第二章 整體規劃流程及模式定義

2.1 整體規劃流程

本研究主要是一個整合性地下水最佳營運之最佳規劃，作法是以非耦合方式(Uncouple)優選抽水系統最佳規劃策略及觀測系統最佳設計策略，兩者間並透過觀測值水位的更新做一個結合。在地下水抽水系統之最佳規劃是以最小成本為目標函數，其中成本包括了設井成本與抽水井之操作成本，限制條件以地下水流數值模式為等號限制式，並以地下水水位為防止超抽為不等號限制式及抽水井之抽水井能力上、下限。其中考量水位下限之目的，是希望抽水所引致之水位下降不致危害環境，而抽水能力則是滿足一般工程對抽水井之要求；地下水觀測系統最佳設計模式方面，水位觀測成本僅考量觀測井操作成本，不包含觀測井設井固定成本，且考量最終時刻水位觀測精度要符合精度限制式。

為了能更清楚說明優選抽水系統最佳規劃策略及觀測系統最佳設計策略之相互影響，在整個演算架構中，主要分成三個部分，其關係圖如圖 2.1-1 所示。

第一個部分整合遺傳演算法(GA)與限制型微分動態規劃(CDDP)優選各時刻的抽水井位置及抽水量，並輸出F_t、G_t、u_t、z_t等係數矩陣供優選觀測系統應用，各係數矩陣是從 2.2 節中(2.2.8)式，把逆矩陣分別乘入各項可得到(2.1.1)式

$$h_{t+1} = F\_t\ h_t + G\_t\ u_t - z\_t \qquad (2.1.1)$$

第二個部分整合遺傳演算法與卡門濾波優選最佳觀測井網觀測矩陣。

第三個部分是利用優選的觀測井網來進行觀測，來得到觀測水位，並進行水位更新。在本研究中因為需要利用觀測方程式來得到觀

測水位，將於 3.3 節中對此步驟做進一步說明，水位更新乃是應用卡門濾波理論中之卡門權重運算更新。

整個流程的主體為抽水系統最佳規劃模式與觀測系統最佳設計模式，抽水模式會將優選所得的抽水系統相關資料輸出給觀測模式當輸入檔，觀測設計模式則根據優選的抽水井位及相關係數矩陣優選觀測系統，再以此觀測系統所得之觀測資料更新水位後傳入下一時刻之抽水規劃模式，如此反覆運算，即可讓抽水模式，持續保有觀測值資訊更新。圖 2.1-2 則可以進一步看出在某一時刻之流程，以下分為下列幾個步驟說明:

(1) 更新各時刻之水位值(見下 3.3 節說明)，作為優選抽水策略之水位初始條件。

(2) 並再以抽水策略之成本為考量，重新優選該時刻至最後時刻之抽水系統及策略。

(3) 以優選出之抽水系統及策略，得到地下水系統描述(相關之係數矩陣)，並推估優選之抽水策略如何影響系統不確定性(即系統噪音)。

(4) 以所得地下水系統描述及系統不確定性，重新優選該時刻至最後時刻之觀測策略。

如此重覆上述之步驟直至最後之前一時刻。圖 2.1-2 所代表之流程具有即時操作之精神，且依圖中之流程可發現觀測策略對於抽水策略之影響是透過觀測所得之水位值，來影響下一時刻之抽水策略，而非在同一時刻之優選過程中相互影響；也就是說，抽水策略與觀測策略之優選可視為獨立分開優選之問題，因此整個流程的核心為地下水抽水系統最佳規劃及地下水觀測系統最佳設計兩部分。

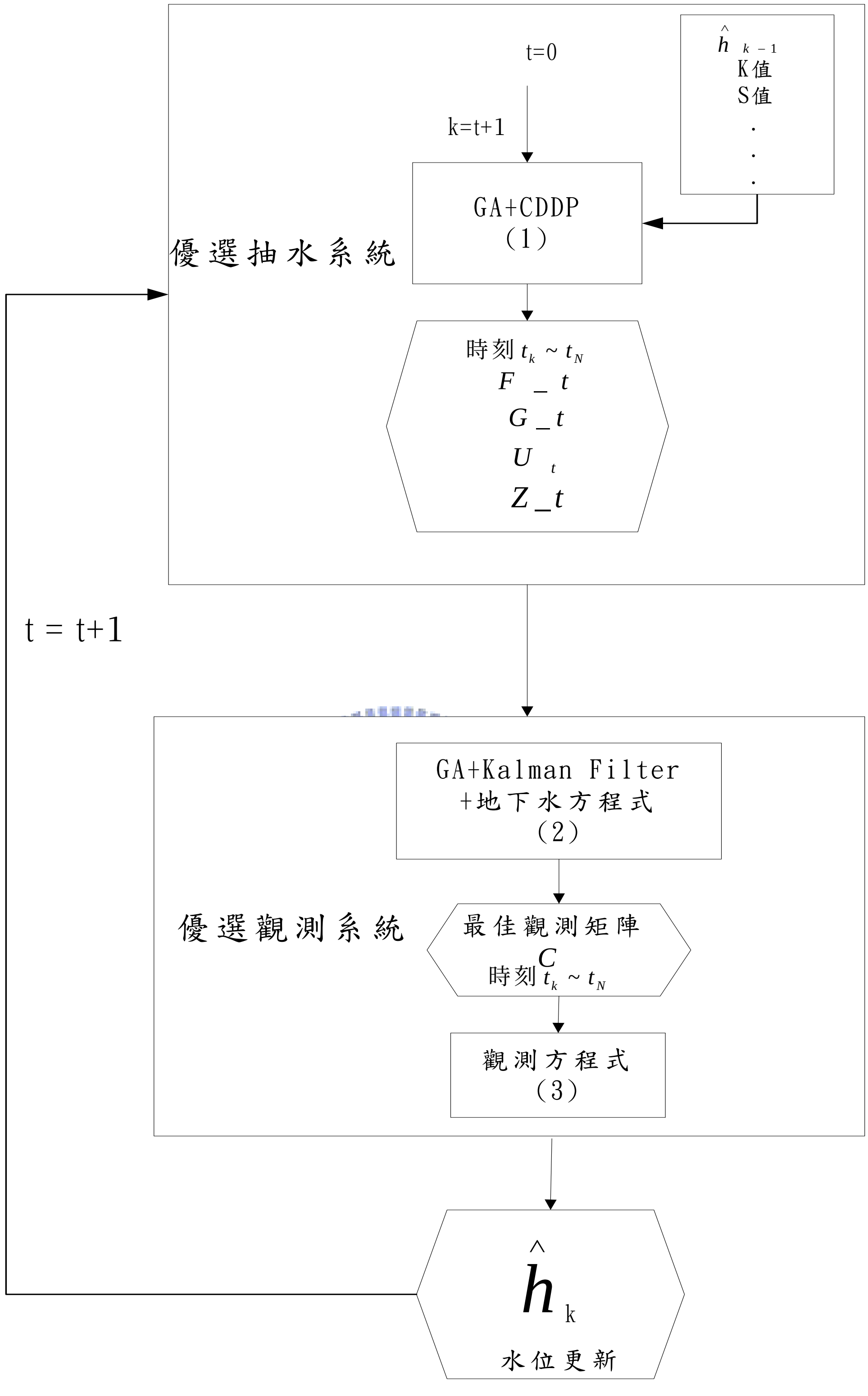

圖 2.1-1 抽水策略與觀測策略關係流程圖

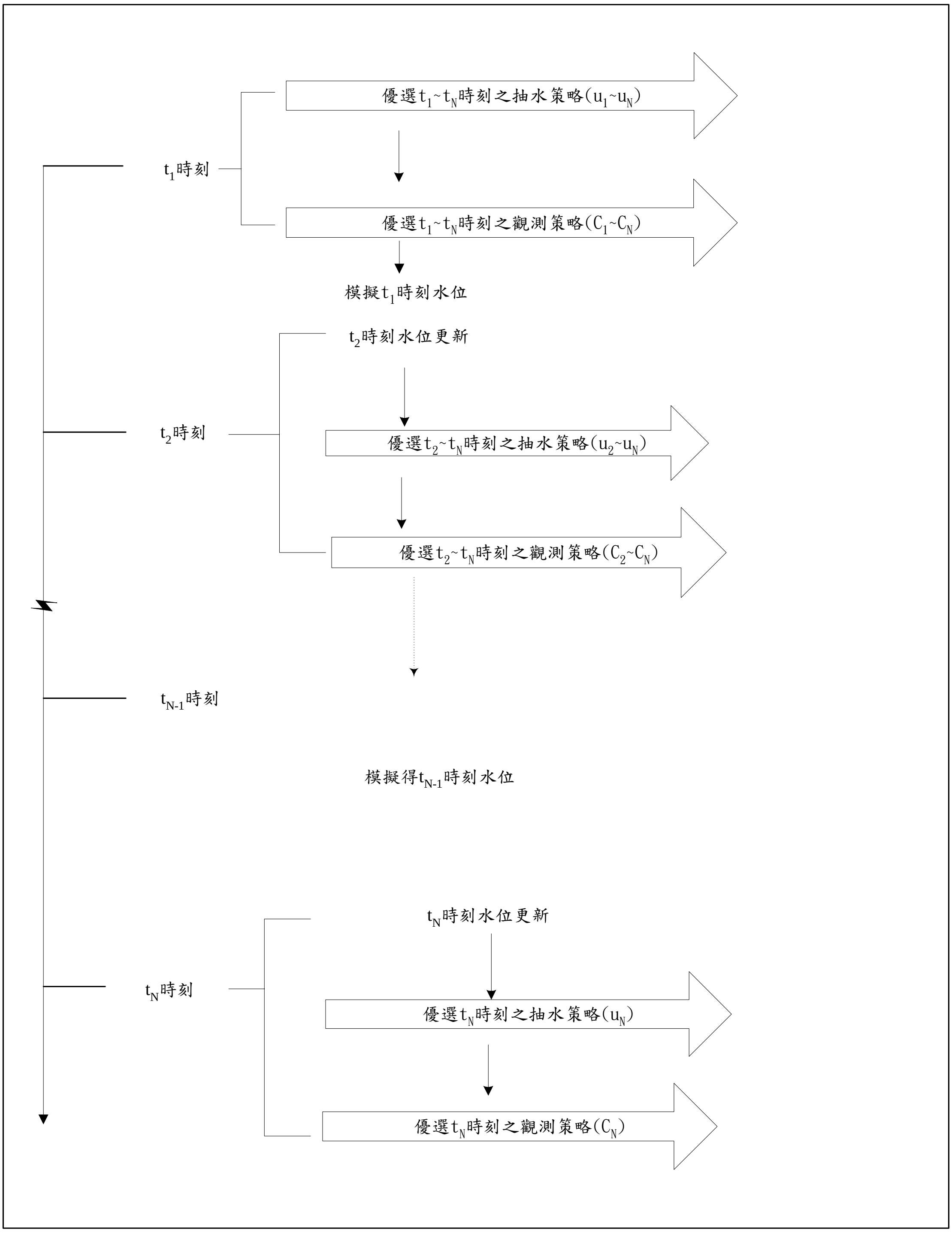

圖2.1-2 各時刻抽水策略與觀測策略相互影響圖

2.2 地下水流數值模式

本研究針對地下水拘限含水層水量管理模式之最佳化設計提出討論，在拘限含水層地下水流數值模式方面，本研究採用 ISOQUA 來模擬，基本上 ISOQUA 是用 Galerkin’s 有限元素法及隱式有限差分法來處理地下水流控制方程式，本模式所考量之地下水流控制方程式為一二維、均質、等向拘限含水層程式，其控制方程式如下

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\sum_{j\in\Omega}u_j\delta\left(x_j,y_j\right)=S_s\frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{.............(2.2.1)}$$

其中：

h：地下水頭

K_{xx} ：x 方向的水力傳導係數

K_{yy} ：y 方向的水力傳導係數

Ω：模式中可能設井的位置

s_S ：拘限含水層比儲水量

u_j ：抽水井於 $\left(x_j,y_j\right)$ 方向的抽水率

$\delta\left(x_j,y_j\right)$ ：位於 $\left(x_j,y_j\right)$ 之 δ 函數

邊界條件為定水頭邊界條件(Dirchlet Condictions)，如下式

$$h=h_d(x_b,y_b) \quad \text{...(2.2.2)}$$

(2.2.1)式之地下水流方程式採用 Galerkin’s 有限元素法處理空間上微分項，採用隱式有限差分法處理時間上微分項。在有限元素法中研究區域的水頭 h 可近似如下：

$$h(x,y,t)\approx\hat{h}=\sum_{i=1}^{nT}h_i(t)\omega_i(x,y) \quad \text{.......................................(2.2.3)}$$

其中：

$h(x,y,t)$：空間中水頭分佈

$\hat{h}$：空間中水頭之近似分佈

$h_i(t)$：節點 i 的水頭

$\omega_i(x,y)$：形狀函數(Basis Function)

nT：空間中節點的總數

將(2.2.3)式代入地下水方程式(2.2.1)式則可以運算元的型式寫成：

$$L\left(\hat{h}\right) = R_r \neq 0 \quad \text{...(2.2.4)}$$

其中：

L：微分方程式運算元(Differential Operator)

R_r：殘差(Residual)

若 $\hat{h}$ 為正確解，則殘差 Rr 為零，在殘差權重法(the method of Weighted Residual)中，即選定適當之加權函數，使殘差之積分值為零。則(2.2.4)式可寫成如下：

$$\iint L\left(\hat{h}\right)\omega_i(x,y)dxdy = 0, \ for \quad i = 1, nT \quad \text{.................................(2.2.5)}$$

上式經過分部積分後，由矩陣形式表示如下：

$$[A(h)]\{h\} + [B]\left\{\frac{dh}{dt}\right\} + \{F_h\} = [L_h]\{u_t\} \quad \text{..........................(2.2.6)}$$

其中：

$[A(h)]$：傳導係數矩陣(conductance matrix)，可表示成下式：

$$[A(h)]_{ij}^e = \left(\iint\left(K_{xx}h\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\frac{\partial\omega_j}{\partial x} + K_{yy}h\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\frac{\partial\omega_j}{\partial y}\right)dxdy\right)^e$$

$[B]$：儲水係數矩陣(capacitance matrix) ，可表示成下式：

$$[B]_{ij}^{e}=\left(\iint S\omega_i\omega_j dxdy\right)^{e}$$

$[F_h]$：邊界條件，可表示成下式：

$$\{F_h\}_i^e=\left(-\iint \omega_i fa \quad dxdy-\int_{\Gamma}\omega_i\sum_{j=1}^{nd}\left(\hat{T}_{xx}\frac{\partial\omega_j}{\partial x}\vec{n}_x-\hat{T}_{yy}\frac{\partial\omega_j}{\partial y}\vec{n}_y\right)h_j\cdot d\vec{l}\right)^{e}$$

$[L_h]$：抽水井位置係數矩陣

$\{U_t\}$：為每個抽水井的抽水率

經由 Galerkin’s 有限元素法處理空間上之微分項及隱式有限差分後，則(2.2.6)式變成如下：

$$\left([A]+\frac{[B]}{\Delta t}\right)\{h_{t+1}\}=\frac{[B]}{\Delta t}\{h_t\}-\{F_{h,t}\}+[L_h]\{u_t\} \qquad \text{..........}(2.2.7)$$

$$\{h_{t+1}\}=\left([A]+\frac{[B]}{\Delta t}\right)^{-1}\left(\frac{[B]}{\Delta t}\{h_t\}-\{F_{h,t}\}+[L_h]\{u_t\}\right)\text{.................}(2.2.8)$$

(2.2.8)式即為動態規劃理論中的轉換函數(Transition function)，h_t(t 時刻的水頭)為狀態變數(State variable)，u_t為控制變數(Control variable)。

2.3 抽水系統最佳規劃模式定義

本研究是以抽水系統總成本最小值為優選模式的目標函數，而總成本包括井的抽水操作成本與設井之固定成本，並希望求得在滿足用水需求及限制條件之下，總成本為最小的一組佈井組合及每一口井的最佳操作策略。因此可將此問題表示成如下之優選模式：

目標函數：

$$\min_{I,\{u_t^i,i\in I\}} z=\sum_{i\in I}\left[C1\cdot L_i^*\right]+\sum_{t=1}^{N}\sum_{i\in I}\left[C2\cdot u_t^i\left(L_i^*-h_{t+1}^i\right)\right],\quad C2=\gamma\times C3\times\Delta t\qquad ,I\subset\Omega$$

..........(2.3.1)

限制式：

$$\{h_{t+1}\}=\left([A]+\frac{[B]}{\Delta t}\right)^{-1}\left(\frac{[B]}{\Delta t}\{h_t\}-\{F_{h,t}\}+[L_h]\{u_t\}\right),\ 且\{u_t^i,i\in I\}\text{.........(2.3.2)}$$

$$\sum_{i\in I}u_t^i\geq d_t,\qquad t=1,2,......,N\ \text{..(2.3.3)}$$

$$U\min\leq u_t^i\leq U\max,\qquad t=1,2,.....N\qquad ,i\in I\ \text{....................(2.3.4)}$$

$$h\min\leq h_t\qquad t=1,2,.....N\ \text{...(2.3.5)}$$

其中：

Ω：所有可能設井位置的集合

I：設計井網之集合(為Ω的子集合)

u_t^i：第 t 時刻在 I 點的抽水量(決策變數)

C1：設井單位長度成本

C2：井的單位抽水成本

C3：單位功率成本

γ：重力項

Δt ：抽水時間

L_i^* ：在 i 點之地表高程

h_{t+1} ：t+1 時刻的水位

$L^* - h_{t+1}$ ：抽水揚程

d_t ：t 時刻的用水需求

$U_{\min}$ ：每一口井的抽水下限

$U_{\max}$ ：每一口井的抽水上限

$h_{\min}$： 水位下限

在遺傳演算法中，每一條染色體表示一組設井組合，目標函數中 i 表示設井位置，因此，目標函數中包含設井所需的設井成本及操作成本，(2.3.1)式為本研究的目標函數，從(2.3.1)式至(2.3.4)式，在處理上可分解為兩個次問題，以配合遺傳演算法與可微分動態規劃理論之應用：

次問題(1)：

$$\min_I \left\{ \sum_{i \in I} C1 \cdot L_i^* + J^*(I) \right\}, I \subset \Omega \qquad (2.3.6)$$

次問題(2)：

$$J^*(I) = \min_{\{u_t^i, i \in I\}} \left\{ \sum_{t=1}^{N} \sum_{i \in I} \left[C2 \cdot u_t^i \left(L_i^* - h_{t+1}^i \right) \right] \right\} \qquad (2.3.7)$$

s.t.(2.3.2)~(2.3.5)式

在整個演算流程中的遺傳演算法的適合度即為次問題(1)之目標函數值，微分動態規劃的目標函數型態即為次問題(2)之目標函數值(2.3.7 式)，而次問題(1)的適合度(目標函數)包括了次問題(2)的最佳目標函數值 $J^*(I)$，設井成本的多寡取決於井的單位長度成本 C1、設井

長度及井的數目。操作成本的 C2 為固定值，因此操作成本主要取決於每口井的抽水率。(2.3.3)式表示每一時刻所有井的總抽水量要滿足每一時刻的用水需求，(2.3.4)表示每一口井的抽水上下限。

2.4 觀測系統最佳設計模式定義

本研究是以卡門濾波理論為基礎，優選一觀測井網(佈井方案)，使得修正後水位的誤差為最小，因此評定佈井組合的優劣可以卡門濾波中修正後水位的共變異矩陣做為指標。一般而言愈多的觀測井數和愈高的觀測頻率，可以得到可靠度較大的預測水位，若模式經過率定後，在相同的地下水文環境與觀測誤差下，能影響卡門濾波修正後水位誤差的就只剩下觀測矩陣C，藉由改變觀測矩陣，即改變觀測井之位置及密度，可以得到不同的卡門濾波修正水位共變異矩陣（P_t），此P_t矩陣代表修正後水位的誤差，亦反映了觀測系統的效率，可以利用此P_t為標準使用遺傳演算法在觀測操作成本花費最少下，找出最有效率的觀測系統(佈井組合)。共變異矩陣衡量的方式有許多種如：D-Optimal、A-Optimal、E-Optimal、G-Optimal等(Silvey,1980)，一般在井網設計中常用的有A-Optimal與D-Optimal，本研究採用A-Optimal做為量化共變異矩陣之方法，所謂A-Optimal即是共變異矩陣的跡(Trace)值，當跡值愈小，其所代表之意義是各節點的卡門濾波修正水位之變異數的總和愈小，因此本研究之問題可表示如下之優選模式：

目標函數為觀測井井數最少：

$$\min_{J\subset\Phi} Num(J) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1)$$

限制式

1. 系統轉換方程式

$$\{h_{t+1}\}=\left([A]+\frac{[B]}{\Delta t}\right)^{-1}\left(\frac{[B]}{\Delta t}\{h_t\}-\{F_{h,t}\}+[L_h]\{u_t\}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.2)$$

2. 定義觀測精度

$$P_t = \{I - K_t C_t\} M_t \text{ ....(2.4.3)}$$

其中

$$M_t = A_t P_{t-1} A_t^T + Q_t \text{ ....(2.4.4)}$$

$$K_t = M_t C_t^T \{C_t M_t C_t^T + R_t\}^{-1} \text{ ....(2.4.5)}$$

3. 水位觀測精度要求限制

$$Tr(P_N(J)) < P_{\min} \quad , J \subset \Phi \text{ ....(2.4.6)}$$

其中:

$Num(J)$ ： 第 J 組觀測井網水位觀測井之總井數

N ： 優選模式中總規劃時刻

T ： 系統轉換函數

A_t ： 與水文地質相關之矩陣，即系統轉移矩陣

Φ ： 地下水管理區域中，所有可能設水位觀測井井位之集合

J ： 地下水管理區域中，設置水位觀測井井位置之集合

w_t ： 系統噪音(System noise)

C_t ： 觀測矩陣(Measurement matrix)

M_t ：為系統推估值之共變異矩陣

K_t ：為卡門權重(Kalman gain)

P_t ：為卡門濾波修正值之共變矩陣

Q_t ： 系統噪音共變異矩陣

R_t ： 觀測誤差共變異矩陣

I ： 為單位矩陣

在目標函數中，觀測井設井位置必須由可設井位置的集合中選

取，我們所考量的決策變數為觀測井網(設井方案)，而所要優選的是在滿足精度要求下(2.4.6 式)觀測井井數要最少，在優選得最佳觀測井網後，則需以此觀測井網得觀測水位再進得全區水位的更新，此部分流程將再 3.3 節進一步說明。