

## 第四章 相關衛星擾動力及其變數方程

在本研究中，對於變數方程中所考慮計算的擾動力，包括有：地球引力位、大氣阻力、太陽輻射壓、經驗方程等四項。而各項擾動力與其參數間的函數關係分別是：引力位是衛星位置、球諧函數的函數，大氣阻力是衛星位置、速度和大氣阻力係數的函數，太陽輻射壓是衛星位置、衛星表面反射係數的函數，經驗方程為衛星位置、速度、9個經驗係數的函數。

### 4-1 地球引力擾動位

地球引力位是用球諧函數展開的，最適合用球面座標  $(r, \phi, \lambda)$  來表示。地球重力場包括有二體問題中的中心力引力位外，尚有地球非球體引起之擾動位。故衛星在地球重力場中的引力位，可以用球諧函數可以表示為 (Seeber, 1993)：

$$\begin{aligned} V(r, \phi, \lambda) &= \frac{GM_e}{r} + \frac{GM_e}{r} \left[ \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \cdot P_{nm}(\sin \phi) \right] \\ &= \frac{GM_e}{r} + \psi \end{aligned} \quad (4-1)$$

其中， $r, \phi, \lambda$ ：衛星在地固座標系之距離、地心緯度、地心經度

$M_e, R_e$ ：地球質量及地球參考橢球長軸半徑

$G$ ：牛頓萬有引力常數

$N_{\max}$ ：球諧函數展開的最大階數

$P_{nm}$ ：締和勒證德函數

$C_{nm}, S_{nm}$ ：球諧係數

其中  $\psi$  為地球非球體引力造成之擾動位。對  $\psi$  取梯度，可得地球非球體擾動引力位

造成之擾動加速度  $\ddot{\mathbf{R}}_{NS}$  :

$$\ddot{\mathbf{R}}_{NS} = \nabla \psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

在地固座標中，可以將地球非球體擾動引力位造成之擾動加速度透過微分鍊式法重新表示為  $\ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b$  (GSFC, 1989) :

$$\ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b = \begin{bmatrix} a_{x_b} \\ a_{y_b} \\ a_{z_b} \end{bmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b^T} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b^T} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b^T} \right) \quad (4-3)$$

其中， $r_b = (x_b, y_b, z_b)^T$ 。

$\ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b$  為以地固座標表示的非球體擾動加速度，現以慣性座標表達則為：

$$\ddot{\mathbf{R}}_{NS} = (\mathbf{SNP})^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b = \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b \quad (4-4)$$

對於變數方程(3-9)、(3-10)、(3-11)式中與地球引力位有所相關的  $\mathbf{A}_G$ 、 $\mathbf{B}_G$ 、 $\mathbf{A}_{NS}$ 、 $\mathbf{B}_{NS}$ 、 $\mathbf{C}_{NS}$  矩陣，表示如下：

$$\mathbf{A}_G = \frac{\partial \left( \frac{GM_e}{r} \right)}{\partial \mathbf{r}^T} = -\frac{GM_e}{r^2} \quad (4-5)$$

$$\mathbf{B}_G = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_G}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (4-6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{NS} &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{NS}}{\partial \mathbf{r}^T} = \frac{\partial [(\mathbf{SNP})^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b]}{\partial \mathbf{r}^T} \\ &= \frac{\partial [(\mathbf{SNP})^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b]}{\partial \mathbf{r}_b^T} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial \mathbf{r}^T} \\ &= (\mathbf{SNP})^{-1} \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b}{\partial \mathbf{r}_b^T} (\mathbf{SNP}) \end{aligned} \quad (4-7)$$

$$\mathbf{B}_{NS} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{NS}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (4-8)$$

$$\mathbf{C}_{NS} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{NS}}{\partial \mathbf{C}_X^T} = (\mathbf{SNP})^{-1} \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{NS}^b}{\partial \mathbf{C}_X^T} \quad (4-9)$$

其中， $\overline{\mathbf{C}}_X^T$  為含正規化球諧係數  $\overline{C}_{nm}, \overline{S}_{nm}$  (見公式 5-20) 之向量。而 (4-7)、(4-9) 式中各項矩陣的詳細求法，請詳見第五章。

## 4-2 大氣阻力

空氣阻力係數， $C_F$ ，定義為 (GSFC, 1989)：

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} \quad (4-10)$$

其中， $F$ ：作用於衛星之空氣阻力大小

$\rho$ ：衛星正通過之介質的分子組合密度

$V$ ：衛星與介質之相度速度大小

$A$ ：衛星參考面積

在慣性座標系統下， $V$  指的是衛星與大氣之相對速度 ( $\mathbf{v}_{rel}$ )，可由下式計算求得 (張莉雪，2003)：

$$\mathbf{v}_{rel} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_d \quad (4-11)$$

式中， $\dot{\mathbf{r}}_d$  為大氣速度，與地球自轉及空氣轉動有關。本研究採用之定義為：

$$\dot{\mathbf{r}}_d = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_h y \\ \dot{\theta}_h x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

其中， $\dot{\theta}_h$  為空氣角速度， $\dot{\theta}$  為地球自轉平均角速度， $h$  為氣體離地表之高度

$$\dot{\theta}_h = \dot{\theta} \cdot (1 - 1.588187 \times 10^{-3} h + 1.88539 \times 10^{-5} h^2 - 5.108229 \times 10^{-8} h^3 + 3.917401 \times 10^{-11} h^4)$$

(4-13)

大氣組成密度  $\rho$  隨衛星高度快速減少，所以對於高衛星（GPS、LAGEOS）影響甚大。但對於低軌衛星大氣阻力也是影響精度的重要因素之一，特別是帶有天線的衛星（ $A/m$  大）。而空氣阻力係數會因衛星形狀、材料的不同而不同，更由於衛星運行中的搖動狀態，使得空氣阻力係數難以準確測定。表 4-1 為各種衛星平面及其空氣阻力係數的參考表。

表 4-1 各參考平面之空氣阻力係數

表面形狀	計算與大氣相對速度夾角 $\alpha$ 之參考方向	參考面積	空氣阻力係數	力分量指向
球面	相對大氣速度	球體橫切面積	$C_D = 1.0$	沿相對大氣向量
圓柱面 (只指外面 圓環表面)	圓柱軸	圓柱長×直徑	$C_{N_c} = \frac{4}{3} \sin^2 \alpha$	垂直於圓柱軸與相對速度組成之平面
			$C_{A_c} = 0$	沿圓柱軸
切平面	切面法線方向	切平面面積	$C_{N_p} = 2.0 \cos^2 \alpha$	切平面法線向
			$C_{T_p} = 0$	切平面切線向

現針對不同形狀的衛星，進行空氣阻力係數的求解：

#### 4-2-1 球形衛星 (spherical)

在衛星為球形的情形下，此時的空氣阻力係數  $C_F = C_D = 1.0$ 。則大氣擾動加速度可以表示為 (GSFC, 1989)：

$$\ddot{\mathbf{R}}_D = -S_S \rho \mathbf{v}_{rel} v_{rel} \quad (4-14)$$

$$\text{其中，} S_S = \frac{1}{2} C_D \left( \frac{A}{m} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi d^2}{4m} \right) \quad (4-15)$$

$d$  為半球切面直徑

$m$  為衛星質量

#### 4-2-2 圓柱形衛星



由於軸對稱的緣故，我們簡單將作用力分為垂直 (normal,  $\mathbf{N}$ ) 及軸向 (axial,  $\mathbf{A}$ ) 二方向。其中  $\hat{\mathbf{X}}_B = q_{11}\mathbf{i} + q_{21}\mathbf{j} + q_{31}\mathbf{k}$ ，係利用慣性座標單位向量 ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) 表示的衛星固定座標單位軸向向量 (見衛星固定座標之轉換)。

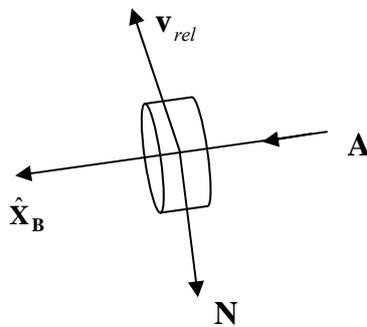


圖 4-1 衛星作用力向量示意圖

1. 軸向 (axial, A) : 求  $\mathbf{v}_{rel}$  在平行  $\hat{\mathbf{X}}_B$  上之分量 ( $\mathbf{V}_{//}$ )

利用向量內積定律可求得平行  $\hat{\mathbf{X}}_B$  上之分量  $\mathbf{V}_{//}$  為 :

$$\mathbf{V}_{//} = v_{rel} \cos \theta \cdot \frac{\hat{\mathbf{X}}_B}{|\hat{\mathbf{X}}_B|} = \hat{\mathbf{X}}_B (\mathbf{v}_{rel} \cdot \hat{\mathbf{X}}_B) \quad (4-16)$$

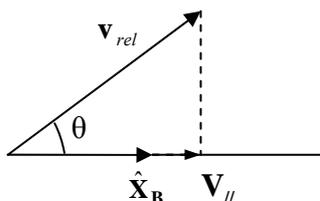


圖 4-2 軸向分量示意圖

2. 垂直 (normal, N) : 求  $\mathbf{v}_{rel}$  在垂直  $\hat{\mathbf{X}}_B$  上之分量 ( $\mathbf{V}_{\perp}$ )

利用向量外積可求得由  $\mathbf{v}_{rel}$  及  $\hat{\mathbf{X}}_B$  組成平面之法向量，

$$\vec{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{X}}_B \times \mathbf{v}_{rel} = |\hat{\mathbf{X}}_B| v_{rel} \sin \theta, \vec{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{X}}_B, \vec{\mathbf{n}} \perp \mathbf{v}_{rel} \quad (4-17)$$

又  $\vec{\mathbf{n}} \perp \mathbf{V}_{\perp}$  (因為  $\mathbf{V}_{\perp}$  在  $\mathbf{v}_{rel}$ 、 $\hat{\mathbf{X}}_B$  組成之平面上) 且  $\mathbf{V}_{\perp} \perp \hat{\mathbf{X}}_B$ ，所以

$$\mathbf{V}_{\perp} = \hat{\mathbf{X}}_B \times \vec{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{X}}_B \times (\mathbf{v}_{rel} \times \hat{\mathbf{X}}_B) \quad (4-18)$$

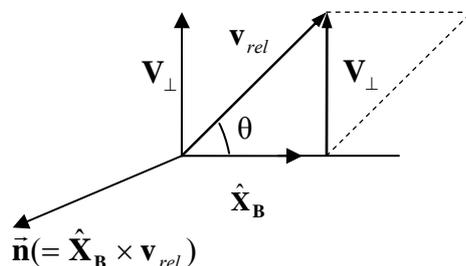


圖 4-3 垂直分量示意圖

由 1、2 兩種情形，我們可以分別得到垂直方向上的大氣擾動加速度  $\mathbf{N}$ ，

$$\mathbf{N} = S_c \hat{\mathbf{X}}_B \times (\hat{\mathbf{X}}_B \times \mathbf{v}_{rel}) \left| \hat{\mathbf{X}}_B \times \mathbf{v}_{rel} \right| \quad (4-19)$$

以及軸向方向上的大氣擾動加速度  $\mathbf{A}$ ，

$$\mathbf{A} = -S_e \hat{\mathbf{X}}_B (\hat{\mathbf{X}}_B \cdot \mathbf{v}_{rel}) \left| \hat{\mathbf{X}}_B \cdot \mathbf{v}_{rel} \right| \quad (4-20)$$

綜合二者可得圓柱形衛星之大氣擾動加速度

$$\ddot{\mathbf{R}}_D = \rho(\mathbf{N} + \mathbf{A}) \quad (4-21)$$

其中，

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{1}{2} \left( \frac{C_{NC}}{\sin^2 \alpha} \right) \left( \frac{A}{m} \right) = \frac{2Ld}{3m} \\ S_e &= \frac{1}{2} \left( \frac{C_{NC}}{\cos^2 \alpha} \right) \left( \frac{A}{m} \right) = \frac{\pi d^2}{4m} \end{aligned} \quad (4-22)$$

$L$ ：圓柱長

$d$ ：圓柱面直徑

$m$ ：衛星質量



#### 4-2-3 有兩側平板之圓柱本體衛星

1、太陽能板 (paddle) 平行  $\mathbf{Y}_B$  軸，見圖 (4-4)

大氣與衛星間的相對速度在衛星固定座標系下可表示成 (GSFC, 1989)：

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}_{rel} = \dot{x}_B \mathbf{i}_B + \dot{y}_B \mathbf{j}_B + \dot{z}_B \mathbf{k}_B \quad (4-23)$$

其中，旋轉矩陣  $\mathbf{Q}$  定義請見 2-13、2-14 式。此時平板固定展開 90 度 (與  $\mathbf{Y}_B$  軸平行)，故平板在  $\mathbf{Y}_B$  軸並無受力，對於平板而言，僅需考慮垂直方向上的擾動即可。

為了在任一時刻都能收到最大的太陽能量，太陽能板會隨著衛星所在位置的不同而調整旋轉。今假設平板與  $\mathbf{X}_B$ - $\mathbf{Y}_B$  平面的夾角為  $i_p$ ，即平板單位法向量  $\hat{\mathbf{N}}_P$  與  $\mathbf{Z}_B$  軸夾角為  $i_p$ ，如圖 4-5。

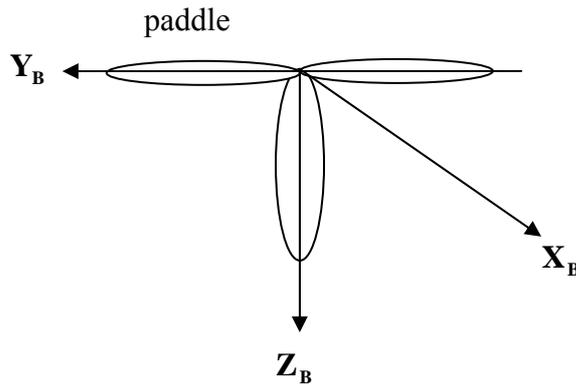


圖 4-4 太陽能板夾角示意圖 (一)

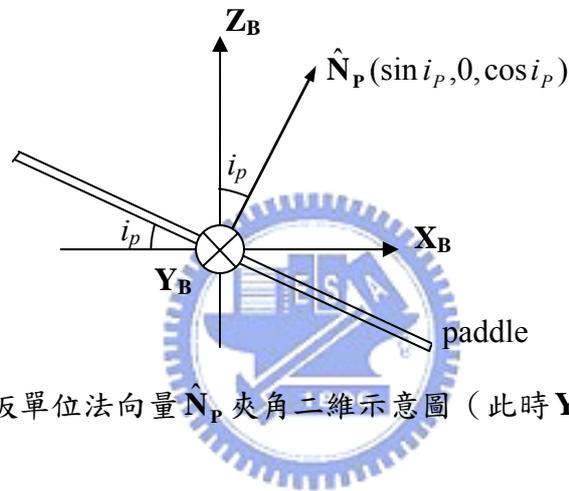


圖 4-5 平板單位法向量  $\hat{N}_P$  夾角二維示意圖 (此時  $Y_B$  軸指入紙面)

經由向量內積，可以得到沿  $\hat{N}_P$  方向平板所受之垂直擾動速度  $V_N$  (圖 4-6)，

$$\mathbf{V}_N = \mathbf{V}_B \cdot \hat{N}_P = \dot{x}_B \sin i_p + \dot{z}_B \cos i_p \quad (4-24)$$

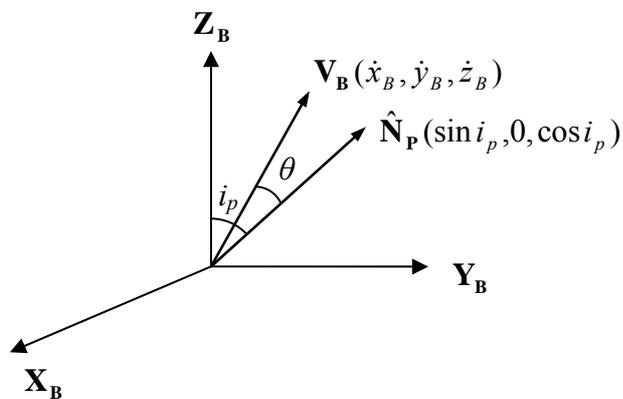


圖 4-6 平板垂直擾動速度  $V_N$  三維示意圖

現分別求解衛星在  $\mathbf{X}_B$ 、 $\mathbf{Y}_B$ 、 $\mathbf{Z}_B$  三方向上所受之擾動力大小。

A.  $\mathbf{F}_{\mathbf{X}_B}$ ：沿  $\mathbf{X}_B$  軸受力（即為 axial 方向）

此方向上圓柱衛星本體以及兩側太陽平板皆有受力。

$$\mathbf{F}_{\mathbf{X}_B} = -S_e \dot{x}_B |\dot{x}_B| - S_p \mathbf{V}_N |\mathbf{V}_N| \sin i_p \quad (4-25)$$

B.  $\mathbf{F}_{\mathbf{Y}_B}$ 、 $\mathbf{F}_{\mathbf{Z}_B}$ ：沿  $\mathbf{Y}_B$ 、 $\mathbf{Z}_B$  軸受力（圖 4-7）

$\mathbf{Y}_B$  方向上僅圓柱衛星本體有受力， $\mathbf{Z}_B$  方向上圓柱衛星本體以及兩側太陽平板皆有受力。

$$\mathbf{V}_\perp = (0, \dot{y}_B, \dot{z}_B) \quad |\mathbf{V}_\perp| = \sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2} \quad (4-26)$$

$$\mathbf{V}_\perp \text{ 的單位向量 } \hat{\mathbf{V}}_\perp = \left( 0, \frac{\dot{y}_B}{\sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2}}, \frac{\dot{z}_B}{\sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2}} \right) \quad (4-27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\perp |\mathbf{V}_\perp| &= \mathbf{V}_\perp^2 \hat{\mathbf{V}}_\perp \\ &= (\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2) \left( 0, \frac{\dot{y}_B}{\sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2}}, \frac{\dot{z}_B}{\sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2}} \right) \\ &= (0, \dot{y}_B \sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2}, \dot{z}_B \sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2}) \end{aligned} \quad (4-28)$$

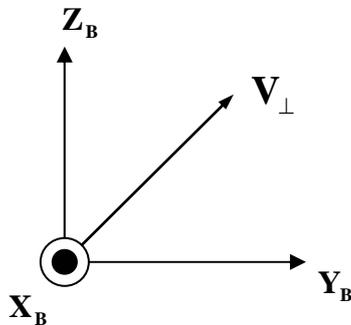


圖 4-7 圓柱本體垂直方向受力速度  $\mathbf{V}_\perp$  二維示意圖

故  $Y_B$  方向上受力，

$$F_{Y_B} = -S_c \dot{Y}_B \sqrt{\dot{Y}_B^2 + \dot{Z}_B^2} \quad (4-29)$$

$Z_B$  方向上受力，

$$F_{Z_B} = -S_c \dot{Z}_B \sqrt{\dot{Y}_B^2 + \dot{Z}_B^2} - S_p V_N |V_N| \cos i_p \quad (4-30)$$

2、太陽能板 (paddle) 不平行  $Y$  軸，見圖 4-8 (中華衛星三號即為此例)

在中華衛星三號中，二片太陽能板分別展開 59 度、121 度，二者位於同一平面，受力互為對稱。今設平板展開之銳角夾角為  $\beta$ ，如圖 4-9。

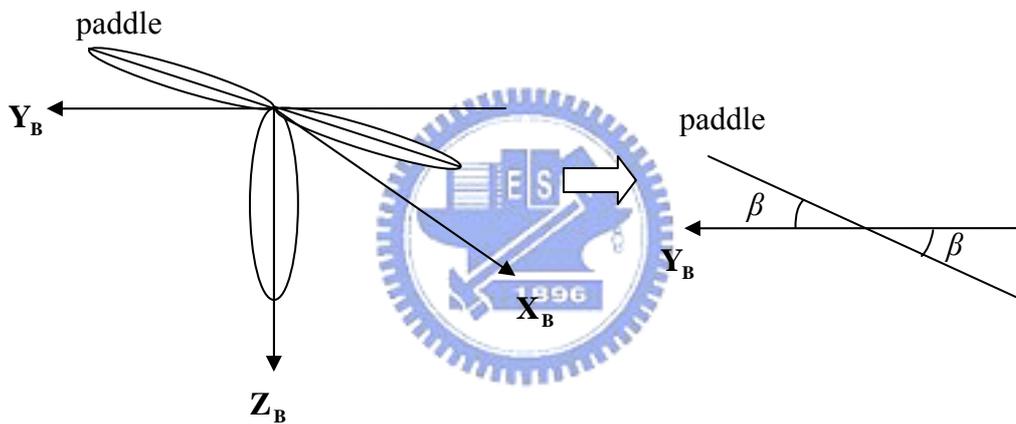


圖 4-8 太陽能板夾角示意圖 (二)

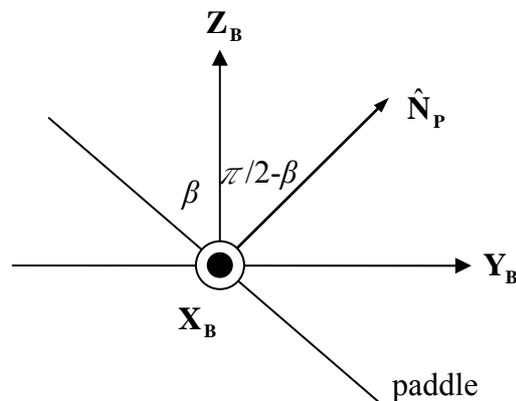


圖 4-9 太陽能板法向量  $\hat{N}_P$  夾角二維示意圖 (此時  $X_B$  軸指出紙面)

已知平板與  $\mathbf{Z}_B$  軸夾角  $\beta$ ，所以平板法向量  $\hat{\mathbf{N}}_P$  與  $\mathbf{Z}_B$  軸夾角為  $(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ ， $\beta$  角的轉動與  $\mathbf{X}_B$  軸無關（此時  $\hat{\mathbf{N}}_P$  在  $\mathbf{Y}_B - \mathbf{Z}_B$  平面上轉動）。又平板法向量  $\hat{\mathbf{N}}_P$  與  $\mathbf{Z}_B$  軸夾角  $i_p$ （此時  $\hat{\mathbf{N}}_P$  在  $\mathbf{X}_B - \mathbf{Z}_B$  平面上轉動），轉動後的平板法向量  $\hat{\mathbf{N}}'_P$ ，如圖 4-10。

平板法向量  $\hat{\mathbf{N}}'_P$  可分解為  $\mathbf{X}_B$  軸上的  $\mathbf{X}_{\hat{\mathbf{N}}'_P}$  以及  $\mathbf{Y}_B - \mathbf{Z}_B$  平面上的  $\hat{\mathbf{N}}_P$ ，

$$\mathbf{X}_{\hat{\mathbf{N}}'_P} = \sin i_p \cdot \hat{\mathbf{N}}'_P \text{ (}\mathbf{X}_B\text{ 軸上)} \quad (4-31)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_P = \cos i_p \cdot \hat{\mathbf{N}}'_P \text{ (}\mathbf{Y}_B - \mathbf{Z}_B\text{ 平面上)} \quad (4-32)$$

又  $\mathbf{Y}_B - \mathbf{Z}_B$  平面上的  $\hat{\mathbf{N}}_P$  可分解為  $\mathbf{Y}_B$ 、 $\mathbf{Z}_B$  軸上的  $\mathbf{Y}_{\hat{\mathbf{N}}_P}$ 、 $\mathbf{Z}_{\hat{\mathbf{N}}_P}$ ，

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\hat{\mathbf{N}}_P} &= \cos i_p \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) \cdot \hat{\mathbf{N}}'_P \\ &= \cos i_p \cdot \cos \beta \cdot \hat{\mathbf{N}}'_P \end{aligned} \quad (4-33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\hat{\mathbf{N}}_P} &= \cos i_p \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) \cdot \hat{\mathbf{N}}'_P \\ &= \cos i_p \cdot \sin \beta \cdot \hat{\mathbf{N}}'_P \end{aligned} \quad (4-34)$$

綜合 (4-31)、(4-33)、(4-34) 式，可以得到

$$\hat{\mathbf{N}}'_P = (\sin i_p, \cos i_p \cos \beta, \cos i_p \sin \beta) \quad (4-35)$$

利用向量內積求得太陽能板在沿  $\hat{\mathbf{N}}'_P$  方向所受擾動速度  $\mathbf{V}'_N$ ，

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_N &= \mathbf{V}_B \cdot \hat{\mathbf{N}}'_P \\ &= \dot{x}_B \sin i_p + \dot{y}_B \cos i_p \cos \beta + \dot{z}_B \cos i_p \sin \beta \end{aligned} \quad (4-36)$$

故可分別求解衛星在  $\mathbf{X}_B$ 、 $\mathbf{Y}_B$ 、 $\mathbf{Z}_B$  三方向上所受之擾動力大小，不同前述作法之處在於，由於此時太陽能板並非平行  $\mathbf{Y}_B$  軸方向，故平板在此軸上亦有受力情形。

$$\mathbf{F}'_{X_B} = -S_e \dot{x}_B |\dot{x}_B| - S_p \mathbf{V}'_N |\mathbf{V}'_N| \sin i_p \quad (4-37)$$

$$\mathbf{F}'_{Y_B} = -S_c \dot{y}_B \sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2} - S_p \mathbf{V}'_N |\mathbf{V}'_N| \cos i_p \cos \beta \quad (4-38)$$

$$\mathbf{F}'_{Z_B} = -S_c \dot{z}_B \sqrt{\dot{y}_B^2 + \dot{z}_B^2} - S_p \mathbf{V}'_N |\mathbf{V}'_N| \cos i_p \sin \beta \quad (4-39)$$

可將衛星受大氣擾動所產生之加速度表示為，

$$\ddot{\mathbf{R}}_D = \rho \mathbf{Q} \mathbf{F}_B \quad (4-40)$$

其中， $\rho$ ：大氣分子組合密度

$\mathbf{Q}$ ：座標旋轉矩陣，定義請見 2-12、2-13 式

$$S_p = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{N_p}}{\cos^2 \alpha} \right) \left( \frac{A_p}{m} \right) \quad (4-41)$$

$A_p$ 為太陽能板面積，因為有兩片太陽能板，所以 $\Sigma A_p = 2 * A_p$

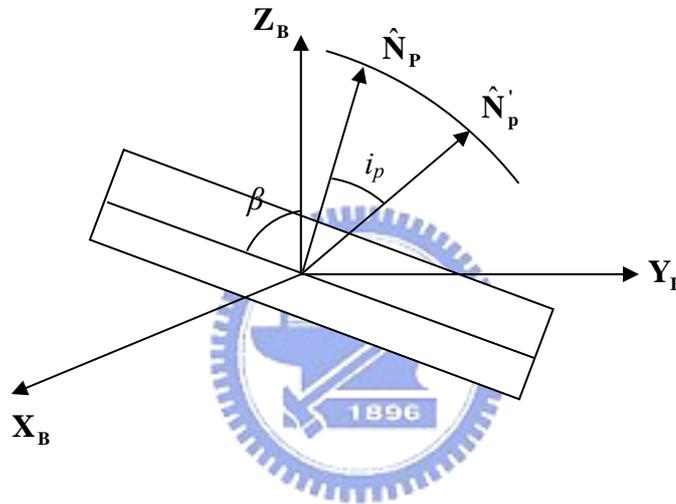


圖 4-10 太陽能板法向量轉動三維示意圖

### 4-3 太陽輻射壓

由於太陽輻射會在衛星表面上產生壓力，而該力對衛星所產生的擾動加速度為 (Seeber,1993)：

$$\ddot{\mathbf{R}}_{\text{SR}} = \nu P_S C_r \frac{A}{m} (AU)^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^3} \quad (4-42)$$

其中， $\nu$ ：地球陰影函數

$P_S$ ：一天文單位距離的太陽輻射壓 = solar flux / 光速 =  $4.560 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$

$C_r$ ：衛星表面積的反射係數

$A$ ：衛星的有效橫截面積

$m$ ：衛星質量

$\mathbf{r}, \mathbf{r}_S$ ：衛星及太陽的慣性位置向量

對於變數方程 (3-9)、(3-10)、(3-11) 式中與太陽輻射壓有所相關的  $\mathbf{A}_{\text{SR}}$ 、 $\mathbf{B}_{\text{SR}}$ 、 $\mathbf{C}_{\text{SR}}$  矩陣，表示如下：

$$\mathbf{A}_{\text{SR}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\text{SR}}}{\partial \mathbf{r}^T} = \nu \frac{P_S R_{sun}^2 C_r A}{m |\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^3} \left[ \mathbf{I} - \frac{3[\mathbf{r} - \mathbf{r}_S][\mathbf{r} - \mathbf{r}_S]^T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^2} \right] \quad (4-43)$$

$$\mathbf{B}_{\text{SR}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\text{SR}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} = \mathbf{0}_3 \quad (4-44)$$

$$\mathbf{C}_{\text{SR}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\text{SR}}}{\partial C_r} = \nu P_S R_{sun}^2 \frac{A}{m} \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}_S]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^2} \quad (4-45)$$

#### 4-4 經驗公式

重力場擾動與衛星高度有關，高度越低越為敏感，對於低軌衛星來說，重力場擾動是最為關鍵的環節（朱聖源,施闖，2003）。為了解決此一問題，可以利用求解一圈一週期（Once per revolution）之經驗模式吸收不完整及未考慮之擾動力，而經驗加速度透過衛星運動時的旋轉座標 R-A-C（座標定義請參見 2-1-3）三方向的表達式為（Colombo,1986; Colombo,1989）：

$$\mathbf{a}_{ec} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_a \\ S_c \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

$$\begin{aligned} S_r &= a_0 + a_1 \cos u + a_2 \sin u \\ S_a &= b_0 + b_1 \cos u + b_2 \sin u \\ S_c &= c_0 + c_1 \cos u + c_2 \sin u \end{aligned} \quad (4-47)$$

其中， $S_r$ ：為徑向方向所吸收加速度誤差

$S_a$ ：為沿軌道方向所吸收加速度誤差

$S_c$ ：為橫向方向所吸收加速度誤差

$u = \omega + f$ ：昇交點到衛星的角距（緯度角距，argument of latitude）

$a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ：經驗係數

此經驗公式建立在衛星旋轉座標系上，若將衛星旋轉座標系中的 $\mathbf{a}_{ec}$ 轉至慣性座標

中，慣性座標的經驗加速度 $\ddot{\mathbf{R}}_{EC}$ 與衛星旋轉座標系中的 $\mathbf{a}_{ec}$ 則有以下關係：

$$\ddot{\mathbf{R}}_{EC} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{ec} \\ \ddot{y}_{ec} \\ \ddot{z}_{ec} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} S_r \\ S_a \\ S_c \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \mathbf{a}_{ec} \quad (4-48)$$

其中， $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ （請參見公式 2-10、2-11）

經驗公式會吸收部分初始狀態向量誤差和力模式在參數計算時的誤差。式中  
含有  $\sin u, \cos u$  二項為週期性的軌道誤差，與時間相依，其振幅不隨時間而增加；  
至於  $a_0, b_0, c_0$  為常數項之軌道誤差，亦不隨時間變化。

對於變數方程(3-9)、(3-10)、(3-11)式中與經驗公式有關的  $\mathbf{A}_{EC}$ 、 $\mathbf{B}_{EC}$ 、 $\mathbf{C}_{EC}$ ，  
表示如下：

$${}_{3 \times 3} \mathbf{A}_{EC} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{EC}}{\partial \mathbf{r}^T} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{a}_{ec}}{\partial \mathbf{r}^T} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \frac{\partial S_r}{\partial \mathbf{r}^T} \\ \frac{\partial S_a}{\partial \mathbf{r}^T} \\ \frac{\partial S_c}{\partial \mathbf{r}^T} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (4-49)$$

$${}_{3 \times 3} \mathbf{B}_{EC} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{EC}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{a}_{ec}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \frac{\partial S_r}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} \\ \frac{\partial S_a}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} \\ \frac{\partial S_c}{\partial \dot{\mathbf{r}}^T} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (4-50)$$

$${}_{3 \times 9} \mathbf{C}_{EC} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{EC}}{\partial \mathbf{P}_e^T} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{a}_{ec}}{\partial \mathbf{P}_e^T} \quad (4-51)$$

對於(4-49)、(4-50)、(4-51)式中各項矩陣的詳細求法，請詳見第五章。