# 附錄C 卡門濾波(Kalman Filtering)理論

所謂濾波依 R.E.Kalman 氏定義:「濾波為一種數學上之運作，為一已知動態系統上根據過去既有的資料或觀測值而對現在、未來或該系統過去之變數，做更精確的描述。」

在推估及預測的理論中，目前應用最為廣泛莫過於 1960 年發表之卡門濾波理論，此理論之特性如下:

(1) 卡門濾波理論之構成，為將系統所推估之狀態變數，經觀測系統即時校正，此為卡門濾波理論之一大特徵。

(2) 當演算時，無需保存以往之資料，在施以逐項計算後，即可求得最適宜之解答。是故適合電子計算機之計算，尤其對於線上計算(on-line)，更能發揮其功能。

(3) 卡門濾波理論能於演算過程中可即時校正參數及預測輸出量。

卡門濾波理論因具有以上之特徵，故已被廣泛的應用在控制工學及其他各項領域。

## C.1 卡門濾波理論基礎

卡門濾波理論基礎建立在最小線性變異量誤差估計法(LMV 估計法)與正交法則(Orthogonality Principle)之上，在此分別作一介紹:

1.最小線性變異量誤差估計法(Linear Minimum Variance of Error Estimation，LMV Estimator):

LMV Estimator 的推估問題可以看做 Bayes Estimator 的最佳化，其目的即是使貝貽風險 (Bayes risk)達到最小，其主要有三個步驟：

(1) 選定平方差損失函數(Squared-error loss function)為損失函數(Loss function)，其定義如下所示:

$$L(X,\hat{X}) = \left\| X - \hat{X} \right\|^2 = (X - \hat{X})^T (X - \hat{X}) \qquad \text{(C.1)}$$

其中

X ：真值

$\hat{X}$ ：為 X 之最佳推估值

(2) 定義貝貽風險 (Bayes risk ，$\beta(e)$):

選用 loss function 的期望值，作為貝貽風險可得下式：

$$\begin{aligned}\beta(e) &= E\{[x-e(Y)]^T[x-e(Y)]\}\\ &= \int_Y \int_X [a-e(Y)]^T[a-e(Y)]\, f_{x,Y}(a,Y)\,dadY\\ &= \int_Y \{ \int_X [a-e(Y)]^T[a-e(Y)]\, f_{x|Y}(a,Y)\,da \} f_Y(Y)\,dY \qquad \text{(C.2)}\end{aligned}$$

其中

e(Y)：為利用觀測資料 Y 所得之最佳線性推估值

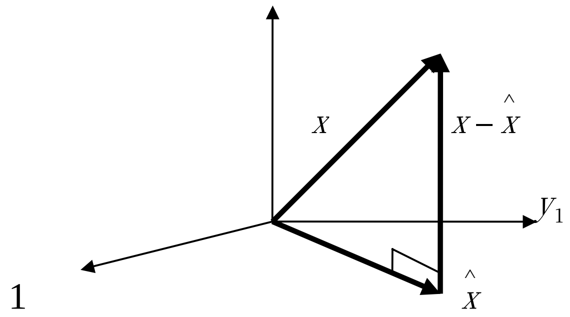
$f_{x,Y}(a,Y)$ ：為 X Y 共同機率分佈函數(The joint probability density function)

$f_{x|Y}(a,Y)$ ：為 X 之條件機率分佈函數(The conditional probability density function)

$f_Y(Y)$ ：為 Y 之機率分佈函數(The probability density function)

(3) 根據貝貽法則，選擇最佳的線性估計，使貝貽風險為最小，即使步驟（1）中的損失函數之期望值為最小。

2.正交法則(Orthogonality Principle)




$$S = span\{1, y_1\}$$

由 LMV 估計法所求之推估值為如下之型式:

$$e_0(Y) = \hat{x} = a_0 + b_0^{T} Y \tag{C.3}$$

則由上圖可明顯看出 $e_0(Y)$ 會滿足下列兩點:

(1) LMV估計法所得最佳推估值$e_0(Y)$為不偏估(Unbiased),即:

$$\begin{aligned} &E(x) = E[e_0(Y)] \\ \text{或}\quad &E[x - (a_0 + b_0^T Y)] = 0 \end{aligned} \tag{C.4}$$

即[x-$e_0$(Y)]與 1 正交。

(2) LMV估計所得最佳推估值$e_0$(Y)之誤差與資料Y(即Y=[$y_1$…..$y_m$])成正交。

$$E\{[(x - e_0(Y)]Y\} = E\{[x - (a_0 + b_0^T Y)]Y\} = 0_{m\times 1} \tag{C.5}$$

## C.2 卡門濾波理論之假設及推導

### 1.卡門濾波理論之假設

在具備了LMV估計法與正交法則理論基礎之後,考慮時間不連續的系統,其系統方程式與觀測方程式分別如下所示:

系統方程式:

$$x_{k+1} = \phi_k x_k + G_k w_k \qquad k = 0,1,\ldots\ldots \tag{C.6}$$

觀測方程式:

$$y_k = C_k x_k + v_k \qquad k = 1,2,...... \tag{C.7}$$

其中

k：表時刻（Time step）

$x_k$:k時刻之系統狀態向量( System state vector at k-th time step）

$\phi_k$：k時刻之狀態轉移矩陣（State transition matrix at k-th time step）

$C_k$：k時刻之觀測矩陣（Observation matrix at k-th time step）

$w_k$：k時刻之狀態誤差向量（Random noise signal from the system process noise random process）

$v_k$:k時刻之觀測誤差向量( Random noise signal from the system measurement process noise random process）

$y_k$：k時刻之觀測向量（Vector representing the measurement of the system at k-th time step）

$G_k$：k時刻之系統關連矩陣（System associated matrix at k-th time step）

並假設：

(1) $w_K$，$v_K$ 為不相關期望值均為零且相互獨立之白噪音 (White noise)。其共變量如下所示：

$$E(W_k W_L{}^T) = \begin{cases} Q_k & k = L \\ 0_{P\times P} & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$E(V_k V_L{}^T) = \begin{cases} R_k & k = L \\ 0_{m\times m} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{C.8}$$
$$E(W_k V_L{}^T) = 0_{p\times m} \qquad \text{for all } k, L$$

(2) 起始狀態之 $x_0$ 為一隨機向量，與系統過程和觀測噪音皆不相關。

(3) $x_0$ 之期望值為 $\overline{x}_0$ ，其定義如下：

$$\overline{x}_0 = E(x_0) \tag{C.9}$$

且其共變量為

$$Cov(x_0) = E[(x_0 - \overline{x}_0)(x_0 - \overline{x}_0)^T] \tag{C.10}$$

2.卡門濾波理論之推導

(1) $\hat{x}^c$ 為 LMV 估計法利用 $y_k - \overline{y}_k$ ，估算 $x_k - \overline{x}_k$ 所得之最佳推估值。

則
$$\hat{x}^c = b_x + K(y_k - \overline{y}_k) \tag{C.11}$$

由正交法則可得 $\hat{x}^c$ 為不偏估值，所以

$$E(\hat{x}^c) = E(x - \overline{x}_k) \tag{C.12}$$

且 $y_k - \overline{y}_k$ 與 1 正交

可得
$$E(y_k) = E(\overline{y}_k) \tag{C.13}$$

$$b_x = E(\hat{x}^c) = E(x - \overline{x}_k) = 0_{n\times t} \tag{C.14}$$

則

$$\hat{x}^c = K(y_k - \overline{y}_k) \tag{C.15}$$

(2) 由(1)之推導可得

$$\hat{x} = \overline{x} + \hat{x}^c \tag{C.16}$$

所以

$$\hat{x} = \overline{x} + \hat{x}^c = \overline{x} + K(y_k - \overline{y}_k) \tag{C.17}$$

(3) 分別由系統方程式和觀測方式得到下式：

$$\bar{x}_k = \phi_{k-1}\hat{x}_{k-1} \qquad (C.18)$$

$$\bar{y}_k = C_k\phi_{k-1}\hat{x}_{k-1} \qquad (C.19)$$

(4)由於$K_k(y_k-\bar{y}_k)$為 LMV 估計法利用$(y_k-\bar{y}_k)$資料，估算$(x_k-\bar{x}_k)$所得之最佳估值，故由正交法則可得下式:

$$E\{[x_k-\bar{x}_k-K_k(y_k-\bar{y}_k)](y_k-\bar{y}_k)^T\}=0_{n\times m} \qquad (C.20)$$

(5)由於

$$y_k-\bar{y}_k=C_k(x_k-\bar{x}_k)+v_k \qquad (C.21)$$

所以

$$E[(x_k-\bar{x}_k)(y_k-\bar{y}_k)^T]=E\{(x_k-\bar{x}_k)[C_k(x_k-\bar{x}_k)+v_k]^T\}$$

$$=E\{(x_k-\bar{x}_k)[(x_k-\bar{x}_k)^T C_k{}^T+v_k]^T\}$$

$$=E[(x_k-\bar{x}_k)(x_k-\bar{x}_k)^T]C_k{}^T \qquad (C.22)$$

定義 $M_k$

$$E[(x_k-\bar{x}_k)(x_k-\bar{x}_k)^T]\overset{\Delta}{=}M_k \qquad (C.23)$$

所以

$$E[(x_k-\bar{x}_k)(y_k-\bar{y}_k)^T]=M_kC_k{}^T \qquad (C.24)$$

(6)同理

$$E[(y_k-\bar{y}_k)(y_k-\bar{y}_k)^T]$$

$$=C_kE[(x_k-\bar{x}_k)(x_k-\bar{x}_k)^T]C_k{}^T+E(v_kv_k{}^T)$$

$$=C_kM_kC_k{}^T+R_k \qquad (C.25)$$

(7) 由 (4)、(5)、(6) 可得

$$K_k = M_k C_k{}^T (C_k M_k C_k{}^T + R_k)^{-1} \qquad (C.26)$$

(8) 根據 $M_k$ 之定義與

$$x_k - \bar{x}_k = \phi_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + G_{k-1} w_{k-1} \qquad (C.27)$$

且定義 $$P_k = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \qquad (C.28)$$

可得 $$M_k = \phi_{k-1} P_{k-1} \phi_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T \qquad (C.29)$$

(9)由於

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k(y_k - \hat{y}_k) \qquad (C.30)$$

所以

$$\begin{aligned} P_k &= E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \\ &= E\{ [x_k - \bar{x}_k - K_k(y_k - \bar{y}_k)][x_k - \bar{x}_k - K_k(y_k - \bar{y}_k)]^T \} \\ &= M_k - M_k C_k^T K_k^T - K_k C_k M_k + K_k (C_k M_k C_k^T + R_k) K_k^T \end{aligned} \qquad (C.31)$$

又因為

$$K_k = M_k C_k{}^T (C_k M_k C_k{}^T + R_k)^{-1} \qquad (C.32)$$

即

$$K_k (C_k M_k C_k{}^T + R_k) = M_k C_k{}^T \qquad (C.33)$$

所以

$$\begin{aligned} P_k &= M_k - M_k C_k{}^T (C_k M_k C_k{}^T + R_k)^{-1} C_k M_k \\ &= M_k - C_k (C_k M_k C_k{}^T + R_k) K_k{}^T \\ &= M_k - M_k C_k{}^T K_k{}^T \\ &= M_k - K_k C_k M_k \end{aligned} \qquad (C.34)$$

由以上推導可得如下之卡門濾波運算過程：

$$\bar{x}_k = \phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}$$

$$M_k = \phi_{k-1}P_{k-1}\phi_{k-1}{}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}{}^T$$

$$K_k = M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - C_k \bar{x}_k)$$

$$P_k = (I - K_k C_k) M_k$$

其中

$\bar{x}_k$：為系統推估值

$\hat{x}_k$：為卡門濾波修正值

$M_k$：為系統推估值之共變異矩陣

$K_k$：為卡門權重(Kalman gain)

$P_k$：為卡門濾波修正值之共變矩陣

$I$：單位向量