第五章　擾動力與參數之間的偏微方程

在第四章中已經概略敘述各項擾動力方程其相對應的變數方程，現將針對變數方程中每項偏微的相關矩陣，進行詳細求解。

5-1 非球體擾動力

在（4-7）式中，要解得慣性座標下非球體擾動加速度對衛星位置的偏微，必須先解得地固座標下非球體擾動加速度對衛星位置的偏微，再行座標轉換得之。將地固座標下非球體擾動加速度對衛星位置的偏微表示為（GSFC，1989），

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}^{b}}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} &= \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right) \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \mathbf{r}_b^2}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{r}_b^2}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{r}_b^2}\right)\end{aligned} \tag{5-1}$$

其中，

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial r} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial r} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \phi} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \end{bmatrix} \tag{5-2}$$

將（5-2）式代入（5-1）式，重新整理可得：

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}^{b}}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial r} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial r} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \phi} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}} \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

其中，非球體擾動位對地固座標系的（r,ϕ,λ）一次偏微分：

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n(n+1)\sum_{m=0}^{n}\left(C_n^m\cos m\lambda+S_n^m\sin m\lambda\right)\cdot P_n^m(\sin\phi) \tag{5-4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi}=\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(C_n^m\cos m\lambda+S_n^m\sin m\lambda\right)\times\left\{P_n^{m+1}(\sin\phi)-m\tan\phi\cdot P_n^m(\sin\phi)\right\} \tag{5-5}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}m\left(S_n^m\cos m\lambda-C_n^m\sin m\lambda\right)\cdot P_n^m(\sin\phi) \tag{5-6}$$

非球體擾動位對地固座標系的（r,ϕ,λ）二次偏微分：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=\frac{\mu}{r^3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n(n+2)(n+1)\sum_{m=0}^{n}\left(C_n^m\cos m\lambda+S_n^m\sin m\lambda\right)\cdot P_n^m(\sin\phi) \tag{5-7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi}&=\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi\partial r}\\&=-\frac{\mu}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n(n+2)\sum_{m=0}^{n}\left(C_n^m\cos m\lambda+S_n^m\sin m\lambda\right)\times\left[P_n^{m+1}(\sin\phi)-m\tan\phi\cdot P_n^m(\sin\phi)\right]\end{aligned} \tag{5-8}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\lambda}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial r}=-\frac{\mu}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n(n+1)\sum_{m=0}^{n}m\left(S_n^m\sin m\lambda-C_n^m\cos m\lambda\right)P_n^m(\sin\phi) \tag{5-9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}=\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(C_n^m\cos m\lambda+S_n^m\sin m\lambda\right)\times&\left\{\tan\phi\cdot P_n^{m+1}(\sin\phi)\right.\\&\left.+\left[m^2\sec^2\phi-m\tan^2\phi-n(n+1)\right]\cdot P_n^m(\sin\phi)\right\}\end{aligned} \tag{5-10}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi\partial\lambda}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\phi}=-\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}m\left(S_n^m\sin m\lambda-C_n^m\cos m\lambda\right)\left(P_n^{m+1}(\sin\phi)-m\tan\phi\cdot P_n^m(\sin\phi)\right) \tag{5-11}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} m^2\left(C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda\right)\cdot P_n^m(\sin\phi)$$

(5-12)

在（5-1）式中的 $\frac{\partial^2 r}{\partial \mathbf{r}_b{}^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{r}_b{}^2}, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{r}_b{}^2}$ 可分別表示為：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \mathbf{r}_b{}^2} = \frac{1}{r}\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{r}_b \mathbf{r}_b^T}{r^2}\right] \tag{5-13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{r}_b{}^2} = &-\frac{1}{(x_b{}^2 + y_b{}^2)^{3/2}}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\right)^T - \frac{z_b \mathbf{r_b}}{r^2}\right]\left[x_b\left(\frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\right) + y_b\left(\frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\right)\right] \\ &-\frac{1}{r^2\sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2}}\left[\mathbf{r}_b\left(\frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\right) + z_b \mathbf{I} - \frac{2z_b}{r^2}\mathbf{r}_b \mathbf{r}_b^T\right]\end{aligned} \tag{5-14}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{r}_b{}^2} = -\frac{2}{(x_b{}^2 + y_b{}^2)^2}\begin{bmatrix} -y_b \\ x_b \\ 0 \end{bmatrix}\left[x_b\left(\frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\right) + y_b\left(\frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b^{\mathrm{T}}}\right)\right] + \frac{1}{(x_b{}^2 + y_b{}^2)}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5-15)

同樣地，要解得在（4-9）式中慣性座標下非球體擾動加速度對球諧係數的偏微，必須先解得地固座標下非球體擾動加速度對球諧係數的偏微，再行座標轉換得之。將地固座標下非球體擾動加速度對球諧係數的偏微表示為（GSFC，1989），

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}^{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{C_X}} = \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{C_X}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{C_X}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{C_X}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)$$

(5-16)

其中 $\mathbf{C_X}$ 為含球諧係數 C_{nm}, S_{nm} 之向量。而 $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)$、$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right)$、$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)$ 對球諧係數的偏微為：

$$
\frac{\partial}{\partial C_n^m}\begin{bmatrix} \partial\psi/\partial r \\ \partial\psi/\partial\phi \\ \partial\psi/\partial\lambda \end{bmatrix} = \frac{\mu}{r}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{-1}{r}(n+1)\cdot\cos m\lambda\cdot P_n^m(\sin\phi) \\ \cos m\lambda\left(P_n^{m+1}(\sin\phi) - m\tan\phi\cdot P_n^m(\sin\phi)\right) \\ -m\cdot\sin m\lambda\cdot P_n^m(\sin\phi) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \partial^2\psi/\partial r\partial C_2^0 & \partial^2\psi/\partial r\partial C_2^1 & \cdots \\ \partial^2\psi/\partial\phi\partial C_2^0 & \partial^2\psi/\partial\phi\partial C_2^1 & \cdots \\ \partial^2\psi/\partial\lambda\partial C_2^0 & \partial^2\psi/\partial\lambda\partial C_2^1 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2\psi/\partial r\partial C_n^m \\ \partial^2\psi/\partial\phi\partial C_n^m \\ \partial^2\psi/\partial\lambda\partial C_n^m \end{bmatrix} \tag{5-17}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial S_n^m}\begin{bmatrix} \partial\psi/\partial r \\ \partial\psi/\partial\phi \\ \partial\psi/\partial\lambda \end{bmatrix} = \frac{\mu}{r}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{-1}{r}(n+1)\cdot\sin m\lambda\cdot P_n^m(\sin\phi) \\ \sin m\lambda\left(P_n^{m+1}(\sin\phi) - m\tan\phi\cdot P_n^m(\sin\phi)\right) \\ m\cdot\cos m\lambda\cdot P_n^m(\sin\phi) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \partial^2\psi/\partial r\partial S_2^1 & \partial^2\psi/\partial r\partial S_2^2 & \cdots \\ \partial^2\psi/\partial\phi\partial S_2^1 & \partial^2\psi/\partial\phi\partial S_2^2 & \cdots \\ \partial^2\psi/\partial\lambda\partial S_2^1 & \partial^2\psi/\partial\lambda\partial S_2^2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2\psi/\partial r\partial S_n^m \\ \partial^2\psi/\partial\phi\partial S_n^m \\ \partial^2\psi/\partial\lambda\partial S_n^m \end{bmatrix} \tag{5-18}
$$

將（5-18）、（5-17）式代入（5-16）式，重新整理可得：

$$
\frac{\partial\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{NS}}^{\mathbf{b}}}{\partial\mathbf{C_X}} = \begin{bmatrix} \partial r/\partial x_b & \partial\phi/\partial x_b & \partial\lambda/\partial x_b \\ \partial r/\partial y_b & \partial\phi/\partial y_b & \partial\lambda/\partial y_b \\ \partial r/\partial z_b & \partial\phi/\partial z_b & \partial\lambda/\partial z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2\psi/\partial r\partial\mathbf{C_X} \\ \partial^2\psi/\partial\phi\partial\mathbf{C_X} \\ \partial^2\psi/\partial\lambda\partial\mathbf{C_X} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \sum\left(\partial^2\psi/\partial\mathbf{C_X}\partial x_b\right) \\ \sum\left(\partial^2\psi/\partial\mathbf{C_X}\partial y_b\right) \\ \sum\left(\partial^2\psi/\partial\mathbf{C_X}\partial z_b\right) \end{bmatrix} \tag{5-19}
$$

在衛星擾動理論中，引力位的展開所使用的是球諧係數 C_{nm}, S_{nm} 以及締和勒讓德函

數 P_{nm} ，如公式 4-1。但在目前公布的球諧係數通常是為『正規化球諧係數（$\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}$）』，配合完全正規化締和勒證德函數 $\overline{P}_{nm}$ ，則引力位的展開可以另外表示為（NASA, 2004）：

$$V(r,\phi,\lambda)=\frac{GM_e}{r}+\frac{GM_e}{r}\left[\sum_{n=2}^{N_{\max}}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda+\overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\cdot\overline{P}_{nm}(\sin\phi)\right] \quad (5\text{-}20)$$

其中（r,ϕ,λ）、M_e 、R_e 、G、$N_{\max}$ 定義請參見公式 4-1。

而正規化函數 $\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm},\overline{P}_{nm}$ 與非正規化函數 C_{nm},S_{nm},P_{nm} 的關係為：

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_{nm}&=H_{nm}P_{nm}\\ C_{nm}&=H_{nm}\overline{C}_{nm}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\overline{C}_{nm}\overline{P}_{nm}=C_{nm}P_{nm} \quad (5\text{-}21)$$

其中，$$H_{nm}=\left[\frac{(2-\delta(m))(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (5\text{-}22)$$

$$\delta(m)=\begin{cases}1,\text{if m}=0\\0,\text{if m}\neq 0\end{cases} \quad (5\text{-}23)$$

由於程式中使用的是正規化球諧係數，所以必須進行函數間的轉換。已由公式（5-22）中得知 $\overline{C}_{nm}\overline{P}_{nm}=C_{nm}P_{nm}$ ，所以在公式（5-4）～公式（5-19）中，可利用 $\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm},\overline{P}_{nm}$ 取代替換 C_{nm},S_{nm},P_{nm} 。另由於 $\overline{C}_n^m\overline{P}_n^{m+1}\neq C_n^mP_n^{m+1}$ ，所以公式(5-5)、(5-8)、(5-10)、(5-11)、(5-17)、(5-18)中出現之 P_n^{m+1}， 則可以經由下式進行替換：

$$C_n^mP_n^{m+1}=\overline{C}_n^m\overline{P}_n^{m+1}\left(\frac{H_n^m}{H_n^{m+1}}\right) \quad (5\text{-}23)$$

其中，$\frac{H_n^m}{H_n^{m+1}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} & \Rightarrow \text{if } m = 0 \\ \sqrt{(n-m)(n+m+1)} & \Rightarrow \text{if } m \neq 0 \end{cases}$

利用公式（5-21）～公式（5-23）便可以求得以正規化球諧係數（$\overline{C}_{nm}, \overline{S}_{nm}$）以及完全正規化締和勒證德函數 $\overline{P}_{nm}$ 表達之 $\mathbf{A}_{\mathbf{NS}}$ 、$\mathbf{B}_{\mathbf{NS}}$ 、$\mathbf{C}_{\mathbf{NS}}$ 。

5-2 大氣阻力

衛星高度越低，所受到的空氣阻力就越大。現將因為空氣阻力造成的擾動加速度 $\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}$ 表示為（李慶海，1989）：

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}} &= -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A}{m} (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_d) |\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_d| \\ &= -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A}{m} v_{rel} \mathbf{v}_{rel} \end{aligned} \tag{5-24}$$

其中，C_D：空氣阻力係數

ρ：大氣組成密度

A：有效衛星橫截面積

m：衛星質量

$\mathbf{v}_{rel}$ ：衛星對大氣的相對速度

$\dot{\mathbf{r}}$ ，$\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{d}}$ ：分別為衛星及空氣的速度向量

有效衛星橫截面積 A，為衛星垂直於衛星對大氣相對速度 $\mathbf{v}_{rel}$ 方向上的面積。由於大氣速度遠小於衛星速度故大部分的衛星橫截面積可以考慮為為衛星行進時面向軌道面的面積 A_{sat} ，用數學式表示為 $A = A_{sat} \times \cos\alpha$ 。其中 α 為衛星速度與相對速度間的夾角（圖 5-1），用三角形中的邊與角關係計算可得：

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\dot{r}^2 + v_{rel}^2 - \dot{r}_d^2}{2 \cdot \dot{r} \cdot v_{rel}^2} \right) \tag{5-25}$$

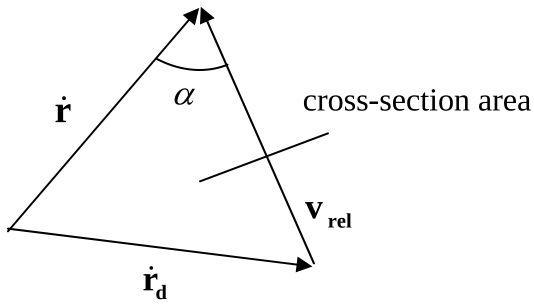

圖 5-1　有效衛星橫截面積與速度向量表示圖

5-2-1　大氣擾動加速度與衛星位置、衛星速度間的關係

$\mathbf{A}_{\mathbf{AD}}$ 矩陣為計算大氣擾動加速度對衛星位置的偏微所產生的矩陣，$\mathbf{B}_{\mathbf{AD}}$ 矩陣為大氣擾動加速度對衛星速度的偏微所產生的矩陣。首先必須考慮的是，在大氣擾動加速度中，與衛星位置及衛星速度有函數相關的參數究竟為何？這些參數分別是：大氣組成密度 ρ、衛星速度與相對速度間的夾角 α、衛星對大氣的相對速度度向量 $\mathbf{v}_{rel}$ 其速度大小 v_{rel}。利用微分鍊式法則可以將 $\mathbf{A}_{\mathbf{AD}}$、$\mathbf{B}_{\mathbf{AD}}$ 矩陣可以分別表示為：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\mathbf{AD}} &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{v}_{rel}}\frac{\partial \mathbf{v}_{rel}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial v_{rel}}\frac{\partial v_{rel}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \\
&= -\frac{1}{2} C_D \frac{A_{sat}}{m}\left[\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} v_{rel}\mathbf{v}_{rel}\cos\alpha + \rho v_{rel}\mathbf{v}_{rel}(-\sin\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} + \rho\cos\alpha\, v_{rel}\frac{\partial \mathbf{v}_{rel}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} + \rho\cos\alpha\,\mathbf{v}_{rel}\frac{\partial v_{rel}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\right]
\end{aligned}
$$

(5-26)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\mathbf{AD}} &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{v}_{rel}}\frac{\partial \mathbf{v}_{rel}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial v_{rel}}\frac{\partial v_{rel}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \\
&= -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A_{sat}}{m}\left[v_{rel}\mathbf{v}_{rel}(-\sin\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + \cos\alpha\, v_{rel}\frac{\partial \mathbf{v}_{rel}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + \cos\alpha\,\mathbf{v}_{rel}\frac{\partial v_{rel}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}\right]
\end{aligned}
$$

(5-27)

以下分別來討論各參數與衛星位置、衛星速度間的關係。

一、大氣組成密度

大氣組成密度僅與衛星所在位置有關係，與衛星速度則無關。大氣組成密度 ρ

可表示為$\rho(Z)=\rho_s(Z)\Delta\rho_c$。$\rho_s(Z)$是高度為 Z 時的標準大氣密度，$\Delta\rho_c$則是其他密度變化量。簡單敘述如下：

（一）標準大氣密度：為衛星高度 Z、全球平均大氣層溫度T_∞的函數。

$\rho_s(Z)$是在衛星高度 Z 處的標準大氣密度（Montenbruck and Gill，2001）：

$$\log\rho_s(Z,T_\infty)=\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4}c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^i\left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j \tag{5-28}$$

由上式可以得到標準大氣密度

$$\rho_s(Z,T_\infty)=10^{\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4}c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^i\left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j} \tag{5-29}$$

其中，Z 為衛星高度（km），T_∞為全球平均大氣層溫度。透過太陽活動資料、地磁活動資料及每日大氣變化可以求算出T_∞。

（二）全球平均大氣層溫度

（1）當日 10.7 公分波長的平均太陽通量$F_{10.7}$，及計算日前後 27 天的平均太陽通量$\overline{F}_{10.7}$，二者所造成之求平均大氣層溫度每日變化值：

$$T_c=379.0^\circ+3.24^\circ\overline{F}_{10.7}+1.3^\circ\left(F_{10.7}-\overline{F}_{10.7}\right) \tag{5-30}$$

（2）公式（5-30）求得之大氣溫度是在假設地磁活動為零的情況下，故必須再加上地磁活動資料，此時全球平均大氣層溫度為：

$$T_1=T_c\left\{1+0.3\left[\sin^{2.2}\theta+\left(\cos^{2.2}\eta-\sin^{2.2}\theta\right)\cos^{3.0}\frac{\tau}{2}\right]\right\} \tag{5-31}$$

式中，$\theta=\frac{1}{2}\left|\phi+\delta_S\right|$ (5-32)

$$\eta=\frac{1}{2}\left|\phi-\delta_S\right| \tag{5-33}$$

$$\tau=H-37.0^\circ+6.0^\circ\sin\left(H+43.0^\circ\right) \tag{5-34}$$

其中，ϕ：衛星大地緯度

δ_S：太陽赤緯

H：太陽地方時角。為衛星赤經減太陽赤經所得之夾角。

$$H = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y_S}{x_S}\right) \tag{5-35}$$

（3）大氣層溫度改正量 ΔT_∞

$$\begin{aligned} \Delta T_\infty &= 28.0°K_P + 0.03°e^{K_P} \qquad (\mathrm{Z} \geq 200\ \mathrm{KM}) \\ \Delta T_\infty &= 14.0°K_P + 0.02°e^{K_P} \qquad (\mathrm{Z} < 200\ \mathrm{KM}) \end{aligned} \tag{5-36}$$

其中，K_P 為計算當天第 6.7 時到 9.7 時，此 3 小時內的地磁指數值。

（三）標準密度多項式係數 c_{ij}

c_{ij} 為 Jacchia 在 1971 年提出，針對在不同溫度、不同衛星高度下的標準密度多項式係數，可適用於高度 90～2500 公里、大氣溫度 500～1900 絕對溫度，見表 5-1 及表 5-2。

表 5-1　500 公里以下之標準溫度多項式係數（Montenbruck and Gill，2001）

90 公里 < Z < 180 公里　　500K < T_∞ < 850K					
i/j	0	1	2	3	4
0	-0.3520856×10^{2}	$+0.3912622\times10^{1}$	-0.8649259×10^{2}	$+0.1504119\times10^{3}$	-0.7109428×10^{2}
1	$+0.1129210\times10^{4}$	$+0.1198158\times10^{4}$	$+0.8633794\times10^{3}$	-0.3577091×10^{4}	$+0.1970558\times10^{4}$
2	-0.1527475×10^{5}	-0.3558481×10^{5}	$+0.1899243\times10^{5}$	$+0.2508241\times10^{5}$	-0.1968253×10^{5}
3	$+0.9302042\times10^{5}$	$+0.3646554\times10^{6}$	-0.3290364×10^{6}	-0.1209631×10^{5}	$+0.8438137\times10^{5}$
4	-0.2734394×10^{6}	-0.1576097×10^{7}	$+0.1685831\times10^{7}$	-0.4282943×10^{6}	-0.1345593×10^{6}
5	$+0.3149696\times10^{6}$	$+0.2487723\times10^{7}$	-0.2899124×10^{7}	$+0.1111904\times10^{7}$	$+0.3294095\times10^{2}$

90 公里 < Z < 180 公里　　850K < T_∞ < 1900K					
i/j	0	1	2	3	4
0	-0.5335412×10^{2}	$+0.2900557\times10^{2}$	-0.2046439×10^{2}	$+0.7977149\times10^{2}$	-0.13335853×10
1	$+0.1977533\times10^{4}$	-0.7091478×10^{3}	$+0.4398538\times10^{3}$	-0.1568720×10^{3}	$+0.2615466\times10^{2}$
2	-0.2993620×10^{5}	$+0.5187286\times10^{4}$	-0.1989795×10^{4}	$+0.3643166\times10^{3}$	-0.5700669×10^{2}
3	$+0.2112068\times10^{6}$	-0.4483209×10^{4}	-0.1349971×10^{5}	$+0.9510012\times10^{4}$	-0.1653725×10^{4}
4	-0.7209722×10^{6}	-0.7684101×10^{5}	$+0.1256236\times10^{6}$	-0.6805699×10^{6}	$+0.1181257\times10^{5}$
5	$+0.9625966\times10^{6}$	$+0.2123127\times10^{6}$	-0.2622793×10^{6}	$+0.1337130\times10^{6}$	-0.2329995×10^{5}

180 公里 < Z < 500 公里　　500K < T_∞ < 850K					
i/j	0	1	2	3	4
0	$+0.2311910\times10^{2}$	$+0.1355298\times10^{3}$	-0.8424310×10^{3}	$+0.1287331\times10^{4}$	-0.6181209×10^{3}
1	-0.1057776×10^{4}	$+0.6087979\times10^{3}$	$+0.8690566\times10^{4}$	-0.1715922×10^{5}	$+0.9052671\times10^{4}$
2	$+0.1177230\times10^{5}$	-0.3164132×10^{5}	-0.1076323×10^{4}	$+0.6302629\times10^{5}$	-0.4312459×10^{5}
3	-0.5827663×10^{5}	$+0.2188167\times10^{6}$	-0.2422912×10^{6}	$+0.2461286\times10^{6}$	$+0.6044096\times10^{5}$
4	$+0.1254589\times10^{6}$	-0.5434710×10^{6}	$+0.8123016\times10^{6}$	$+0.5095273\times10^{6}$	$+0.5007458\times10^{5}$
5	-0.9452922×10^{5}	$+0.4408026\times10^{6}$	-0.7379410×10^{6}	$+0.5095273\times10^{6}$	-0.1154192×10^{6}

180 公里 < Z < 500 公里　　850K < T_∞ < 1900K					
i/j	0	1	2	3	4
0	$+0.4041761\times10^{2}$	-0.1305719×10^{3}	$+0.1466809\times10^{3}$	-0.7120196×10^{2}	$+0.1269605\times10^{2}$
1	-0.8127720×10^{3}	$+0.2273565\times10^{4}$	-0.2577261×10^{4}	$+0.1259045\times10^{4}$	-0.2254978×10^{3}
2	$+0.5130043\times10^{4}$	-0.1501308×10^{5}	$+0.1717142\times10^{5}$	-0.8441698×10^{4}	$+0.1518796\times10^{4}$
3	-0.1600170×10^{5}	-0.7199064×10^{5}	$+0.8284653\times10^{5}$	-0.4098358×10^{5}	$+0.7411926\times10^{4}$
4	$+0.2384718\times10^{5}$	-0.7199064×10^{5}	$+0.8284653\times10^{5}$	-0.4098358×10^{5}	$+0.7411926\times10^{4}$
5	-0.1363104×10^{5}	$+0.4153499\times10^{5}$	-0.4793581×10^{5}	$+0.2377854\times10^{5}$	-0.4310233×10^{4}

表 5-2　500 公里以上之標準溫度多項式係數（Montenbruck and Gill，2001）

500 公里 < Z < 1000 公里　　500K < T_∞ < 850K					
i/j	0	1	2	3	4
0	-0.1815722×10^{4}	$+0.9792972\times10^{4}$	-0.1831374×10^{5}	$+0.1385255\times10^{5}$	-0.3451234×10^{4}
1	$+0.9851221\times10^{4}$	-0.5397525×10^{5}	$+0.9993169\times10^{5}$	-0.7259456×10^{5}	$+0.1622553\times10^{5}$
2	-0.1822932×10^{5}	$+0.1002430\times10^{6}$	-0.1784481×10^{6}	$+0.1145178\times10^{6}$	-0.1641934×10^{5}
3	$+0.1298113\times10^{5}$	-0.7113430×10^{5}	$+0.1106375\times10^{6}$	-0.3825777×10^{5}	-0.1666915×10^{5}
4	-0.1533510×10^{4}	$+0.7815537\times10^{4}$	$+0.7037562\times10^{4}$	-0.4674636×10^{5}	$+0.3516949\times10^{5}$
5	-0.1263680×10^{4}	$+0.7265792\times10^{4}$	-0.2092909×10^{5}	$+0.2936094\times10^{5}$	-0.1491676×10^{5}

500 公里 < Z < 1000 公里　　850K < T_∞ < 1900K					
i/j	0	1	2	3	4
0	-0.4021335×10^{2}	-0.1326983×10^{3}	$+0.3778864\times10^{3}$	-0.2808660×10^{3}	$+0.6513531\times10^{2}$
1	$+0.4255789\times10^{3}$	$+0.3528126\times10^{3}$	-0.2077888×10^{4}	$+0.1726543\times10^{4}$	-0.4191477×10^{3}
2	-0.1821662×10^{4}	$+0.7905357\times10^{3}$	$+0.3934271\times10^{4}$	-0.3969334×10^{4}	$+0.1027991\times10^{4}$
3	$+0.3070231\times10^{4}$	-0.2941540×10^{4}	-0.3276639×10^{4}	$+0.4420217\times10^{4}$	-0.1230778×10^{4}
4	-0.2196848×10^{4}	$+0.2585118\times10^{4}$	$+0.1382776\times10^{4}$	-0.2533006×10^{4}	$+0.7451387\times10^{3}$
5	$+0.5494959\times10^{3}$	-0.6604225×10^{3}	-0.3328077×10^{3}	$+0.6335703\times10^{3}$	-0.1879812×10^{3}

1000 公里 < Z < 2500 公里　　500K < T_∞ < 850K					
i/j	0	1	2	3	4
0	$+0.3548698\times10^{3}$	-0.2508685×10^{4}	$+0.6252742\times10^{4}$	-0.6755376×10^{4}	$+0.2675763\times10^{4}$
1	-0.5370852×10^{3}	$+0.4182586\times10^{4}$	-0.1151114×10^{5}	$+0.1338915\times10^{5}$	-0.5610580×10^{4}
2	-0.2349586×10^{2}	-0.8941841×10^{3}	$+0.4417927\times10^{4}$	-0.6732817×10^{4}	$+0.3312608\times10^{4}$
3	$+0.3407073\times10^{3}$	-0.1531588×10^{4}	$+0.2179045\times10^{4}$	-0.8841341×10^{3}	-0.1369769×10^{3}
4	-0.1698471×10^{3}	$+0.8985697\times10^{3}$	-0.1704797×10^{5}	$+0.1363098\times10^{4}$	-0.3812417×10^{3}
5	$+0.2497973\times10^{2}$	-0.1389618×10^{3}	$+0.2820058\times10^{3}$	-0.2472862×10^{3}	$+0.7896439\times10^{2}$

1000 公里 < Z < 2500 公里　　850K < T_∞ < 1900K					
i/j	0	1	2	3	4
0	$+0.1281061\times10^{2}$	-0.3389179×10^{3}	$+0.6861935\times10^{3}$	-0.4667627×10^{3}	$+0.1029662\times10^{3}$
1	$+0.2024251\times10^{3}$	$+0.1668302\times10^{3}$	-0.1147876×10^{4}	$+0.9918940\times10^{3}$	-0.2430215×10^{3}
2	-0.5750743×10^{3}	$+0.8259823\times10^{3}$	$+0.2329832\times10^{3}$	-0.6503359×10^{3}	$+0.1997989\times10^{3}$
3	$+0.5106207\times10^{3}$	-0.1032012×10^{4}	$+0.4851874\times10^{3}$	$+0.8214097\times10^{2}$	-0.6527048×10^{2}
4	-0.1898953×10^{3}	$+0.4347501\times10^{3}$	-0.2986011×10^{3}	$+0.5423180\times10^{2}$	$+0.5039459\times10^{1}$
5	$+0.2569577\times10^{2}$	-0.6282710×10^{2}	$+0.4971077\times10^{2}$	-0.1404385×10^{2}	$+0.8450500\times10^{0}$

（四）其他密度變化量

空氣密度會隨高度變化，其基本元素N_2、O、O_2、H、He、Ar等在大氣層中分佈情況也會隨地理位置而變。密度變化量主要的影響因素有四：(1)地磁活動變化（geomagnetic activity）；(2)半年變化（semi-annual）；(3)低大氣層之季節緯度變化；(4)氦氣之季節緯度變化。（張莉雪，2003）

（1）地磁活動密度變化量：

$$(\Delta\log\rho)_G = 0.012K_P + 1.2\times10^{-5}e^{K_P} \tag{5-37}$$

（2）半年變化密度變化量

$$(\Delta\log\rho)_{SA} = f(Z)g(t) \tag{5-38}$$

式中，$f(Z)$：計算高度 Z 時的密度變化幅度，$g(t)$：時間變化。

$$f(Z) = \left(5.876\times10^{-7}\times Z^{2.331} + 0.06328\right)\exp(-0.002868Z) \tag{5-39}$$

$$g(t) = 0.02835 + \left[0.3817 + 0.17829\sin(2\pi\tau_{SA} + 4.137)\right]\times\sin(4\pi\tau_{SA} + 4.259) \tag{5-40}$$

$$\tau_{SA} = \Phi + 0.09544\left\{\left[0.5 + 0.5\sin(2\pi\Phi + 6.035)\right]^{1.65} - 0.5\right\} \tag{5-41}$$

其中，$\Phi = \dfrac{t-36204}{365.2422}$　　t 為 Modified Julian Days (5-42)

（3）低大氣層之季節緯度變化

$$\begin{aligned}(\Delta\log\rho)_{LT} &= 0.014(Z-90)\exp\left(-0.0013(Z-90)^2\right)\\ &\times\sin(2\pi\Phi + 1.72)\sin\phi\left|\sin\phi\right|\end{aligned} \tag{5-43}$$

其中，ϕ 為大地緯度

（4）氦氣之季節緯度變化

$$(\Delta\log\rho)_{He} = 0.65\left|\frac{\delta_S}{\varepsilon}\right|\left[\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi\delta_S}{2|\delta_S|}\right) - 0.35355\right] \tag{5-44}$$

其中，ϕ 為衛星大地緯度，δ_S 為太陽赤緯，ε 為黃道傾角

綜合以上（1）、（2）、（3）、（4）所述，可以得到密度變化量為

$$\left(\Delta\log\rho\right)_{corr}=\left(\Delta\log\rho\right)_{G}+\left(\Delta\log\rho\right)_{SA}+\left(\Delta\log\rho\right)_{LT}+\left(\Delta\log\rho\right)_{He} \tag{5-45}$$

$$\Delta\rho_c=10^{\left(\Delta\log\rho\right)_{corr}} \tag{5-46}$$

要得知大氣組成密度與衛星位置間的關係，則必須進行大氣組成密度對衛星位置的偏微分。現利用微分積法則對大氣組成密度展開偏微：

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\rho_s\frac{\partial(\Delta\rho_c)}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}+\Delta\rho_c\frac{\partial\rho_s}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \tag{5-47}$$

式中其他密度變化量$\Delta\rho_c$與衛星位置的關係，可利用指數函數的導數公式展開為，

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Delta\rho_c)}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\Delta\rho_c\cdot\ln10\cdot\Bigg\{&g(t)f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}+0.014\sin(2\pi\Phi+1.72)e^{-0.0013(Z-90)^2}\\&\times\left(\left[1-0.0026(Z-90)^2\right]\sin\phi\left|\sin\phi\right|\frac{\partial Z}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}+2(Z-90)\left|\sin\phi\right|\cos\phi\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\right)\\&+0.65\cdot3\left|\frac{\delta_S}{\varepsilon}\right|\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi\delta_S}{2\left|\delta_S\right|}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi\delta_S}{2\left|\delta_S\right|}\right)\left(-\frac{\delta_S}{2\left|\delta_S\right|}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{5-48}$$

其中，Z為衛星高度（km）、ϕ為衛星大地緯度

$\Delta\rho_c$見（5-46）式、$g(t)$見（5-40）式、Φ見（5-42）式

$\dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}$：衛星大地緯度為衛星位置的偏微，見（5-49）式

$\dfrac{\partial Z}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}$：衛星高度$Z$對衛星位置的偏微，見（5-50）

$f'(Z)$：（5-39）式對高度Z的偏微，見（5-51）式

$$\begin{bmatrix}\partial\phi/\partial x_b\\ \partial\phi/\partial y_b\\ \partial\phi/\partial z_b\end{bmatrix}=\frac{\left(1-e^2\right)}{\sqrt{x_b{}^2+y_b{}^2}\left[\left(1-e^2\right)\left(x_b{}^2+y_b{}^2\right)+z_b{}^2\right]}\begin{bmatrix}-x_bz_b\\-y_bz_b\\\left(x_b{}^2+y_b{}^2\right)\end{bmatrix} \tag{5-49}$$

$$\begin{bmatrix} \partial Z/\partial x_b \\ \partial Z/\partial y_b \\ \partial Z/\partial z_b \end{bmatrix} = -\left(\frac{e^2 R_e (1-e^2)\sin\phi\cos\phi}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}} + \frac{z_b\cos\phi}{\sin^2\phi} \right) \begin{bmatrix} \partial \phi/\partial x_b \\ \partial \phi/\partial y_b \\ \partial \phi/\partial z_b \end{bmatrix} \tag{5-50}$$

$$f'(Z) = -0.002868 f(Z) + 2.331(5.876\times10^{-7})Z^{1.331}e^{-0.002868Z} \tag{5-51}$$

其中，R_e：地球赤道半徑，e：地球離心率，(x_b, y_b, z_b)：衛星地固座標。

利用指數函數的導數公式對標準大氣密度展開為：

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = 10^{\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4} c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^i \left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j} \times \ln 10 \times$$

$$\left[\frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4} c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^i \left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j \right)}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \right] \times \left[\frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4} c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^i \left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j \right)}{\partial T_\infty} \cdot \frac{\partial T_\infty}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \right] \tag{5-52}$$

其中，$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}$：見（5-50）式

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4} c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^i \left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j \right)}{\partial Z} = \frac{i}{1000}\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4} c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^{i-1} \left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j \tag{5-53}$$

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4} c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^i \left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^j \right)}{\partial T_\infty} = \frac{j}{1000}\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4} c_{ij}\left(\frac{Z}{1000km}\right)^{i} \left(\frac{T_\infty}{1000K}\right)^{j-1} \tag{5-54}$$

$$\frac{\partial T_\infty}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial T_\infty}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial T_\infty}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial T_\infty}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \tag{5-55}$$

式中，

$$
\begin{bmatrix} \partial T_\infty / \partial \theta \\ \partial T_\infty / \partial \eta \\ \partial T_\infty / \partial \tau \end{bmatrix} = 0.3T_c \begin{bmatrix} 2.2\sin^{1.2}\theta\cos\theta\left(1-\cos^{3.0}\dfrac{\tau}{2}\right) \\ -2.2\cos^{1.2}\eta\sin\eta\cos^{3.0}\dfrac{\tau}{2} \\ -1.5\cos^{2.0}\dfrac{\tau}{2}\sin\dfrac{\tau}{2}\left(\cos^{2.2}\eta-\sin^{2.2}\theta\right) \end{bmatrix} \tag{5-56}
$$

$$
\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial\theta}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{1}{2}\frac{\phi+\delta_S}{|\phi+\delta_S|}\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \tag{5-57}
$$

$$
\frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial\eta}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{1}{2}\frac{\phi-\delta_S}{|\phi-\delta_S|}\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \tag{5-58}
$$

$$
\frac{\partial\tau}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial\tau}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \tag{5-59}
$$

其中，θ,η,τ：見（5-32）、（5-33）、（5-34）式

ϕ：衛星大地緯度，δ_s：太陽赤緯

H：太陽地方時角，見（5-35）式

$$
\frac{\partial\tau}{\partial H} = 1 + 6.0^\circ\cos(H + 43.0^\circ) \tag{5-60}
$$

$$
\frac{\partial H}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-61}
$$

，(x,y,z) 為衛星慣性座標

二、衛星對大氣的相對速度度向量 $\mathbf{v}_{rel}$

相對速度 $\mathbf{v}_{rel}$ 的計算，請參見（4-11）式。對於相對速度 $\mathbf{v}_{rel}$ 與衛星位置、衛星速度間的關係我們可以用下列矩陣表示之：

$$
\frac{\partial\mathbf{v}_{rel}}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_h & 0 \\ -\dot{\theta}_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{v}_{rel}}{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-62}
$$

三、衛星對大氣的相對速度大小v_{rel}

將相對速度$\mathbf{v}_{rel}$表示為（$\dot{x}_r, \dot{y}_r, \dot{z}_r$），故$v_{rel}$可得為$\left(\dot{x}_r^{\,2}+\dot{y}_r^{\,2}+\dot{z}_r^{\,2}\right)^{1/2}$。對於相對速度大小$v_{rel}$與衛星位置、衛星速度間的關係我們可以用下列矩陣表示之：

$$\frac{\partial v_{rel}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\frac{\dot{\theta}_h}{v_{rel}}\begin{bmatrix}-\dot{y}_r\\ \dot{x}_r\\ 0\end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial v_{rel}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{1}{v_{rel}}\begin{bmatrix}\dot{x}_r\\ \dot{y}_r\\ \dot{z}_r\end{bmatrix} \tag{5-63}$$

四、衛星速度與相對速度間的夾角α與衛星位置間的關係

要得知夾角α與衛星位置、衛星速度間的關係，則必須進行夾角α對衛星位置、衛星速度的偏微，利用三角函數的導數公式可以得到：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\dot{r}^2+v_{rel}^2-\dot{r}_d^2}{2\cdot\dot{r}\cdot v_{rel}^2}\right)^2}}\frac{\partial\left(\dfrac{\dot{r}^2+v_{rel}^2-\dot{r}_d^2}{2\cdot\dot{r}\cdot v_{rel}^2}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \tag{5-64}$$

式中，
$$\frac{\partial\left(\dfrac{\dot{r}^2+v_{rel}^2-\dot{r}_d^2}{2\cdot\dot{r}\cdot v_{rel}^2}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial\left(\dfrac{v_{rel}}{2\dot{r}}+\dfrac{\dot{r}}{2v_{rel}}-\dfrac{\dot{r}_d^2}{2\dot{r}v_{rel}}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \tag{5-65}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{v_{rel}}{2\dot{r}}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{\dot{r}\cdot\dfrac{\partial v_{rel}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}-v_{rel}\cdot\dfrac{\partial \dot{r}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}}{2\dot{r}^2} \tag{5-66}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\dot{r}}{2v_{rel}}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{v_{rel}\cdot\dfrac{\partial \dot{r}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}-\dot{r}\cdot\dfrac{\partial v_{rel}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}}{2\dot{r}^2} \tag{5-67}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\dot{r}_d^2}{2\dot{r}v_{rel}}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{\dot{r}v_{rel}\cdot\dfrac{\partial \dot{r}_d^2}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}-\dot{r}_d^2\cdot\dfrac{\partial\left(\dot{r}v_{rel}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}},\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}}{2\dot{r}^2v_{rel}^2} \tag{5-68}$$

其中衛星速度大小、大氣速度大小分別對衛星位置、衛星速度向量的偏微$\dfrac{\partial \dot{r}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\ \dfrac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}\ \dfrac{\partial \dot{r}_d}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}\ \dfrac{\partial \dot{r}_d}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}$分別表示如下：

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{1}{\dot{r}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{bmatrix} \tag{5-69}$$

$$\frac{\partial \dot{r}_d}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\frac{\dot{\theta}_h^{\,2}}{\dot{r}_d}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \dot{r}_d}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{5-70}$$

5-2-2　大氣擾動加速度與空氣阻力係數間的關係

$\mathbf{C}_{AD}$ 矩陣為計算大氣擾動加速度對空氣阻力係數C_D的偏微所產生的矩陣。今採用簡單模式，將衛星各部空氣阻力係數綜合視為C_D。因為空氣阻力係數C_D與大氣擾動加速度為明顯相關函數關係，直接微分可得：

$$\mathbf{C}_{AD}=\frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}}{\partial C_D}=-\frac{1}{2}\rho\frac{A_{sat}\cos\alpha}{m}v_{rel}\mathbf{v}_{rel} \tag{5-71}$$

5-3　經驗公式

經驗加速度，是衛星位置、速度、經驗係數的函數，$\mathbf{A}_{\mathbf{EC}}$ 、$\mathbf{B}_{\mathbf{EC}}$ 、$\mathbf{C}_{\mathbf{EC}}$ 分別是經驗加速度對衛星位置、速度、經驗係數的偏微矩陣。要解得（4-49）、（4-50）、（4-51）式中慣性座標下經驗加速度對衛星位置、速度、經驗係數的偏微，必須先解得衛星旋轉座標下經驗加速度對衛星位置、速度、經驗係數的偏微，再行座標轉換得之。將衛星旋轉座標下經驗加速度對衛星位置、速度的偏微表示為：

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{ec}}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S_r}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial S_a}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial S_c}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \end{bmatrix}_{3\times 3} \tag{5-72}$$

式中，

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} &= -a_1 \sin u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + a_2 \cos u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \\ &= (-a_1 \sin u + a_2 \cos u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \end{aligned} \tag{5-73}$$

其中， $$u = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \omega + f = \tan^{-1}\left(\frac{hz}{yh_1 - xh_2}\right) \tag{5-74}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= y\dot{z} - \dot{y}z \\ h_2 &= z\dot{x} - \dot{z}x \\ h_3 &= \dot{y}x - \dot{x}y \\ h &= (h_1^{\ 2} + h_2^{\ 2} + h_3^{\ 2})^{1/2} \end{aligned} \tag{5-75}$$

由於要解得 $\dfrac{\partial S_r}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}$，必須先進行 $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}$ 的求解，利用 $\tan^{-1}$ 函數的導數公式可得：

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{hz}{yh_1 - xh_2}\right)^2} \bullet \frac{\partial\left(\dfrac{hz}{yh_1 - xh_2}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \tag{5-76}$$

其中，

$$\frac{\partial\left(\dfrac{hz}{yh_1 - xh_2}\right)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} = \frac{\dfrac{\partial (hz)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \cdot (yh_1 - xh_2) - \dfrac{\partial (yh_1 - xh_2)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \cdot (hz)}{(yh_1 - xh_2)^2} \tag{5-77}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (hz)}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} &= \frac{\partial [(h_1^{\ 2} + h_2^{\ 2} + h_3^{\ 2})^{1/2} \cdot z]}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \\ &= \frac{\partial \left\{ \left[(y\dot{z} - \dot{y}z)^2 + (z\dot{x} - \dot{z}x)^2 + (\dot{y}x - \dot{x}y)^2 \right]^{1/2} \cdot z \right\}}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} \end{aligned} \tag{5-78}$$

$$\frac{\partial(hz)}{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial[(h_1{}^2+h_2{}^2+h_3{}^2)^{1/2}\cdot z]}{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}$$

$$=\frac{\partial\left\{\left[(y\dot{z}-\dot{y}z)^2+(z\dot{x}-\dot{z}x)^2+(\dot{y}x-\dot{x}y)^2\right]^{1/2}\cdot z\right\}}{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \tag{5-79}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{h}\cdot z\left[(\dot{x}z^2-\dot{z}zx)+(\dot{x}y^2-\dot{y}xy)\right]\\ \frac{1}{h}\cdot z\left[(\dot{y}z^2-\dot{z}yz)+(\dot{y}x^2-\dot{x}xy)\right]\\ \frac{1}{h}\cdot z\left[(\dot{z}y^2-\dot{y}yz)+(\dot{z}x^2-\dot{x}xz)\right]\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(yh_1-xh_2)}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial\left[y(y\dot{z}-\dot{y}z)-x(z\dot{x}-\dot{z}x)\right]}{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}2\dot{z}x-\dot{x}z\\ 2y\dot{z}-\dot{y}z\\ -y\dot{y}-x\dot{x}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h}\cdot z\left[(-2z\dot{x}\dot{z}+2x\dot{z}^2)+(2x\dot{y}^2-2y\dot{x}\dot{y})\right]+0\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h}\cdot z\left[(-2y\dot{z}^2+2z\dot{y}\dot{z})+(-2x\dot{x}\dot{y}+2y\dot{x}^2)\right]+0\\ \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h}\cdot z\left[(-2y\dot{y}\dot{z}+2z\dot{y}^2)+(2z\dot{x}^2-2x\dot{x}\dot{z})\right]\right\}+\left[(y\dot{z}-\dot{y}z)^2+(z\dot{x}-\dot{z}x)^2+(\dot{y}x-\dot{x}y)^2\right]^{1/2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{h}\cdot z\left[(-z\dot{x}\dot{z}+x\dot{z}^2)+(x\dot{y}^2-y\dot{x}\dot{y})\right]\\ \frac{1}{h}\cdot z\left[(-y\dot{z}^2+z\dot{y}\dot{z})+(y\dot{x}^2-x\dot{x}\dot{y})\right]\\ \frac{1}{h}\cdot z\left[(-y\dot{y}\dot{z}+z\dot{y}^2)+(z\dot{x}^2-x\dot{x}\dot{z})\right]+\left[(y\dot{z}-\dot{y}z)^2+(z\dot{x}-\dot{z}x)^2+(\dot{y}x-\dot{x}y)^2\right]^{1/2}\end{bmatrix} \tag{5-80}$$

$$\frac{\partial(yh_1-xh_2)}{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial\left[y(y\dot{z}-\dot{y}z)-x(z\dot{x}-\dot{z}x)\right]}{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}$$

$$=\begin{bmatrix}-xz\\ -yz\\ y^2+x^2\end{bmatrix} \tag{5-81}$$

綜合（5-76）、（5-77）、（5-78）、（5-80）式，可解得 $\frac{\partial S_r}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}$ 為：

$$
\frac{\partial S_r}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}} = (-a_1 \sin u + a_2 \cos u) \cdot \frac{1}{1+(\frac{hz}{yh_1 - xh_2})^2} \cdot \frac{\partial(\frac{hz}{yh_1 - xh_2})}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}}
$$

$$
= \frac{(-a_1 \sin u + a_2 \cos u)}{1+(\frac{hz}{yh_1 - xh_2})^2} \cdot \left\{ \frac{(yh_1 - xh_2) \cdot \frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} z\left[(x\dot{z}^2 - z\dot{x}\dot{z}) + (x\dot{y}^2 - y\dot{x}\dot{y})\right] \\ z\left[(y\dot{z}^2 - z\dot{y}\dot{z}) + (y\dot{x}^2 - x\dot{x}\dot{y})\right] \\ z\left[(z\dot{y}^2 - y\dot{y}\dot{z}) + (z\dot{x}^2 - x\dot{x}\dot{z})\right] + h \end{bmatrix}}{(yh_1 - xh_2)^2} - \frac{hz \cdot \begin{bmatrix} 2x\dot{z} - z\dot{x} \\ 2y\dot{z} - \dot{y}z \\ -y\dot{y} - x\dot{x} \end{bmatrix}}{(yh_1 - xh_2)^2} \right\}
$$

(5-82)

綜合（5-76）、（5-77）、（5-79）、（5-81）式，可解得 $\frac{\partial S_r}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}$ 為：

$$
\frac{\partial S_r}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} = (-a_1 \sin u + a_2 \cos u) \cdot \frac{1}{1+(\frac{hz}{yh_1 - xh_2})^2} \cdot \frac{\partial(\frac{hz}{yh_1 - xh_2})}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}
$$

$$
= \frac{(-a_1 \sin u + a_2 \cos u)}{1+(\frac{hz}{yh_1 - xh_2})^2} \cdot \left\{ \frac{(yh_1 - xh_2) \cdot \frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} z\left[(\dot{x}z^2 - \dot{z}zx) + (\dot{x}y^2 - \dot{y}xy)\right] \\ z\left[(\dot{y}z^2 - \dot{z}yz) + (\dot{y}x^2 - \dot{x}xy)\right] \\ z\left[(\dot{z}y^2 - \dot{y}yz) + (\dot{z}x^2 - \dot{x}xz)\right] \end{bmatrix}}{(yh_1 - xh_2)^2} - \frac{hz \cdot \begin{bmatrix} -xz \\ -yz \\ y^2 + x^2 \end{bmatrix}}{(yh_1 - xh_2)^2} \right\}
$$

(5-83)

同（5-73）～（5-83）式推導程序，計算可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_a}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} &= -b_1 \sin u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + b_2 \cos u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \\
&= (-b_1 \sin u + b_2 \cos u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}
\end{aligned} \qquad (5\text{-}84)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_c}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} &= -c_1 \sin u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} + c_2 \cos u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}} \\
&= (-c_1 \sin u + c_2 \cos u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \partial \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}}
\end{aligned} \tag{5-85}
$$

公式（4-51）為慣性座標下經驗加速度對經驗係數的偏微，其中$\frac{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{ec}}}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}}$為衛星旋轉座標下經驗加速度對經驗係數的偏微，矩陣內各元素表示如下：

$$
\frac{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{ec}}}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos u & \sin u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos u & \sin u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sin u & \cos u \end{bmatrix}_{3\times 9} \tag{5-86}
$$

其中，$\mathbf{P}_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 & c_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$