

## 第三章 數值方法

### 3.1 多方式特性法

特性法 (method of characteristics) 乃是最能符合物理意義之數值方法。特性法依計算網格結構分類，可分為特性曲線格網點法 (grid of characteristics scheme, CG scheme) 及定時間間隔法 (specified time interval scheme, STI scheme) 兩種類型。特性曲線格網點法，乃是在非固定空間間隔與時間間隔下，利用特性線概念求解任意空間與時間座標之應變數值；而定時間間隔法，則是特性法在固定時間間隔計算格網上求解。但基於實用上之考量，定時間間隔法較為常用。多方式特性法係數種特性法結合在一起的方法，採用固定時間間隔之隱式法、顯式法、時間延後法及空間延後法，各方法的示意圖如圖 3.1 所示，俾使每一條特性線依其在格網點上的可蘭數 (Courant number) 之大小及設定之最大延後數決定最適宜之方法。

可蘭數定義為

$$Cr = \frac{dx/dt}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lambda_i}{\Delta x / \Delta t} \quad (3.1)$$

其中

$\lambda_i = \frac{dx}{dt}$  : 為一特徵值，即擾動波傳遞速度

$\Delta x$  : 模式演算之空間間距

$\Delta t$  : 模式演算之時間間距

計算點之格網與可蘭數  $Cr$  及最大延後數  $M$  之關係如圖 3.2 所示，今以  $\phi$  值表示特性線與格網之交點未知量，多方式特性法各線性內差如圖 3.3 所示，各內差公式可表示如下：

### 1. 隱式法(implicit scheme)

特性線往回交於目前之時間間距上，使得可蘭數  $Cr > 1$ 。而在時間內差時須由兩個未知點內差，故稱為隱式法。

$$\phi_1 = \xi_1 \phi_{j-1}^k + (1 - \xi_1) \phi_{j-1}^{k+1} \quad (3.2)$$

### 2. 顯式法(explicit scheme)

特性曲線在一演算時距  $\Delta t$  內，向後交於空間軸上，使得可蘭數  $|Cr| \leq 1$ 。

$$\phi_2 = \eta_1 \phi_{j-1}^k + (1 - \eta_1) \phi_j^k \quad (3.3)$$

### 3. 空間延後法 (spatial reachback scheme)

特性曲線向後延伸  $M$  個演算時距  $\Delta t$ ，向後延伸交於空間軸上，可蘭數  $|Cr| \leq \frac{1}{M}$ 。

$$\phi_3 = \eta_2 \phi_{j-1}^{k+1-m} + (1 - \eta_2) \phi_j^{k+1-M} \quad (3.4)$$

當  $M=1$ ， $m=0$  時，回復到傳統顯式法。

### 4. 時間延後法 (temporal reachback scheme)

特性曲線向後延伸  $m$  個演算時距  $\Delta t$ ，但未達最大延後時距

$(M\Delta t)$ ，交於時間軸上，可蘭數  $\frac{1}{M} < |Cr| < 1$ 。

$$\phi_4 = \xi_2 \phi_{j-1}^{k-m} + (1 - \xi_2) \phi_{j-1}^{k+1-m} \quad (3.5)$$

當最大延後數  $M=1$  時，此法不使用；當  $m=0$  時，則回復到隱式法。

上列諸式中， $j$ ：空間指標； $k$ ：時間指標； $m$ ：延後數； $M$ ：最大延後數； $\zeta_i, \eta_i$ ：線性內差之權重係數； $\phi_n$ ： $h, u$ 。

綜合上述結果，可整理成表 3-1，由 Lai(1994)可得知利用延後法計算之效力與簡便性較好，因此為應付不同之情況，可依據可蘭數  $Cr$  及設定之最大延後數  $M$  來決定不同之多方式特性法。在模式初始演算時，若演算時刻數  $k$ (time steps) 小於最大延後數  $M$ ，令最大延後數  $M$  等於  $k$ ，其餘時刻之最大延後數則保持預設之定值。



### 3.2 差分方程式

為了方便數值計算，必須將得到的特性線方程式 (2-10) 式及 (2-11) 式作積分，可表為如下之差分式：

$$(h_p - h_i) + (c_{ip}/g)(u_p - u_i) + G_{ip}(t_p - t_i) = 0 \quad i=1, 2 \quad (3.6)$$

其中，

$$G_{ip} = \int_{t_i}^{t_p} G(t) dt = \frac{G(t_p) + G(t_i)}{2} \quad (3.7)$$

$p$ ：代表待求點；

$i$  : 代表在時間  $t$  時與空間或時間軸交會之點；

$ip$  : 代表落於格網點間之值；

$\lambda_i$  : 代表落於格網點間之波傳速度值。

將多方式法應用於公式 (3.6)，則差分方程式可表如下：

$$[\phi_1 - (\theta\phi_{1i} + (1-\theta)\phi_{1p})] + (c_{ip}/g)[\phi_2 - (\theta\phi_{2i} + (1-\theta)\phi_{2p})] + G_{ip}(t_p - t_i) = 0$$

$$i=1, 2 \quad (3.8)$$

上式中， $\theta$  值依多方式法之選擇，可分時間內差權重因子  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  及空間內差權重因子  $\eta_1$ 、 $\eta_2$ ，權重係數可依相似三角形決定如下：

1. 隱式法  $\theta = \xi_1 = \frac{(\Delta x_j / \Delta t)}{(dx/dt)_{1p}} = \frac{r_j}{\lambda_{1p}} = \frac{1}{C_r}$  (3.9)

2. 顯式法  $\theta = \eta_1 = \frac{(dx/dt)_{2p}}{(\Delta x_j / \Delta t)} = \frac{\lambda_{2p}}{r_j} = C_r$  (3.10)

3. 空間延後法  $\theta = \eta_2 = \frac{(dx/dt)_{3p}}{(\Delta x_j / M\Delta t)} = \frac{M\lambda_{4p}}{r_j} = MC_r$  (3.11)

4. 時間延後法  $\theta = \xi_2 = \frac{(\Delta x_j / m\Delta t)}{(dx/dt)_{4p}} - m = \frac{r_j}{\lambda_{4p}} - m = \frac{1}{C_r} - m$  (3.12)

上述諸式中  $r_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta t}$ ，若  $\lambda$  值為負時，則將  $\Delta x_j$  改為  $\Delta x_{j+1}$ ， $r_j$  改為  $r_{j+1}$ 。

將 (3.9) 至 (3.12) 式代入 (3.8) 式經整理後為如下之關係：

$$F_i(\phi_{j-1}^{k+1}, \phi_j^{k+1}, \phi_{j+1}^{k+1}) = 0 \quad i=1, 2 \quad (3.13)$$

根據上式即可求得格網點上於  $k+1$  時段之兩條相應方程式。

### 3.3 特徵值及特徵向量之修正法

由於特徵值(eigenvalue)及特徵向量(eigenvector)會直接影響特性線內插點位置及求解方程式[(3.6)及(3.13)式]之係數值，所以較合理精確的求法對於模擬之結果有相當程度的改善。原方法李氏(1992)是由單一斷面點推求特徵值及特徵向量，無法反應上游或下游流況對此斷面的影響，尤其在斷面變化或上下游流況差距較大時容易造成質量不守恆。為避免上述之缺點，陳氏(1996)將特徵值與特徵向量之求法改特性線傳遞方向之相鄰兩斷面來求解。又特徵值及特徵向量是由控制方程式偏微分項前之係數推導而得，由(2.8)式，將特徵值表示如下函數：

$$\lambda_i = f(\varphi) \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

$$\varphi = u, H, g, \dots$$

以亞臨界流為例：介於  $j-1$  與  $j$  之正負特性曲線  $\lambda$  各有 1 條；所以  
在上游：

$$\lambda_i = f\left(\frac{\varphi_{j-1} + \varphi_j}{2}\right) \quad i = 1, 2 \quad (3.15)$$

可得特徵值  $\lambda_i$  及相對應之特徵向量  $[a_i]$ ， $i = 1, 2$ 。

同理，於下游：

$$\lambda_i = f\left(\frac{\varphi_j + \varphi_{j+1}}{2}\right) \quad i = 1, 2 \quad (3.16)$$

可得特徵值  $\lambda_i$  及相對應之特徵向量  $[a_i]$ ,  $i = 1, 2$ 。

### 3.4 邊界條件

在特性方程式中有兩個未知數  $h$ 、 $u$ ，必須給予兩個邊界條件，在亞臨界流況時，上游邊界條件必須給流量，下游邊界條件給水位，而在交匯處必須給定內部邊界條件。

#### 1. 上游邊界條件

本數值模式與一般常見之模式相同，在上游邊界條件的部分，採用在上游區域所觀測到之流量歷線  $Q(t)$ ，作為數值演算之一邊界條件式。因流量為流速及水深之函數，以牛頓疊代法求解，則  $Q = Au$  可寫為

$$F^\xi(u, h) = A^\xi u^\xi - Q(t_{k+1}) \quad (3.17)$$

$F(u, h)$  可視為誤差函數(error function)，其定義為估計值  $(A^\xi u^\xi)$  與真值  $[Q(t^{k+1})]$  之絕對誤差。另定義前後兩次疊代誤差如下：

$$\Delta F = F^{\xi+1}(u, h) - F^\xi(u, h) \quad (3.18)$$

(3.17) 與 (3.18) 式中， $k$  為演算時間， $\xi$  為疊代次數。

當求解之未知數收斂時， $F^{\xi+1}(u, h) = 0$ 。 $\Delta F$  之泰勒展開式如下(忽略二次以上的項)：

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial F}{\partial u} \Delta u = 0 - F^\xi(u, h) = Q(t^{k+1}) - A^\xi u^\xi \quad (3.19)$$

將(3.17)分別對  $h, u$  微分可得

$$\frac{\partial F}{\partial h} = u^\xi \frac{\partial A^\xi}{\partial h}, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = A^\xi \quad (3.20)$$

將上式代入式( 3.19 )整理可得

$$u^\xi \frac{\partial A^\xi}{\partial h} h^{\xi+1} + A^\xi u^{\xi+1} = Q(t_{k+1}) + u^\xi \frac{\partial A^\xi}{\partial h} h^\xi \quad (3.21)$$

上式， $\frac{\partial A^\xi}{\partial h} = B^\xi$ 。

## 2. 下游邊條件

在本模式下可有如下之選擇：

### (1) 水位歷線

當流況為亞臨界流時，以下游邊界之實測水位歷線作為模式演算之邊界條件：



$$h^{k+1} + z^{k+1} = y(t_{k+1}) \quad (3.22)$$

### (2) 均勻流

若缺乏下游邊界水位歷線，則假設在渠道下游端為均勻流況，利

用牛頓疊代法求解如下：

$$F^\xi(u, h) = A^\xi u^\xi - Q^\xi = A^\xi u^\xi - A^\xi V_0^\xi = A^\xi u^\xi - A^\xi \left( \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.23)$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial F}{\partial u} \Delta u = -F^\xi \quad (3.33)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial A^\xi}{\partial h} (u^\xi - V_0^\xi) - \frac{2}{3R} A^\xi V_0^\xi \left( \frac{R^2}{h^2} \right) \equiv C_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = A^\xi$$

代入(3.32)式得

$$C_0 h^{k+1} + A^\xi u^{k+1} = V_0^\xi A^\xi + C_0 h^\xi \quad (3.34)$$

### 3. 內部邊界條件

#### (1) 合流:

可將合流渠道分為三段，主流上游段、主流下游段和支流段，水流流向及示意圖如下所示：

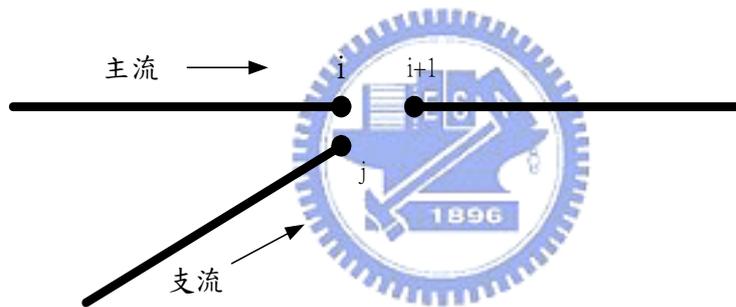


圖 3.4 一般合流交匯區斷面示意圖

其中， $i$  表示主流上游段最後一個斷面點， $i+1$  表示主流下游段第一斷面點， $j$  表示支流段最後斷面點，一般在主、合流交匯區之處理方式大致可分為以下幾種：

- a. 三點水位相等法：根據 Cunge(1980) 之 Abbott-Ionescu type scheme 水位相等觀念，必須將渠道分成三段，而假設當  $i$ 、 $i+1$ 、 $j$  三點斷面相當接近時水位相等，此時三點可視為一點，交匯點僅有一個水深與流量。此種方法，必須在斷面間距較小時三點才會較相近。

b. 三點比能相等法：亦根據 Cunge(1980)之Preissmann type scheme 比能相等觀念，將渠道分成三段，利用交匯區三斷面能量相等的觀念，作為交匯區內部邊界條件，且需滿足質量守恆。此方法說明交匯區有三個斷面，每個斷面有水深與流量兩個變量，同時在交匯區有三個水深三個流量。在交匯區由於能量變化很大，此方法必須忽略能量損失，所以容易產生較大的誤差。王等(1997)係利用此方法於淡水河網路河川之計算。

c. 兩點水位相等法：此方法只需將渠道分為兩段，主流段和支流段，計算主流段時上游給定流量，下游給定水位，當計算支流段時，支流之下游水位未知，故假設  $i$  點水位和  $j$  點水位相同，如此合流之邊界給定，即可算出內部斷面之流量與水深。由於此方法計算上較簡易，且要達到兩點水位相等的收斂精度也較容易，故本研究使用此方法。



## (2) 分流：

將分流渠道分為三段，主流上游段、主流下游段和支流段，水流流向及示意圖如下所示：

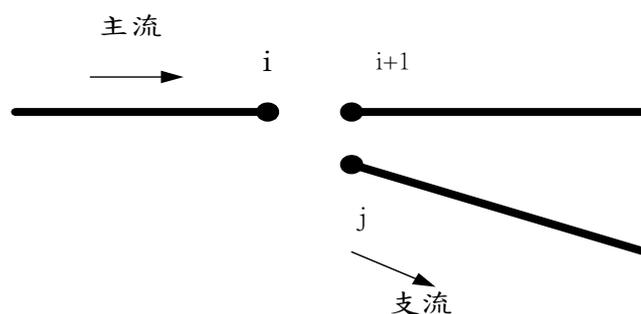


圖 3.5 一般分流交匯區隔點示意圖

其中， $i$  表示主流上游段最後斷面點， $i+1$  表示主流下游段第一斷面點， $j$  表示支流段第一個斷面點，一般主、分流交匯區之處理方式大

致可分為以下幾種：

- a. 三點水位相等法：與合流相同，假設當交匯區之三點非常接近時，可將三點視為一點，利用滿足三點水位相同的條件，代入連續方程式及動量方程式中計算，且必須滿足質量守恆。此方法所遇到的問題和合流一樣，且不易達到收斂。王等(1997)將此方法應用於淡水河系之計算。
- b. 兩點水位相等法(分流流量以曼寧公式猜測給定):分流和合流不同之處，在於支流之上游流量為未知，必須由水位求得流量。此方法即將  $j$  點水位等於  $i+1$  點水位代入曼寧公式，猜測之上游流量，如此交匯區邊界給定，再代入原模式中計算，算出分流各點之水位與流量。以曼寧公式推求支流流量的缺點為，若底床為平床，或  $i+1$  點與  $j$  點距離較遠的情況下，則曼寧公式所算出來之值，將造成所分之流量不精確，此法也較為粗糙，精確度低。
- c. 兩點水位相等法(分流流量以特性法求得):需假設一合理之流量起始值，利用特性線給水位求流量的方式，處理上游流量，其經過特性速度之修正，算出分流之起始流量，且同時需滿足質量守恆，並符合動量方程式與連續方程式，如此算出主、分流內部點之水位與流量。本模式採用之方法，優點為容易給定分流上游邊界，但缺點為模式中斷面之建立需要求更高，若有較大之誤差，則模擬出支流流量則會和實驗值有所出入，此部分問題與限制，必須做更進一步的探討和研究。

### 3.5 全域矩陣之求解

聯合(3.13)式中之  $J \times 2$  條方程式及 2 個邊界條件，則可解得格點



奇異(nonsingular)矩陣，且有非零常數行向量，故解具有唯一性且為非顯著解(nontrivial solution)，如此可解得渠道每一斷面於第  $k+1$  時刻之未知值。

### 3.6 模式演算流程

模式之演算流程如圖 3.6 所示，詳細說明如下：

1. 輸入資料：必須先輸入基本資料包括斷面幾何資料、曼寧係數、初始流量、主支流交匯角度和上下游邊界條件等。
2. 計算起始條件：由初始流量及初始底床高程，以標準步推法做迴水演算，可得到初始的水深及流速。
3. 計算邊界條件：由給定之邊界條件以內插計算邊界之流量歷線或水位歷線。
4. 計算特徵值及特徵向量：由各水理參數可求得各斷面之特徵值及相應之特徵向量。
5. 建立全域矩陣：以多方式特性法可建立各斷面之特徵方程式，及其待解未知數前之係數即為矩陣係數  $L$ 、 $D$ 、 $R$ ， $C$  為右式之常數項。
6. 求解全域矩陣：以 Thomas 演算法求解全域矩陣，可得流速及水深；再計算出通水斷面積、摩擦坡度、流量、福祿數等參數。

7. 判斷是否穩定：由受到數值模式震盪影響，在前段時間計算值會產生誤差，在此先以初始值計算達數值穩定時，方可進入時間演算。
8. 重新給定初始值：將此時刻計算值，給定下一時刻之初始值，以達到時間連續之物理意義。
9. 演算至下一時刻，重複 3~8 步驟，直至完成全部演算時刻。

