附錄 B 微分動態規劃理論

對於地下水水量管理及污染整治系統的決策分析方法中，連續近似的微分動態規劃(DDP)是較有效率的方法之一，其最大的優點是可以克服維度的困擾，減少記憶體容量和計算所需時間，以及不需要將決策變數(decision variable)和狀態變數(state variable)離散化。

大部份的地下水水量管理問題都是可表示成時間間斷的控制問題，因此可對時間區分成幾個階段(stage)，如果時間是由 1 到 t 時刻，則可分為 t 個階段，每一個階段皆有該階段的狀態變數和必須要作決策的決策變數。則此地下水水量管理最佳化控制問題在求決策變數之最佳值，且必須要能滿足各限制式，而微分動態規劃即為解最佳控制問題的方法之一。(2.10)式所表示的次問題即為本研究所需處理的最佳控制問題。

微分動態規劃之解題技巧是以動態規劃為原則，將原問題分解為一個個具遞迴關係的次問題，而再以非線性規劃的方法求出每一個次問題的最佳解，如此循環反覆即可求得原問題的最佳解。[楊,1994] 其問題型態可表示如下：

$$\min_{u_t, t=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{N} L_t(x_t, u_t) \tag{B.1}$$

受限於：

$$x_{t+1} = T(x_t, u_t, t) \tag{B.2}$$

其中(3.2)式為系統轉換函數，可代表不同型態之問題。解題之過程，包含有後掃過程於前掃過程，後掃過程主要求得最佳控制法則，而前掃過程則應用後掃過程之最佳控制法則求得最佳控制值。(B.1)~(B.2)

所形成之問題型態為無限制式分動態規劃，而一般自然界之問題皆包含有限制條件，因此，Murry and Yakowitz, [1979]，提出限制型微分動態規劃，於前、後掃過程皆採用二次規劃之方式來處理有限制條件之情形。以下將分別敘述無限制條件微分動態規劃與有限制條件微分動態規劃之解題過程。

B.1 無限制式微分動態規劃(DDP)

考慮式(B.1)及(B.2)所行成之無限制條件微分動態規劃問題：

1.後掃過程：

a.最後一個時刻(N)：對於最後一個時刻之最佳化問題可表示如下：

$$\min_{u_N,} L_N(x_N, u_N) \tag{B.3}$$

受限於：

$$x_{N+1} = T(x_N, u_N, N) \tag{B.4}$$

由於無限制式微分動態規劃並不考慮終端限制條件，因此對於最後時刻之狀態變數會落於何值，並不加以限制。因此可直接對式(B.3)求其最佳化之結果。欲求解式(B.3)，首先將式(B.3)針對初始軌跡(nominal policy) $\hat{x}_N, \hat{u}_N$ 作泰勒展開至二階，然後對展開之近似方程式求最佳化，泰勒展開後之型態可表示如下：

$$\begin{aligned}\tilde{L}_N = {} & \delta x_N^T A_N \delta x_N + \delta u_N^T B_N \delta x_N + \\ & \delta u_N^T C_N \delta u_N + D_N^T \delta u_N + E_N^T \delta x_N\end{aligned} \tag{B.5}$$

其中：

$$A_N = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L_N}{\partial x \partial x}\Big|_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \right) \tag{B.6}$$

$$B_N = \frac{\partial^2 L_{N-1}}{\partial u \partial x}\Big|_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \tag{B.7}$$

$$C_N = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L_{N-1}}{\partial u \partial u} \Big|_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \right) \tag{B.8}$$

$$D_N = \frac{\partial L_{N-1}}{\partial u} \Big|_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \tag{B.9}$$

$$E_{N-1} = \frac{\partial L_{N-1}}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \tag{B.10}$$

$$\delta x_N = x_N - \hat{x}_N \qquad \delta u_N = u_N - \hat{u}_N \tag{B.11}$$

此近似方程式之最佳解可表示如下：

$$B_N \delta x_N + 2C_N \delta u_N + D_N = 0$$

$$\delta u_N^* = -\frac{1}{2} C_N^{-1}(B_N \delta x_N + D_N) = \alpha_N + \beta_N \delta x_N \tag{B.12}$$

$$\alpha_N = -\frac{1}{2} C_N^{-1} D_N$$

$$\beta_N = -\frac{1}{2} C_N^{-1} B_N$$

將式(3.12)代回式(3.5)，則第 N 階段之遞歸方程式為：

$$f_N^*(x_N) = \delta x_N P_N \delta x_N + Q_N^T \delta x_N + R_N \tag{B.13}$$

其中：

$$P_N = A_N - \frac{1}{4} B_N^T C_N^{-1} B_N \tag{B.14}$$

$$Q_N = -\frac{1}{2} D_N^T C_N^{-1} B_N + E_N^T \tag{B.15}$$

$$R_N = -\frac{1}{4} D_N^T C_N^{-1} D_N \tag{B.16}$$

於無限制條件微分動態規劃之演算過程中，$\alpha_N, \beta_N, P_N, Q_N$ 必須儲存起來，已備後續時刻演算使用。

b.第 N-1 時刻：此個時刻之最佳化問題可表示如下：

$$\min_{u_{N-1}} \{L_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1}) + f_N^*(x_N)\} \tag{B.17}$$

受限於：

$$x_N = T(x_{N-1},u_{N-1},N-1) \tag{B.18}$$

其中 $f_N^*(x_N)$ 為前一時刻目標函數之近似最佳解。求解此時刻之問題，首先將式(B.18)代入式(B.17)中，形成：

$$\min_{u_t} \{L_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1}) + f_N^*(T(x_{N-1},u_{N-1}))\} \tag{B.19}$$

故此時刻之問題型態，由式(B.17)、(B.18)變成式(B.19)。求解式(B.19)仍將其針對初始軌跡作泰勒二次近似，其型態如下：

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{N-1} &= \delta x_{N-1}^T \tilde{A}_{N-1}\delta x_{N-1} + \delta u_{N-1}^T \tilde{B}_{N-1}\delta x_{N-1} + \\ &\quad \delta u_{N-1}^T \tilde{C}_{N-1}\delta u_{N-1} + \tilde{D}_{N-1}^T\delta u_{N-1} + \tilde{E}_{N-1}^T\delta x_{N-1}\end{aligned} \tag{B.20}$$

其中：

$$\tilde{A}_{N-1} = \frac{1}{2}\left[L_{xx} + 2\left(\frac{\partial T_N}{\partial x}\right)^T P_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial x}\right) + \sum_{i=1}^{n}(Q_N)_i (T_{N,i})_{xx}\right]_{\hat{x}_{N-1},\hat{u}_{N-1}} \tag{B.21}$$

$$\tilde{B}_{N-1} = L_{xu} + 2\left(\frac{\partial T_N}{\partial x}\right)^T P_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial u}\right) + \sum_{i=1}^{n}(Q_N)_i (T_{N,i})_{xu}\Bigg|_{\hat{x}_{N-1},\hat{u}_{N-1}} \tag{B.22}$$

$$\tilde{C}_{N-1} = \frac{1}{2}\left[L_{uu} + 2\left(\frac{\partial T_N}{\partial u}\right)^T P_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial u}\right) + \sum_{i=1}^{n}(Q_N)_i (T_{N,i})_{uu}\right]_{\hat{x}_{N-1},\hat{u}_{N-1}} \tag{B.23}$$

$$\tilde{D}_{N-1} = \nabla_u L + Q_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial u}\right)\Bigg|_{\hat{x}_{N-1},\hat{u}_{N-1}} \tag{B.24}$$

$$\tilde{E}_{N-1} = \nabla_x L + Q_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial x}\right)\Bigg|_{\hat{x}_{N-1},\hat{u}_{N-1}} \tag{B.25}$$

利用一階微分法，式(B.20)之最佳解為：

$$\delta u^*_{N-1} = -\frac{1}{2}\tilde{C}^{-1}_{N-1}(\tilde{B}_{N-1}\delta x_{N-1} + \tilde{D}_{N-1}) = \alpha_{N-1} + \beta_{N-1}\delta x_{N-1} \tag{B.26}$$

$$\alpha_{N-1} = -\frac{1}{2}\tilde{C}^{-1}_{N-1}\tilde{D}_{N-1}$$

$$\beta_{N} = -\frac{1}{2}\tilde{C}^{-1}_{N-1}\tilde{B}_{N-1}$$

同第 N 時刻，將式(B.26)代回式(B.20)得第 N-1 時刻之遞歸方程式如下：

$$f^*_{N-1}(x_{N-1}) = \delta x_{N-1} P_{N-1} \delta x_{N-1} + Q^T_{N-1}\delta x_{N-1} + R_{N-1} \tag{B.27}$$

其中

$$P_{N-1} = \tilde{A}_{N-1} - \frac{1}{4}\tilde{B}^T_{N-1}\tilde{C}^{-1}_{N-1}\tilde{B}_{N-1} \tag{B.28}$$

$$Q_{N-1} = -\frac{1}{2}\tilde{D}^T_{N-1}\tilde{C}^{-1}_{N-1}\tilde{B}_{N-1} + \tilde{E}^T_{N-1} \tag{B.29}$$

$$\tilde{R}_{N-1} = -\frac{1}{4}\tilde{D}^T_{N-1}\tilde{C}^{-1}_{N-1}\tilde{D}_{N-1} \tag{B.30}$$

$\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}, P_{N-1}, Q_{N-1}$ 亦須儲存起來，已備後續時刻使用。

c.任意時刻 t：任意時刻之最佳化問題皆類似第 N-1 時刻，可表示如下：

$$\min_{u_t}\{L_t(x_t,u_t) + f^*_{t+1}(x_{t+1})\} \tag{B.31}$$

受限於：

$$x_{t+1} = T(x_t,u_t,t) \tag{B.32}$$

任意時刻 t 之解題過程亦類似第 N-1 時刻，所不同者為，遞歸方程式 $f^*_{t+1}(x_{t+1})$ 所包含之時刻愈來愈多，直到第 1 個時刻為止。故

任意時刻之最佳控制法則與遞歸方程式可表示如下：

$$\delta u_t^* = -\frac{1}{2}\tilde{C}_t^{-1}(\tilde{B}_t\delta x_t + \tilde{D}_t) = \alpha_t + \beta_t\delta x_t \tag{B.33}$$

$$f_{t+1}^*(x_{t+1}) = \delta x_{t+1}P_{t+1}\delta x_{t+1} + Q_{t+1}^T\delta x_{t+1} + R_{t+1} \tag{B.34}$$

為保證微分動態規劃於每一次之疊代過程(疊代之定義說明於後)，目標函數皆有下降，在後掃之每一個時刻，皆須保證$\tilde{C}_t$為對稱正定矩陣，若$\tilde{C}_t$不為對稱正定矩陣，可強迫令$\tilde{C}_t$為對稱正定，即加入一正定矩陣Γ_t。($\tilde{C}_t = \tilde{C}_t + \Gamma_t$) 或 ($\tilde{C}_t = \frac{1}{2}(\tilde{C}_t + \tilde{C}_t^T)$)。

2.前掃過程：

由於後掃過程儲存所有時刻之最佳控制法則α_t, β_t，且此最佳控制法則可表示成：

$$\delta u_t^* = \alpha_t + \beta_t\delta x_t \tag{B.35}$$

因此若δx_t已知，則δu_t^*可以透過式(B.35)求得。由於$\delta x_t = x_t - \hat{x}_t$。對於第 1 個時刻而言，$x_1$為初始條件，即$\delta x_1 = 0$，因此$\delta u_1^* = \alpha_1$，當$\delta u_1^*$求得後，可由$\delta u_1^* = u_1 - \hat{u}_1$之關係，求得$u_1$，然後利用系統轉換函數之關係，$x_2 = T(x_1, u_1)$可求得$x_2$。當$x_2$獲得後，則可如同第 1 時刻之方式求得一連串之狀態變數$(x_2,..., x_N)$與控制變數$(u_1,..., u_{N-1})$，當求得狀態變數與控制變數後，即完成一次的疊代過程。

由於微分動態規劃於每一個時刻皆將原目標函數或系統轉換函數針對初始軌跡作泰勒二階展開，因此其所得之最佳解只為近似函數之最佳解，並非原函數之最佳解。所以必須利用疊代的方式來獲得原問題之最佳解，而完成一次前、後掃過程即為一次疊代，此時可計算目標函數值是否有改善，並判斷是否已達到收斂標準，若目標函數於疊代過程反而增高，則必須進行線性搜尋。線性搜尋的方式為不改變

目標函數之下降方向，僅減少搜尋之步伐。其方式如下：

$$\delta u_t^* = \varepsilon \alpha_t + \beta_t \delta x_t \tag{B.36}$$

其中 $\varepsilon < 1$。一般而言，線性搜尋於一次疊代過程之次數，以不超過 30 次為限，然針對不同之問題可斟酌增減。

B.2 限制型微分動態規劃(CDDP)

限制型微分動態規劃與無限制條件微分動態規劃最大之不同為，除考慮式(B.1)、(B.2)之問題型態外，又多加了一種型態之限制條件，即不等號限制條件。

$$\vec{A}_t x_t + \vec{B}_t u_t \le b_t \tag{B.37}$$

而在處理限制條件的方法採用二次規劃，其說明如下:

所謂二次規劃的方式，乃是於限制型微分動態規劃之每一個時刻皆採用二次規劃的方式來處理限制條件。而二次規劃所考慮之問題型態可表示如下：

$$\min_{x \in R^n} g^T x + \frac{1}{2} x^T H x \tag{B.38}$$

受限於：

$$\vec{A}_1 x = b_1 \tag{B.39}$$

$$\vec{A}_2 x \ge b_2 \tag{B.40}$$

二次規劃之求解過程，乃是利用疊代的方式，於每一次之疊代過程皆採用等號限制集合(Active set method)的方式來求解，並且不斷的修正等號限制式，直到獲得最佳值。等號限制條件之二次規劃問題說明如下：

$$\min_{x \in R^n} g^T x + \frac{1}{2} x^T H x$$

受限於：

$$\vec{A} x = b$$

此問題之最佳解非常簡單，可利用拉格朗方法(Lagrange

method)，將等號限制式乘上拉格朗乘子(Lagrange multipiers)，然後與目標函數相加而型成：

$$\min_{x,\lambda} \eta(x,\lambda) = g^T x + \frac{1}{2} x^T H x + \lambda^T (\vec{A}x - b)$$

利用一階微分法分別對 x,λ 微分得：

$$\nabla_x \eta(x,\lambda) = H x + g + \vec{A}^T \lambda = 0$$

$$\nabla_\lambda \eta(x,\lambda) = \vec{A}^T x - b = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} H & \vec{A}^T \\ \bar{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ b \end{bmatrix}$$

故最佳解為[Luenberger,1984]

$$\begin{cases} x^* = -H^{-1}[I - \vec{A}^T (\bar{A}H^{-1}\vec{A}^T)^{-1} \bar{A}H^{-1}]g + +H^{-1}\vec{A}^T (\bar{A}H^{-1}\vec{A}^T)^{-1} b \\ \lambda^* = -(\bar{A}H^{-1}\vec{A}^T)^{-1}[\bar{A}H^{-1} g + b] \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} R^* = (\bar{A}H^{-1}\vec{A}^T)^{-1} \bar{A}H^{-1} \\ S^* = H^{-1}(I - \vec{A}^T R^*) \end{cases} \tag{B.41}$$

故

$$\{x^* = -S^* g + R^* b \tag{B.42}$$

對二次規劃有了解後，考慮如下之限制型微分動態規劃問題：

$$\min_{u_t, t=1,\dots,N} \sum_{t=1}^{N} L_t(x_t, u_t) \tag{B.43}$$

受限於：

$$x_{t+1} = T(x_t, u_t, t) \tag{B.44}$$

$$\bar{A}_t x_t + \bar{B}_t u_t \le b_{1,t} \tag{B.45}$$

$$\bar{B}_t u_t \le b_{2,t} \tag{B.46}$$

a.後掃過程：

(1).最後一個時刻(N)：

原問題之目標函數

$$\min_{u_N} \ddot{L}_N = \{L_N(x_N, u_N)\} \tag{B.47}$$

受限於：

$$x_{N+1} = T(x_N, u_N, N) \tag{B.48}$$

$$\bar{A}_t x_t + \bar{B}_t u_t \le b_{1,t} \tag{B.49}$$

$$\bar{B}_t u_t \le b_{2,t} \tag{B.50}$$

求解式(B.47)~(B.50)之問題，首先亦需將式(B.47)針對初始試驗軌跡作泰勒二次展開，其型態如同式(B.5)~(B.10)，並採用相同之符號表示，則展開後之目標函數亦可表示如下：

$$\begin{aligned}\tilde{L}_N &= \delta x_N^T A_N \delta x_N + \delta u_N^T B_N \delta x_N + \\ &\quad \delta u_N^T C_N \delta u_N + D_N^T \delta u_N + E_N^T \delta x_N\end{aligned} \tag{B.51}$$

其中各係數亦類似式(B.6)~(B.10)：

$$A_N = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L_N}{\partial x \partial x}\right)_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \tag{B.52}$$

$$B_N = \frac{\partial^2 L_{N-1}}{\partial u \partial x}\Big|_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \tag{B.53}$$

$$C_N = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L_{N-1}}{\partial u \partial u}\right)_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \tag{B.54}$$

$$D_N = \frac{\partial L_{N-1}}{\partial u}\Big|_{\hat{x}_N, \hat{u}_N} \tag{B.55}$$

$$E_{N-1} = \frac{\partial L_{N-1}}{\partial x}\Big|_{\hat{x}_N,\hat{u}_N} \tag{B.56}$$

$$\delta x_N = x_N - \hat{x}_N \qquad \delta u_N = u_N - \hat{u}_N \tag{B.57}$$

雖然式(B.51)與式(B.5)相似，然求解式(B.51)必須考慮不等號限制條件式(B.50)之影響，重寫此近似方程式之最佳化問題如下：

$$\min_{u_N}\{\delta x_N^T A_N \delta x_N + \delta u_N^T B_N \delta x_N + \delta u_N^T C_N \delta u_N + D_N^T \delta u_N + E_N^T \delta x_N\} \tag{B.58}$$

受限於：

$$\bar{B}_N\, \delta u_N \le \delta b_{2,N} \tag{B.59}$$

式(B.58)、(B.59)所形成之最佳化問題，包含了狀態變數與決策變數，其問題型態與二次規劃不相吻合，因此需要近一步處理才可使用二次規劃求解。本研究對於此一情況，作了一個假設，即假設 $\delta x_N = 0$，則式(B.58)變成

$$\min_{u_N}\{\delta u_N^T C_N \delta u_N + D_N^T \delta u_N\} \tag{B.60}$$

由式(B.59)、(B.58)即可採用二次規劃求解此系統中之等號限制條件如下：

$$\bar{B}_N\, \delta u_N = \delta b_{2,N} \tag{B.61}$$

由於此階段之二次規劃所獲得之 δu_N^* 無法直接應用於後續之運算，欲形成目標函數之遞迴方程式，必須將 δu_N^* 拆成 $\delta u_N^* = \alpha_N + \beta_N \delta x_N$ 之型態，因此重新推導式(B.58)受限於式(B.61)之最佳化問題如下：

$$\min_{u_N}\{\tfrac{1}{2}(\delta u_N^T 2C_N \delta u_N) + (B_N \delta x_N + D_N^T)\delta u_N\} \tag{B.58}$$

受限於：

$$\bar{B}_N\, \delta u_N = \delta b_{2,N} \tag{B.61}$$

式(B.58)、(B.61)之問題型態即為標準之等號限制條件二次規劃問題，故最佳控制變數值可表示如下：

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 2C_N & \hat{\bar{B}}_N^T \\ \hat{\bar{B}}_N & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta u_N \\ \lambda_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(B_N\delta x_N + D_N^T) \\ \delta b_{2,N} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} R_N^* = (\hat{\bar{B}}_N C_N^{-1}\hat{\bar{B}}_N^T)^{-1}\hat{\bar{B}}_N C_N^{-1} \\ S_N^* = \frac{1}{2}C_N^{-1}(I-\hat{\bar{B}}_N^T R_N^*) \end{cases} \tag{B.62}$$

故

$$\delta u_N^* = (-S_N^* D_N + R_N^{*,T}\delta b_{2,N}) + (-S_N^* B_N)\delta x_N = \alpha_N + \beta_N \delta x_N \tag{B.63}$$

式(B.63)之獲得是基於$\delta x_N = 0$之假設情況下，式(B.60)、(B.61)發生等號限制條件之二次規劃結果，此一$\delta x_N = 0$之假設是否可行將說明於後之前掃過程。如同無限制條件微分動態規劃，將式(3.63)代回式(3.58)可得此階段之最佳遞迴方程式如下：

$$f_N^*(\delta x_N) = \delta x_N P_N \delta x_N + Q_N^T \delta x_N \tag{B.64}$$

其中：

$$P_N = A_N - \beta_N^T C_N \beta_N + \beta_N^T B_N \tag{B.65}$$

$$Q_N = E_N^T + \alpha_N^T B_N + 2\alpha_N^T C_N \beta_N + D_N^T \beta_N \tag{B.66}$$

(2).第 N-1 時刻：此個時刻之最佳化問題可表示如下：

$$\min_{u_{N-1}}\{L_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1}) + f_N^*(x_N)\} \tag{B.67}$$

受限於：

$$x_N = T(x_{N-1},u_{N-1},N-1) \tag{B.68}$$

$$\vec{A}_{N-1}x_{N-1} + \vec{B}_{N-1}u_{N-1} \le b_{1,N-1} \tag{B.69}$$

$$\bar{B}_{N-1}u_{N-1} \le b_{2,N-1} \tag{B.70}$$

其中 $f_N^*(x_N)$ 為前一時刻目標函數之近似最佳解。求解此時刻之問題，首先亦將式(B.68)代入式(B.67)中，則目標函數形成：

$$\min_{u_t}\{L_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})+f_N^*(T(x_{N-1},u_{N-1}))\} \tag{B.71}$$

故此時刻之問題型態變成式(B.71)受限於式(B.70)，仍針對初始軌跡作泰勒二次近似，其型態完全類似式(B.22)，表示如下：

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{N-1}&=\delta x_{N-1}^T\tilde{A}_{N-1}\delta x_{N-1}+\delta u_{N-1}^T\tilde{B}_{N-1}\delta x_{N-1}+\\&\quad\delta u_{N-1}^T\tilde{C}_{N-1}\delta u_{N-1}+\tilde{D}_{N-1}^T\delta u_{N-1}+\tilde{E}_{N-1}^T\delta x_{N-1}\end{aligned} \tag{B.72}$$

其中之 $\tilde{A}_{N-1}$，$\tilde{B}_{N-1}$，$\tilde{C}_{N-1}$，$\tilde{D}_{N-1}$，$\tilde{E}_{N-1}$ 亦類似式(B.23)~(B.27)，其型態可表示如下：

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{N-1}&=\tfrac{1}{2}L_{xx}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_{N-1}}\right)^T(y_{N-1})_{ff}\left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_{N-1}}\right)+\left(\frac{\partial T_N}{\partial x_{N-1}}\right)^T P_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial x_{N-1}}\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(Q_{N-1})_i(T_{N,i})_{xx}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{N-1}&=L_{xu}+\left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial u_{N-1}}\right)^T(y_{N-1})_{ff}\left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_{N-1}}\right)+2\left(\frac{\partial T_N}{\partial x_{N-1}}\right)^T P_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial u_{N-1}}\right)\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}(Q_N)_i(T_{N,i})_{xu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{N-1}&=\tfrac{1}{2}L_{uu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial u_{N-1}}\right)^T(y_{N-1})_{ff}\left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial u_{N-1}}\right)+\left(\frac{\partial T_N}{\partial u_{N-1}}\right)^T P_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial u_{N-1}}\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(Q_{N-1})_i(T_{N,i})_{uu}\right)\end{aligned}$$

$$\tilde{D}_{N-1}=\nabla_u L+Q_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial u}\right)$$

$$\tilde{E}_{N-1}=\nabla_x L+Q_N\left(\frac{\partial T_N}{\partial x}\right)$$

故此階段所考慮之近似問題型態如下：

$$\min_{u_N}\{\delta x^T_{N-1}\tilde{A}_{N-1}\delta x_{N-1} + \delta u^T_{N-1}\tilde{B}_{N-1}\delta x_{N-1} + \delta u^T_{N-1}\tilde{C}_{N-1}\delta u_{N-1} + \tilde{D}^T_{N-1}\delta u_{N-1} + \tilde{E}^T_{N-1}\delta x_{N-1}\} \tag{B.73}$$

受限於：

$$\bar{B}_{N-1}\,\delta u_{N-1} \le \delta b_{2,N-1} \tag{B.74}$$

觀察式(B.73)、(B.74)完全相似於式(B.58)、(B.59)，故式(B.73)、(B.74)之解法完全與第 N 階段相同，故此階段之故最佳控制變數值可表示為：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\tilde{C}_{N-1} & \hat{\bar{B}}^T_{N-1} \\ \hat{\bar{B}}_{N-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \lambda_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\tilde{B}_{N-1}\delta x_{N-1} + \tilde{D}^T_{N-1}) \\ \delta b_{2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} R^*_{N-1} = (\hat{\bar{B}}_{N-1}\tilde{C}^{-1}_{N-1}\hat{\bar{B}}^T_{N-1})^{-1}\hat{\bar{B}}_{N-1}\tilde{C}^{-1}_{N-1} \\ S^*_{N-1} = \frac{1}{2}\tilde{C}^{-1}_{N-1}(I - \hat{\bar{B}}^T_{N-1}R^*_{N-1}) \end{cases} \tag{B.75}$$

故

$$\begin{aligned} \delta u^*_{N-1} &= (-S^*_{N=1}\tilde{D}_{N-1} + R^{*,T}_{N-1}\delta b_{2,N-1}) + (-S^*_{N-1}\tilde{B}_{N-1})\delta x_{N-1} \\ &= \alpha_{N-1} + \beta_{N-1}\delta x_{N-1} \end{aligned} \tag{B.76}$$

此階段之最佳遞迴方程式如下：

$$f^*_{N-1}(\delta x_{N-1}) = \delta x_{N-1}P_{N-1}\delta x_{N-1} + Q^T_{N-1}\delta x_{N-1} \tag{B.77}$$

其中：

$$P_{N-1} = \tilde{A}_{N-1} - \beta^T_N\tilde{C}_{N-1}\beta_N + \beta^T_N\tilde{B}_{N-1} \tag{B.78}$$

$$Q_{N-1} = \tilde{E}^T_{N-1} + \alpha^T_N\tilde{B}_{N-1} + 2\alpha^T_N\tilde{C}_{N-1}\beta_N + \tilde{D}^T_N\beta_N \tag{B.79}$$

(3).任意時刻 t：任意時刻之最佳化問題皆類似第 N-1 時刻，可表示如下：

$$\min_{u_t}\{L_t(x_t,u_t)+f^*_{t+1}(x_{t+1})\} \tag{B.80}$$

受限於：

$$x_{t+1}=T(x_t,u_t,t) \tag{B.81}$$

$$\bar{A}_t x_t+\bar{B}_t u_t \le b_{1,t} \tag{B.82}$$

$$\bar{B}_t u_t \le b_{2,t} \tag{B.83}$$

任意時刻t之解題過程亦類似第 N-1 時刻，所不同者為，遞回方程式 $f^*_{t+1}(x_{t+1})$所包含之時刻愈來愈多，直到第 1 個時刻為止。故任意時刻之最佳控制法則與遞回方程式可表示如下：

$$\delta u^*_t=\alpha_t+\beta_t\delta x_t \tag{B.84}$$

$$f^*_{t+1}(x_{t+1})=\delta x_{t+1}P_{t+1}\delta x_{t+1}+Q^T_{t+1}\delta x_{t+1} \tag{B.85}$$

於後掃過程中必須紀錄每一時刻之目標函數泰勒展開時之各係數 $\tilde{A}_t$，$\tilde{B}_t$，$\tilde{C}_t$，$\tilde{D}_t$，$\tilde{E}_t$已備前掃使用。

b.前掃過程：

於限制型微分動態規劃之前掃過程，並不同於無限制式之微分動態規劃之前掃過程。無限制式微分動態規劃之前掃過程，乃直接採用後掃過程所得之α_t,β_t來計算最佳控制變數值，而限制型微分動態規劃之前掃過程，本研究亦採用不等號限制條件之二次規劃來求得最佳控制變數值。回顧限制型微分動態規劃之後掃過程，本研究假設任一時刻之$\delta x_t=0$，並在此條件下，使用不等號限制條件之二次規劃來求得等號限制條件之型態，然後在應用此等號限制條件來求得最佳控制法則，以便能計算每一時刻之遞迴方程式。然而於前掃過程中，由於第 1 個時刻之狀態變數為初始條件，因此第 1 個時刻之$\delta x_1=0$，且其隨後之任意階段t，δx_t已不在是未知數，因此前掃過程並無假設$\delta x_t=0$之困擾。然而後掃

過程之假設，是否會影響問題之解答，回答此問題需從微分動態規劃之演算過程來看，微分動態規劃是採用疊代的方式，不斷的修正初始試驗軌跡，而 δu_t ，δx_t 之表示方式為：

$$\delta u_t = u_t - \hat{u}_t$$

$$\delta x_t = x_t - \hat{x}_t$$

當隨這疊代過程之進行，其計算所得之 x_t ，u_t 會愈來愈接近 $\hat{x}_t$ ，$\hat{u}_t$ ，因此若微分動態規劃收斂時，任一時刻之 $\delta u_t = 0$ ，$\delta x_t = 0$ 。故當模式接近收斂點時，此一假設為正確可行的。以下將說明前掃之計算過程：

(1).前掃第 1 個時刻所考慮之問題如下：

$$\min_{u_1}\{\tfrac{1}{2}(\delta u_1^T 2\tilde{C}_1 \delta u_1) + (\delta x_1 \tilde{B}_1^T + \tilde{D}_1^T)\delta u_1\} \tag{B.86}$$

受限於：

$$\bar{B}_N \, \delta u_1 \le \delta b_{2,1} \tag{B.87}$$

式(B.86)、(B.87)為標準之不等號限制之二次規劃問題，故可直接應用不等號限制之二次規劃求解最佳控制值 δu_1 。當第 1 個時刻之最佳控制值 u_1 求得後，可將其代入系統之轉換函數中，計算下一個時刻之狀態變數值(x_2)，並計算(δx_2)：

$$x_2 = T(x_1, u_1) \qquad \delta x_2 = x_2 - \hat{x}_2$$

(2).任一時刻 t 所考慮之問題如下：

當 δx_2 計算獲得後，則第二個時刻之最佳化問題變成與第 1 個時刻相同，且任意時刻 t 之問題亦具有相同之型態：

$$\min_{u_N}\{\delta u_t^T \tilde{C}_t \delta u_t + (\delta x_t \tilde{B}_t^T + +\tilde{D}_t^T)\delta u_t\} \tag{B.88}$$

受限於：

$$\bar{B}_t \, \delta u_t \le \delta b_{2,t} \tag{B.89}$$

經式(B.88)、(B.89)可計算出所有時刻之δu_t與δx_t，如此完成一次之疊代過程。

(3).線性收尋：

無限制式微分動態規劃之線性收尋方式，是採用式(B.38)的方式來避免目標函數於疊代過程中反而有增大情形。然而於限制型微分動態規劃中，根據 Murry and Yakowitz, [1979]之論述，式(B.38)並不能適用於有限制條件之情形，因此他們建議採用處罰項之方式來達到線性收尋之目的，其方式為當目標函數於疊代過程中有增大之情形時，則於前掃過程中之目標函數中加入一正定、對稱之矩陣Γ，以達到線性收尋之目的，其型態可表示如下：

$$\min_{u_N}\{\delta u_t^T(\tilde{C}_t+\Gamma)\delta u_t+(\delta x_t\tilde{B}_t^T++\tilde{D}_t^T)\delta u_t\} \tag{B.90}$$

由於採用式(B.90)之線性收尋方式，必須重新計算前掃過程之每一個時刻，因此會大幅增加計算量，因此根據最佳化理論，可採用以下之方式來達到線性收尋之目的：

$$\delta u_{t,k+1}=\varepsilon\delta u_{t,k} \tag{B.91}$$

其中指標k為線性收尋之疊代數。由本研究實際之應用情形，採用式(B.91)或式(B.90)之方式皆可獲得滿足限制條件之最佳控制值u_t。