# 第三章　數學模式

在衛星定軌和重力場模型解算中，觀測量的數量遠大於求解的參數數量，因此有多餘觀測，故需要統計方法來進行參數的估算。在地心慣性直角座標系統中，衛星的運動方程可以（3-1）式表示。（3-1）式是一個二階微分方程，如果知道起始的位置及速度分量，觀念上可以由積分來求得任何時間的位置和速度：

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{r}} \cdot dt \\ \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \ddot{\mathbf{r}} \cdot dt \end{cases} \tag{3-1}$$

其中，$\mathbf{F}$ 為所有擾動力的總和，（$\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)$）為初始狀態向量(initial state vector)。對於參數計算而言，則是透過擾動力模式中，擾動力與參數間的函數關係，求得力模式中各項待解參數的值：

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) \tag{3-2}$$

其中，$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$：衛星位置及速度向量

$t$ ：時間

$\mathbf{P}$ ：參數向量 $\mathbf{P} = (\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0), \mathbf{P}^*)^T$ ，$\mathbf{P}^*$ 為顯參數。

$\mathbf{P}^*$：包括有球諧係數 $\overline{C}_{nm}, \overline{S}_{nm}$ ，大氣阻力係數 $C_D$（見公式 4-10），衛星表面反射係數 $C_r$（見公式 4-42），經驗係數 $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$（見公式 4-47），及其他力參數。

## 3-1　參數估計問題

設有觀測量$\mathbf{O}_{\mathbf{b}}$，其計算理論值為$\mathbf{O}_{\mathbf{c}}=\mathbf{O}_{\mathbf{c}}(t,\mathbf{P})$，$\mathbf{P}$為參數向量，理論上的理想狀況為$\mathbf{O}_{\mathbf{b}}=\mathbf{O}_{\mathbf{c}}$。已知參數$\mathbf{P}$的先驗值為$\mathbf{P}_{\mathbf{o}}$，二者差為$\Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}-\mathbf{P}_{\mathbf{o}}$。現對$\mathbf{O}_{\mathbf{c}}=\mathbf{O}_{\mathbf{c}}(t,\mathbf{P})$進行 Taylor 級數展開，並只保留一階項（即忽略高階項）：

$$\mathbf{O}_{\mathbf{c}}=\mathbf{O}_{\mathbf{c}}(t,\mathbf{P})=\mathbf{O}_{\mathbf{c}}(t,\mathbf{P}_{\mathbf{o}})+\sum\left.\frac{\partial\mathbf{O}_{\mathbf{c}}}{\partial\mathbf{P}}\right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_{o}}\Delta\mathbf{P} \tag{3-3}$$

但由於觀測量$\mathbf{O}_{\mathbf{b}}$誤差之影響（$\mathbf{O}_{\mathbf{b}}+\mathbf{V}=\mathbf{O}_{\mathbf{c}}$），故有下面觀測方程式：

$$\begin{aligned}&\mathbf{O}_{\mathbf{b}}+\mathbf{V}-\mathbf{O}_{\mathbf{c}}=\sum\left.\frac{\partial\mathbf{O}_{\mathbf{c}}}{\partial\mathbf{P}}\right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_{o}}\Delta\mathbf{P}\\&\Rightarrow\mathbf{L}^{\mathbf{b}}+\mathbf{V}=\mathbf{F}(\mathbf{P})\cong\mathbf{F}(\mathbf{P}_{\mathbf{0}})+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{P}}\Delta\mathbf{P}\end{aligned} \tag{3-4}$$

其中，$\mathbf{L}^{\mathbf{b}}$：觀測量

$\mathbf{V}$：觀測量殘差值

$\mathbf{F}$：見公式（3-2）

$\sum\left.\frac{\partial\mathbf{O}}{\partial\mathbf{P}}\right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_{o}}$：係數矩陣

## 3-2　變數方程（variation equation）

由於係數矩陣中觀測量與參數並非明顯之函數關係，故觀測量對參數的偏微分$\frac{\partial\mathbf{O}_{\mathbf{c}}}{\partial\mathbf{P}}$不易求解。可利用下列變數方程（variation equation）進行數值求解：

$$\frac{\partial\mathbf{O}_{\mathbf{c}}}{\partial\mathbf{P}^{\mathrm{T}}}(t)=\frac{\partial\mathbf{O}_{\mathbf{c}}}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\frac{\partial\mathbf{r}(t)}{\partial\mathbf{P}^{\mathrm{T}}}+\frac{\partial\mathbf{O}_{\mathbf{c}}}{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial\mathbf{P}^{\mathrm{T}}} \tag{3-5}$$

利用加速度積分求得位置及速度的觀念，亦可利用加速度對參數的偏微分來求得位置對參數的偏微分$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{P}^{\mathrm{T}}}$及速度對參數的偏微分$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{P}^{\mathrm{T}}}$。再同樣地利用變數關係，

加速度對參數的偏微分 $\dfrac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}$ 可寫成（GSFC，1976）：

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}+\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}+\left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{*\mathrm{T}}}\right)_{\text{explicit}} \tag{3-6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}\right)=\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}\right)+\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}\right)+\left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{*\mathrm{T}}}\right)_{\text{explicit}} \tag{3-7}$$

其中參數 $\mathbf{P}^*$ 是參數 $\mathbf{P}$ 中與加速度有明顯函數關係的參數。

令 $\mathbf{Y}=\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}$，再將（3-7）式經過整理後得到（GSFC，1976）：

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{3\times l}=\mathbf{A}_{3\times 3}(t)\mathbf{Y}_{3\times l}+\mathbf{B}_{3\times 3}(t)\dot{\mathbf{Y}}_{3\times l}+\mathbf{C}_{3\times l}(t) \tag{3-8}$$

其中，$l$ 為計算參數之總個數

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{3\times 3}&=\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\left(\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{G}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{AD}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{SR}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{EC}}\right)\\&=\left(\mathbf{A}_{\mathbf{G}}+\mathbf{A}_{\mathbf{NS}}+\mathbf{A}_{\mathbf{AD}}+\mathbf{A}_{\mathbf{SR}}+\mathbf{A}_{\mathbf{EC}}\right)\end{aligned} \tag{3-9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{3\times 3}&=\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}\left(\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{G}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{AD}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{SR}}+\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{EC}}\right)\\&=\left(\mathbf{B}_{\mathbf{G}}+\mathbf{B}_{\mathbf{NS}}+\mathbf{B}_{\mathbf{AD}}+\mathbf{B}_{\mathbf{SR}}+\mathbf{B}_{\mathbf{EC}}\right)\end{aligned} \tag{3-10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{3\times l}&=\left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}\right)_{\text{explicit}}=\left[\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}},\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}},\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{*\mathrm{T}}}\right]=\left[\mathbf{O}_3,\mathbf{O}_3,\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{P}^{*\mathrm{T}}}\right]\\&=\left(\mathbf{C}_{\mathbf{NS}}+\mathbf{C}_{\mathbf{AD}}+\mathbf{C}_{\mathbf{SR}}+\mathbf{C}_{\mathbf{EC}}\right)\end{aligned} \tag{3-11}$$

式中，$\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{G}}$：地球二體中心引力位造成之衛星加速度。$\mathbf{A}_{\mathbf{G}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{G}}$ 對衛星位置之偏微矩陣。$\mathbf{B}_{\mathbf{G}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{G}}$ 對衛星速度之偏微矩陣。

$\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}$：地球非球體擾動力造成之衛星加速度。$\mathbf{A}_{\mathbf{NS}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}$ 對衛星位置之偏微矩陣。$\mathbf{B}_{\mathbf{NS}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}$ 對衛星速度之偏微矩陣。$\mathbf{C}_{\mathbf{NS}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}$ 對正規化球諧係數之偏微矩陣。

$\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{AD}}$：大氣擾動力造成之衛星加速度。$\mathbf{A}_{\mathbf{AD}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{AD}}$ 對衛星位置之偏微矩陣。$\mathbf{B}_{\mathbf{AD}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{AD}}$ 對衛星速度之偏微矩陣。$\mathbf{C}_{\mathbf{AD}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{AD}}$ 對大氣擾動係數之偏

微矩陣。

$\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{SR}}$：太陽輻射壓造成之衛星加速度。$\mathbf{A}_{\mathbf{SR}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{SR}}$ 對衛星位置之偏微矩陣。$\mathbf{B}_{\mathbf{SR}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{SR}}$ 對衛星速度之偏微矩陣。$\mathbf{C}_{\mathbf{SR}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{SR}}$ 對衛星表面反射係數係數之偏微矩陣。

$\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{EC}}$：是透過經驗方程計算之衛星加速度。$\mathbf{A}_{\mathbf{EC}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{EC}}$ 對衛星位置之偏微矩陣。$\mathbf{B}_{\mathbf{EC}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{EC}}$ 對衛星速度之偏微矩陣。$\mathbf{C}_{\mathbf{EC}}$ 是 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{EC}}$ 對 9 個經驗係數之偏微矩陣。

$\mathbf{O}_3$：秩為三的零矩陣。

而透過 $\int \ddot{\mathbf{Y}} dt = \dot{\mathbf{Y}}(t) = \left(\dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}\right)_{3\times\ell}$，$\int \dot{\mathbf{Y}} dt = \mathbf{Y}(t) = \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}}\right)_{3\times\ell}$ (3-12)

的方式，可利用加速度對參數的偏微分積分求得位置對參數的偏微分及速度對參數的導數。一般衛星大地常用的觀測量（如 SLR 測距或 Doppler 速度變化率）之所需偏微分均可由 $\mathbf{Y}$ 及 $\dot{\mathbf{Y}}$ 以鏈微分方式求得。

## 3-3 平差模式

設有觀測量 $\mathbf{L^b}$，其計算理論值為 $\mathbf{L^a}$，$\mathbf{V}$ 為觀測量 $\mathbf{L^b}$ 的殘差

$$\mathbf{L^a} = \mathbf{L^b} + \mathbf{V} = \mathbf{F(X^a)} \tag{3-13}$$

其中，$\mathbf{F(X^a)}$ 是由未知向量 $\mathbf{X^a}$ 組成的非線性函數。則透過計算可求得後驗觀測量 $\hat{\mathbf{L}}^{\mathbf{a}} = \mathbf{L^b} + \mathbf{V} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}^{\mathbf{a}})$。

（1）觀測方程式

現對 $\mathbf{L^a} = \mathbf{L^b} + \mathbf{V} = \mathbf{F(X^a)}$ 進行 Taylor 級數展開，並只保留一階項忽略高階項，

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}^{a}) = \mathbf{F}\left(\mathbf{X}^{0} + \mathbf{X}\right) \\ &= \mathbf{F}\left(\mathbf{X}^{0}\right) + \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}^{a\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{X}^{a}=\mathbf{X}^{0}} \cdot \mathbf{X}\end{aligned} \tag{3-14}$$

將上式整理成 $\mathbf{L}^{a} = \mathbf{L}^{0} + \mathbf{AX}$，其中 $\mathbf{L}^{0} = \mathbf{F}\left(\mathbf{X}^{0}\right)$ 是理論觀測量近似值，係數矩陣 $\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}^{a\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{X}^{a}=\mathbf{X}^{0}}$，而 $\mathbf{X}^{a} = \mathbf{X}^{0} + \mathbf{X}$，$\mathbf{X}^{0}$ 是未知向量 $\mathbf{X}^{a}$ 的近似值，$\mathbf{X}$ 是近似值 $\mathbf{X}^{0}$ 的修正量。所以得到後驗觀測量 $\hat{\mathbf{L}}^{a}$ 及觀測量殘差 $\mathbf{V}$ 如下，其中觀測量修正值

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{b} - \mathbf{L}^{0} \tag{3-15}$$

$$\hat{\mathbf{L}}^{a} = \mathbf{L}^{b} + \mathbf{V} = \mathbf{L}^{0} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} \tag{3-16}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \left(\mathbf{L}^{b} - \mathbf{L}^{0}\right) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L} \tag{3-17}$$

透過最小二乘法求得最小變方解的方式，所以有 $\phi = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{PV} = \mathrm{minimum}$，故

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{X}} = 0 = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{PA}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{PL}\right) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{PA}\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{PL} \tag{3-18}$$

此即為法方程式（normal equation）。

（2）後驗單位權變方 $\hat{\sigma}_0{}^2$

由於 $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{PV} = -\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{PL} = -\hat{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{PL}$，其中 $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{PL}$，所以可以求得後驗單位權變方：

$$\hat{\sigma}_0{}^2 = \frac{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{PV}}{n-u} \tag{3-19}$$

其中，n-u：自由度

### 3-4 法方程式求解

（一）方法

由於衛星觀測資料過大，數學相關式甚多，係數矩陣過大，為了節省計算空間、增加計算效率，則解法方程式之方法必須重組最小二乘法之排列方式（黃

金維，2003)。${}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{u}}$ 為係數矩陣，$\mathbf{L}$ 為觀測量，$\sum_{\mathbf{L}}$ 為觀測量協變方矩陣，$\mathbf{X}$ 未知量，其中先驗變方值 $\sigma_0^2=1$，殘差值 $\mathbf{V}=\mathbf{AX}-\mathbf{L}$ 。

$$
\begin{gathered}
{}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{u}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix},\mathbf{L}=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \\
\sum{}_{\mathbf{L}}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix},\mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_u \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{3-20}
$$

法方程式 $\mathbf{N}$ 與 $\mathbf{U}$ 分別組成如下：

$$
\mathbf{N}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{PA}=\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1u} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{u1} & n_{u2} & \cdots & n_{uu} \end{bmatrix},\quad \mathbf{U}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{PL}=\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_u \end{bmatrix} \tag{3-21}
$$

將係數矩陣 $\mathbf{A}$ 利用行向量(column vectors)重組，則法方程式 $\mathbf{N}$ 中的元素即為係數矩陣行向量的加權內積：

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_{\mathbf{u}} \end{bmatrix},\mathbf{a}_{\mathbf{i}}=\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{u}}\mathbf{N}_{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\sum{}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathbf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}\sum{}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_{\mathbf{u}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\sum^{-1}\mathbf{a}_{\mathbf{u}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3-22}
$$

結合（3-20）、（3-21）、（3-22）式，法方程式 **N** 矩陣內各項元素的展開式可表達為

$$
\begin{aligned}
n_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}\left( a_{ki}a_{kj} \Big/ \sigma_k^2 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{ki}}{\sigma_k}\right)\left(\frac{a_{kj}}{\sigma_k}\right)
\end{aligned}
\tag{3-23}
$$

$$
\begin{aligned}
n_{11} &= \frac{a_{11}a_{11}}{\sigma_1{}^2} + \frac{a_{21}a_{21}}{\sigma_2{}^2} + \cdots + \frac{a_{n1}a_{n1}}{\sigma_n{}^2} \\
n_{21} &= \frac{a_{12}a_{11}}{\sigma_1{}^2} + \frac{a_{22}a_{21}}{\sigma_2{}^2} + \cdots + \frac{a_{n2}a_{n1}}{\sigma_n{}^2} \\
&\vdots \\
n_{uu} &= \frac{a_{1u}a_{1u}}{\sigma_1{}^2} + \frac{a_{2u}a_{2u}}{\sigma_2{}^2} + \cdots + \frac{a_{nu}a_{nu}}{\sigma_n{}^2}
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

$\mathbf{B^k}$為第k次觀測量係數矩陣**A**之列向量（row vector），$\mathbf{B^k} = \begin{bmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_u^k \end{bmatrix}^T$ (3-25)

$\mathbf{B^k}$的正規化向量，$\overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} b_1^k / \sigma_k \\ b_2^k / \sigma_k \\ \vdots \\ b_u^k / \sigma_k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \bar{b}_1^k \\ \bar{b}_2^k \\ \vdots \\ \bar{b}_u^k \end{bmatrix}^T$ (3-26)

則第 k 次觀測量對法方程式 **N** 的貢獻：

$$
n_{ij} = n_{ij} + \bar{b}_i^k \bar{b}_j^k \tag{3-27}
$$

其中，$i = 1 \sim u,\quad j = 1 \sim i$

同樣地，**U** 矩陣內各項元素的展開式可表達為

$$
\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1^T \Sigma^{-1} L} \\ \mathbf{a_2^T \Sigma^{-1} L} \\ \vdots \\ \mathbf{a_u^T \Sigma^{-1} L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s_1} \\ \mathbf{s_2} \\ \vdots \\ \mathbf{s_u} \end{bmatrix} \tag{3-28}
$$

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{a_{11}l_1}{\sigma_1{}^2} + \frac{a_{21}l_2}{\sigma_2{}^2} + \cdots + \frac{a_{n1}l_n}{\sigma_n{}^2} \\
s_2 &= \frac{a_{12}l_1}{\sigma_1{}^2} + \frac{a_{22}l_2}{\sigma_2{}^2} + \cdots + \frac{a_{n2}l_n}{\sigma_n{}^2} \\
&\vdots \\
s_u &= \frac{a_{1u}l_1}{\sigma_1{}^2} + \frac{a_{2u}l_2}{\sigma_2{}^2} + \cdots + \frac{a_{nu}l_n}{\sigma_n{}^2}
\end{aligned} \tag{3-29}
$$

正規化觀測量$\bar{l}_k = l_k / \sigma_k$ ，則第 k 次觀測量對 **U** 矩陣的貢獻：

$$
i = 1 \sim u \text{ ，} s_i = \bar{b}_i^k \, \bar{l}_k \tag{3-30}
$$

（二）總結：將法方程式求解流程簡單整理為，

1、設法方程式 $\mathbf{N}(u, u)$ 維度，起始初值$n_{ij} = 0$、$s_i = 0$,、$\phi = 0$ 。

2、組成正規化向量 $\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{k}}$ 及 $\bar{l}_k$ 。

3、計算第 k 次觀測量對法方程式 **N**、矩陣 **U** 的貢獻：

$$
n_{ij} = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{i} (\bar{b}_i^k \, \bar{b}_j^k) \text{ ，} s_i = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{i} (\bar{b}_i^k \, \bar{l}_k) \text{ ，} \phi = \phi + \bar{l}_k \, \bar{l}_k
$$

此處$\phi = \phi + \bar{l}_k \, \bar{l}_k$ ，即是計算$\mathbf{L}^{\mathbf{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}$ ，目的是用來求得後驗變方$\hat{\sigma}_0{}^2$ 。

### 3-5　加權約制法（Weighted Constraint）

在若干參數有先驗值及先驗變方情況下，可以用加權約制模式求解參數，此時觀測方程式可改寫如下：

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{L}_{\mathbf{X}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}_{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ I \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}
$$

權矩陣 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_X \end{bmatrix}$

➨第一種情形數學模式：所有參數之最小二乘法計算：$\mathbf{L}^{\mathbf{a}} = \mathbf{F}\ (\mathbf{X}^{\mathbf{a}})$。此時

$\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{X} - \mathbf{L}_1$，$\mathbf{X}^{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^{\mathbf{0}} + \mathbf{X}$，權＝$\mathbf{P}_1$（觀測值權矩陣）。

➨第二種情形數學模式：欲加權之參數最小二乘法計算

$$\begin{cases} l_1 = X_1^a, \text{有標準偏差}\ \sigma_{1X} \\ l_2 = X_2^a, \text{有標準偏差}\ \sigma_{2X} \\ \quad \vdots \end{cases}$$

第二種情形下，$\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_2\mathbf{X}^{\mathbf{a}}$，$\mathbf{V}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{X} - \mathbf{L}_2$，未知數權矩陣＝$\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \sigma_0^2 \sum_{\mathbf{X}^{-1}}$。

現將後驗未知向量 $\mathbf{X}^{\mathbf{a}}$ 重新表達為

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}^{\mathbf{a}} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{PA})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{PL}) \\ &= (\mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_X\mathbf{A}_2)^{-1}(\mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{L}_1 + \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_X\mathbf{L}_2) \end{aligned} \tag{3-31}$$

其中，$\mathbf{A}_2$ 矩陣為欲加權之參數係數矩陣。在欲加權之參數斜對角線位置值為 1，矩陣內其餘元素值為 0。

$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2^{\mathbf{0}} - \mathbf{L}_2^{\mathbf{b}} = 0$，即觀測值等於初始值。

$\mathbf{A}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}_2 = \overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}}$。$\overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}}$ 矩陣即是在欲加權之參數斜對角線位置上加入先驗權值，矩陣內其餘元素值為 0。

由於 $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2^{\mathbf{0}} - \mathbf{L}_2^{\mathbf{b}} = 0$，故將未知數觀測方程式之向量解(公式 3-31)改寫為：

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{PA}_1 + \overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}})^{-1}\mathbf{A}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{L}_1 \tag{3-32}$$

而後驗誤差協變方矩陣 $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}$ 為：

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}} = \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{A}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{PA}_1 + \overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}})^{-1} \tag{3-33}$$

今欲對球諧係數 $\overline{C}_{nm}, \overline{S}_{nm}$ 加權，可直接在 $\overline{C}_{nm}, \overline{S}_{nm}$ 之法方程式上加 $\overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}}$，即成為加權約制（Weighted Constraint），

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{PA} + \overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}} \tag{3-34}$$

一般$\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}$法方程式之加權值採經驗值$\overline{P}_{C_{nm},S_{nm}}$，依據 Kaula(1966)所述，該值可建立以下數學近似值

$$\frac{1}{\overline{P}_{C_{nm},S_{nm}}}=\sigma_n^2\approx 5\times 10^{-11}/n^4 \tag{3-35}$$

其中，n 為 degree

## 3-6　數值積分

依據牛頓萬有引力理論可建立衛星運動方程，如何從運動方程來做軌道預估？基本上，這是數學上求解常微分方程的問題（蔡山崎，1996）。在天體力學上，對於衛星運動方程近似解有兩個基本作法，一是「解析法」，另一是「數值法」。由於衛星運動方程相當複雜，正確解析解無法求得，精確近似解的推求亦非常繁雜困難。數值積分法，其理念簡單，且考慮各種擾動力影響，計算精度高，故在解算衛星運動方程時，使用數值積分法會比用解析法簡單的多。

### 3-6-1　數值積分技巧

數值法在離散點上解初值問題（$y''=f(x,y,y'),y'(x_0)=y_0',y(x_0)=y_0$）的方法，現簡單介紹如下（Montenbruck and Gill，2000）：

（1）Adams-Bashforthm 預估式

$$y_{m+1}'=h\left\{\alpha_0{}^{\mathrm{I}}S_m+\sum_{j=0}^{n}\sigma_j' y_{m-j}''\right\} \tag{3-36}$$

$$\sigma_j'=(-1)^j\sum_{i=j}^{n}\alpha_i'\binom{n}{j}\quad ,\alpha_i'=\alpha_{i+1} \tag{3-37}$$

$$\alpha_i=1-\sum_{j=1}^{i}\frac{\alpha_{i-j}}{j+1}\quad ,\alpha_0=1 \tag{3-38}$$

（2）Störmer 預估式

$$y_{m+1}=h^2\left\{\beta_0\,{}^{\mathrm{II}}S_m+\beta_1\,{}^{\mathrm{I}}S_m+\sum_{j=0}^{n}\lambda'_j y''_{m-j}\right\} \tag{3-39}$$

$$\lambda'_j=(-1)^j\sum_{i=j}^{n}\beta'_i\binom{n}{j}\quad,\beta'_i=\beta_{i+2} \tag{3-40}$$

$$\beta_i=1-\sum_{j=1}^{i}\frac{2H_{j+1}}{j+2}\beta_{i-j},\beta_0=1\quad,H_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} \tag{3-41}$$

（3）Adams-Moulton 校正式

$$y'_m=h\left\{\alpha^*_0\,{}^{\mathrm{I}}S_m+\sum_{j=0}^{n}\sigma^{*'}_j y''_{m-j}\right\} \tag{3-42}$$

$$\sigma^{*'}_j=(-1)^j\sum_{i=j}^{n}\alpha^{*'}_i\binom{n}{j}\quad,\alpha^{*'}_0=\alpha^*_0+\alpha^*_1\quad,\alpha^{*'}_i=\alpha^*_{i+1}(i\neq 0) \tag{3-43}$$

$$\alpha^*_i=-\sum_{j=1}^{i}\frac{\alpha^*_{i-j}}{j+1}\quad,\alpha^*_0=1 \tag{3-44}$$

（4）Cowell 校正式

$$y_m=h^2\left\{\beta^*_0\,{}^{\mathrm{II}}S_m+(\beta^*_0+\beta^*_1)\,{}^{\mathrm{I}}S_m+\sum_{j=0}^{n}\lambda^{*'}_j y''_{m-j}\right\} \tag{3-45}$$

$$\lambda^{*'}_j=(-1)^j\sum_{i=j}^{n}\beta^{*'}_i\binom{n}{j}\quad,\beta^{*'}_0=\beta^*_0+\beta^*_1+\beta^*_2\quad,\beta^{*'}_i=\beta^*_{i+2}(i\neq 0) \tag{3-46}$$

$$\beta^*_i=-\sum_{j=1}^{i}\frac{2H_{j+1}}{j+2}\beta^*_{i-j},\beta^*_0=1\quad,H_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} \tag{3-47}$$

其中，$\alpha_i$、$\beta_i$、$\alpha^*_i$、$\beta^*_i$ 為積分係數

$$\binom{n}{j}=C^n_j=\frac{n!}{j!(m-j)!}$$

${}^{\mathrm{I}}S_m,{}^{\mathrm{II}}S_m$ 為 first sum 及 second sum，分別表達為：

$${}^{\mathrm{I}}S_m=\frac{y'_m}{h}-\left(\frac{1}{2}y''_m+\alpha^*_2\nabla y''_m+\alpha^*_3\nabla^2 y''_{m-1}+\cdots\right) \tag{3-48}$$

$${}^{\mathrm{II}}S_m=\frac{y_m}{h^2}-\left(\frac{1}{12}y''_m+\beta^*_3\nabla y''_m+\beta^*_4\nabla^2 y''_{m-1}+\cdots\right) \tag{3-49}$$

且 ${}^{\mathrm{I}}S_{m+1} = {}^{\mathrm{I}}S_m + y''_{m+1}$，${}^{\mathrm{II}}S_{m+1} = {}^{\mathrm{II}}S_m + {}^{\mathrm{I}}S_m + y''_{m+1}$ (3-50)

### 3-6-2 積分器

論文中在數值計算部分所使用的積分器 DVDQ，是 Krogh 於 1969 年在 JPL(Jet Propulsion Laboratory)寫成的一 FORTRAN 副程式，為步長(step-size)及積分階數(integration order)皆可自動調變的 Adams 型數值積分器，利用預估—校正演算法（Predict-psuedo correct algorithm）反覆求解，其演算公式見(3-51)～(3-52)。(3-51)式為預估式，其用來計算 $f = f(t_{n+1}, P_{n+1}, \ldots, P_n^{(d-1)})$；(3-52) 式為校正式，用來計算 $f = f(t_{n+1}, y_{n+1}, \ldots, y_n^{(d-1)})$。此方法對於二階常微分方程可直接由二階求其數值解（Krogh,1969）。

$$P_{n+1}^{(d-j)} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{h^k}{k!} y_n^{(d-j+k)} + h^j \sum_{i=0}^{q-1} Y_{ij} \nabla^i f_n \qquad j = 1,2,\cdots,d \tag{3-51}$$

$$y_{n+1}^{(d-j)} = P_{n+1}^{(d-j)} + h^j Y_{qj} \nabla_P^q f_{n+1} \qquad j = 1,2,\cdots,d \tag{3-52}$$

其中，$Y$：應變量。$Y^{(d)} = f(t, Y, Y', \ldots, Y^{(d-1)})$

$d$：微分方程階數

$t$：自變量（例如，時間）

$h$：步長

$y$：$Y$ 的計算值（校正值）

$t_n$：$t$ 的現值

$t_{n+k} = t_n + kh$

$y_n, Y_n, y'_n, \ldots = y(t_n), Y(t_n), y'(t_n), \ldots$

$P_n$：$y_n$ 預估值

$$f_n = f(t_n, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(d-1)})$$

$$\nabla^i f_n = \begin{cases} f_n & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_n - \nabla^{i-1} f_{n-1} & i = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$\nabla_P^i f_n = \begin{cases} f(t_n, P_n, P_n', \ldots, P_n^{(d-1)}) & i = 0 \\ \nabla_P^{i-1} f_n - \nabla_{P-1}^{i-1} f_{n-1} & i = 1,2,\ldots \end{cases}$$

DVDQ 優點在於可適當調整積分的精度與效率，程式中提供可由使用者控制的參數 EP（用來決定程式容許誤差）及步長 H 來決定使用者的誤差精度。進行數值積分時，採用較小的步長會使截斷誤差減小，卻使捨位誤差增大（因計算次數的增加)、計算時間越長；採用較大的步長則相反。EP 設定上，若使用越嚴密之程式容許誤差，則程式計算成果精度越佳，但計算時間會越長。如何調整給定參數 EP 及參數 H 以達到程式最佳精度與效率的平衡點，必須經由使用者經驗判斷。