第二章　座標系統與地位模式

2-1　座標介紹

下面簡單介紹幾種在本論文研究中用到的座標系統。

2-1-1　天球固定座標系

天球座標是根據牛頓力學所架構出的座標系統。由於我們要描述的是衛星與地球間的相對運動，所以座標原點為地心，且因歲差（Pression）及章動（Nutation）的影響，天球座標有平天球（僅考慮歲差影響）及真天球座標（考慮歲差及章動二者影響）之分。

座標軸在空間的指向是隨時間而變，為了建立一個統一的標準，必須選定某一時刻t_0稱為標準曆元，以此平天球座標系做為參考座標的標準，稱為標準曆元t_0的平天球座標系，或天球固定座標系，或傳統慣性座標（Conventional Inertial System , CIS）（Seeber，1993）。

本論文中所指之傳統慣性座標系皆為 J2000（即西元 2000 年 1 月 1.5 日）標準曆元的平天球固定座標系。其三軸各定義為（圖 2-1）:

Z 軸：指向 J2000 的平均地球自轉軸方向

X 軸：從地心指向 J2000 的平春分點方向。

Y 軸：與 Z、X 軸垂直，並與 Z、X 軸成一右旋系統。Y=Z×X

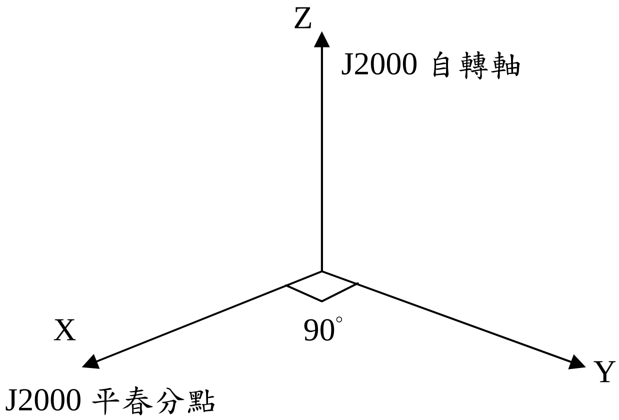

圖 2-1 傳統慣性座標系簡單示意圖

2-1-2　地球固定座標系

地球固定座標亦稱為平均地球座標（Average Terrestrial System , AT）或稱為傳統地球座標系（Conventional Terrestrial System , CTS）。以地球質量中心為原點，其三軸各定義為（圖 2-2）：

Z 軸：從地心指向 CTP(Conventional Terrestrial Pole)方向。

X 軸：從地心指向地球赤道與格林威治子午圈（零子午圈）交點。

Y 軸：與 Z、X 軸垂直，並與 Z、X 軸成一右旋系統。Y=Z×X

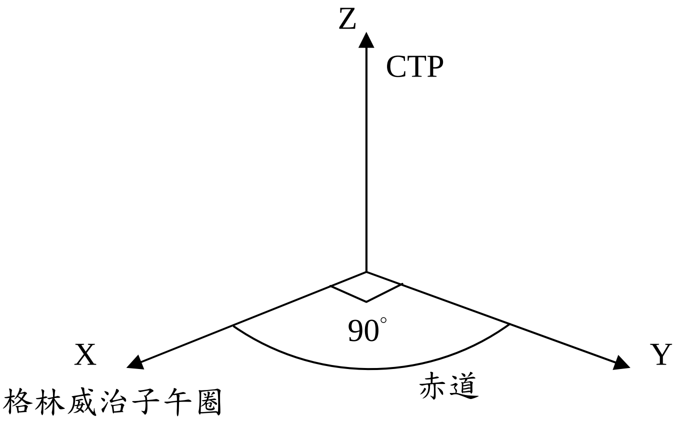

圖 2-2 地固座標系簡單示意圖

2-1-3　衛星旋轉座標系（Rotation Coordinate System）

衛星位置經軌道計算後為了表示其改正量，除了採用慣性直角座標系之(X,Y,Z)來表示外，還可採用衛星軌道座標系將改正量分為沿半徑方向（徑向，Radial）、沿軌道面切線方向（Transverse , Along-track）、軌道面法線方向（Normal , Cross-track）等分量表示（圖 3-3）。圖中，u 為緯度角距（argument of latitude），$u = \omega + f$ ；i 為軌道面傾角（inclination）；Ω 為昇交點赤經（right ascension of ascending node）。

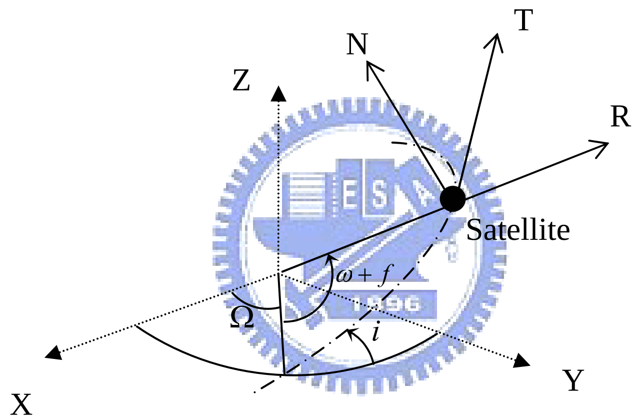

圖 2-3 衛星旋轉座標系簡單示意圖

2-1-4　衛星固定座標系（Satellite-Fixed Coordinate System）

這個座標系統主要是針對衛星本體的受力姿態而有所定義，可以使用在太陽阻力、太陽輻射壓等與衛星本體受力表面比例相關的擾動力上。

X_V軸：指向飛行方向

Z_V軸：指向地心

Y_V軸：根據右手旋轉定律，分別與X_V、Z_V軸垂直

其繞軸旋轉姿態角可定義為：

φ(roll)：繞X_V軸旋轉的姿態角

δ(pitch)：繞Y_V軸旋轉的姿態角

α(yaw)：繞Z_V軸旋轉的姿態角

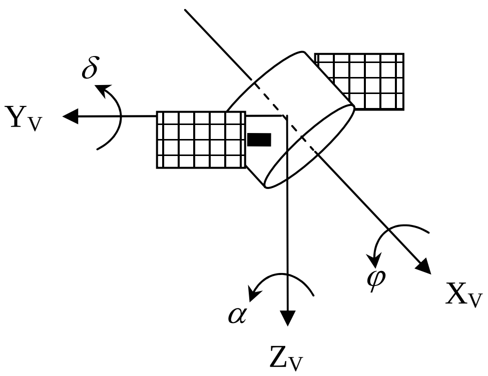

圖 2-4 衛星固定座標系簡單示意圖

2-2 座標轉換

在進行衛星運動計算時，所有的計算與結果的比較都必須歸化到相同座標系統中。下面針對幾種常用的座標轉換進行介紹。

2-2-1 慣性座標與地固座標之轉換

在進行慣性座標與地固座標轉換前，先對旋轉矩陣略做描述。而三軸之旋轉矩陣如下：

（1）繞 X 軸旋轉 ：

$$\mathbf{R}_1(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \tag{2-1}$$

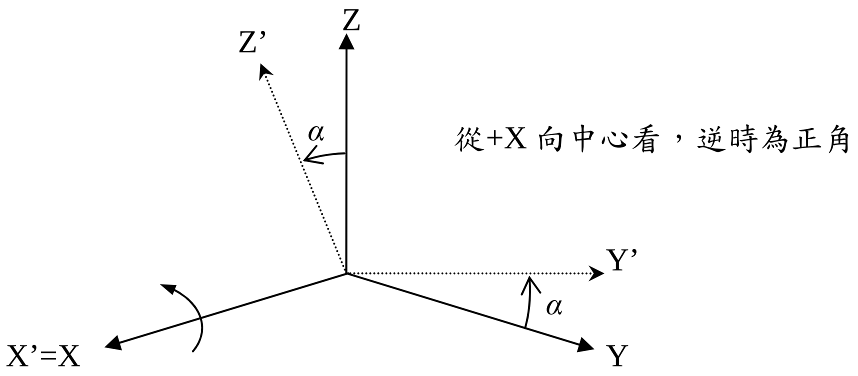

圖 2-5 座標轉換繞 X 軸旋轉部分

（2）繞 Y 軸旋轉　：　$$\mathbf{R}_2(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

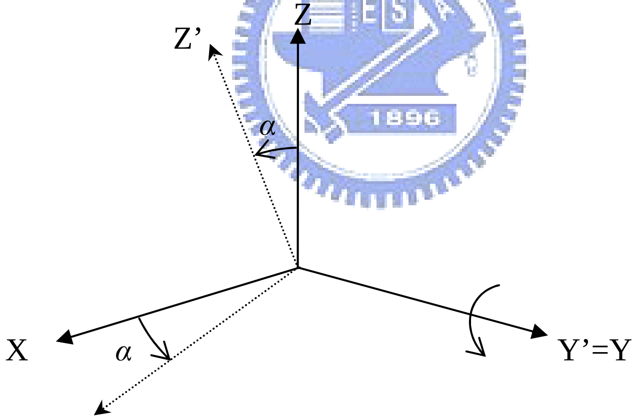

圖 2-6 座標轉換繞 Y 軸旋轉部分

（3）繞 Z 軸旋轉　：　$$\mathbf{R}_3(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (2\text{-}3)$$

而自慣性座標(CIS)到地心固定座標(CTS)之間的轉換關係為：

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CTS}} = \mathbf{SNPr}_{\mathrm{CIS}} \tag{2-4}$$

其中，**P**：歲差（Precession）轉換矩陣。將 J2000 平天球固定座標系轉至另一時刻之平天球座標系，也就是將 J2000 的平春分點轉至計算時刻 t 的平春分點。$\mathbf{P} = \mathbf{R}_3(-Z)\mathbf{R}_2(\theta)\mathbf{R}_3(-\varsigma)$ (2-5)

N：章動（Nutation）轉換矩陣。將瞬時平天球固定座標系轉至瞬時真天球座標系，也就是將計算時刻 t 的平春分點轉至計算時刻 t 的真春分點。

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)\mathbf{R}_1(\varepsilon) \tag{2-6}$$

S：極移及地球自轉（Polar motion ＆ Earth Rotation）轉換矩陣。極移改正的目的是因為考慮瞬時極位置與 CIO 之差異，此差異可用兩個角度量（x_p, y_p）來表示。地球自轉改正是將某特定星曆時刻之真座標系統，轉換為同一時刻下的瞬間地球座標。

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p)\mathbf{R}_3(GAST) \tag{2-7}$$

式中，Z, θ, ς 為歲差參數

$\varsigma = 0°.640616T + 0°.0000839T^2 + 0°.0000050T^3$

$\Delta\varepsilon$ 為章動之傾角分量

$\Delta\psi$ 為章動之經度分量

ε 為黃赤交角

$GAST$：格林威治視恆星時。

其中，T 為從標準曆元t_0至時間t的儒略日世紀數。$T = (JD - 2451545.0)/36525.0$

JD 為地球動力時（Terrestrial Dynamical Time, TDT）系統下之儒略日

我們可以知道，在進行座標轉換時，物體在空間中的位置不變，只是描述它的座標系統改變，如圖 2-7。

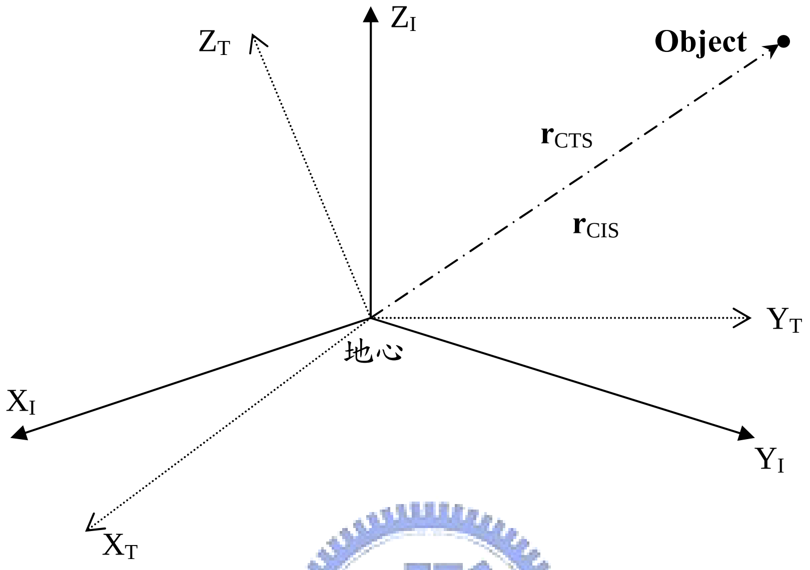

圖 2-7 慣性座標與地固座標轉換示意圖

2-2-2 衛星旋轉座標與慣性直角座標之轉換

我們可以將衛星旋轉座標轉換到慣性直角座標的關係表達成為，

$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(u)\mathbf{R}_1(i)\mathbf{R}_3(\Omega)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

其中，$u = \omega + f$ ：緯度角距（argument of latitude）

i ：軌道面傾角（inclination）

Ω ：昇交點赤經（right ascension of ascending node）

將（2-8）式重新定義為：

$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

其中 $\mathbf{R}$ 矩陣各元素如下：

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \cos u \times \cos\Omega - \sin u \times \cos i \times \sin\Omega \\
r_{12} &= \cos u \times \sin\Omega + \sin u \times \cos i \times \cos\Omega \\
r_{13} &= \sin u \times \sin i \\
r_{21} &= -\sin u \times \cos\Omega - \cos u \times \cos i \times \sin\Omega \\
r_{22} &= -\sin u \times \sin\Omega + \cos u \times \cos i \times \cos\Omega \\
r_{23} &= \cos u \times \sin i \\
r_{31} &= \sin i \times \sin\Omega \\
r_{32} &= -\sin i \times \cos\Omega \\
r_{33} &= \cos i
\end{aligned} \tag{2-10}$$

而與（2-8）式相反的逆轉換，也就是慣性直角座標轉換到衛星旋轉座標，因為 $\mathbf{R}$ 矩陣為一正交矩陣，故 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$，所以轉換關係表示為：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ t \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} r \\ t \\ n \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

2-2-3 慣性座標與衛星固定座標之轉換

衛星固定座標轉換到慣性座標系的關係可以表達為：

$$\begin{aligned} \varsigma &= \mathbf{R}_1(\varphi_V)\mathbf{R}_2(-\delta_V)\mathbf{R}_3(\alpha_V)^T \varsigma_{\mathbf{V}} \\ &= \mathbf{Q}\varsigma_{\mathbf{V}} \end{aligned} \tag{2-12}$$

其中 ς：慣性座標系座標值

$\varsigma_{\mathbf{V}}$：衛星固定座標系座標值

$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$。由衛星固定座標系轉換至慣性座標之旋轉矩陣，其各項

元素定義如下：

$$
\begin{aligned}
q_{11} &= \cos\delta_V \times \cos\alpha_V \\
q_{12} &= -\sin\varphi_V \times \sin\delta_V \times \cos\alpha_V - \cos\varphi_V \times \sin\alpha_V \\
q_{13} &= -\cos\varphi_V \times \sin\delta_V \times \cos\alpha_V + \sin\varphi_V \times \sin\alpha_V \\
q_{21} &= \cos\delta_V \times \sin\alpha_V \\
q_{22} &= -\sin\varphi_V \times \sin\delta_V \times \sin\alpha_V + \cos\varphi_V \times \sin\alpha_V \\
q_{23} &= -\cos\varphi_V \times \sin\delta_V \times \sin\alpha_V - \sin\varphi_V \times \cos\alpha_V \\
q_{31} &= \sin\delta_V \\
q_{32} &= \sin\varphi_V \times \cos\delta_V \\
q_{33} &= \cos\varphi_V \times \cos\delta_V
\end{aligned}
\tag{2-13}
$$

其中，φ_V 、δ_V 、α_V 之定義見圖 2-4。

因為 $\mathbf{Q}$ 矩陣為正交矩陣，所以 $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ 。故慣性座標轉換到衛星固定座標的關係式為：

$$\varsigma_{\mathrm{V}} = \mathbf{Q}^{-1}\varsigma = \mathbf{Q}^T\varsigma \tag{2-14}$$

2-3　地位模式

衛星重力測量計算的是一個全球重力場模型。地球重力場的引力位理論上它可以有多種形式的數學表達式，但最實用、最被廣泛接受的地位模式可以利用一組球諧係數表示為（Heiskanen and Moritz, 1967）：

$$V(r,\phi,\lambda)=\frac{GM_e}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{N_{\max}}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda+\overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\cdot\overline{P}_{nm}(\sin\phi)\right] \quad (2\text{-}15)$$

其中，r,ϕ,λ　：衛星在地固座標系之距離、地心緯度、地心經度

M_e,R_e：地球質量及地球參考橢球長軸半徑

G　：牛頓萬有引力常數

$N_{\max}$　：球諧函數展開的最大階數

$\overline{P}_{nm}$　：完全正規化締和勒證德函數

$\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}$：完全正規化球諧係數

每一個重力場模型有一個相應的大地水準面，如果所有的（$\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}$）不存在，僅有主項'1'，則代表"球形地球"，如果再加$\overline{C}_{20}$則代表一個"旋轉橢球體"。又因其他（$\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}$）的存在，就反映了大地水準面與旋轉橢球體的差別。重力場模型亦可以用重力異常（Δg）、大地起伏（N）等不同形式表達與比較。

$$\Delta g(\phi,\lambda)=\frac{GM_e}{a^2}\sum_{n=2}^{N_{\max}}(n-1)\sum_{m=0}^{n}\left(\overline{C}^*_{nm}\cos m\lambda+\overline{S}^*_{nm}\sin m\lambda\right)\cdot\overline{P}_{nm}(\sin\phi) \quad (2\text{-}16)$$

$$N(\phi,\lambda)=a\sum_{n=2}^{N_{\max}}\sum_{m=0}^{n}\left(\overline{C}^*_{nm}\cos m\lambda+\overline{S}^*_{nm}\sin m\lambda\right)\cdot\overline{P}_{nm}(\sin\phi) \quad (2\text{-}17)$$

其中，$\overline{C}^*_{nm}=\overline{C}_{nm}-\overline{C}^{ref}_{nm}$，$\overline{S}^*_{nm}=\overline{S}_{nm}-\overline{S}^{ref}_{nm}$

$\overline{C}^{ref}_{nm},\overline{S}^{ref}_{nm}$ 為參考橢球體的完全正規化球諧係數

下面介紹在本論文中所選用的兩種地位模式及最新地位模式。

2-3-1　OSU91A 地位模式

OSU91A 是由 Rapp et al.（1991）發展出來的大地位模式。首先結合 GEM-2 位能係數、地面重力法方程式和一年的 Geosat 測高資料，根據這些資料的結合可解得 50 階的大地位模式。在更新校正發展 OSU89 大地模式所使用之 30’×30’平均異常資料後，與發展 OSU89B 的 360 階位能模式所使用的 30’異常資料合併，再以 GEM-T2 大地位模式至第 9 階及地形均衡模式 10～360 階所計算之異常資料取代填入的異常資料。以最小二乘法得到平差後的 30’平均異常資料，利用球諧函數的正交性質以平均異常資料計算球諧係數，最後可得 360 階的大地位係數。將之前所得 2～50 階的地位係數加上 30’異常資料所得之 50～360 階地位係數，便完成 360 階之 OSU91A 大地位模式。

2-3-2　EGM96 地位模式

由美國國防部製圖局（Nation Imagery and Mapping Agency）、美國太空總署（NASA Goddard Space Flight Center）和俄亥俄州立大學（Ohio State University）共同合作發展之 360 階地位模式。建構 EGM96 模式資料來源包括有 TOPEX/POSEIDON、ERS-1 和 GEOSAT 等衛星測高資料；超過 20 顆以上之 SLR、GPS、DORIS、TDRSS 和 TRANET 追蹤資料；以及最新地形改正資料和 30’×30’的重力異常資料。計算成果除改進原有 OSU91 模式外和用來更新 WGS84 大地參考座標，亦可用於高精度軌道計算、海岸地貌及物理大地之研究。

OSU91A 及 EM96 地位模式問世已超過十年，在本論文研究用此二種模式純為模擬之用。論文中以 EGM96 為假設真值、OSU91A 為計算初值，利用平差迭代計算，最後透過大地起伏、重力異常等不同表現方式，期能求出精度較 OSU91A 更佳之估算地位模式。新的全球地位模式可由 CHAMP 及 GRACE 資料求得。

2-3-3 CHAMP 及 GRACE 相關重力模式

CHAMP（CHAllenging Minisatellite Payload）為德國發展的衛星任務，,針對地球科學和大氣研究的應用，由 GFZ（GeoForschungsZentrun Potsdam Public Law Foundation）機構管理（GFZ,2004）。衛星在 2000 年 7 月 15 日升空，利用高對低（high-low mode：GPS-CHAMP）衛星追蹤（Satellite to Satellite Tracking, SST）資料來進行地球重力場的解算。CHAMP 目前最新重力位模式為 EIGEN，包括有 EIGEN-3p、EIGEN-2 與 EIGEN-1S 三種。EIGEN-1S 為使用 CHAMP 與 GPS 間共 88 天衛星追蹤資料（2000 年 6 月 30 日 ～ 8 月 10 日與 9 月 24 日～12 月 31 日）以及 Lageos-1,-2、Starlette、Stella 雷射追蹤資料（2000 年）的 119x111 重力位模式；EIGEN-2 為僅使用六個月(2000 年 7 月~12 月以及 2001 年 9 月～12 月)的 CHAMP GPS SST 及加速度儀資料計算得到的 140x140 重力位模式；EIGEN-3p 為 EIGEN-3 的先期模式，係利用 GHAMP GPS 共三年的 SST 資料（2000 年 7 月～2003 年 6 月）所得之 140x140 重力位模式，其與 EIGEN-2 不同處除了有 6 倍多的 CHAMP 觀測資料，在加速度儀的參數以及法方程式的調整上都有所不同。

GRACE（Gravity Recovery and Climate Experiment）為美國 NASA 與德國 DLR 利用低對低（low-low mode：GRACE-GRACE）衛星追蹤技術的跨國共同合作。衛星在 2001 年 11 月升空，GRACE 在 CHAMP 的基礎上改進成雙星系統。GRACE 的重力模式 GGM01 為目前最新全球重力位模式，其包括二種：GGM01S、GGM01C。GGM01S 為 120x120 的重力位模式，是利用 GRACE 衛星 110 天（2002

年 4 月～2002 年 11 月）的 K 波段（K-band）距離變化率、高度以及加速度儀資料進行計算，不加“Kaula”條件約制、不使用其他衛星資料、也沒有地表重力資料的加入。而 GGM01C 重力位模式為 GGM01S 加入 TEG4 重力資料所產生，為一 200×200 重力位模式。