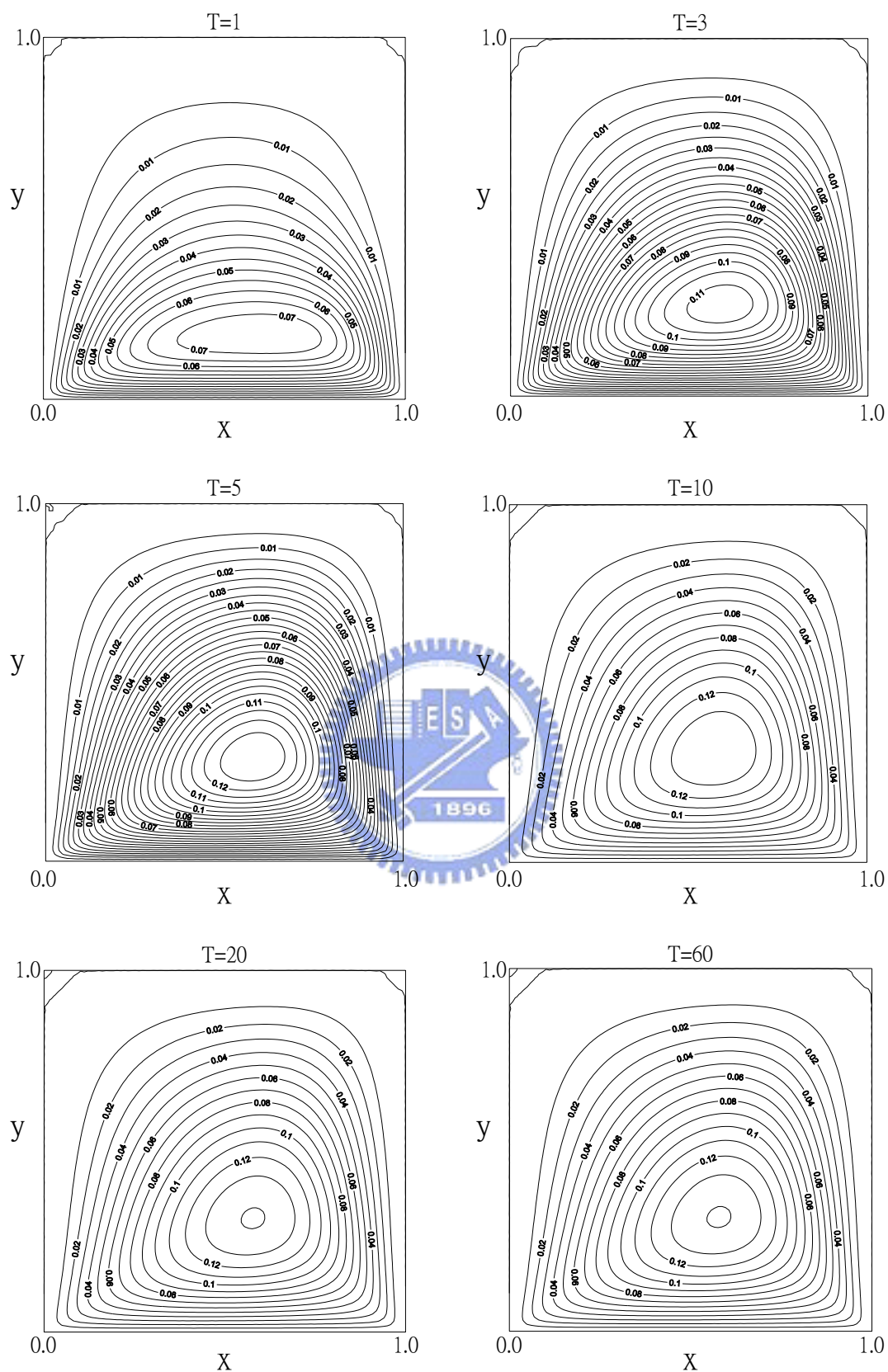


圖 4.11(a) 分割操作有限解析法於雷諾數 100
格網點 41×41 之流線發展圖

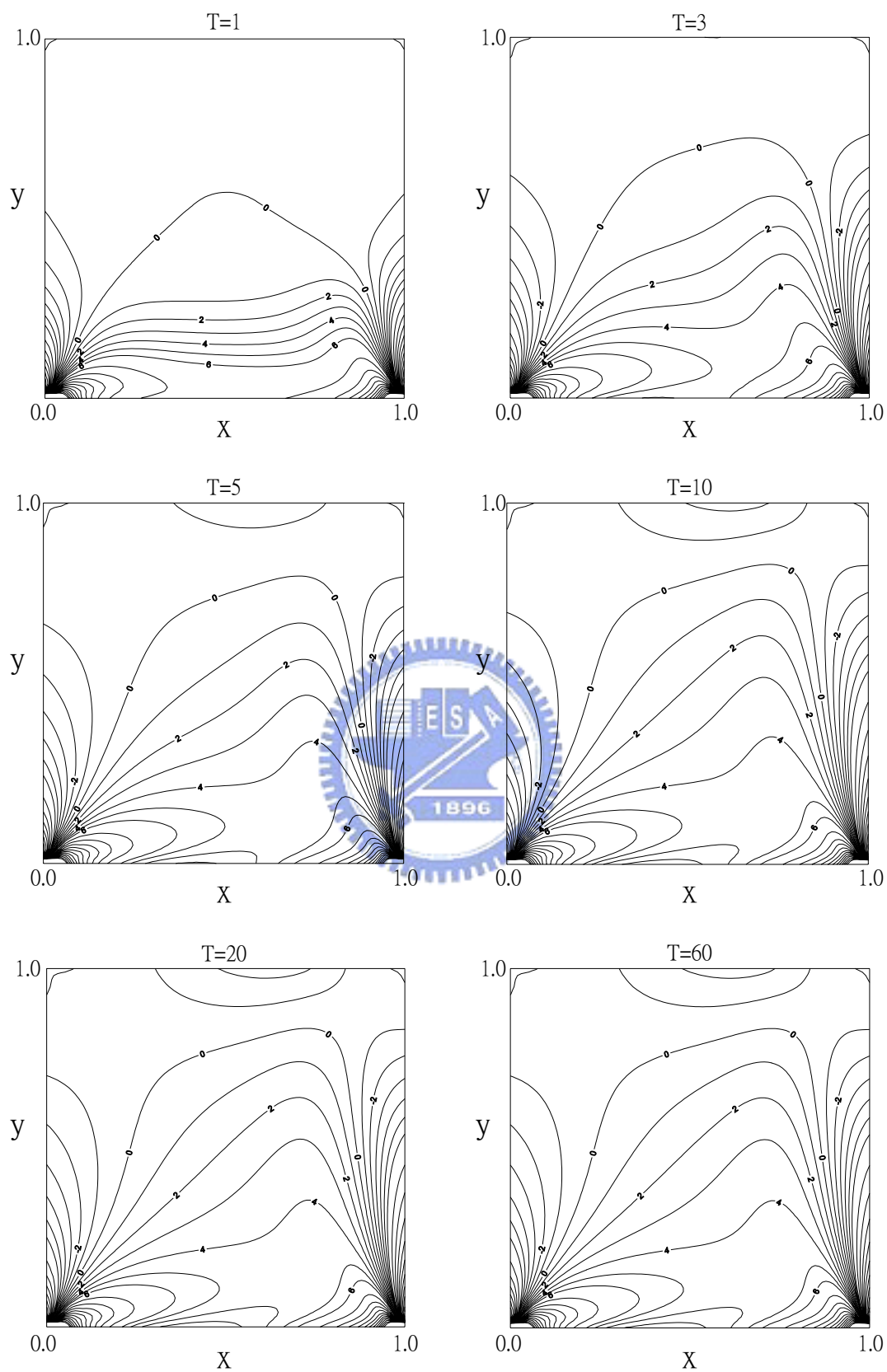


圖 4.11(b) 分割操作有限解析法於雷諾數 100
格網點 41×41 之渦度發展圖

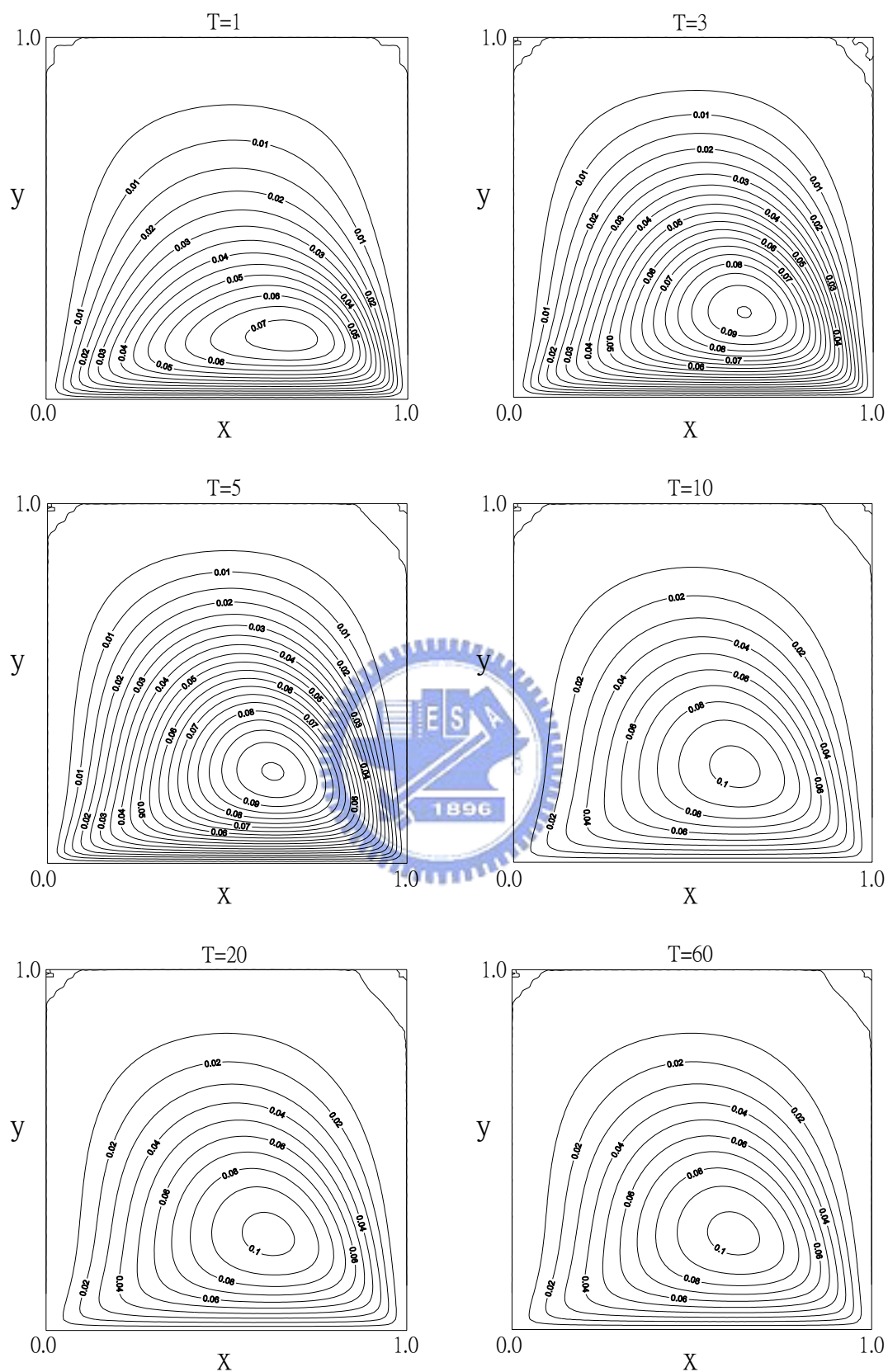


圖 4.12(a) 混合有限差分法於雷諾數 100
格網點 41×41 之流線發展圖

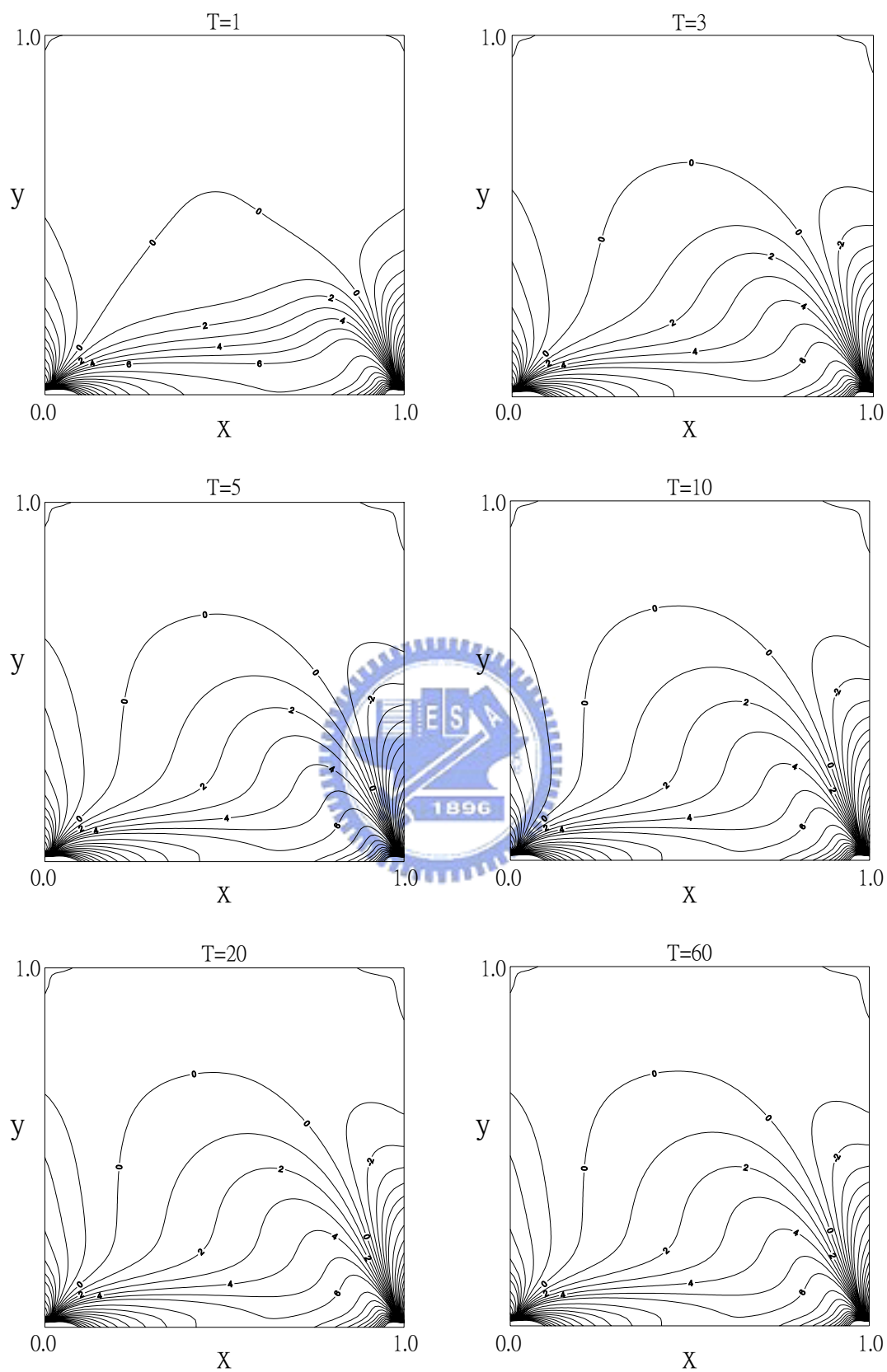


圖 4.12(b) 混合有限差分法於雷諾數 100
格網點 41×41 之渦度發展圖

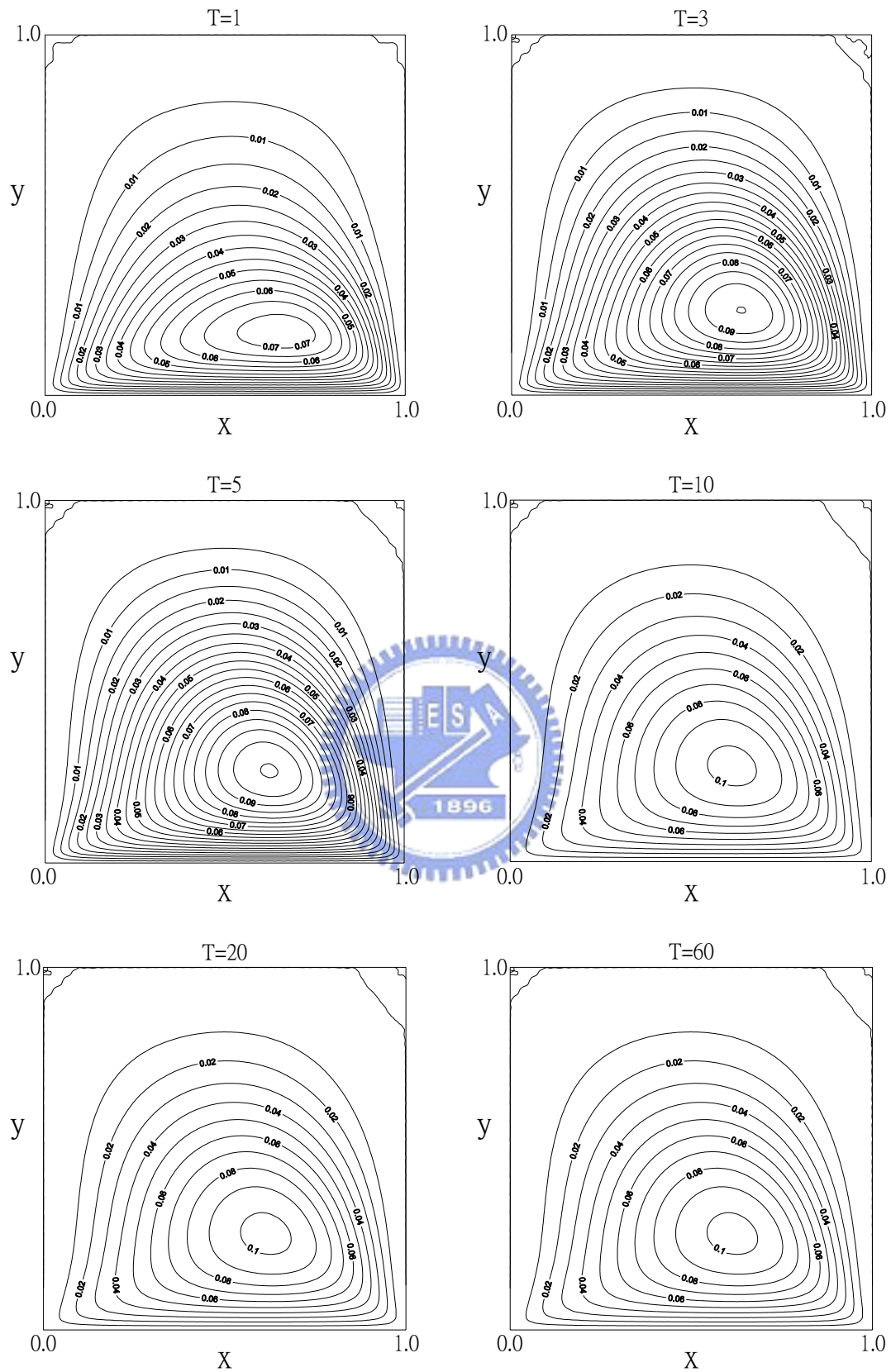


圖 4.13(a) CS 內插特性法於雷諾數 100
格網點 41×41 之流線發展圖

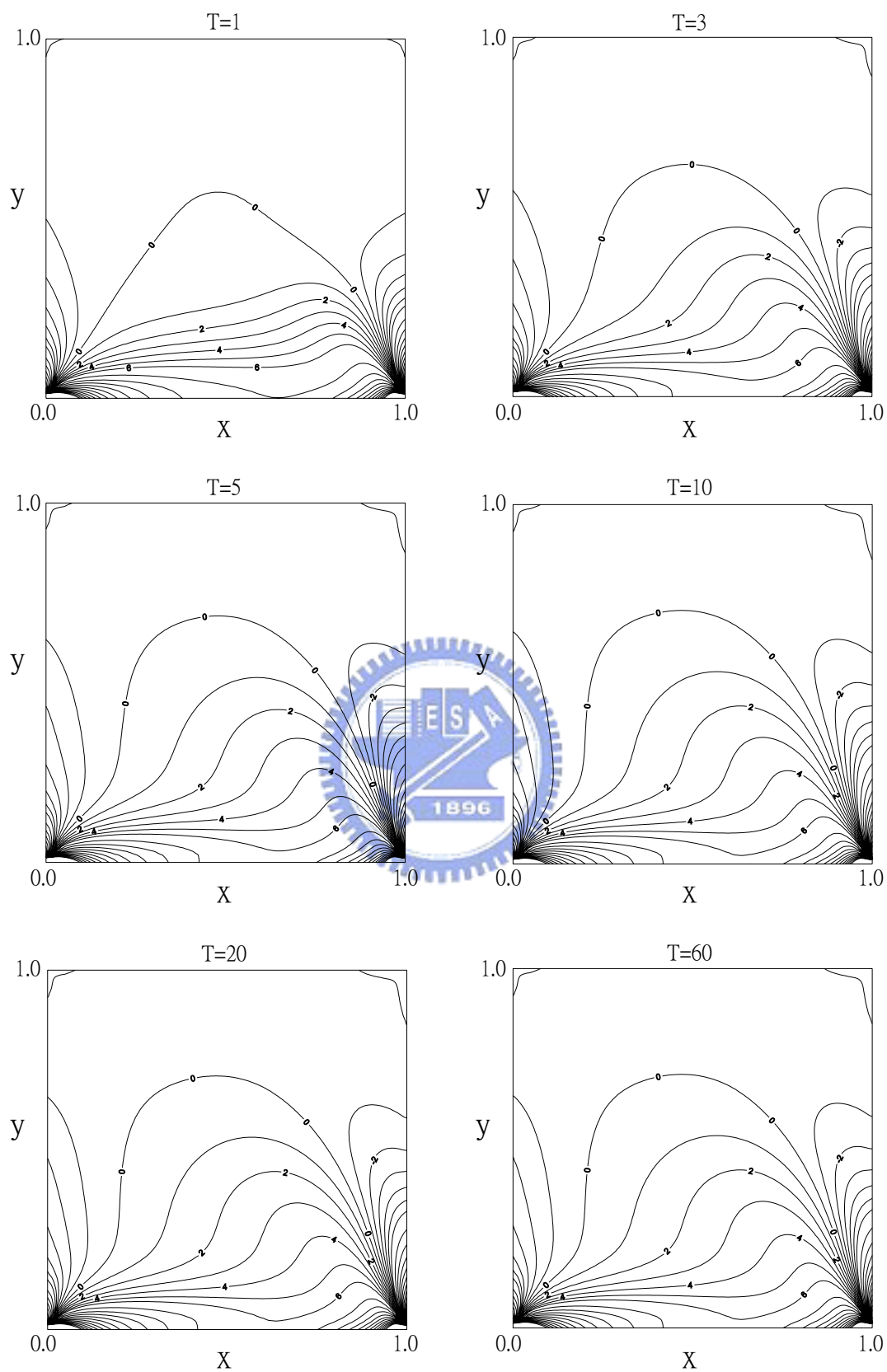


圖 4.13(b) CS 內插特性法於雷諾數 100
格網點 41×41 之流線發展圖

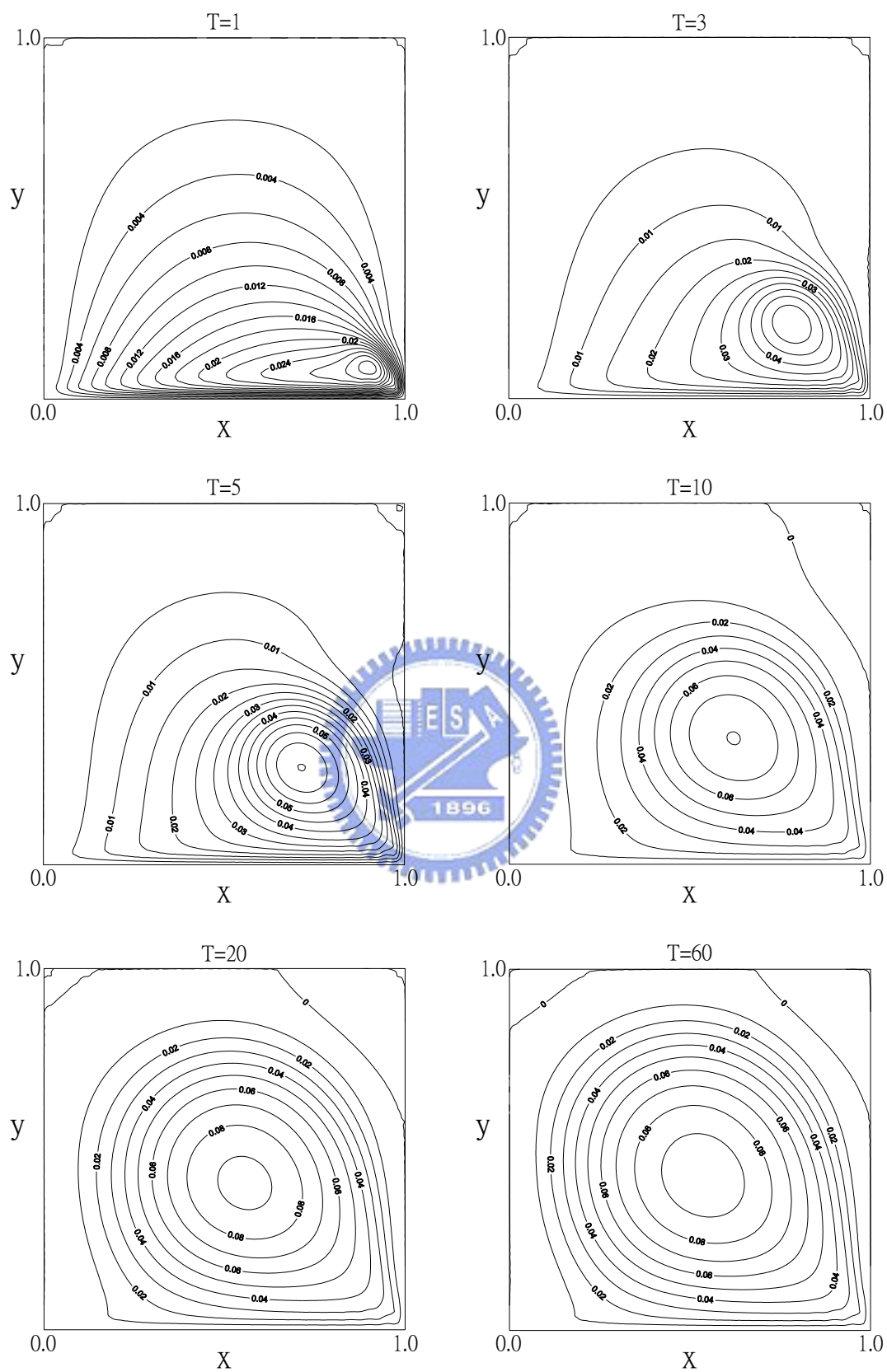


圖 4.14(a) 混合有限差分法於雷諾數 1000
格網點 41×41 之流線發展圖

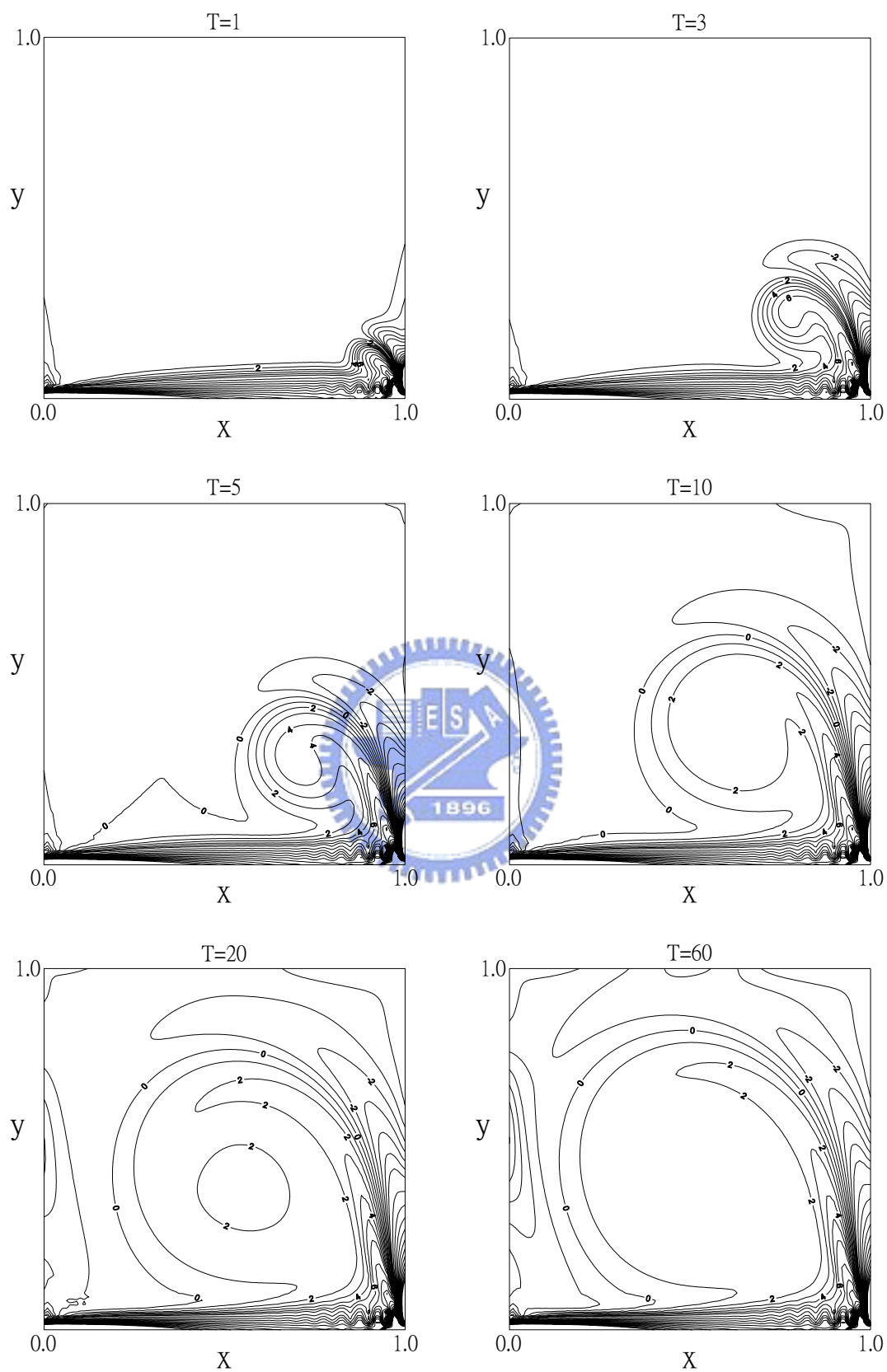


圖 4.14(b) 混合有限差分法於雷諾數 1000
格網點 41×41 之渦度發展圖

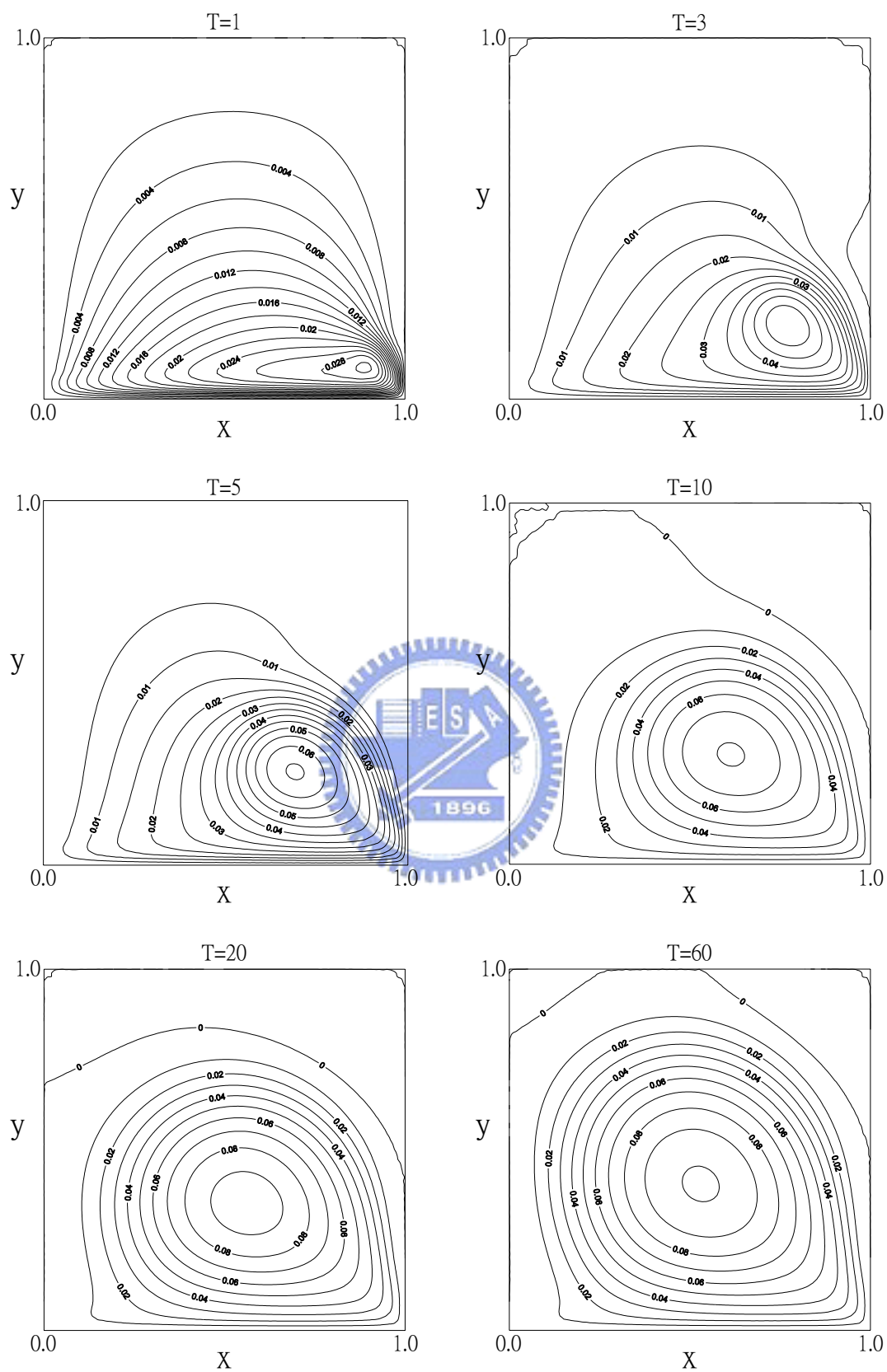


圖 4.15(a) CS 內插特性法於雷諾數 1000
格網點 41×41 之流線發展圖

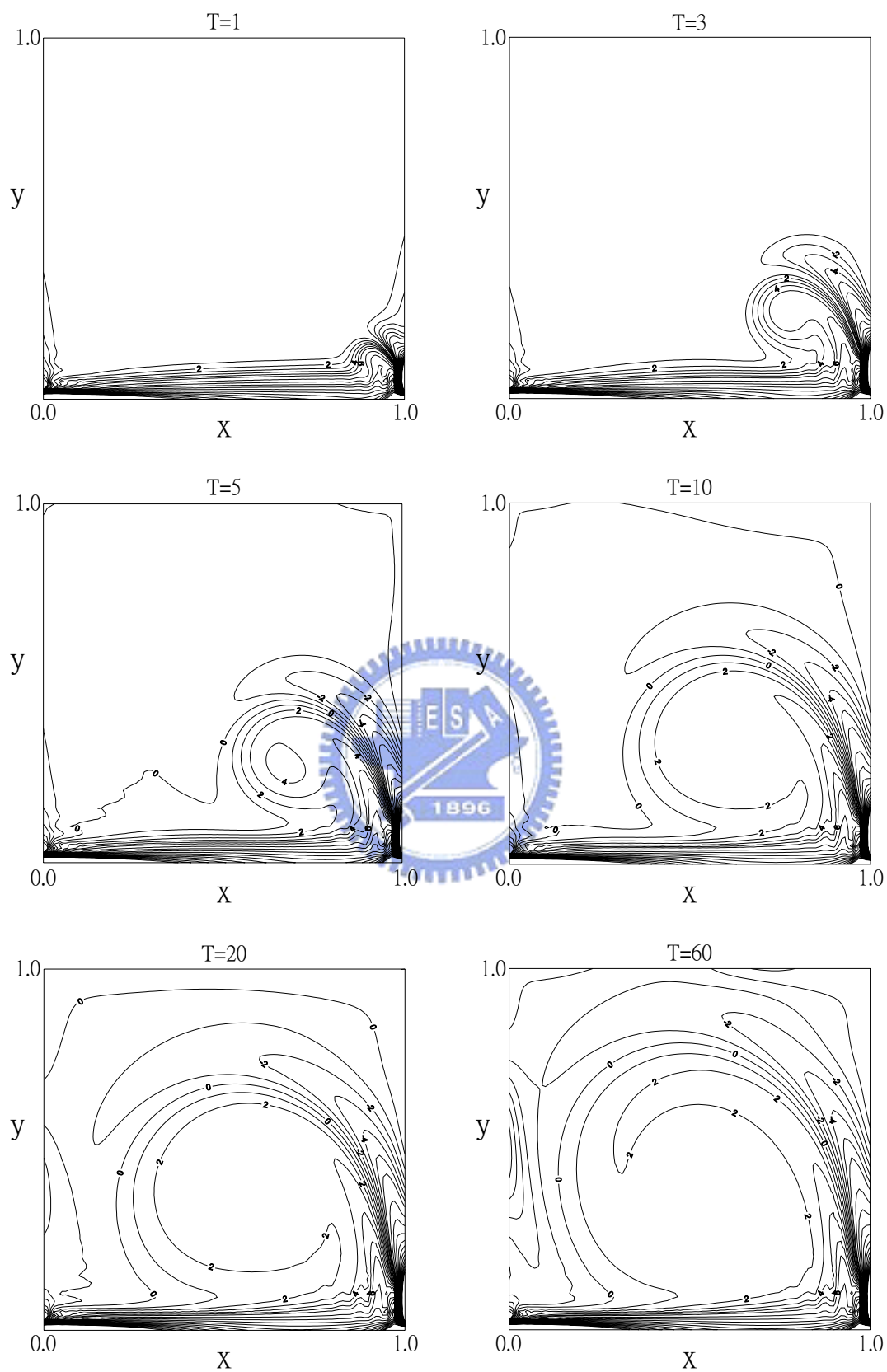


圖 4.15(b) CS 內插特性法於雷諾數 1000
格網點 41×41 之渦度發展圖

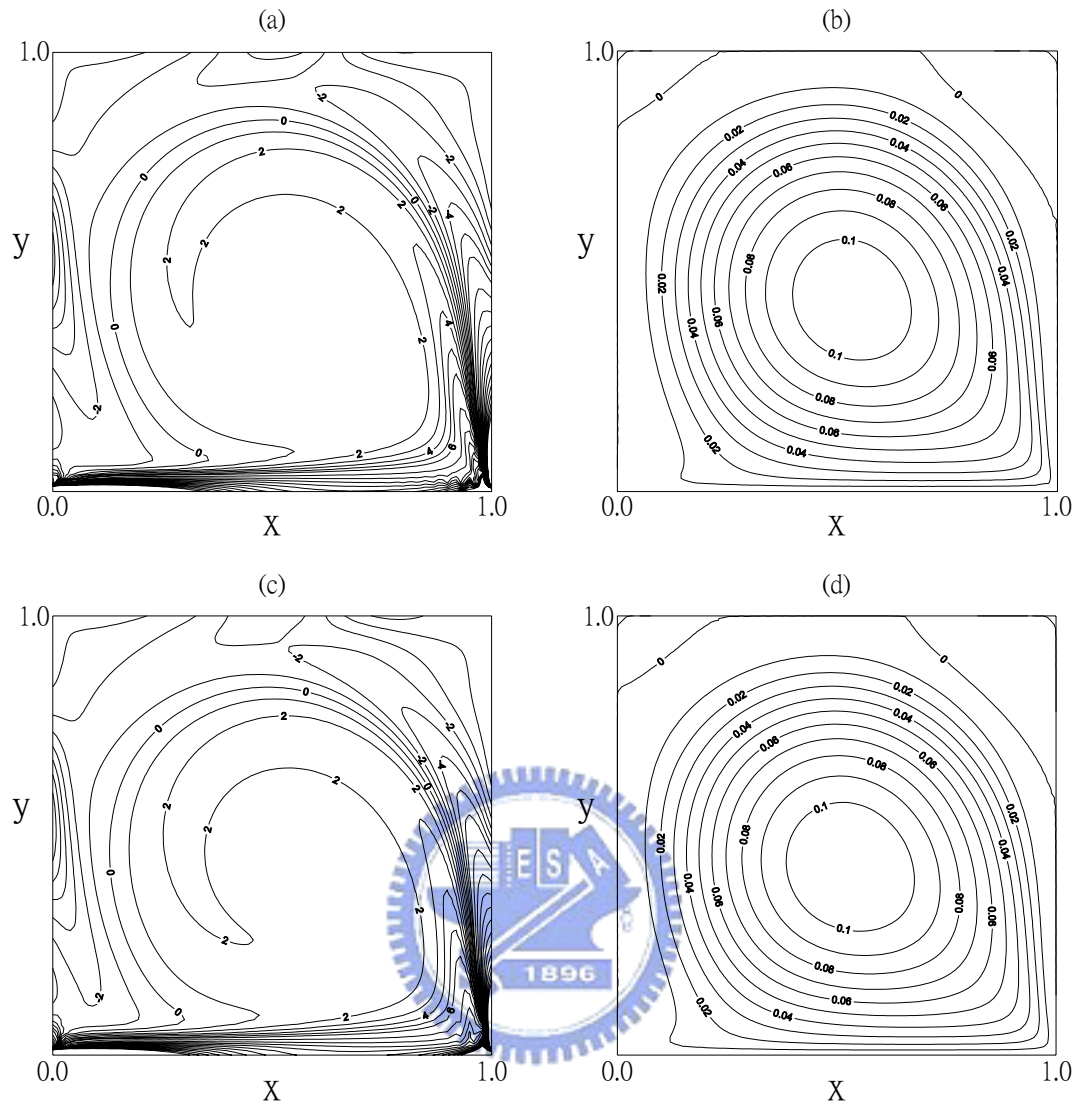


圖 4.16 雷諾數 1000 格網點 61×61 之渦度與流線穩態比較圖
(a、b)混合有限差分法(c、d)CS 內插特性法

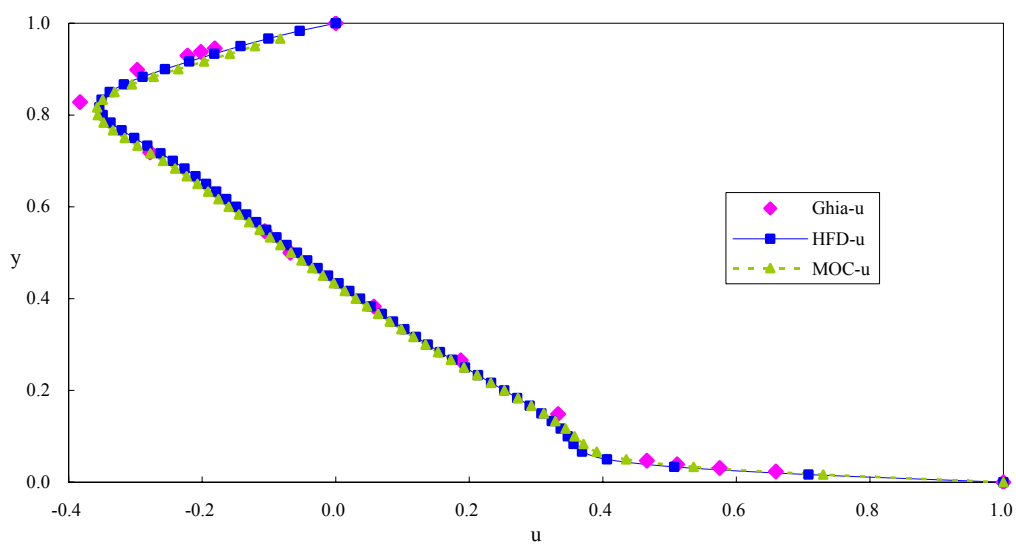


圖 4.17(a) 雷諾數 1000 於相同格網點 61×61 之 x 方向速度比較圖

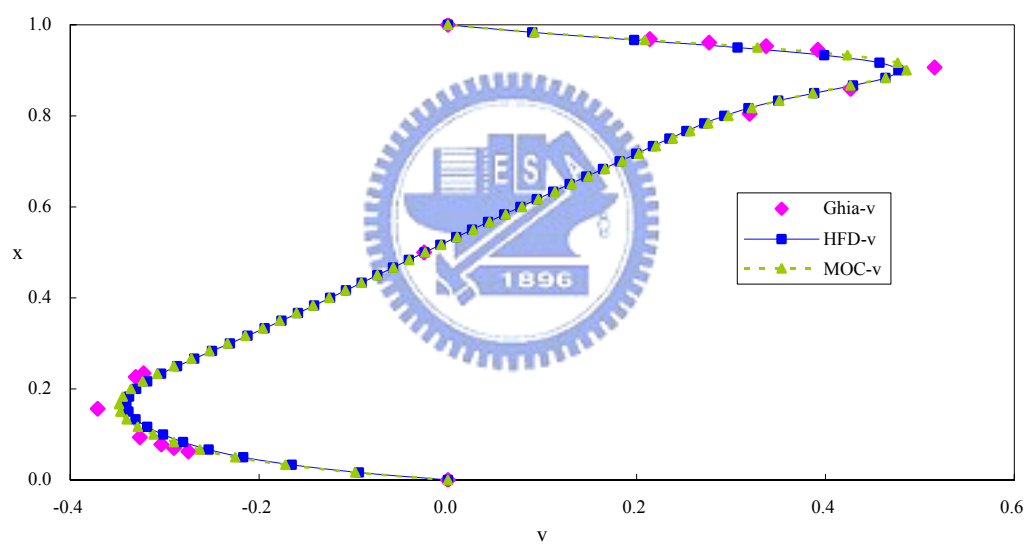


圖 4.17(b) 雷諾數 1000 於相同格網點 61×61 之 y 方向速度比較圖

附錄一

$$a_s = \frac{\Phi_{SE} + \Phi_{SW} - 2\Phi_{SC}}{4\sinh^2(Ah)} \quad \text{附(1.1)}$$

$$c_s = \Phi_{SC} \quad \text{附(1.2)}$$

$$b_s = \frac{\Phi_{SE} - \Phi_{SW} - \coth(Ah)(\Phi_{SE} + \Phi_{SW} - 2\Phi_{SC})}{2h} \quad \text{附(1.3)}$$

$$a_w = \Phi_{SW} \quad \text{附(1.4)}$$

$$b_w = \frac{\Phi_{WC} - \Phi_{SW}}{\tau} \quad \text{附(1.5)}$$

$$b_e = \frac{\Phi_{EC} - \Phi_{SE}}{\tau} \quad \text{附(1.6)}$$

$$a_e = \Phi_{SE} \quad \text{附(1.7)}$$



附錄二

$$C_{WC} = e^{Ah} S_1, \quad C_{EC} = e^{-Ah} S_1, \quad C_{SW} = e^{Ah} S_2 \quad \text{附(2.1)}$$

$$C_{SE} = e^{-Ah} S_2, \quad C_{SC} = 4Ah \cosh(Ah) \coth(Ah) P_2 \quad \text{附(2.2)}$$

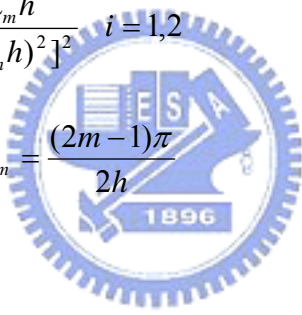
$$S_1 = \frac{Bh^2}{\tau} (P_2 - Q_2) + Q_1 \quad \text{附(2.3)}$$

$$S_2 = \frac{Bh^2}{\tau} (Q_2 - P_2) - 2Ah \coth(Ah) P_2 \quad \text{附(2.4)}$$

$$P_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m \lambda_m h e^{-2F} m^\tau}{[(Ah)^2 + (\lambda_m h)^2]^2} \quad \text{附(2.5)}$$

$$Q_i = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m \lambda_m h}{[(Ah)^2 + (\lambda_m h)^2]^2} \quad i=1,2 \quad \text{附(2.6)}$$

$$F_m = \frac{A^2 + \lambda_m^2}{B}, \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h} \quad \text{附(2.7)}$$



附錄三、混合差分有限法之必要條件

Consistency

Applying any two level numerical schemes to (3.2), one may obtain the following discretization equations

$$a_1\Phi_{i-2}^{n+1} + a_2\Phi_{i-1}^{n+1} + a_3\Phi_i^{n+1} + a_4\Phi_{i+1}^{n+1} + a_5\Phi_{i+2}^{n+1} = b_1\Phi_{i-2}^n + b_2\Phi_{i-1}^n + b_3\Phi_i^n + b_4\Phi_{i+1}^n + b_5\Phi_{i+2}^n \quad \text{附(3.1)}$$

and

$$c_1\Phi_{i-2}^{n+1} + c_2\Phi_{i-1}^{n+1} + c_3\Phi_i^{n+1} + c_4\Phi_{i+1}^{n+1} + c_5\Phi_{i+2}^{n+1} = d_1\Phi_{i-2}^n + d_2\Phi_{i-1}^n + d_3\Phi_i^n + d_4\Phi_{i+1}^n + d_5\Phi_{i+2}^n \quad \text{附(3.2)}$$

where $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 1$. The Φ_i^{n+1} represents the value of Φ at grid point i for time level $t = (n+1)\Delta t$ and Δt is the time step. The terms Φ_{i+1}^{n+1} , Φ_i^{n+1} , Φ_{i-1}^{n+1} , Φ_{i+1}^n , and Φ_{i-1}^n can be expanded in Taylor series as

$$\Phi_{i+j_1}^{n+k_1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (k_1\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + j_1\Delta x \frac{\partial}{\partial x})^m \Phi_i^n \quad k_1, j_1 = -1, 0, 1 \quad \text{附(3.3)}$$

where Δx is the grid size. Substitution of 附(3.3) into 附(3.1) and 附(3.2) yields

$$\Phi_t = A_1\Phi_x + A_2\Phi_{tt} + A_3\Phi_{tx} + A_4\Phi_{xx} + A_5\Phi_{ttt} + A_6\Phi_{ttx} + A_7\Phi_{txx} + A_8\Phi_{xxx} + \cdots \quad \text{附(3.4)}$$

and

$$\Phi_t = B_1\Phi_x + B_2\Phi_{tt} + B_3\Phi_{tx} + B_4\Phi_{xx} + B_5\Phi_{ttt} + B_6\Phi_{ttx} + B_7\Phi_{txx} + B_8\Phi_{xxx} + \cdots \quad \text{附(3.5)}$$

where the superscript n and the subscript i for Φ are eliminated. The terms $A_1 \sim A_8$ and $B_1 \sim B_8$ are functions of $a_1 - a_5$, $b_1 - b_5$ and $c_1 - c_5$, $d_1 - d_5$, respectively. For example A_2 and A_3 can be expressed as

$$A_2 = \frac{-\Delta t}{2}(a_1 + a_3 + a_3 + a_4 + a_5) = \frac{-\Delta t}{2} \quad \text{附(3.6)}$$

$$A_3 = \Delta x(2a_1 + a_2 - a_4 - 2a_5) \quad \text{附(3.7)}$$

As far as the accuracy is concerned, both A_1 and B_1 are equal to $-u$. In addition, because of the consistency, the terms $A_2 \sim A_8$ and $B_2 \sim B_8$, except A_4 and B_4 , are all equal to zeros when Δt and Δx approach to zero. However, A_4 and B_4 satisfy the following condition

$$A_4 = B_4 = \varepsilon \quad \text{附(3.8)}$$

where ε is the diffusion coefficient. Now, taking the linear combination of 附(3.1) and 附(3.2) as α 附(3.1) + β 附(3.2), one obtains

$$\begin{aligned} & (\alpha a_1 + \beta c_1)\Phi_{i-2}^{n+1} + (\alpha a_2 + \beta c_2)\Phi_{i-1}^{n+1} + (\alpha a_3 + \beta c_3)\Phi_i^{n+1} + (\alpha a_4 + \beta c_4)\Phi_{i+1}^{n+1} + (\alpha a_5 + \beta c_5)\Phi_{i+2}^{n+1} \\ & = (\alpha b_1 + \beta d_1)\Phi_{i-2}^n + (\alpha b_2 + \beta d_2)\Phi_{i-1}^n + (\alpha b_3 + \beta d_3)\Phi_i^n + (\alpha b_4 + \beta d_4)\Phi_{i+1}^n + (\alpha b_5 + \beta d_5)\Phi_{i+2}^n \end{aligned} \quad \text{附(3.9)}$$

where α and β are constants. Similarly, substitution of Taylor series expansion 附(3.3) into 附(3.9) yields

$$\begin{aligned} \Phi_i = & -u\Phi_x + \frac{1}{\alpha + \beta} [(\alpha A_2 + \beta B_2)\Phi_{tt} + (\alpha A_3 + \beta B_3)\Phi_{tx} + (\alpha A_4 + \beta B_4)\Phi_{xx} \\ & + (\alpha A_5 + \beta B_5)\Phi_{ttt} + (\alpha A_6 + \beta B_6)\Phi_{ttx} + (\alpha A_7 + \beta B_7)\Phi_{txx} + (\alpha A_8 + \beta B_8)\Phi_{xxx}] + \dots \end{aligned}$$

附(3.10)

One can clearly see from 附(3.10) that 附(3.9) is also consistent with the dispersion equation (3.2).

The Modified Equation

By eliminating pure and cross time derivatives with repeatedly differentiating 附(3.4) and 附(3.5), the modified equation corresponding to 附(3.4) and 附(3.5) can, respectively, be expressed as

$$\Phi_t = -u\Phi_x + E_2\Phi_{xx} + E_3\Phi_{xxx} + \dots \quad \text{附(3.11)}$$

and

$$\Phi_t = -u\Phi_x + F_2\Phi_{xx} + F_3\Phi_{xxx} + \dots \quad \text{附(3.12)}$$

where

$$E_2 = u^2 A_2 - uA_3 + A_4$$

$$E_3 = -2u^3 A_2^2 + 3u^2 A_2 A_3 - 2uA_2 A_4 - uA_3^2 + A_3 A_4 - u^3 A_5 + u^2 A_6 - uA_7 + A_8 \quad \text{附(3.13)}$$

and

$$F_2 = u^2 B_2 - uB_3 + B_4$$

$$F_3 = -2u^3 B_2^2 + 3u^2 B_2 B_3 - 2uB_2 B_4 - uB_3^2 + B_3 B_4 - u^3 B_5 + u^2 B_6 - uB_7 + B_8 \quad \text{附(3.14)}$$

Similarly, the modified equation corresponding to 附(3.10) is

$$\Phi_t = -u\Phi_x + \frac{G_2}{\alpha + \beta}\Phi_{xx} + \frac{G_3}{\alpha + \beta}\Phi_{xxx} + \dots \quad \text{附(3.15)}$$

where

$$\begin{aligned}
G_2 &= u^2(\alpha A_2 + \beta B_2) - u(\alpha A_3 + \beta B_3) + (\alpha A_4 + \beta B_4) \\
G_3 &= \frac{1}{\alpha + \beta} [-2u^3(\alpha A_2 + \beta B_2)^2 + 3u^2(\alpha A_2 + \beta B_2)(\alpha A_3 + \beta B_3) \\
&\quad - 2u(\alpha A_2 + \beta B_2)(\alpha A_4 + \beta B_4) - u(\alpha A_3 + \beta B_3)^2 + (\alpha A_3 + \beta B_3)(\alpha A_4 + \beta B_4)] \\
&\quad - u^3(\alpha A_5 + \beta B_5) + u^2(\alpha A_6 + \beta B_6) - u(\alpha A_7 + \beta B_7) + (\alpha A_8 + \beta B_8) \\
&\quad - u(\alpha A_7 + \beta B_7) + (\alpha A_8 + \beta B_8)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

It is obvious that G_2, E_2 , and F_2 satisfy

$$G_2 = \alpha E_2 + \beta F_2 \tag{3.17}$$

In addition, if A_2, B_2, A_3 , and B_3 satisfy the following conditions

$$A_2 = B_2 \tag{3.18}$$

and

$$A_3 = B_3 \tag{3.19}$$

one can obtain

$$G_3 = \alpha E_3 + \beta F_3 \tag{3.20}$$

In other words, (3.15) can be rewritten as

$$(\alpha + \beta)\Phi_t = -u(\alpha + \beta)\Phi_x + (\alpha E_2 + \beta F_2)\Phi_{xx} + (\alpha E_3 + \beta F_3)\Phi_{xxx} + \dots \tag{3.21}$$

It is necessary to point out that the condition (3.18) is always satisfied due to (3.6). Equation (3.19) is a sufficient condition for (3.20).

Although the above derivation is only up to the third-order derivative, the higher-order derivative can also be executed in the same manner.

附錄四、Cubic-spline 內插法

欲求得座標值 x_i 之應變數值， $x_i \in [x_i, x_{i+1}]$ 如附圖 1 所示，假設介於座標值 x_i 與 x_{i+1} 間之內插函數符合三次多項式函數如下：

$$\begin{aligned} \Phi_i(x) &= A_i(x - x_i)^3 + B_i(x - x_i)^2 + D_i(x - x_i) + E_i \\ x &\in [x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned} \quad \text{附(4.1)}$$

三次內插函數，即附(4.1)式，符合

$$\Phi_i(x_i) = f_i \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad \Phi_{M-1}(x_M) = \Phi_M \quad \text{附(4.2a)}$$

$$\Phi_i(x_{i+1}) = \Phi_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, M-2 \quad \text{附(4.2b)}$$

$$\Phi'_i(x_{i+1}) = \Phi'_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, M-2 \quad \text{附(4.2c)}$$

$$\Phi''_i(x_{i+1}) = \Phi''_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, M-2 \quad \text{附(4.2d)}$$

附(4.2)式表示每個座標點上之應變數值及應變數之一階導數、二階導數皆連續。根據附(4.2)式，附(4.1)式中之係數 A_i 、 B_i 、 D_i 以及 E_i (Gerald 和 Wheatley, 1999) 可表示為

$$A_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \quad \text{附(4.3a)}$$

$$B_i = \frac{S_i}{2} \quad \text{附(4.3b)}$$

$$D_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \quad \text{附(4.3c)}$$

$$E_i = \Phi_i \quad \text{附(4.3d)}$$

式中， $h_i = x_{i+1} - x_i$ 。 S_i 表示座標點 x_i 之二階導數值，即 $S_i = \Phi''_i(x_i)$ ，且 S_i 滿足

$$h_{i-1}S_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)S_i + h_iS_{i+1} = 6 \left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_i} - \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad \text{附(4.4)}$$

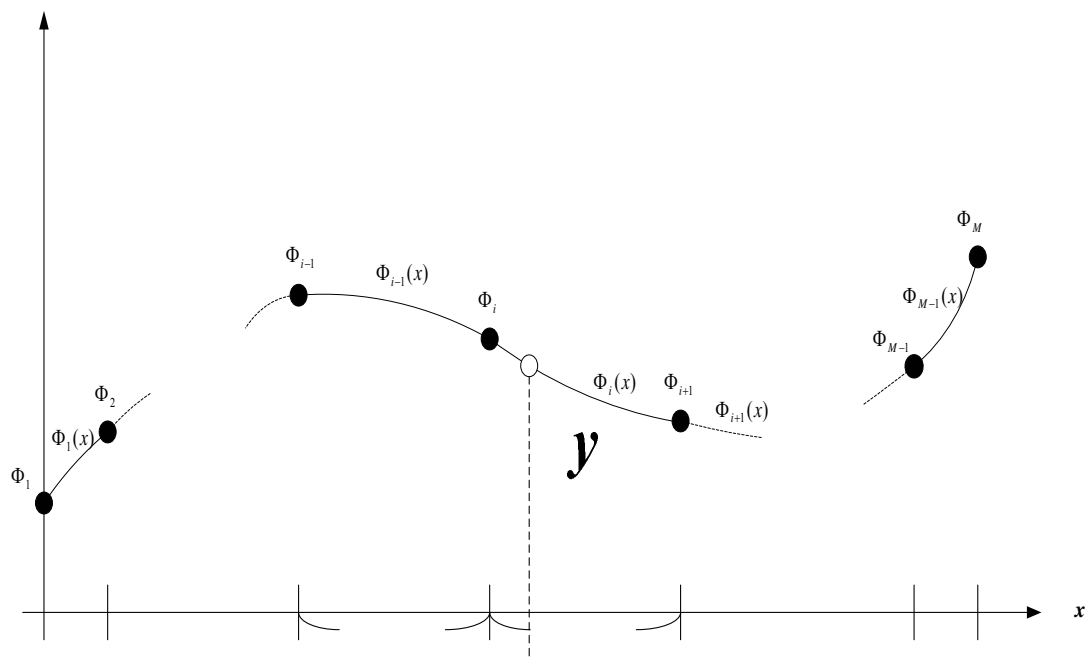
$$i = 2, 3, \dots, M-1$$

附(4.4)式尚需兩個端點之二階導數條件才可求解，即所謂端點條件(endpoint condition)。若採用 natural cubic-spline(自然 cubic-spline)，即 $S_1 = 0$ 與 $S_M = 0$ ，亦即假設兩端點之二階導數皆為零，則附(4.4)式可表示為

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & \\ & & & \ddots & \\ & & & h_{M-2} & 2(h_{M-2} + h_{M-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \vdots \\ S_{M-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{h_2} - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{h_1} \\ \frac{\Phi_4 - \Phi_3}{h_3} - \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{h_2} \\ \frac{\Phi_5 - \Phi_4}{h_4} - \frac{\Phi_4 - \Phi_3}{h_3} \\ \vdots \\ \frac{\Phi_M - \Phi_{M-1}}{h_{M-1}} - \frac{\Phi_{M-1} - \Phi_{M-2}}{h_{M-2}} \end{bmatrix} \quad \text{附(4.5)}$$

附(4.5)式為三對角矩陣(Tridiagonal systems)，可採湯瑪斯演算法(Thomas algorithm)求解。根據附(4.1)式、附(4.3)式及附(4.5)式，即可求得座標點 x_l 之內插值 $\Phi_i(x_l)$ 為

$$\Phi_i(x_l) = A_i(x_l - x_i) + B_i(x_l - x_i)^2 + D_i(x_l - x_i) + E_i \quad \text{附(4.6)}$$



附圖 3.1 cubic-spline 內插法示意圖

