第二章 理論基礎

渠道中之水流因遵守質量守恆及動量守恆定律，因此由數學式描述之控制方程式在滿足 de Saint Venant 之基本假設下，隨所選擇的兩個應變數不同而有不同型式的一維明渠流數學模式。採用之變數為水深與流速時，多用於特徵方程式之求解中；亦有採用保守型式（conservation form）者，採用流量及通水斷面積為應變數。並由控制方程式求解所需特性方程式以應用於數值上之求解。

2.1 基本假設（de Saint Venant 假設；陳,2003）

1.流速均勻分佈：

流速均勻分佈在通水面積上，即每一個通水斷面積僅存在一個流速，此即一維水流，因此動量校正係數為 1。換言之，通水斷面的水位線為一水平線，在此水平線上的各點水位相等。

2.靜水壓分佈：

假設渠道中水流之垂向流線曲率很小而且忽略其垂直加速度，因此水深方向速度梯度為零，以及水面坡度甚小，可忽略垂向加速度，則靜水壓分佈的假設成立。

3.渠道定量流摩擦損失估計:

渠底摩擦與紊流效應對水流所造成的損失，可以定量流摩擦率估算。

4.平均底床坡度甚小：

當平均渠底坡度甚小時，重力沿渠道所造成的分力將會很小，甚至可忽略不計，亦即水深可以垂向水面與渠底高程差表示。

5.忽略柯氏力及風力的影響：

通常在大範圍之海洋或是湖泊才會考慮到柯氏力及風力的影響，或是緯度相差很大的時候才會考慮，在小範圍的區域以重力、靜水壓、摩擦力為主。

6.曼寧粗糙係數為一常數：

事實上，曼寧粗糙係數和很多參數為息息相關的，如亂流程度、雷諾數、相對粗糙度等，在此不考慮其和這些變數之間的相關性，假設其為一常數。

2.2 控制方程式

採用 de Saint Venant equation，即為連續方程式和動量方程式，並選擇平均流速 u 與水深 h 作為因變數，而沿水流方向 x 座標及時間座標 t 為獨立自變數，得方程式如下：

1.連續方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + H\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{B}\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_h - \frac{q}{B} = 0 \qquad (2.1)$$

式中，h 為水深；t 為時間；u 為平均流速；x 為沿渠道中心線的距離；H=A/B 為水力深度；B 為渠道斷面寬；$\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_h$ 為當水深固定時，通水斷面積在 x 方向的變化率；q 為支流在主流方向的單位寬度流量（入流

為正，出流為負)。

2.動量方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}-g(S_0-S_f)+\frac{q(u-u^*)}{A}=0 \qquad (2.2)$$

式中，g 為重力加速度；S_0 為渠道底床坡度；u^* 為支流在主流分向的速度分量； S_f 為摩擦坡降，其方向與水流方向相同，可表示為下式：

$$S_f=\frac{u|u|n^2}{R^{\frac{4}{3}}} \qquad (2.3)$$

其中，R 為水力半徑；n 為曼寧粗糙係數。

2.3 特性法方程式

假設原控制方程式之連續方程式為J_1，動量方程式為J_2，並各乘a_1和a_2/g做線性疊加得

$$\begin{aligned}&a_1J_1+\frac{a_2}{g}J_2\\&=a_1\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\left(u+\frac{a_2}{a_1}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{a_2}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u+\frac{a_1gH}{a_2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+a_1\frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial x}\bigg|_h-a_2(S_0-S_f)-a_1\frac{q}{B}+\frac{a_2}{g}\frac{q(u-u^*)}{A}=0\end{aligned}$$

(2.4)

將上述方程式之後四項以 G 表示

$$G=a_1\left(\frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial x}\bigg|_h-\frac{q}{B}\right)+a_2\left(S_f-S_0+\frac{q(u-u^*)}{gA}\right) \qquad (2.5)$$

並且令

$$\lambda = \frac{dx}{dt} = \frac{a_1 u + a_2}{a_1} = \frac{a_1 gH + a_2 u}{a_2} \tag{2.6}$$

可化為全微分方程式如下：

$$a_1 \frac{Dh}{Dt} + \frac{a_2}{g}\frac{Du}{Dt} = -G \tag{2.7}$$

將方程式(2-6)化簡為：

$$\begin{bmatrix} u-\lambda & g \\ H & u-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

可解得兩特徵值$\lambda = u \pm c$，及其兩組相應特徵向量

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = c \\ a_1 = 1, a_2 = -c \end{cases} \tag{2.9}$$

其中$c = \sqrt{gH}$為擾動波速。再將(2-9)式代入（2-6）和(2-7)式可得兩組特性曲線及其相應方程式：

沿C_+方向：

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt_+} = u + c \\ \left(\frac{Dh}{Dt}\right)_+ + \left(\frac{c}{g}\right)\left(\frac{Du}{Dt}\right)_+ = -G_+ \end{gathered} \tag{2.10}$$

沿C_-方向：

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt_-} = u - c \\ \left(\frac{Dh}{Dt}\right)_- - \left(\frac{c}{g}\right)\left(\frac{Du}{Dt}\right)_- = -G_- \end{gathered} \tag{2.11}$$

其中

$$G=\frac{u}{B}\frac{\alpha A}{\alpha x}\bigg|_h \pm c\left(S_f-S_0\right)\pm c\frac{q\left(u-u^*\right)}{gA}-\frac{q}{B}$$

而 $\frac{u}{B}\frac{\alpha A}{\alpha x}\Big|_h$ ，為渠道非稜柱形項； $c\left(S_f-S_0\right)$ 為坡度項； $c\frac{q\left(u-u^*\right)}{gA}-\frac{q}{B}$ 為側流項。

由以上的轉換過程可將原為求解兩個偏微分方程式之問題，轉成沿著兩條特性曲線求解兩條全微分方程式之問題。