

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

應用適應性 H_{∞} 控制法則與輪胎縱向力分配於最小耗能之
車輛運動控制

Minimum Energy Control of Vehicle Motion by Adaptive H_{∞}
Method and Longitudinal Tire Force Distribution

研究生：陳吳柏俊

指導教授：蕭得聖 博士

中華民國一百零一年九月

應用適應性 H_{∞} 控制法則與輪胎縱向力分配於最小耗能之
車輛運動控制

Minimum Energy Control of Vehicle Motion by Adaptive H_{∞} Method and
Longitudinal Tire Force Distribution

研究生：陳吳柏俊

指導教授：蕭得聖 博士

Student : Po-Chun Chen Wu

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao



Master

In

Electrical Control Engineering

September 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年九月

應用適應性 H_{∞} 控制法則與輪胎縱向力分配於最小耗能之 車輛運動控制

學生：陳吳柏俊

指導教授：蕭得聖 博士

國立交通大學電控工程研究所

摘要

近年來環保意識抬頭，在 2011 年，美國對在國內販售的車輛制訂了高規格的平均油耗標準，相信在未来，其他先進國家也會跟進。而各車廠為了能達到此標準，勢必會加速投入環保節能車輛的發展，帶動節能車電技術的快速成長。

本研究考量環保節能問題，利用適應性 H_{∞} 控制器和最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配，設計一個針對前輪轉向、前輪驅動的最小耗能車輛運動控制系統。運動控制系統分為上層控制器、最佳化輪胎與縱向摩擦力分配和下層控制器。當接收到轉向指令後，上層控制器根據駕駛情況用最佳化 H_{∞} 控制器權重比例分配出一 H_{∞} 控制器，該 H_{∞} 控制器計算出車輛維持行駛路徑所需的前輪轉向角和直接橫擺力矩，使車輛以最小能量損耗跟隨給定的參考軌跡。最佳化輪胎與縱向摩擦力分配將上層算出的直接橫擺力矩，以最小化輪胎縱向摩擦力平方和的方式分配給各個輪胎。下層控制器則考慮輪胎的非線性特性以及與真實輪胎間模型不確定性的問題，藉由控制輪胎力矩產生所需的輪胎縱向摩擦力。本研究透過模擬驗證在轉向與車道變換的駕駛情況下控制器控制的結果，在此控制架構下，確實能達到環保節能與安全性兼顧的結果。

Minimum Energy Control of Vehicle Motion by Adaptive H_∞ Method and Longitudinal Tire Force Distribution

Student : Po-Chun Chen Wu

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

Institute of Electrical Control Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

This paper presents a lateral motion control scheme with minimum energy consumption for a front-wheel-steering/front-wheel-driving (FWS/FWD) vehicle using an adaptive H_∞ controller and an optimum longitudinal tire force distribution method. The proposed control system is divided into three layers: the upper controller, the optimum longitudinal tire force distribution and the lower controller. When the driver commands the vehicle, the upper controller finds the optimum weighting among various fixed H_∞ controllers on-line to generate the desired front wheel steering angle and direct yaw moment which allow the vehicle to follow the given reference trajectory with minimum energy loss. Then the optimum longitudinal tire force distribution algorithm determines the minimum longitudinal forces that meet the requirements for direct yaw moment from the upper controller. The lower controller compensates for the nonlinear and uncertain characteristics of the tire dynamics to generate the desired longitudinal tire forces. Finally, simulations are carried out to verify the effectiveness of the proposed control scheme.

致謝

首先誠摯的感謝指導教授蕭得聖博士，老師細心的教導使我在理論上有更清楚的認識，並耐心的引導學生在研究過程中該如何面對問題、解決問題和分析問題也讓我受益良多。老師對學問的嚴謹更是我輩學習的典範。

本論文的完成另外亦得感謝口試委員徐保羅教授和陳宗麟教授。因為有各位老師在口試中給的建議，使得本論文能夠更完整而嚴謹。

感謝實驗室的永洲學長、翊熏學長以及兆平學長給我研究上的建議；感謝同學俊傑、善橋、志偉和彥良的共同砥礪，並在研究閒暇之餘，一同去運動，強健體魄，也感謝學弟璟沅、仲謙和維民學弟的幫忙。此外感謝我的朋友們，你們的陪伴讓苦悶的研究生生活增添色彩。

特別感謝我的爸爸、媽媽和弟弟，感謝你們的栽培和支持我才能一路走到這裡，最後，謹以此文獻給我最愛的家人。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
符號表	ix
第一章、緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
1.3 研究貢獻	3
1.4 論文架構	4
第二章、相關研究	5
2.1 直接橫擺力矩控制相關研究	5
2.2 統合底盤控制相關研究	7
第三章、車輛系統模型	10
3.1 車輛動態模型	10
3.2 輪胎模型	14
第四章、控制器設計	16
4.1 上層控制器	18

4.1.1 車輛參考模型	18
4.1.2 適應性 H_{∞} 控制器—最佳化 H_{∞} 控制器權重比例分配	20
4.1.2.1 成本函數、限制條件	21
4.1.2.2 設計方法	22
4.1.2.3 小增益定理	25
4.1.2.4 最佳化問題求解	26
4.2 最佳化輪胎與路面間摩擦力分配	28
4.2.1 成本函數、限制條件	28
4.2.2 最佳化問題求解	29
4.3 下層控制器	31
4.3.1 縱向力估測	32
4.3.2 縱向摩擦力回授穩健控制器	33
第五章、模擬與結果討論	39
5.1 J-turn	42
5.2 Single-lane change	45
5.3 相關控制器控制結果比較	47
第六章、結論與未來展望	58
6.1 結論	58
6.2 未來工作	59
參考文獻	60

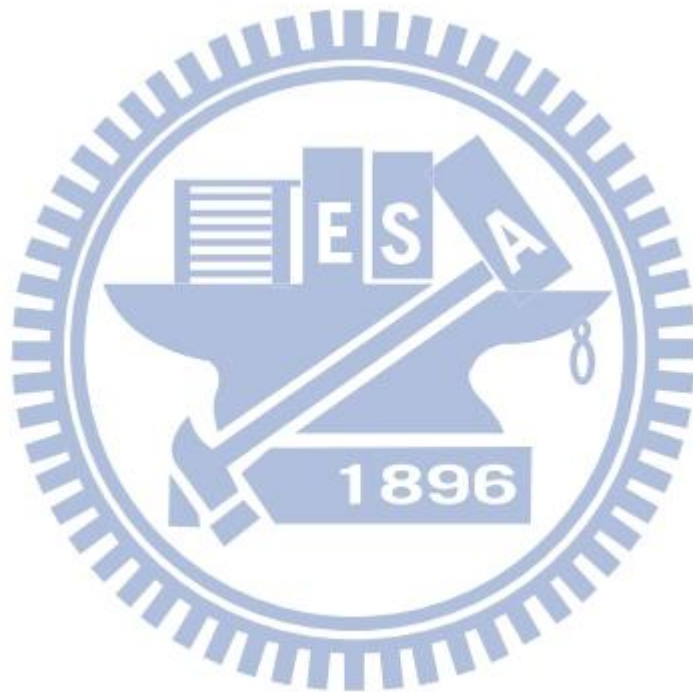
圖目錄

圖 1.1 控制系統流程方塊圖	3
圖 2.1 DYC 控制系統方塊圖，擷取自[10]	6
圖 2.2 統合底盤控制結構，擷取自[15]	7
圖 2.3 分層控制結構，擷取自[17]	8
圖 3.1 輪胎自由體俯視圖	10
圖 3.2 車輛自由體俯視圖	11
圖 3.3 輪胎轉動自由體圖	12
圖 3.4 輪胎側滑角和前進速度示意圖	13
圖 3.5 結合縱向力與側向力摩擦力圖	15
圖 4.1 系統架構圖	17
圖 4.2 最大車身側滑角與質心速度關係圖[20]	19
圖 4.3 H_{∞} 控制器架構(左)，受控體 P(右)	22
圖 4.4 Q 範圍示意圖	23
圖 4.5 控制器 K 的架構	23
圖 4.6 S1、S2 為兩互相連接的系統方塊	25
圖 4.7 適應性 H_{∞} 控制器 K 和受控體 P 組成之系統架構	25
圖 4.8 縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖	37
圖 4.9 “Magic formula”縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖(左)、輪胎縱向力對滑動比 偏微斜率($g_{\lambda}^* + g_{\lambda}'$)與 $\theta g_{\lambda}'$ 比較圖(右)	38
圖 5.1 車輛行駛路徑示意圖 (左: J-turn, 右: Single-lane change)	39
圖 5.2 模擬一之駕駛者轉向命令	42
圖 5.3 模擬一之適應性 H_{∞} 控制器前輪轉向角(左)、直接橫擺力矩(右)分配結果	43
圖 5.4 模擬一之各輪胎輸入功率	43
圖 5.5 模擬一之各輪胎的縱向摩擦力	43

圖 5.6 模擬一之輪胎耗損功率總和	44
圖 5.7 模擬一之質心側滑角(左)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果	44
圖 5.8 模擬一之車輛於地表座標上所行駛的參考軌跡與車輛控制結果	44
圖 5.9 模擬二之駕駛者轉向命令	45
圖 5.10 模擬二之適應性 H_{∞} 控制器前輪轉向角(左)、直接橫擺力矩(右)分配結果	45
圖 5.11 模擬二之各輪胎輸入功率	46
圖 5.12 模擬二之輪胎消耗功率總和	46
圖 5.13 模擬二之質心側滑角(左)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果	46
圖 5.14 模擬二之車輛於地表座標上所行駛的參考軌跡與車輛控制結果	47
圖 5.15 模擬三之駕駛者轉向命令	48
圖 5.16 模擬三之控制車輛橫擺角速度比較圖	49
圖 5.17 模擬三之控制車輛質心側滑角比較圖	50
圖 5.18 模擬三之控制車輛縱向速度比較圖	50
圖 5.19 模擬三之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖	51
圖 5.20 模擬三之控制車輛前輪轉向角比較圖	51
圖 5.21 模擬三之控制車輛直接橫擺力矩比較圖	52
圖 5.22 模擬三之輪胎耗損功率總和比較圖	52
圖 5.23 模擬四之模擬四之駕駛者轉向命令	53
圖 5.24 模擬四之控制車輛橫擺角速度比較圖	54
圖 5.25 模擬四之控制車輛質心側滑角比較圖	54
圖 5.26 模擬四之控制車輛縱向速度比較圖	55
圖 5.27 模擬四之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖	55
圖 5.28 模擬四之控制車輛前輪轉向角比較圖	56
圖 5.29 模擬四之控制車輛直接橫擺力矩比較圖	56
圖 5.30 模擬四之輪胎損耗功率總和比較圖	57

表目錄

表 5.1 模擬中所使用的車輛參數	41
表 5.2 模擬中所使用的”Magic formula”輪胎模型參數.....	41
表 5.3 各控制器做 J-turn 的輪胎能量耗損總和	52
表 5.4 各控制器做 lane-change 的輪胎能量耗損總和	57



符號表



r	: 橫擺角速度
V_x	: 車輛質心縱向速度
V_y	: 車輛質心側向速度
β	: 車體質心側滑角
a_x	: 車輛縱向加速度
a_y	: 車輛側向加速度
g	: 重力加速度
M_z	: 車輛橫擺力矩
I_z	: 橫擺角轉動慣量
m	: 車體質量
m_s	: 車體集中質量
h_s	: 車體集中質量之質心與地面的高度
t	: 車輛前輪和後輪的輪距
l_f	: 車體質心到前輪軸的距離
l_r	: 車體質心到後輪軸的距離
l	: 前輪軸到後輪軸的距離
δ_d	: 駕駛輸入的車輪轉向角
δ_c	: 控制器分配的車輪轉向角
ω	: 輪胎轉動角速度
v	: 輪胎前進速度
I_w	: 輪胎轉動慣量
R_w	: 輪胎轉動半徑
r_i	: 輪胎等效半徑

- λ : 輪胎縱向滑動比
- α : 輪胎側滑角
- σ : 理論滑動
- σ_x : 縱向理論滑動
- σ_y : 側向理論滑動
- T_m : 輪胎扭矩
- F_a : 平行胎面之縱向摩擦力
- F_{a0} : “Magic formula” 輪胎模型純縱向滑動之縱向摩擦力
- F_b : 垂直胎面之側向摩擦力
- F_{b0} : “Magic formula” 輪胎模型純側向側滑之側向摩擦力
- F_x : 平行車身的力
- F_y : 垂直車身的力
- F_z : 輪胎正向力
- F_{z0} : 車輛等速直線行駛時輪胎的正向力
- $B_{x,y}$: 輪胎參數
- $C_{x,y}$: 輪胎參數
- $D_{x,y}$: 輪胎參數
- $E_{x,y}$: 輪胎參數
- r_{ref} : 橫擺角速度參考值
- β_{ref} : 車體質心側滑角參考值
- V_{xref} : 車輛質心縱向速度參考值
- μ : 路面摩擦力係數
- \hat{F}_a : 縱向力估測結果
- F'_a : Dugoff's 輪胎模型之縱向摩擦力
- F_{ad} : 分配之縱向力參考值
- F'_b : Dugoff's 輪胎模型之側向摩擦力



F_{bd} : 分配之側向力參考值

α_d : 反輪胎模型計算之輪胎側滑角參考值

C'_x : Dugoff's 輪胎模型之縱向剛度

C'_y : Dugoff's 輪胎模型之轉向剛度

$S_{a,b}$: 順滑平面



第一章、緒論

1.1 研究背景

近年來環保意識抬頭，能源危機和全球氣候暖化變遷的議題不斷地被各界討論，美國更是在 2011 年宣布未來的車輛平均油耗標準 (Corporate Average Fuel Economy Standards, CAFÉ)[1]，內容當中提到在 2025 年後所有於美國販售的乘用車或是輕型卡車，其燃油損耗都需達到 54.5mpg 之平均標準(現行標準為 27.8mpg)。因此越來越多的汽車大廠都紛紛投入發展電動車或是油電混合動力車的行列，像是國內廠商中納智捷發表的智慧型電動車 Lexgen M7、美國電動車廠商特斯拉(Tesla)的純電動跑車 TESLA Roadster、德國賓士推出的 Mini E、三菱量產的 i-MiEV，以及日本汽車廠商 TOYOTA 的 Prius 油電混合動力車等等，都是希望能以電能取代傳統汽油能源達到節能的目的，並且減少行駛時廢氣的排放。加上先進國家近年來均積極促進電動車產業發展，推動多項補助政策，預期電動車在未來的市佔率將會有所提升。

在電動車研究與控制上，Yoichi Hori[2]在論文中提到電動車發展與研究的價值，是適合在電動車上應用”先進的運動控制(Advanced motion control)”技術；電動車使用馬達或者是輪內馬達(In-wheel motor)作為車輛的動力，可以總結出三項優點：(1)電動馬達可以快速且準確的產生出扭力。回授控制器可以在駕駛者對車輛動態作改變前，對車輛作控制。(2)馬達可以安裝在兩個或四個輪內。將馬達安裝到每一個輪胎，可以讓左右兩側的輪胎產生不同方向的扭力，實現控制策略。(3)馬達的扭力容易量測。馬達的扭力可以從量測馬達的電流得知，或者是用扭力感測器(Torque sensor)也可以量測。利用量測到扭力的資訊，設計簡單的輪胎與路面間縱向摩擦力估測器，就可以估測出加速或減速時摩擦力的大小。在 Yoichi Hori、Peng He[2][3][4]的論文中，所研究的車輛是他們改造 Nissan March 所設計的電動車：UOT (University of Tokyo) Electric March II，在車輛

四個輪胎內都有安裝輪內馬達，能夠獨立控制每個輪內馬達的扭力。此外，國內研究單位也有不錯的電動車研究成果展現，像是工研院所研發的四輪電動車 e-buggy，也展現了未來綠能動力電動車發展的可能性。

當越來越多駕駛者選擇駕駛電動車當作日常代步工具時，車輛本身駕駛上的舒適性和安全的駕駛系統很重要外，環保節能的議題近年來逐漸被大家所關注。在車輛轉向的穩定性控制已經有很多學者做這方面的研究，且提出不同的控制策略；像是四輪轉向(Four-wheel steering: 4WS)控制[5][6][7]、差動式煞車(Differential brake)轉向控制[8]、直接橫擺力矩控制(Direct yaw moment control: DYC)[9][10][12]。在環保節能的研究中，硬體方面的設計有可回充剎車能量的再生式剎車系統(Regenerative Braking System)[14]，軟體方面的控制系統則有本研究所使用的統合底盤控制(Unified chassis control)[15]，都有不錯的研究成果。

目前關於環保節能的研究，大部分著重於如何將控制器分配出的剎車力做最佳效率的回充，藉由提升回充的能量效率，達到環保節能的目的，較少著重於如何將控制器分配出的剎車力減少，藉由控制器設計減少需要花費在剎車上的能量，來達成環保節能的目的。這是因為以往的控制策略研究，大多只採用一種控制輸入，控制器設計上彈性較差，無法兼顧安全的駕駛系統和環保節能；近來多被使用的統合底盤控制則採用多種控制輸入，在控制器設計上更具彈性，是適合用來探討兼顧安全的駕駛系統和環保節能的控制器設計。

1.2 研究目的

本研究致力於兼顧安全和環保節能的角度控制電動車的車身質心側滑角以及橫擺角速度，使車輛能以最節能的方式安全行駛。

本研究目的在於設計節能的車輛運動控制系統，最佳化分配出各個輪胎與路面間所需要產生的縱向摩擦力，並由下層控制器控制輪胎動態產生所需的縱向摩擦力，使得車

輛以節能的控制策略達到我們所希望的動態運動。在此研究中控制器可分為三個部分：上層控制器、最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配和下層縱向摩擦力回授穩健控制器。上層控制器根據駕駛情況用最佳化 H_{∞} 控制器權重比例分配出一 H_{∞} 控制器，該 H_{∞} 控制器計算出車輛維持行駛路徑所需的前輪轉向角和直接橫擺力矩，然後經由最佳化分配出車輛四個輪胎與路面間所需要產生的縱向摩擦力；下層控制器，控制輪內馬達的扭力大小，使得輪胎和路面間產生上層控制器分配出來的摩擦力，如圖 1.1 流程說明。

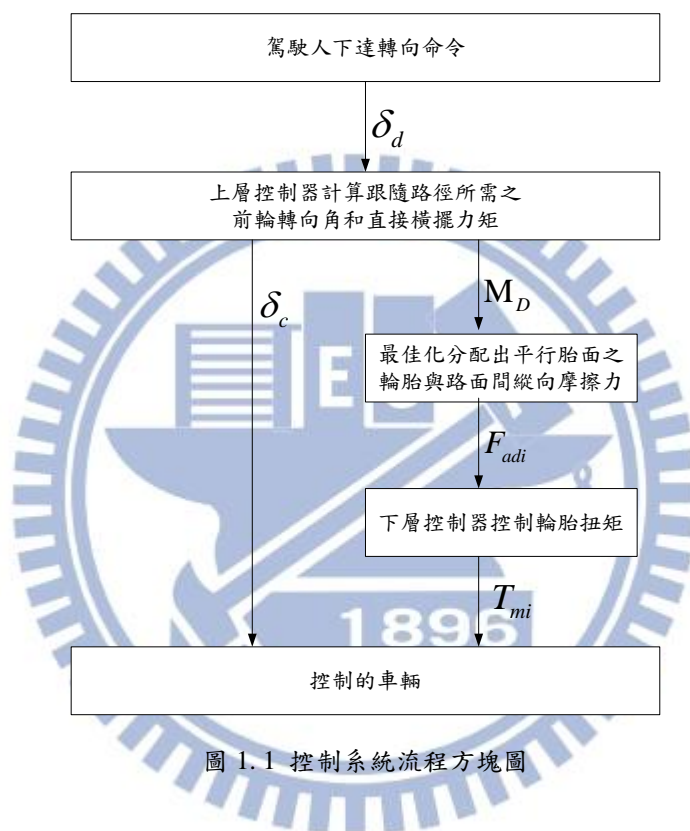


圖 1.1 控制系統流程方塊圖

1.3 研究貢獻

本研究設計出的車輛運動控制系統，包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配。

目前關於環保節能的研究大多著重在提升下層控制器回充的能量效率上，而本研究則從上層控制器的設計上著手。下層控制器回充的能量效率受限於硬體方面，到一定程度後，便難以再度提升，此時，若能搭配上本研究設計的上層控制器，除了能安全的控

制車輛行駛外，更在節能上有所提升。

另外，一般傳統控制器對輪胎模型的假設為線性輪胎模型，沒有考慮輪胎的非線性特性，故在車輛側向加速度較大時，會因為輪胎非線性的特性，使得輪胎飽和，造成控制器不再能保證車輛側向與橫擺運動的穩定。而本研究設計的下層控制器有考慮輪胎非線性之特性，在控制器中假設一非線性輪胎模型，並考慮其動態以及與真實輪胎間模型不確定性(Model uncertainty)的問題，設計控制策略避免輪胎鎖死或打滑的情況發生，進而提升車輛運動控制的穩定性。

1.4 論文架構

論文各章節的編排如下

第一章 緒論：描述研究背景、動機與目的。

第二章 相關研究：介紹各種不同車輛轉向控制的控制方法，然後簡介本研究使用的控制方法。

第三章 車輛系統模型：本研究使用的車輛模型為一個考慮車輛側向速度和橫擺角速度運動的動態模型，車輛驅動方式為前輪轉向、前輪驅動。

第四章 控制器設計：包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配和下層縱向摩擦力回授穩健控制器設計。

第五章 模擬與結果討論：模擬各種駕駛狀況下控制器控制的結果，並且和其他控制器控制的結果作比較。

第六章 結論與未來展望：總結本研究並提出未來能更深入發展的方向

第二章、相關研究

在提升車輛轉向的操控性和穩定性上，過去已經有很多學者提出不同的控制策略，像是四輪轉向控制、直接橫擺力矩控制等等。但以上的控制策略都著重於單一的控制輸入，使可達成的控制目標與效能多所限制，因此近年來有學者提出統合多種控制輸入的控制策略，統合底盤控制相關研究(Unified chassis control, UCC)，由於在控制輸入的選擇上更具彈性，能探討的控制目標也更多樣化，本研究探討的就是在提升車輛轉向的操控性和穩定性的同時，是否也能達到節能的效果。

本章首先在第一節中介紹直接橫擺力矩控制，直接橫擺力矩控制是一種以車輛左右兩側輪胎縱向力差為控制輸入來產生橫擺力矩以達到控制目標的控制方式。接著在第二節中介紹統合底盤控制相關研究(Unified chassis control, UCC)，在這裡介紹的統合底盤控制研究，控制器設計均是以前輪轉向角和直接橫擺力矩做為控制輸入，產生所需的橫擺力矩以達到控制之目的。在本章的最後，會探討本研究中提出的控制器和相關研究中提出控制器之間的差異，並分析為何本研究中提出的控制器設計能達到節能和安全性兼顧的目標。

2.1 直接橫擺力矩控制相關研究

直接橫擺力矩控制(Direct Yaw Moment Control, DYC)的研究開始於 1990 年代，Shibahata *et al.*[9]提出了一種控制方法：“ β -Method”，且探討質心側滑角對由前、後輪側向力產生的橫擺力矩改變之影響。指出當車輛維持一同心圓轉向時，橫擺力矩若由不平衡的輪胎側向力產生會造成車輛縱向加速或減速。直接橫擺力矩控制是靠車輛左右兩側輪胎縱向力差來產生橫擺力矩達到控制之目的，大致被分為兩種控制型式：質心側滑角型式(Side-slip type)、橫擺角速度型式(Yaw rate type)。Masato Abe[10]提出設計順滑模態控制器來跟隨 2-DOF 線性車輛模型的質心側滑角響應，從順滑條件以及車輛動態方程

式(2.1)與(2.2)式，設計出橫擺力矩控制輸入。

$$mV(\dot{\beta} + r) = Y_f + Y_r \quad (2.1)$$

$$I_z \dot{r} = l_f Y_f - l_r Y_r + M_z \quad (2.2)$$

； Y_f 、 Y_r 為前、後輪側向力； M_z 為其控制輸入，設計會和前、後輪側向力及其對輪胎側滑角偏微之斜率有關，故有假設一非線性輪胎模型用來計算，控制架構圖如圖 2.。

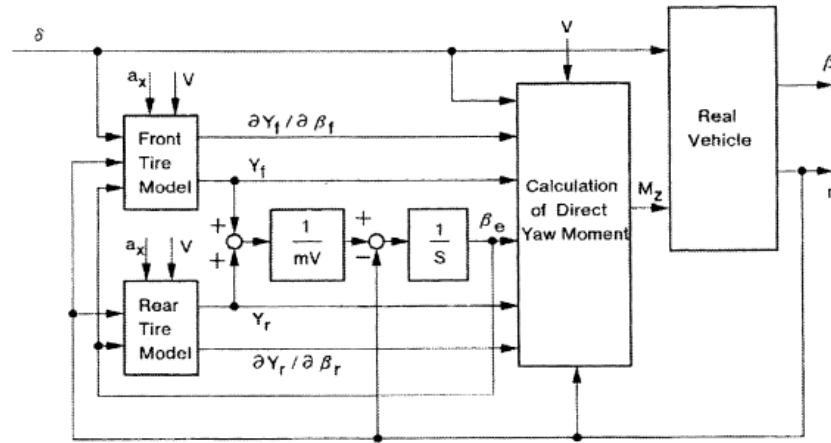


圖 2.1 DYC 控制系統方塊圖，擷取自[10]

P. Raksincharoens *et al.*[11]利用 DYC 控制策略控制車輛跟隨其設計所需的橫擺角速度，橫擺力矩控制輸入是由後輪左、右側縱向力的差產生，如(2.3)式。

$$M = \frac{d}{2}(-F_{xrl} + F_{xrr}) \quad (2.3)$$

所需的M是由所需橫擺角速度透過橫擺角速度對橫擺力矩的反轉移函數計算而得。

E. Esmazadeh *et al.*[12]提出分析線性二次最佳化問題(LQ problem)求解 DYC 控制輸入，跟隨所需的橫擺角速度。M. Mirzaei[13]為了維持車輛的動態，跟隨所需的橫擺角速度與質心側滑角，設計一線性二次最佳化問題，求解最小之橫擺力矩控制輸入以達到控制目的。其成本函數定為(2.4)式。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[w_b (\beta - \beta_d)^2 + w_r (r - r_d)^2 + w_u M_z^2 \right] dt \quad (2.4)$$

；其中 w_b 、 w_r 和 w_u 為權重因子，代表其對應項之重要性； M_z 為控制輸入。增加 w_u 之權重可以讓 M_z 越小，但相對的會使橫擺角速度和質心側滑角的跟隨誤差(Tracking error)增大；此外，控制策略是設計來跟隨橫擺角速度和質心側滑角，故可以輕易地藉由改變 w_b 或

w_r 為零，實現不同控制型式的 DYC 控制，如：實現橫擺角速度型式則將 w_b 選定為零， $w_r = 0$ 則為質心側滑角型式。

2.2 統合底盤控制相關研究

統合底盤控制(Unified chassis control, UCC)是將車輛的控制輸入(e.g.:輪胎轉向角、輪胎剎車)整合起來的控制方式。相較於以往將車輛的控制輸入各自獨立設計控制器的方式，統合底盤控制藉由整合車輛控制輸入，可提供一個更宏觀的角度設計控制器。T. Hwang *et al.*[15]提出了 2 種統合底盤控制架構，如圖 2.2，第一種是採用條件法則(Rule-Based)設計，其優點是改裝容易，只需在現有各自獨立的控制器之上加裝一個管理控制器即可，但缺點是無法完全整合；另一種是採用特徵軌跡法(Characteristic Locus Method)設計，其優點是將各控制器整合，因此能以更有系統的方式設計控制器。

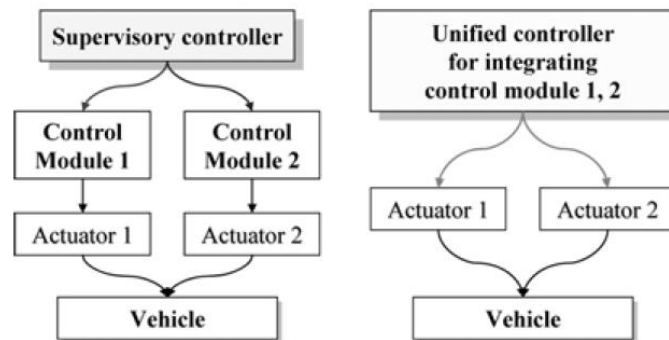


圖 2.2 統合底盤控制架構，擷取自[15]

W. Cho *et al*[16]提出一最佳化統合底盤控制器，其最佳化目標是使縱向速度減速最小，控制器利用主動式前輪轉向控制(Active Front Steering, AFS)和直接橫擺力矩做為控制輸入，分配出使車輛側向動態保持穩定所需的橫擺力矩。其成本函數為(2.5)，限制條件為(2.6)

$$L(\Delta F_x) = \Delta F_{x1}^2 \quad (2.5)$$

$$f(x) = -\frac{t}{2}D_1\Delta F_{x1} + l_f D_2\Delta F_{y1} - \Delta M_z = 0,$$

$$g(x) = (\Delta F_{x1} + F_{x1})^2 + (\Delta F_{y1} + F_{y1})^2 - \mu^2 F_{z1}^2 \leq 0, \quad (2.6)$$

$$D_1 = 1 + \frac{F_{z3}}{F_{z1}}, \quad D_2 = 1 + \frac{F_{z2}}{F_{z1}}$$

；其中 $(\Delta F_{x1}, \Delta F_{y1})$ 為簡化後的控制輸入； ΔF_{x1} 為控制系統輸入的左前輪輪胎縱向力，此研究將控制系統輸入的四個輪胎縱向力簡化成用左前輪表示； ΔF_{y1} 為控制系統輸入在左前輪轉向角所產生的側向力，此研究將控制系統輸入的兩個前輪轉向角視為相同，簡化成用左前輪表示； ΔM_z 為使車輛側向動態保持穩定所需的橫擺力矩； F_{x1} 、 F_{y1} 為駕駛輸入的左前輪輪胎縱向力和轉向角產生的左前輪側向力； F_{z1} 、 F_{z2} 、 F_{z3} 為輪胎正向立； t 為車輛輪距； l_f 為車輛質心到前輪軸的距離； μ 為路面摩擦力係數。

故此設計為達到其最佳化目標，會將控制系統輸入的輪胎縱向力需求減至最少，如此車輛縱向速度的減速也會最小，所以車輛動能的損耗也會最小化。

K. Nam *et al.*[17]提出將統合底盤控制器上、下層分層控制的概念，如圖 2.3，上層控制器的前饋控制器(Feed-forward)和回饋控制器(Feed-backward)計算出所需的前輪轉向角和直接橫擺力矩，使車輛動態跟隨給定的參考軌跡；下層控制器再控制轉向系統和輪胎扭矩產生出所需的前輪轉向角和直接橫擺力矩。分層控制的優點是在分工的概念，上層控制器計算出所需的控制輸入，下層控制器負責控制車輛以產生上層控制器所需之控制輸入。

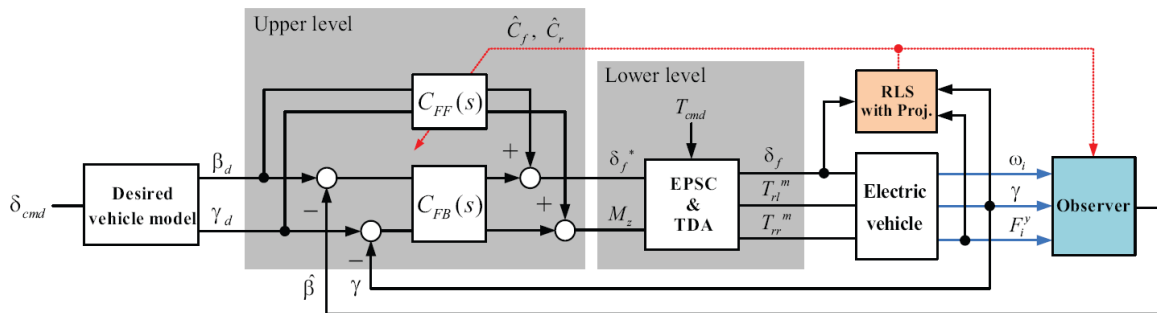


圖 2.3 分層控制架構，擷取自[17]

本研究的控制器架構設計分成上、下層控制器，上層控制器計算所需的前輪轉向角與直接橫擺力矩，使車輛的動態跟隨給定的參考軌跡；下層控制器則考慮輪胎的非線性特性，藉由控制輪胎扭矩產生所需的輪胎縱向摩擦力，上層與下層控制器之間透過最佳化輪胎縱向摩擦力分配將上層控制器所需之力量適當地分配給每個輪胎，再由下層控制器使各個輪胎產生所需的縱向摩擦力。

本研究的控制器設計有以下優點 1.採用統合底盤控制，在設計最佳化控制器時，控制輸入的選擇上較直接橫擺力矩控制更有彈性。2.上層控制器採用最佳化控制器設計，最佳化目標是使輪胎縱向摩擦力產生的直接橫擺力矩最小，相較於前面 T. Hwang *et al.*[15]、K. Nam *et al.* [17]提出的上層控制器皆沒有採用最佳化控制器設計，理論上本設計法能以更少的車輪縱向力達成相同的控制目標。3.控制架構採用分層設計的概念，上層控制器採用最佳化設計使輪胎縱向摩擦力產生的直接橫擺力矩最小化；最佳化輪胎縱向摩擦力分配再以最小化輪胎縱向摩擦力平方和的條件分配出可產生上層控制器所需之直接橫擺力矩的輪胎縱向摩擦力給每個輪胎，相較於 W. Cho *et al.*[16]提出的控制器只能使車輛動能的損耗最小化，本控制器設計因為所需的輪胎縱向摩擦力平方和更小，所以下層控制器能以更少的輪胎扭矩產生各個輪胎所需的縱向摩擦力，減少輪胎扭矩的做功代表消耗的能量減少。綜合以上三點，本控制器設計確實能達到節能和安全性兼顧的目標。

第三章、車輛系統模型

本章節將介紹本研究中使用的車輛系統模型，此模型為一個七個自由度的車輛模型和一個結合縱向力與側向力摩擦力圓關係的“Magic formula”輪胎模型。七個自由度包含：車輛縱向、側向速度運動、橫擺角速度動態，以及四個輪胎的動態。

3.1 車輛動態模型

車輛行駛於道路上，輪胎與地面接觸產生摩擦力，影響車輛的運動，輪胎的自由體圖，如圖 3.1：

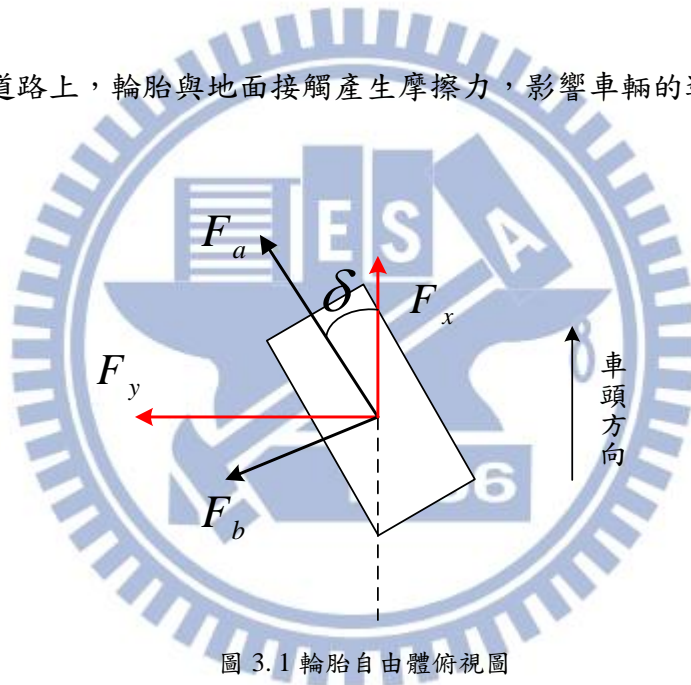


圖 3.1 輪胎自由體俯視圖

F_a 為平行胎面之縱向摩擦力， F_b 為垂直胎面之側向摩擦力； δ 為車輪轉向角。依照向量的概念，將 F_a 和 F_b 分解成平行車身的力 F_x 與垂直車身的力 F_y ，如下：

$$\begin{aligned} F_x &= F_a \cos \delta - F_b \sin \delta \\ F_y &= F_a \sin \delta + F_b \cos \delta \end{aligned} \tag{3.1}$$

假設車輛所受的外力和橫擺力矩都是由輪胎與路面間摩擦力所造成，不去考慮車輛行駛間空氣風阻力或者外界額外的擾動對車輛動態造成的影響。輪胎與路面間摩擦力影響車輛運動自由體圖，如圖 3.2 所示。利用牛頓第二運動定律和尤拉運動方程式推導得知車輛動態方程式，表示如(3.2~4)式：

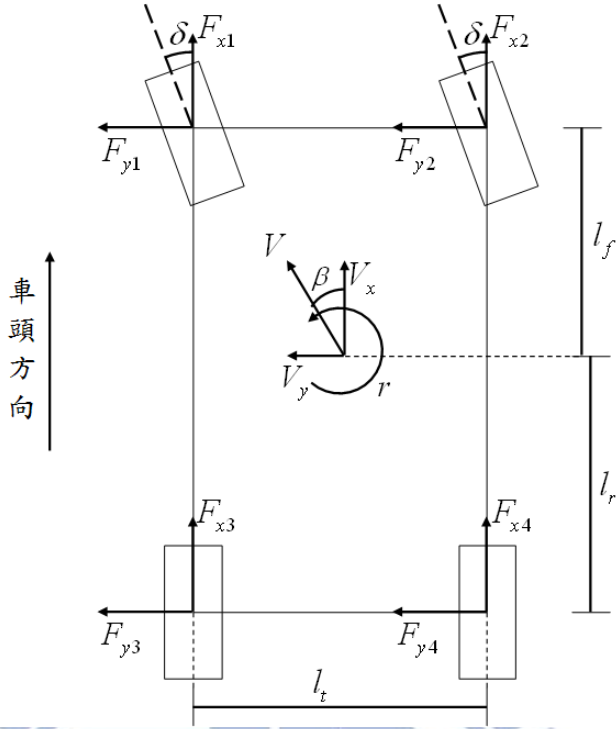


圖 3.2 車輛自由體俯視圖

$$ma_x = \sum_{i=1}^4 F_{xi} = (F_{a1} + F_{a2}) \cos \delta + (F_{a3} + F_{a4}) - (F_{b1} + F_{b2}) \sin \delta \quad (3.2)$$

$$ma_y = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = (F_{a1} + F_{a2}) \sin \delta + (F_{b1} + F_{b2}) \cos \delta + (F_{b3} + F_{b4}) \quad (3.3)$$

$$I_z \dot{r} = \sum M_z = l_f (F_{a1} + F_{a2}) \sin \delta + l_f (F_{b1} + F_{b2}) \cos \delta - l_r (F_{b3} + F_{b4}) + \frac{l_t}{2} (F_{b1} - F_{b2}) \sin \delta + \frac{l_t}{2} (F_{a2} - F_{a1}) \cos \delta + \frac{l_t}{2} (F_{a4} - F_{a3}) \quad (3.4)$$

；其中車輛縱向加速度(a_x)和側向加速度(a_y)，如(3.5)和(3.6)式：

$$a_x = \dot{V}_x - rV_y \quad (3.5)$$

$$a_y = \dot{V}_y + rV_x \quad (3.6)$$

$\sum_{i=1}^4 F_{xi}$ 、 $\sum_{i=1}^4 F_{yi}$ 和 $\sum M_z$ 為作用於車輛動態的縱向合力、側向合力和橫擺力矩總和； m 和 I_z 為車體質量和橫擺角轉動慣量； V_x 、 V_y 和 r 分別表示車輛質心縱向速度、側向速度和橫擺角速度； β 為車體質心側滑角； l_t 為車輛前輪和後輪輪距； l_f 為車體質心到前輪軸的距離， l_r 為車體質心到後輪軸的距離。

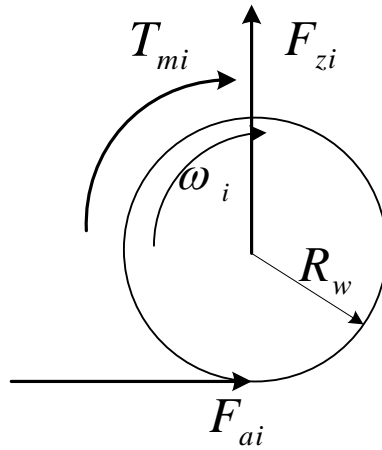


圖 3.3 輪胎轉動自由體圖

由圖 3.3 的輪胎轉動自由體圖，藉由力矩平衡推導出輪胎旋轉動態方程式(3.7)式。

$$I_w \dot{\omega}_i = -R_w F_{ai} + T_{mi} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.7)$$

；其中 I_w 為輪胎轉動慣量， $\dot{\omega}_i$ 為第 i 個輪胎的轉動角加速度， R_w 為輪胎轉動半徑， T_{mi} 為馬達與煞車對第 i 個輪胎施加的力矩之和。

輪胎與路面間摩擦力作用下造成輪胎縱向滑動與側滑，輪胎縱向滑動比(Slip ratio)定義如(3.8)式：

$$\lambda_i = \frac{R_w \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{\max\{R_w \omega_i, v_i \cos \alpha_i\}} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.8)$$

； v_i 表示為第 i 個輪胎的前進速度，表示如下：

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{(V_x - \frac{t_f}{2} r)^2 + (V_y + l_f r)^2} \\ v_2 &= \sqrt{(V_x + \frac{t_f}{2} r)^2 + (V_y + l_f r)^2} \\ v_3 &= \sqrt{(V_x - \frac{t_r}{2} r)^2 + (V_y - l_r r)^2} \\ v_4 &= \sqrt{(V_x + \frac{t_r}{2} r)^2 + (V_y - l_r r)^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

而輪胎側滑角(Slip angle: α_i)為輪胎轉動方向與速度方向之間的夾角，如(3.10)式，

圖 3.4。

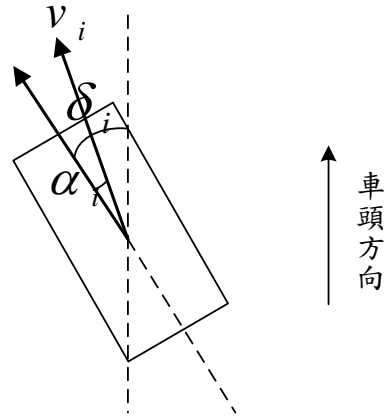


圖 3.4 輪胎側滑角和前進速度示意圖

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \delta - \tan^{-1} \left(\frac{V_y + l_f r}{V_x - \frac{t_f}{2} r} \right) \\
 \alpha_2 &= \delta - \tan^{-1} \left(\frac{V_y + l_f r}{V_x + \frac{t_f}{2} r} \right) \\
 \alpha_3 &= -\tan^{-1} \left(\frac{V_y - l_r r}{V_x - \frac{t_r}{2} r} \right) \\
 \alpha_4 &= -\tan^{-1} \left(\frac{V_y - l_r r}{V_x + \frac{t_r}{2} r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

考慮車輛縱向加速度及側向加速度對車體重量轉移所造成的影響，輪胎的正向力可以由(3.11)式表示：

$$\begin{aligned}
 F_{z1} &= \frac{mgl_r}{2l} - \frac{m_s a_x h_s}{2l} - \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_f l} \\
 F_{z2} &= \frac{mgl_r}{2l} - \frac{m_s a_x h_s}{2l} + \frac{m_s a_y l_r h_s}{t_f l} \\
 F_{z3} &= \frac{mgl_f}{2l} + \frac{m_s a_x h_s}{2l} - \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_r l} \\
 F_{z4} &= \frac{mgl_f}{2l} + \frac{m_s a_x h_s}{2l} + \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_r l}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

； l 為前輪軸到後輪軸的距離， m_s 為車體集中質量(Sprung-mass)， h_s 為車體集中質量之質心與地面的高度， g 為重力加速度。

3.2 輪胎模型

輪胎與路面間產生的摩擦力會直接影響到車輛動態的運動。本研究中所使用的輪胎模型為 Pacejka[18]所提出的“Magic formula”，(3.1)式中平行胎面的力(F_a)與垂直胎面的力(F_b)即是利用此非線性的模型來描述。在此非線性的輪胎模型純縱向滑動 F_{a0} (for pure accelerating or braking)會與縱向滑動比(Slip ratio)有一非線性關係，純側向側滑 F_{b0} (for pure cornering)則與側滑角(Slip angle)存在一非線性關係，且都會受到輪胎所受之正向力 F_z 的影響。此模型如(3.12)與(3.13)式表示：

$$F_{a0} = D_x \sin \left\{ C_x \tan^{-1} \left[B_x (1 - E_x) \lambda + (E_x / B_x) \tan^{-1} (B_x \lambda) \right] \right\} \quad (3.12)$$

$$F_{b0} = D_y \sin \left\{ C_y \tan^{-1} \left[B_y (1 - E_y) \alpha + (E_y / B_y) \tan^{-1} (B_y \alpha) \right] \right\} \quad (3.13)$$

；其中 λ 為輪胎滑動比、 α 為輪胎側滑角， $B_{x,y}$ 、 $C_{x,y}$ 、 $D_{x,y}$ 、 $E_{x,y}$ 為輪胎參數。

當考慮輪胎動態同時發生縱向滑動和側向側滑時，(3.1)式中平行胎面的力(F_a)與垂直胎面的力(F_b)將表示如下：

$$F_a = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma} \right) F_{a0}(\sigma) \quad (3.14)$$

$$F_b = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right) F_{b0}(\sigma) \quad (3.15)$$

； σ 為綜合滑動(combined slip)， σ_x 、 σ_y 和 λ 、 α 關係如(3.16)式：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\lambda}{1 + |\lambda|} \\ \sigma_y &= \tan \alpha \frac{1}{1 + |\lambda|} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

在不同的側滑角下，結合縱向力與側向力的非線性輪胎模型， F_a 與 F_b 摩擦力圓關係，

如圖 3.5。

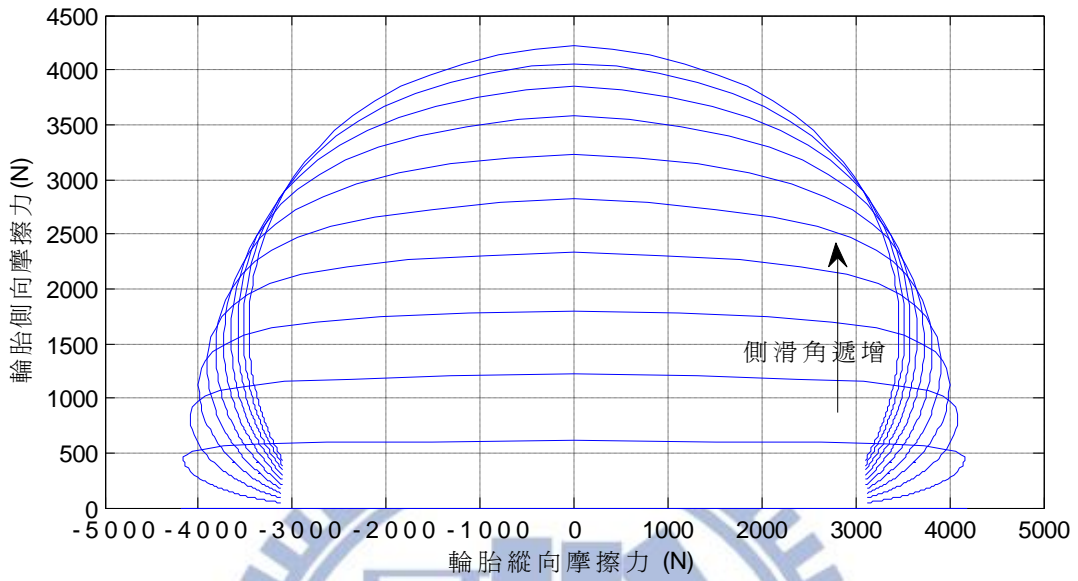


圖 3.5 結合縱向力與側向力摩擦力圓

綜合以上分析與推導，把車輛動態模型與輪胎模型結合寫成一非線性動態方程式，如(3.17)式，其中輸入為 δ_1 、 δ_2 與 T_{mi} ， $i = 1, \dots, 4$ 。

$$\begin{aligned} \bar{X} &= [r, V_x, V_y, \omega_1, \dots, \omega_4]^T \\ \dot{\bar{X}} &= f(\bar{X}, \delta_{1,2}, T_{m1,2,3,4}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

第四章、控制器設計

本章將介紹本研究的控制器設計，有上層控制器、最佳化輪胎縱向摩擦力分配和下層控制器，此外本研究的適用情境為正常的駕駛情況下，駕駛轉向角輸入為小角度，因此為了方便設計，上層控制器使用了線性模型，但為了安全性，在下層控制器採用了非線性模型，確保控制輸出為上層控制器所要求。

4.1 上層控制器將介紹所使用的線性車輛參考模型和適應性 H_{∞} 控制器。線性車輛參考模型考慮到車輛運動時的物理限制，因此參考訊號會有物理極值的限制存在；適應性 H_{∞} 控制器的設計是將多種不同特性的 H_{∞} 控制器依據最佳化權重比例分配結果組合而成，設計出可即時根據參考訊號做調整的控制器。此外還會介紹成本函數(Cost function)的設計概念，小增益定理(small gain theorem)證明控制器使系統穩定，並利用卡羅需—庫恩—塔克條件(Karush-Kuhn-Tucker conditions)求解非線性規劃問題(Nonlinear programming) [19]，並最小化成本函數。

4.2 最佳化輪胎縱向摩擦力分配將介紹如何設計成本函數，並利用卡羅需—庫恩—塔克條件求解非線性規劃問題，使上層所需的直接橫擺力矩適當分配至各個輪胎。

4.3 下層控制器將介紹所使用的縱向力估測器和縱向摩擦力回授穩健控制器。縱向力估測器使用差分估測出縱向力；縱向摩擦力回授穩健控制器回授縱向力估測的結果，設計順滑模態控制器控制馬達的扭力，使輪胎與路面間產生的縱向摩擦力符合上層所分配之結果。

在第二章相關研究中討論的其他控制器設計，大部分的控制器主要是著重於單一層控制器架構的設計，計算出控制車輛跟隨參考值所需的側向合力和橫擺力矩總和，然後直接當作控制輸入控制車輛動態，但皆假設實際能夠產生所需的合力與力矩，並沒有考慮到輪胎的動態，此外直接橫擺力矩控制是沒有利用輪胎側向力來作控制，所以對車輛側向運動控制上會不夠準確。因此，本研究將控制架構分為上、下層控制器：利用上層控制器以最小的直接橫擺力矩跟隨質心側滑角與橫擺角速度參考值，透過最佳化分配將

輪胎摩擦力與前輪驅動的限制考慮進去，分配出四個輪胎所需之縱向摩擦力，在下層控制器中考慮輪胎動態，控制跟隨所需的縱向摩擦力。在此控制架構下，改善了前輪轉向在車輛側向加速度大時對車輛控制的不穩定問題，以及彌補了直接橫擺力矩控制對車輛側向運動控制的不足。除了車輛的安全性之外，在上層控制器中使用了適應性控制器，最佳化分配控制輸入時，也考量到了節能，整個控制系統架構圖，如圖 4.1。

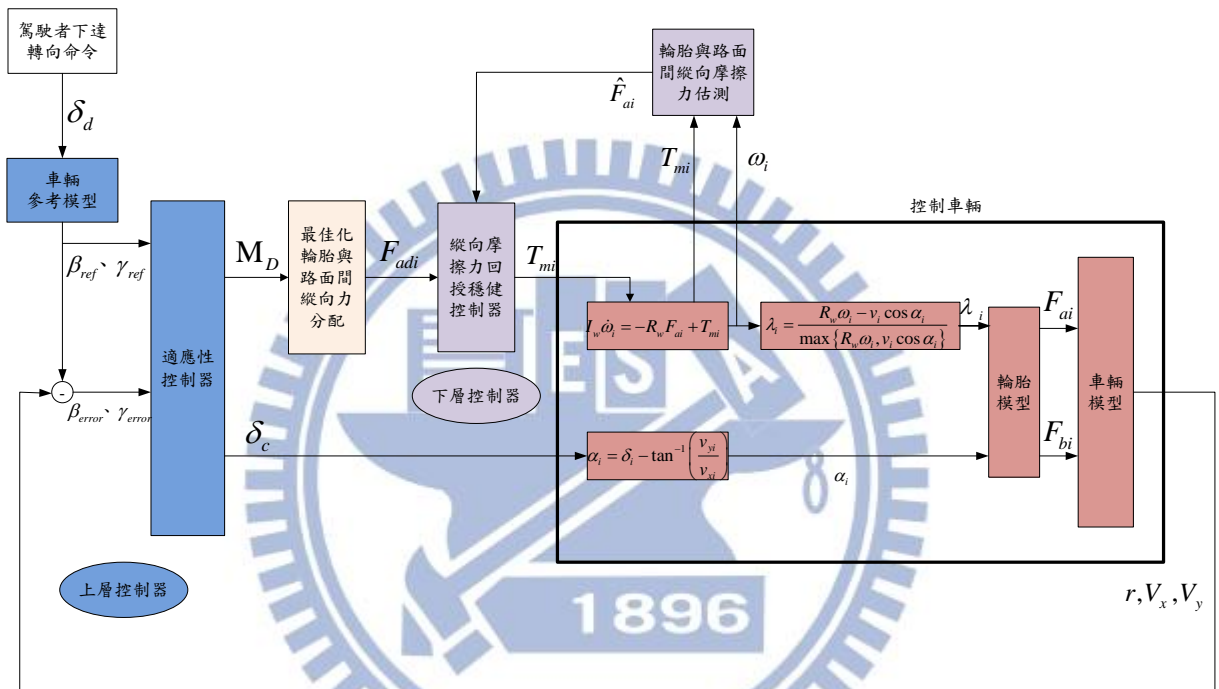


圖 4.1 系統架構圖

4.1 上層控制器

4.1.1 車輛參考模型

本研究所使用的參考模型是基於腳踏車模型如下，如式(4.1)、(4.2)

$$\dot{V}_y = \left(\frac{-2(C_{yf} + C_{yr})}{mV_x} \right) V_y + \left(\frac{-2(C_{yflf} - C_{yrlr})}{mV_x} - V_x \right) r + \left(\frac{2C_{yflf}}{m} \right) \delta_d \quad (4.1)$$

$$\dot{r} = \left(\frac{-2(C_{yflf} - C_{yrlr})}{I_z V_x} \right) V_y + \left(\frac{-2(C_{yflf}^2 + C_{yrlr}^2)}{I_z V_x} \right) r + \left(\frac{2C_{yflf}}{I_z} \right) \delta_d \quad (4.2)$$

； C_{yf} 、 C_{yr} 為前、後輪轉向剛度(Cornering stiffness)， δ_d 為駕駛方向盤輸入的前輪轉向角。

為了簡化車輛參考模型的參數設定，所以定義參數 $k = C_{yflf} l_f / C_{yrlr} l_r$ ； k 與轉向不足係數

(understeer coefficient)有關，當 $k=1$ 時為中性轉向， $k<1$ 為不足轉向， $k>1$ 為過度轉向。

修改後的車輛參考模型參數如下式(4.3)、(4.4)

$$\dot{\beta}_{ref} = \left[\frac{-2C_{yf} \left(1 + \frac{l_f}{kl_r} \right)}{mV_x} \right] \beta_{ref} + \left[\frac{-2C_{yflf} \left(1 - \frac{1}{k} \right)}{mV_x^2} - 1 \right] \gamma_{ref} + \left[\frac{2C_{yflf}}{mV_x} \right] \delta_d \quad (4.3)$$

$$\dot{\gamma}_{ref} = \left[\frac{-2C_{yflf} \left(1 - \frac{1}{k} \right)}{I_z} \right] \beta_{ref} + \left[\frac{-2C_{yflf}^2 \left(1 + \frac{l_r}{kl_f} \right)}{I_z V_x} \right] \gamma_{ref} + \left[\frac{2C_{yflf}}{I_z} \right] \delta_d \quad (4.4)$$

；其中 β_{ref} 為車輛質心側滑角參考值； γ_{ref} 為車輛質心橫擺角速度參考值，而參數 k 在此依照一般之設計將車輛假設為轉向不足，因為當車輛在路面崎嶇、側風等外在干擾所產生之外力時，利用在相同轉向角、相同車速下，轉向不足車輛的迴轉半徑較中性轉向與過度轉向車輛來的大之特性，使得車輛能夠沿著既定的方向行駛而不發生偏轉，利用機械性結構達到濾除雜訊的效果。

上述的車輛參考模型是基於線性的腳踏車模型推導而來，並沒有考慮到輪胎特性之非線性的影響，因此當我們把非線性輪胎特性考慮進去時，車輛參考模型的車身側滑角與橫擺角速度均會受到物理限制的影響而有物理極值的限制[20]。車體質心速度(V_{CoG})會影響車身側滑角的極值限制，車身側滑角最大限制和車體質心速度關係式，如(4.5)式，圖 4.2。

$$\beta_{\max} = 10^\circ - 7^\circ \cdot \frac{V_{CoG}^2}{(40m/s)^2} \quad (4.5)$$

側向加速度(a_y)的極值限制則是會與路面摩擦力係數有關；理論上，車輛作轉向運動最大可以產生 9.81 倍路面摩擦力係數大小的側向加速度，例如：路面摩擦力係數為 1 時，側向加速度極值可以為 $9.81m/s^2$ ，而當車身側滑角不為零時，最大側向加速度則調整為 $8m/s^2$ ，故最大側向加速度與摩擦力係數關係可表示如(4.6)式。

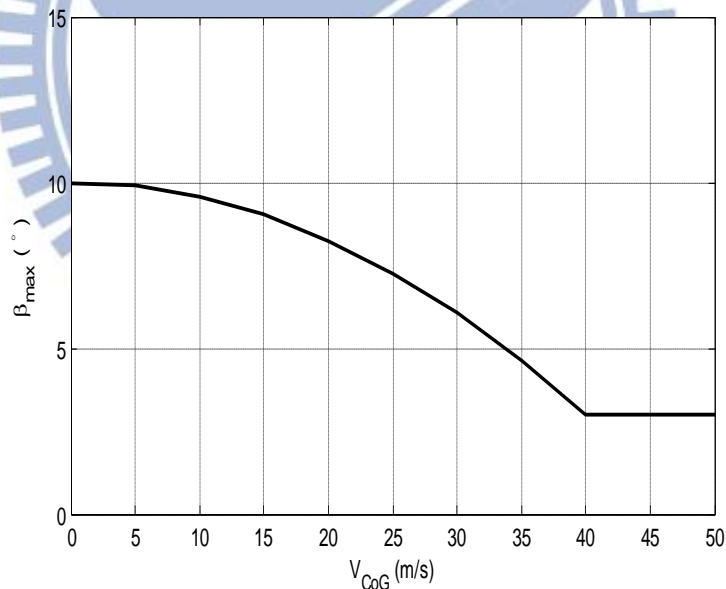


圖 4.2 最大車身側滑角與質心速度關係圖[20]

$$a_{y\max} = \mu_s \cdot 8m/s^2 \quad (4.6)$$

利用(3.6)式， a_y 與 r 的關係式可以得知橫擺角速度的最大值為(4.7)式。

$$r_{\max} = \frac{a_{y\max}}{V_x} - \dot{V}_y \quad (4.7)$$

因此，車輛參考模型加入考慮車身側滑角與橫擺角速度物理限制，將車身側滑角與橫擺角速度之參考值改成(4.8)與(4.9)式：

$$\beta_{ref} = \begin{cases} \beta & , |\beta| \leq \beta_{max} \\ \pm \beta_{max} & , otherwise \end{cases} \quad (4.8)$$

$$r_{ref} = \begin{cases} r & , |r| \leq r_{max} \\ \pm r_{max} & , otherwise \end{cases} \quad (4.9)$$

在小角度轉向和較小的側向加速度運動下，參考車輛模型為兩個自由度線性車輛響應；而在大角度轉向和較大的側向加速度下，參考車輛模型則將會受到物理限制於極值。

4.1.2 適應性 H_∞ 控制器—最佳化 H_∞ 控制器權重比例分配

回顧(3.2)、(3.3)、(3.4)式，縱向、側向合力與橫擺力矩總和影響車輛縱向、側向與橫擺角速度動態，在上層控制器使用了適應性 H_∞ 控制器，並設計了最佳化 H_∞ 控制器權重比例分配，以最小化的能量損耗計算控制車輛跟隨參考軌跡所需的前輪轉向角和直接橫擺力矩。假設車輛縱向速度為定速，輪胎模型為線性，將(3.3)、(3.4)式重新表示如下：

$$\dot{\beta} = \frac{-2(C_{yf} + C_{yr})}{mV_x} \beta + \left(\frac{-2(C_{yf}l_f - C_{yr}l_r)}{mV_x^2} - 1 \right) r + \frac{2C_{yf}}{mV_x} \delta_c \quad (4.10)$$

$$\dot{r} = \left(\frac{-2(C_{yf}l_f - C_{yr}l_r)}{I_z} \right) \beta + \left(\frac{-2(C_{yf}l_f^2 + C_{yr}l_r^2)}{I_zV_x} \right) r + \left(\frac{2C_{yf}l_f}{I_z} \right) \delta_c + \frac{1}{I_z} M_D \quad (4.11)$$

； C_{yf} 、 C_{yr} 為前、後輪轉向剛度； δ_c 為控制器所分配的前輪轉向角； M_D 為直接橫擺力矩，藉由四個輪胎的縱向摩擦力所產生。

採用 H_∞ 控制器的原因為，由於上層控制器是基於(4.10)、(4.11)式設計，但實際車輛的縱向速度會改變、輪胎模型也非線性，使用 H_∞ 控制器設計可以使系統具有一定的穩健性，甚至維持一定的控制精確度。另一方面，車輛的參考訊號多為低頻， H_∞ 控制器設計

可以針對特定頻段做設計。

但是也因 H_{∞} 控制器是根據頻域進行設計，無法保證在時域的控制結果和誤差。不過本研究中提出的適應性 H_{∞} 控制器設計可解決此一問題，只要在最佳化問題中加入對應的限制條件即可保證適應性控制器在時域的誤差。除此之外，一般駕駛者輸入的轉向命令，例如轉彎或切換車道，多為低頻的窄頻訊號，但頻率則隨駕駛習慣與路況而變。一般 H_{∞} 控制器僅能對所有可能的頻段做最壞情況(worst case)設計，因此效能過於保守。但使用適應性 H_{∞} 控制器設計更可以根據當下的參考訊號做最佳化設計，由第五章的模擬結果可知適應性 H_{∞} 控制器的確比一般 H_{∞} 控制器達到更好的效能。

4.1.2.1 成本函數、限制條件

本研究所要探討的主題是環保節能，因此在成本函數的設計選擇上，會使用將能量損耗減至最低的概念設計。

上層適應性 H_{∞} 控制器的控制輸入有前輪轉向角和直接橫擺力矩，使用前輪輪胎轉向角產生橫擺力矩的方式會消耗能量在輪胎轉向驅動器上；使用直接橫擺力矩藉由車輛兩側的輪胎縱向力差來產生橫擺力矩的方式則會消耗能量在產生輪胎的扭矩上。在有最佳化輪胎縱向力分配的情況下，直接橫擺力矩會和輪胎縱向力平方和成正比的關係，而輪胎縱向力也會和輪胎扭矩有正比關係，因此當直接橫擺力矩越小，所需的輪胎扭矩也會越小。和產生輪胎扭矩所需的能量相比，輪胎轉向驅動器所需要的能量是可忽略的。因此本研究假設藉由車輛兩側的輪胎縱向力差來產生橫擺力矩的直接橫擺力矩會消耗大量能量，所以成本函數的設計選擇是直接橫擺力矩的平方，如(4.12)式，希望直接橫擺力矩越小越好。

$$J = \frac{1}{2} M_D^2 \quad (4.12)$$

除了希望環保節能之外，車輛的安全性也是很重要的，為了使車輛能跟隨參考軌跡，本研究加入了以下的限制條件，如(4.13)、(4.14)式

$$\beta_e^2 = (\beta_{ref} - \beta)^2 \leq \beta_{e_max}^2 \quad (4.13)$$

$$r_e^2 = (r_{ref} - r)^2 \leq r_{e_max}^2 \quad (4.14)$$

；其中 β_{e_max} 、 r_{e_max} 為可容許的最大誤差限制，此限制可隨駕駛情況改變。

4.1.2.2 設計方法

本研究設計適應性 H_∞ 控制器的步驟分為 2 步，步驟一是先設計出多個適合在不同駕駛情況下的 H_∞ 節能控制器，再來步驟二是設計一個最佳化方程式，藉由調整先前設計的控制器之間的權重，得到一個在當前駕駛條件下的車輛最佳節能控制器。

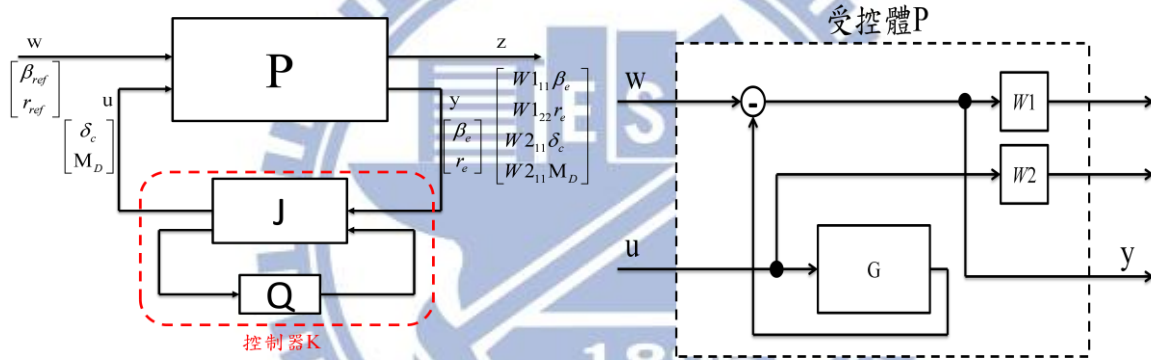


圖 4.3 H_∞ 控制器架構(左)，受控體 P(右)

圖 4.2 中 G 為(4.10)、(4.11)式； $W1$ 為與參考訊號誤差的權重， $W2$ 為控制輸出的權重；受控體 P 包括 G 與 $W1$ 、 $W2$ ， K 為使閉迴路系統穩定之控制器。 w 為參考訊號； u 為控制輸入； y 為車輛軌跡誤差； z 為加權後的控制輸出和車輛軌跡誤差。

任何使閉迴路系統穩定的控制器 K 均可分解成某個中心控制器(central controller) J 和參數 Q [23]，如圖 4.3 所示。當中，中心控制器 J 能穩定受控體 P ，參數 Q 須滿足 $Q \in RH_\infty$ 的條件， RH_∞ 代表所有實係數穩定真分(proper)有理函數所形成的集合。此外，任何屬於 RH_∞ 的參數 Q ，其對應的控制器 K 皆可使閉迴路系統穩定。因此最佳化控制器可視為選擇參數 Q 以達到最佳效能。然而 RH_∞ 為無限維度之向量空間，欲在其中尋找最佳的參數 Q 並非易事。故本研究先設計 N 個控制器 K_1, \dots, K_N ，得到相對應的參數 Q_1, \dots, Q_N ，然後尋找所有 Q_1, \dots, Q_N 的線性組合中最佳的參數 \hat{Q} ，亦即將最佳的參數 \hat{Q} 表示成

$\hat{Q} = \sum_{i=1}^N c_i Q_i$ ，其中 $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, N$ 。由於搜尋的範圍變成由 N 個係數構成的 N 維向量空間，故能有效地求解最佳化問題，但因為 Q_1, \dots, Q_N 的線性組合僅是 RH_∞ 的一個子集合，如圖 4.4 所示，故上述方法只能求得次佳解(suboptimal solution)。最後求得的控制器可表示如圖 4.5 所示。

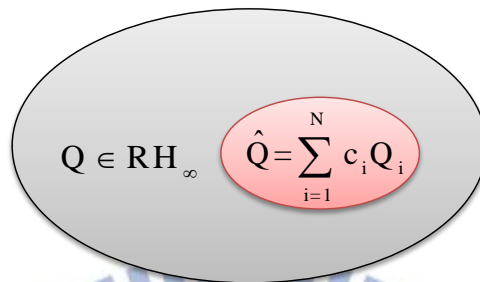


圖 4.4 Q 範圍示意圖

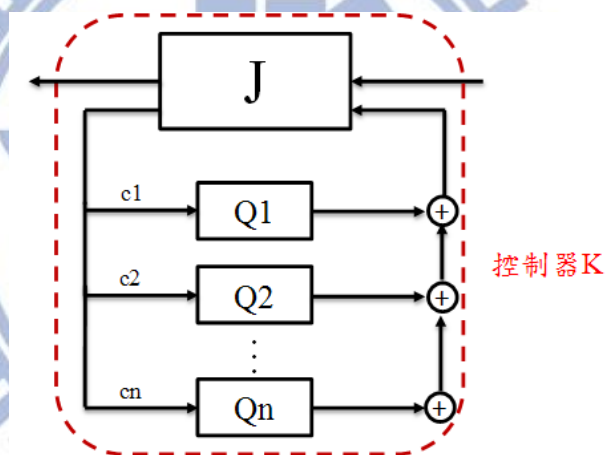


圖 4.5 控制器 K 的架構

步驟一中藉由調整 W_1, W_2 的權重，設計出 N 個適合不同駕駛情況的 H_∞ 控制器 K_1, \dots, K_N ，並求出相對應的參數 Q_1, \dots, Q_N 。步驟二是設計一個最佳化方程式，並調整先前設計的 H_∞ 控制器參數之間的權重，因此需要知道最佳化方程式和 H_∞ 控制器之間的關係。

圖 4.2 中由 w 至 z 的閉迴路轉換矩陣，如式(4.15)，其中 $T(s)$ 為受控體 P 與中心控制器 J 所構成的閉迴路轉換矩陣。觀察此式，發現即使輸入不同的參考訊號，可藉由調

整 \hat{Q} 最佳化車輛的軌跡誤差和控制輸入，讓車輛軌跡誤差維持在一定範圍(安全性)外，同時最小化能量耗損(節能)。

$$z(s) = [T_{11} + T_{12}\hat{Q}T_{21}]w(s) \quad T(s) = \begin{bmatrix} T_{11} \times (4 \times 2) & \times 1 \\ T_{21} \times (2 \times 2) & \times 2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \beta'_e(s) \\ r'_e(s) \\ \delta'_c(s) \\ M'_D(s) \end{bmatrix} = [T_{11} + T_{12}\hat{Q}T_{21}] \begin{bmatrix} \beta_{ref}(s) \\ r_{ref}(s) \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \sum_{i=1}^N c_i Q_i \quad \left(\begin{array}{l} \beta'_e(s) = W_{11} \beta_e(s) \\ r'_e(s) = W_{12} r_e(s) \\ \delta'_c(s) = W_{21} \delta_c(s) \\ M'_D(s) = W_{22} M_D(s) \end{array} \right) \quad (4.16)$$

$$= [T_{11} + \sum_{i=1}^N c_i T_{12} Q_i T_{21}] w(s) \quad \left(\hat{Q} = \sum_{i=1}^N c_i Q_i \right) \quad (4.17)$$

$$= [T_{11} + \sum_{i=1}^N c_i Q'_i] w(s) \quad (Q'_i = T_{12} Q_i T_{21}) \quad (4.18)$$

但式子(4.18)為頻域表示法無法做即時運算，故將其轉換成時域表示法，轉換方法如式(4.19)所示，經整理後可得到式(4.20)，其中*代表摺積運算(convolution)。

$$\left(\begin{array}{l} z(s) \xrightarrow{L^{-1}} z(t) \\ w(s) \xrightarrow{L^{-1}} w(t) \\ T_{11}(s) \xrightarrow{L^{-1}} t_{11}(t) \\ \sum_{i=1}^N c_i Q'_i(s) \xrightarrow{L^{-1}} \sum_{i=1}^N c_i Q'_i(t) \end{array} \right) \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \beta'_e(t) \\ r'_e(t) \\ \delta'_d(t) \\ M'_D(t) \end{bmatrix} = [t_{11}(t) + \sum_{i=1}^N c_i Q'_i(t)] * w(t) = \bar{Q}'(t) \quad (4.20)$$

將最佳化方程式和 H_∞ 控制器之間的關係做連結後，成本函數與限制條件可用下列式子表示 (4.22)、(4.23)、(4.24)

$$\text{minimize } J = \frac{1}{2} M_D^2 = f_0(c) = \frac{1}{2} (k_1 \bar{Q}'(t))^2 \quad (k_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]) \quad (4.22)$$

$$\text{s.t. } f_1(c) = \frac{1}{2} (\beta_e^2 - \beta_{e_max}^2) = \frac{1}{2} (k_2 \bar{Q}'(t))^2 - \frac{1}{2} \beta_{e_max}^2 \leq 0 \quad (k_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]) \quad (4.23)$$

$$f_2(c) = \frac{1}{2} (r_e^2 - r_{e_max}^2) = \frac{1}{2} (k_3 \bar{Q}'(t))^2 - \frac{1}{2} r_{e_max}^2 \leq 0 \quad (k_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]) \quad (4.24)$$

4.1.2.3 小增益定理(small gain theorem)

本研究中的適應性 H_∞ 控制器 K 是隨時間變動的，因此需要證明此適應性控制器 K 在隨時間變動的情況下，仍能維持系統的穩定，本研究使用小增益定理(small gain theorem)來證明。

小增益定理(Small gain theorem)，假設 $S1$ 、 $S2$ 為兩互相連接的系統方塊，如圖 4.6 且滿足 $\|S1\|_\infty \cdot \|S2\|_\infty < 1$ ，則此系統會輸入—輸出穩定(input-output stable)。

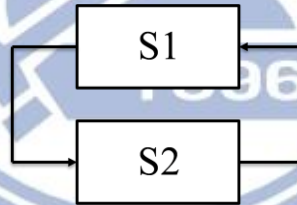


圖 4.6 $S1$ 、 $S2$ 為兩互相連接的系統方塊

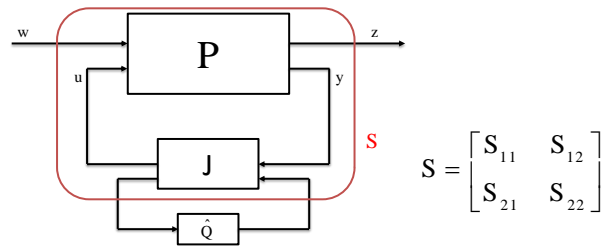


圖 4.7 適應性 H_∞ 控制器 K 和受控體 P 組成之系統架構

將圖 4.7 中的紅色框框中的受控體 P 和中心控制器 J 視為系統方塊 S ，系統方塊 S 和控制器 \hat{Q} 相連的部分 S_{22} 視為 $S1$ ， \hat{Q} 視為 $S2$ ，當滿足 $\|S_{22}\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$ ， $\|\hat{Q}\|_\infty < \gamma$ 條件時，此系統會輸入—輸出穩定(input-output stable)。當中 $\|S_{22}\|_\infty$ 是已知且不變的， γ 範圍可由 $\|S_{22}\|_\infty$

得知， $\|\hat{Q}\|_\infty$ 則會隨時間改變，以下引理一證明當 $\sum_{i=1}^N (c_i^2 \|Q_i\|_\infty^2) < \frac{\gamma^2}{N}$ ，保證 $\|\hat{Q}\|_\infty < \gamma$ ，此時系統會輸入-輸出穩定。

引理一：當 $\sum_{i=1}^N (c_i^2 q_i^2) < \frac{\gamma^2}{N}$ 時，保證 $\|\hat{Q}\|_\infty < \gamma$ ，

$$\text{其中 } \hat{Q} = \sum_{i=1}^N c_i Q_i, \quad \|Q_i\|_\infty = q_i, \quad Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^+$$

證明：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (c_i^2 q_i^2) < \frac{\gamma^2}{N} \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^N |c_i q_i| \leq \sqrt{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (c_i^2 q_i^2)} < \gamma \\ \Rightarrow & \|\hat{Q}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^N |c_i| \|Q_i\|_\infty \leq \sum_{i=1}^N |c_i q_i| < \gamma \\ \Rightarrow & \|\hat{Q}\|_\infty < \gamma \end{aligned}$$

結論：當 $\sum_{i=1}^N (c_i^2 q_i^2) < \frac{\gamma^2}{N}$ 時，保證 $\|\hat{Q}\|_\infty < \gamma$ ，故本小節所探討之最佳化問題需新增一

不等式限制條件，以保證系統穩定。

4.1.2.3 最佳化問題求解

分析整理成本函數式(4.25)與其限制條件(4.26)-(4.28)，目的是希望最小化成本函數，表示成底下一般最佳化的求解問題：

$$\text{minimize } J = \frac{1}{2} M_D^2 = f_0(c) = \frac{1}{2} (k_1 \bar{Q}'(t))^2 \quad (k_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]) \quad (4.25)$$

$$\text{s.t. } f_1(c) = \frac{1}{2} (\beta_e^2 - \beta_{e_max}^2) = \frac{1}{2} (k_2 \bar{Q}'(t))^2 - \frac{1}{2} \beta_{e_max}^2 \leq 0 \quad (k_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]) \quad (4.26)$$

$$f_2(c) = \frac{1}{2} (r_e^2 - r_{e_max}^2) = \frac{1}{2} (k_3 \bar{Q}'(t))^2 - \frac{1}{2} r_{e_max}^2 \leq 0 \quad (k_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]) \quad (4.27)$$

$$f_3(c) = \sum_{i=1}^N (c_i^2 q_i^2) - \frac{\gamma^2}{N} \leq 0 \quad (4.28)$$

$$; \quad c = (c_1, \dots, c_N)^T$$

為解此非線性規劃問題，將借助於卡羅需—庫恩—塔克條件(KKT condition)，對於任何的最佳化問題，若目標函數與限制函數皆可微分，求得之最佳解必需滿足 KKT 條件。在目標函數為凸函數，且不等式限制條件也為凸函數，等式限制條件為仿射函數 (affine function) 下，若任何一組解 \tilde{x} 、 $\tilde{\lambda}$ 、 \tilde{v} 滿足底下 KKT 條件，則 \tilde{x} 為此最佳化問題之最佳解。

$$f_i(\tilde{c}) \leq 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.29)$$

$$h_i(\tilde{c}) = 0 \quad , i = 1, \dots, p \quad (4.30)$$

$$\tilde{\lambda}_i \geq 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.31)$$

$$\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{c}) = 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.32)$$

$$\nabla f_0(\tilde{c}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{c}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{c}) = 0 \quad (4.33)$$

；在本小節的最佳化問題中， $m = 3$ 、 $p = 0$ ，條件(4.30)符合。

$$\text{首先整理 KKT 條件，} \nabla f_0(\tilde{c}) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix}^T \cdot \tilde{c} + a_1 \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix}$$

假設 $\tilde{\lambda}_i = 0 \quad , i = 1, \dots, 3$ 滿足(4.31)、(4.32)

$$\text{解 } \nabla f_0(\tilde{c}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{c}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{c}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix}^T \cdot \tilde{c} = -a_1 \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{c} = - \left(\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \cdot a_1 \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix} \quad \text{滿足(4.33)}$$

最後求出的解 \tilde{c} 代回驗證 $f_i(\tilde{c}) \leq 0$ 是否成立(滿足(4.29))，若成立則 \tilde{c} 為所求最佳解。不

成立則非最佳解，表示一開始假設 $\tilde{\lambda}_i = 0 \quad , i = 1, \dots, 3$ 有誤，重新假設討論。

Case1:

$$f_1(c) = \frac{1}{2}(\beta_e^2 - \beta_{e_max}^2) = \frac{1}{2}\left(a_2 + \sum_{i=1}^N c_i b_{2i}\right)^2 - \beta_{e_max}^2 > 0 \text{ 假設 } f_1(c) = 0, \tilde{\lambda}_i = 0, i = 2, 3 \text{ 滿}$$

足(4.32)

β_e 取和 β_{ref} 同號

$$\text{解} \begin{cases} f_1(\tilde{c}) = 0 \\ \nabla f_0(\tilde{c}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{c}) + \sum_{i=1}^p \tilde{\nu}_i \nabla h_i(\tilde{c}) = 0 \end{cases}$$

若 $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ 且將 \tilde{c} 帶回驗證 $f_i(\tilde{c}) \leq 0$ 是否成立，成立→滿足(4.29)、(4.31)、(4.32)，則 \tilde{c} 為最佳解， $f_i(\tilde{c}) > 0, i = 2, 3$ 處理方式同上。

4.2 最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配

4.2.1 成本函數、限制條件

最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配的成本函數(Cost function)之設計與選擇是可以有很多種形式，但本研究探討主題為環保節能因此以最小能量消耗為主要目標。縱向摩擦力需由輪胎扭矩消耗能量而產生，因此縱向摩擦力越少，輪胎扭矩消耗能量就越少，在這裡我們以縱向摩擦力的平方和為成本函數，如式(4.34)

$$J = \sum_{i=1}^4 F_{ai}^2 \quad (4.34)$$

此外，由四個輪胎縱向力所產生的橫擺力矩和必須的等於適應性 H_∞ 控制器所需的直接橫擺力矩總和(M_D)，如式(4.35)。

$$\left(\frac{t}{2} \cos(\delta_c) + l_f \sin(\delta_c)\right)(F_{a2} - F_{a1}) + \frac{t}{2}(F_{a4} - F_{a3}) = M_D \quad (4.35)$$

此外，每個輪胎所受之摩擦力也必須要滿足摩擦力圓的限制[21]，表示如式(4.36)，和前輪驅動限制，如式(4.37)：

$$\begin{aligned}
 F_{a1}^2 + F_{b1}^2 &\leq (\mu F_{z1})^2 \\
 F_{a2}^2 + F_{b2}^2 &\leq (\mu F_{z2})^2 \\
 F_{a3}^2 + F_{b3}^2 &\leq (\mu F_{z3})^2 \\
 F_{a4}^2 + F_{b4}^2 &\leq (\mu F_{z4})^2
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 F_{a3} &\leq 0 \\
 F_{a4} &\leq 0
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

上述總共一條線性等式限制與六條非線性不等式限制，為了求解此非線性規劃問題，將借助於卡羅需—庫恩—塔克條件(KKT condition)。

4.2.2 最佳化問題求解

分析整理成本函數式(4.38)與其限制條件 (4.39)，目的是希望最小化成本函數，表示成底下一般最佳化的求解問題：

$$\text{minimize } J = f_0(x) = \frac{1}{2} x^T P x \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad f_1(x) &= x_1^2 + F_b^2 - (\mu F_z)_1^2 \leq 0 \\
 f_2(x) &= x_2^2 + F_b^2 - (\mu F_z)_2^2 \leq 0 \\
 f_3(x) &= x_3^2 + F_b^2 - (\mu F_z)_3^2 \leq 0 \\
 f_4(x) &= x_4^2 + F_b^2 - (\mu F_z)_4^2 \leq 0 \\
 f_5(x) &= x_3 \leq 0 \\
 f_6(x) &= x_4 \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$h_1(x) = \left(\frac{t}{2} \cos(\delta_c) + l_f \sin(\delta_c) \right) (x_1 - x_2) + \frac{t}{2} (x_3 - x_4) - M_D = 0$$

$$; \quad x = (F_{a1}, F_{a2}, F_{a3}, F_{a4})^T \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

為解此非線性規劃問題，將借助於卡羅需—庫恩—塔克條件(KKT condition)，在目

標函數和限制條件皆滿足假設下，若任何一組解 x, λ, v 滿足底下 KKT 條件，則 x 為此最佳化問題之最佳解。

$$f_i(\tilde{x}) \leq 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.40)$$

$$h_i(\tilde{x}) = 0 \quad , i = 1, \dots, p \quad (4.41)$$

$$\tilde{\lambda}_i \geq 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.42)$$

$$\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) = 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.43)$$

$$\nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \quad (4.44)$$

；在本小節的最佳化問題中， $m = 6$ 、 $p = 1$ 。

首先整理 KKT 條件：

$$\begin{cases} h_1(\tilde{x}) = A\tilde{x} - b = 0 \\ \nabla h_1(\tilde{x}) = A^T \\ f_0(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P \tilde{x} \\ \nabla f_0(\tilde{x}) = P\tilde{x} \end{cases}$$

； $x = (F_{a1}, F_{a2}, F_{a3}, F_{a4})^T$

$$A = \left[-\frac{t}{2} \cos(\delta_c) + l_j \sin(\delta_c), \frac{t}{2} \cos(\delta_c) + l_j \sin(\delta_c), -\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right];$$

$$b = M_D$$

假設 $\tilde{\lambda}_i = 0 \quad , i = 1, \dots, 6$ 滿足(4.42)、(4.43)

$$\text{解} \begin{cases} h_i(\tilde{x}) = 0 \\ \nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \text{ 滿足(4.41)、(4.44)}$$

最後求出的解 \tilde{x} 代回驗證 $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ 是否成立(滿足(4.40))，若成立則 \tilde{x} 為所求最佳解。不

成立則非最佳解，表示一開始假設 $\tilde{\lambda}_i = 0 \quad , i = 1, \dots, 6$ 有誤，重新假設討論。

Case1: $f_1(x) = x_1^2 + F_{b1}^2 - (\mu F_{z1})^2 > 0$

假設 $f_1(\tilde{x}) = 0$ 、 $\tilde{\lambda}_i = 0$, $i = 2, \dots, 6$ 滿足(4.43)

$$\text{解} \begin{cases} h_i(\tilde{x}) = 0 \\ f_1(\tilde{x}) = 0 \\ \nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{\nu}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \end{cases}$$

若 $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ 且將 \tilde{x} 帶回驗證 $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ 是否成立，成立→滿足(4.40~42)、(4.44)，則 \tilde{x} 為最佳解， $f_i(\tilde{x}) > 0$, $i = 2, \dots, 6$ 處理方式同上。

4.3 下層控制器

在 4.2 節最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配，分配出四個輪胎和路面間所應該產生的縱向摩擦力，設計下層控制器控制輪胎的扭力，改變輪胎動態，使輪胎與路面間產生此縱向摩擦力分配之結果。

實際上控制車輛的輪胎模型是未知的，在第三章討論的”Magic formula”輪胎模型，在本研究中是用以模擬當作真實的輪胎模型，而在下層控制器內則是假設另一非線性輪胎模型：Dugoff’s 輪胎模型[22]，如(4.45)式，做為控制器內名義輪胎模型(Nominal tire model)，因為 Dugoff’s 輪胎模型包含較少的參數(C'_x 、 C'_y)，計算上亦比較容易，所以利用此模型之線性及非線性的特性，於縱向力回授控制。

$$F'_a = C'_x \frac{\lambda}{1-|\lambda|} f(\kappa)$$

$$F'_b = C'_y \frac{\tan(\alpha)}{1-|\lambda|} f(\kappa)$$

(4.45)

$$; \quad f(\kappa) = \begin{cases} 1 & , \kappa \geq 1 \\ \kappa(2-\kappa) & , \kappa < 1 \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{\mu F_z (1 - |\lambda|)}{2\sqrt{C_x'^2 \lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha}}$$

； C_x' 與 C_y' 為輪胎縱向剛度(longitudinal stiffness)與轉向剛度(cornering stiffness)； κ 指定 Dugoff's 輪胎模型的作用區間， $\kappa \geq 1$ 時，輪胎作用於線性區域。

4.3.1 縱向力估測

回顧(3.7)式，輪胎旋轉動態方程式，假設式中馬達與煞車施加的力矩和(T_{mi})和輪胎轉動角速度(ω_i)都可以獲得，將此式移項整理後，並將輪胎轉動半徑(R_w)用未形變前的輪胎半徑(r_i)代入，可得(4.46)式。

$$F_{ai} = \frac{T_{mi} - I_w \dot{\omega}_i}{r_i} \quad (4.46)$$

；其中轉動角加速度($\dot{\omega}_i$)項，可以透過角速度項差分得知。 ω_i^+ 為此刻時間點的輪胎轉動角速度， ω_i^- 前一刻時間點的輪胎轉動角速度， Δt 為取樣時間，則輪胎轉動角加速度可以用(4.47)式近似：

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \quad (4.47)$$

再將(4.47)式代入(4.46)式即可得到縱向力估測方程式：

$$\hat{F}_{ai} = \frac{T_{mi} - I_w \left(\frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \right)}{r_i} \quad (4.48)$$

本研究中將會利用(4.48)式縱向力估測的結果，回授至下層縱向力控制器，控制輪胎動態。

4.3.2 縱向摩擦力回授穩健控制器

控制器中假設實際的輪胎模型縱向摩擦力為：Dugoff's 輪胎模型(F_a')加上一未知項(F_a^* ：Uncertainty term)。控制器目的是希望輪胎與路面間產生上層控制器分配期望之摩

擦力(F_{ad})，故設計順滑模態控制器做縱向力軌跡跟隨控制，計算控制輸入馬達扭矩(T_m)，控制輪胎的動態。

設計一順滑平面，如(4.49)式。

$$S_a = F_a - F_{ad} = 0 \quad (4.49)$$

；其中若 $|F_{ad}| > \hat{\mu}F_z$ ，則會將 $|F_{ad}|$ 限制於 $\hat{\mu}F_z$ ，目的是希望跟隨的參考值 $|F_{ad}|$ 不會超過最大縱向摩擦力 μF_z ，以避免平衡點不在順滑平面上； $\hat{\mu}$ 為路面摩擦力係數。

需滿足迫近條件(Approaching condition)：

$$\dot{S}_a S_a < -\eta_4 |S_a| \quad , \text{ while } S_a \neq 0 \quad (4.50)$$

；其中 $\eta_4 > 0$ 。

回顧(4.45)式，Dugoff's 輪胎模型，將縱向力(F'_a)對時間 t 做一次微分：

$$\dot{F}'_a = \begin{cases} C'_x \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \dot{\lambda} & , \kappa \geq 1 \\ C'_x \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \kappa (2-\kappa) \dot{\lambda} + 2C'_x \frac{\lambda}{1-|\lambda|} (1-\kappa) \dot{\kappa} & , \kappa < 1 \end{cases}$$

(4.51)

κ 計算如(4.52)式。

$$\kappa = \frac{\dot{F}'_z}{F'_z} \kappa - \frac{1}{1-|\lambda|} \kappa \dot{\lambda} \text{sign}(\lambda) - \kappa \frac{C'_x{}^2 \lambda \dot{\lambda} + C'_y{}^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C'_x{}^2 \lambda^2 + C'_y{}^2 \tan^2 \alpha} \quad (4.52)$$

將(4.52)式代入(4.51)式，重新整理為

$$\dot{F}'_a = \begin{cases} C'_x \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \dot{\lambda} & , \kappa \geq 1 \\ \frac{C'_x}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - \frac{2(1-\kappa)|\lambda|}{1-|\lambda|} - \frac{2C_x'^2(1-\kappa)\lambda^2}{C_x'^2\lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right] \dot{\lambda} \\ + 2C'_x \frac{\lambda}{1-|\lambda|} \kappa(1-\kappa) \left(\frac{\dot{F}_z}{F_z} - \frac{C_y'^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C_x'^2\lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right) & , \kappa < 1 \end{cases} \quad (4.53)$$

再將(4.53)式整理表示為

$$\dot{F}'_a = g'_\lambda \dot{\lambda} + g'_0 \quad (4.54)$$

； g'_λ 為 F'_a 對 λ 偏微，且

$\kappa \geq 1$ ：

$$g'_\lambda = \frac{C'_x}{(1-|\lambda|)^2} > 0,$$

$$g'_0 = 0$$

$\kappa < 1$ ：

$$\begin{aligned} g'_\lambda &= \frac{C'_x}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - \frac{2(1-\kappa)|\lambda|}{1-|\lambda|} - \frac{2C_x'^2(1-\kappa)\lambda^2}{C_x'^2\lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right] \\ &\geq \frac{C'_x}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - 2(1-\kappa) \left(\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{C'_x}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{\kappa}{1-|\lambda|} \right] \\ &= \frac{C'_x \kappa^2}{(1-|\lambda|)^2} > 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$g'_0 = 2C'_x \frac{\lambda}{1-|\lambda|} \kappa(1-\kappa) \left(\frac{\dot{F}_z}{F_z} - \frac{C_y'^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C_x'^2\lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right)$$

故可以將先前假設實際的輪胎模型縱向摩擦力對時間 t 做一次微分表示為(4.56)式。

$$\dot{F}'_a = (g'_\lambda + g_\lambda^*) \dot{\lambda} + g'_0 \quad (4.56)$$

； g_λ^* 假設為未知項對 λ 偏微的結果。

當車輪在加速時($\lambda > 0$)，將(3.8)式對時間 t 做一次微分，且利用輪胎旋轉動態方程式

(3.7)得

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_i &= -\frac{r_i \dot{\omega}_i \cdot (\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i) - v_i \cos \alpha_i \cdot (r_i \dot{\omega}_i)}{(r_i \omega_i)^2} \\
 &= -\frac{(\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{r_i \omega_i} + \left(1 - \frac{r_i \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{r_i \omega_i}\right) \frac{\dot{\omega}_i}{\omega_i} \\
 &= \frac{(1 - \lambda_i)}{\omega_i} \left(\frac{T_{mi} - r_i F_{ai}}{I_w}\right) - \frac{(\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{r_i \omega_i} \\
 &= \frac{(1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

；其中不考慮輪胎形變量，故由輪胎未形變時半徑 r_i 代入； v_{ai} 為輪胎前進速度之平行胎面分量。

同樣地，車輪在煞車減速時($\lambda < 0$)得

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_i &= \frac{v_i \cos \alpha_i \cdot (r_i \dot{\omega}_i) - r_i \omega_i \cdot (\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{(v_i \cos \alpha_i)^2} \\
 &= \frac{r_i \dot{\omega}_i}{v_i \cos \alpha_i} - \left(1 + \frac{r_i \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{v_i \cos \alpha_i}\right) \left(\frac{\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i}{v_i \cos \alpha_i}\right) \\
 &= \frac{r_i}{v_i \cos \alpha_i} \left(\frac{T_{mi} - r_i F_{ai}}{I_w}\right) - (1 + \lambda_i) \left(\frac{\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i}{v_i \cos \alpha_i}\right) \\
 &= \frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

將(4.56~58)式代入(4.50)式，必須滿足此迫近條件。

$$\begin{aligned}
 &(\dot{F}_a - \dot{F}_{ad}) S_a \\
 \Rightarrow &\left((g'_\lambda + g^*_\lambda) \dot{\lambda} + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right) S_a < -\eta_4 |S_a| \\
 \Rightarrow &\begin{cases} \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{(1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a < -\eta_4 |S_a| & , \lambda > 0 \\ \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}} \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a < -\eta_4 |S_a| & , \lambda < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

假設 $g^*_\lambda \geq (-1 + \theta)g'_\lambda, 0 < \theta \leq 0.5$ 及輪胎初始滑動比落於輪胎線性區域：

$\lambda(0) \in [-\lambda^*, \lambda^*]$, $F_a(\lambda^*) = \hat{\mu}F_z$, 則設計控制輸入 T_{mi} 為：

$\lambda > 0$:

$$T_{mi} = r_i F_{ad} + \frac{I_w \dot{v}_{ai}}{r_i (1 - \lambda_i)} + \frac{1}{g_\lambda} \frac{I_w \omega_i}{(1 - \lambda_i)} (-g_0' + \dot{F}_{ad}) - \rho \frac{I_w \omega_i}{(1 - \lambda_i)} \text{sign}(S_a) \quad (4.60)$$

$\lambda < 0$:

$$T_{mi} = r_i F_{ad} + \frac{I_w (1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{r_i} + \frac{1}{g_\lambda} \frac{I_w v_{ai}}{r_i} (-g_0' + \dot{F}_{ad}) - \rho \frac{I_w v_{ai}}{r_i} \text{sign}(S_a)$$

；其中 ρ 為(4.61)所示：

$$\rho = \frac{1}{g_\lambda} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} |(-g_0' + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) \quad (4.61)$$

； $k_4 > 0$ 。

將(4.60)與(4.61)式代入(4.59)式證明滿足迫近條件。

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} & \left\{ (g_\lambda' + g_\lambda^*) \left[\frac{(1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \right] + g_0' - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\ \Rightarrow & \left\{ (g_\lambda' + g_\lambda^*) \left[\frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} (F_{ad} - F_{ai}) + \frac{1}{g_\lambda} (-g_0' + \dot{F}_{ad}) - \rho \text{sign}(S_a) \right] + g_0' - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\ = & - (g_\lambda' + g_\lambda^*) \frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 - \left\{ \rho (g_\lambda' + g_\lambda^*) \text{sign}(S_a) - \frac{g_\lambda^*}{g_\lambda} (-g_0' + \dot{F}_{ad}) \right\} S_a \\ = & - (g_\lambda' + g_\lambda^*) \frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 \\ & - \left\{ \frac{(g_\lambda' + g_\lambda^*)}{g_\lambda} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} |(-g_0' + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) - \frac{g_\lambda^*}{g_\lambda} (-g_0' + \dot{F}_{ad}) \text{sign}(S_a) \right\} |S_a| \\ \leq & -\theta g_\lambda' \frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 - \theta k_4 |S_a| \\ < & -\eta_4 |S_a| \end{aligned} \quad (4.62)$$

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (g'_\lambda + g_\lambda^*) \left[\frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}} \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
 \Rightarrow & \left\{ (g'_\lambda + g_\lambda^*) \left[\frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} (F_{ad} - F_{ai}) + \frac{1}{g'_\lambda} (-g'_0 + \dot{F}_{ad}) - \rho \text{sign}(S_a) \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
 = & - (g'_\lambda + g_\lambda^*) \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} S_a^2 \\
 & - \left\{ \frac{(g'_\lambda + g_\lambda^*)}{g'_\lambda} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} |(-g'_0 + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) - \frac{g_\lambda^*}{g'_\lambda} (-g'_0 + \dot{F}_{ad}) \text{sign}(S_a) \right\} |S_a| \\
 \leq & -\theta g'_\lambda \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} S_a^2 - \theta k_4 |S_a| \\
 < & -\eta_4 |S_a|
 \end{aligned}$$

；其中 $\eta_4 > \theta k_4 > 0$

在一般真實輪胎模型縱向滑動比對摩擦力關係，輪胎線性區縱向力對縱向滑動比偏微斜率為正，輪胎非線性區縱向力對縱向滑動比偏微斜率為負，產生最大縱向力值時斜率為零，如圖 4.8。

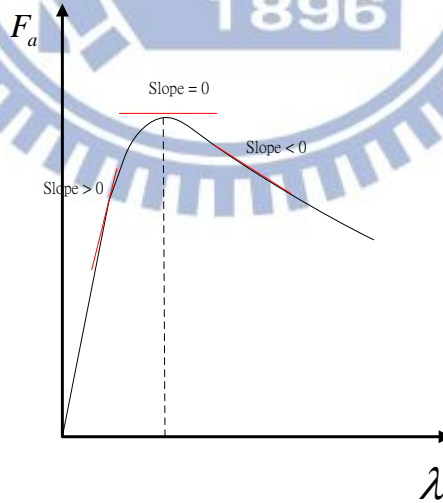


圖 4.8 縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖

在控制器中我們對未知項 g_λ^* 做的假設： $g_\lambda^* \geq (-1 + \theta)g'_\lambda, 0 < \theta \leq 0.5$ ，將縱向力控制器控制範圍限制於一般輪胎的線性區域，且輪胎縱向力對滑動比偏微斜率 $(g_\lambda^* + g'_\lambda)$ 大於 $\theta g'_\lambda$ ，如圖 4.9，左圖為本研究中模擬的真實輪胎模型，紅色線部分即為控制器假設下

控制的範圍，隨著 θ 的遞減可以將控制範圍往最大縱向摩擦力延伸，不過若 θ 選定太小將會影響順滑模態控制器切跳時增益過大；右圖為控制器內假設的 Dugoff's 輪胎模型縱向力對滑動比偏微斜率乘於不同 θ 值與“Magic formula”比較。

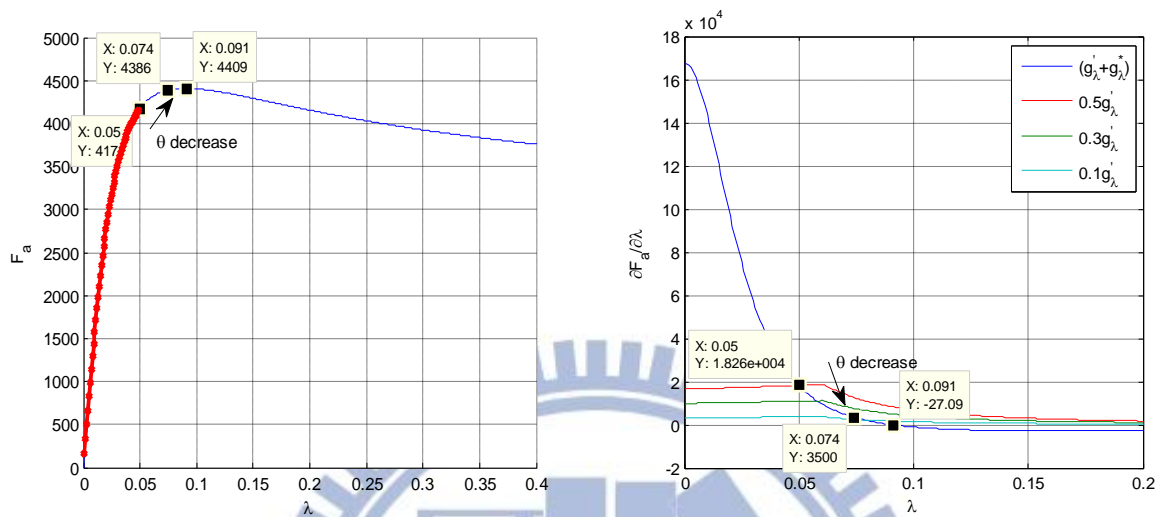


圖 4.9 “Magic formula”縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖(左)、
輪胎縱向力對滑動比偏微斜率($g'_\lambda + \theta'_\lambda$)與 $0g'_\lambda$ 比較圖(右)

第五章、模擬與結果討論

在此將利用第三章介紹的車輛系統模型模擬本研究中控制器控制的車輛，會模擬比較常見的駕駛情況，如轉向(J-turn)與車道變換(Single-lane change)，並評估能量的耗損。模擬結果最後會與 Mirzaei 提出的直接橫擺力矩控制、Kanghyun Nam 所提出的控制和一般的 H_∞ 控制器結果做比較。

轉向即是車輛直線行駛，在一段時間內將方向盤轉到固定的角度，讓車輛繞著一同心圓行進；車道變換為車輛在道路行駛時，將車輛從原本的车道切換到隔壁車道。行駛路徑示意圖如下：

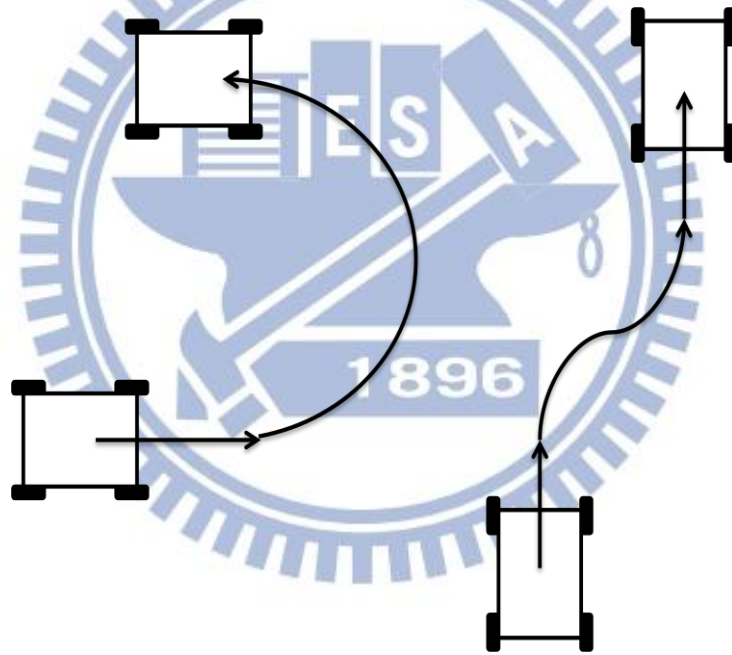


圖 5.1 車輛行駛路徑示意圖 (左: J-turn, 右: Single-lane change)

本研究假設車輛總能量(E_{vehicle})為車輛沿 z 軸旋轉之動能、車輛沿 x 與 y 軸移動之動能和四個輪胎旋轉動能三者之和，如式(5.1)。而車輛總功率(P_{vehicle})則為 E_{vehicle} 對時間的微分，和各輪胎的輸入功率($P_{i_{\text{in}}}, i=1, \dots, 4$)與 $q(P_{\text{lost}})$ 有關。輪胎輸入功率的計算方式如式(5.2)， T_i 為各輪胎扭矩， ω_i 為各輪胎轉速。因為本研究沒有設計能量回收機制，所以當輪胎輸入功率為負(剎車)時，其所做負功視為耗損的能量。當輪胎輸入功率為正(加速)但車輛總能量卻是減少($P_{\text{vehicle}} < 0$)時，其所做正功仍視為耗損的能量，因為輪胎所做的正

功並沒有被儲存起來使車輛總能量增加；當輪胎輸入功率為正(加速)且車輛總能量增加 ($P_{vehicle} > 0$)時，將所有輸入功率為正的輪胎所做的正功相加後和車輛增加的總能量相減所得的值，即為輪胎所做的正功但並沒有被儲存起來的部分，視為耗損的能量。將以上整理後可知能量耗損的情況可分為三種，輪胎輸入功率為負時、輪胎輸入功率為正但車輛總能量卻減少時和輪胎輸入功率為正且車輛總能量增加時，考量各輪胎的可能性後，輪胎的耗損功率總和(P_{lost})如式(5.3)，輪胎能量耗損總和(E_{lost})如式(5.4)。

$$E_{vehicle} = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m V_x^2 + \frac{1}{2} m V_y^2 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} I_w \omega_i^2 \quad (5.1)$$

$$P_{i_{in}} = T_i \omega_i, i = 1, \dots, 4 \quad (5.2)$$

$$P_{lost} = \sum_{i=1}^4 |T_i \omega_i| - \max \{ P_{vehicle}, 0 \} \quad (5.3)$$

$$E_{lost} = \int P_{lost} dt \quad (5.4)$$

； $i=1$ 為左前輪、 2 為右前輪、 3 為左後輪、 4 為右後輪； $P_{vehicle}$ 為車輛總功率

在前面的章節中，本研究假設車輛的主要能量損耗來自於直接橫擺力矩控制所需產生的輪胎縱向力，產生輪胎縱向力的能量來源為各輪胎的輸入功率，且輪胎的輸入功率必大於耗損功率。因此，當控制器所需的輪胎縱向力越小時，輪胎的耗損功率應該也會變小。

模擬時所使用的車輛參數與”Magic formula”輪胎模型參數[18]，如表 5.1 與表 5.2。模擬的控制車輛限制其輪胎轉向角 δ 的範圍為 ± 45 度之間。模擬中控制器內假設的路面摩擦力係數 $\mu = 0.85$ ；下層控制器控制跟隨所需縱向力的順滑層選定為 1 。

模擬中 F_{a1} 表示車輛左前輪平行胎面之縱向摩擦力、 F_{a2} 為右前輪縱向力、 F_{a3} 為左後輪縱向力、 F_{a4} 為右後輪縱向力。

表 5.1 模擬中所使用的車輛參數

參數	符號	數值	單位
車體質量	m	1740	kg
車體集中質量	m _s	1600	kg
車體集中質量之質心高度	h _s	0.6	m
車體質心到前輪軸的距離	l _f	1.05	m
車體質心到後輪軸的距離	l _r	1.4	m
車輛輪胎輪距	t	1.5	m
橫擺轉動慣量	I _z	3214	kg · m ²
輪胎等效半徑	r _i	0.306	m
輪胎轉動慣量	I _w	2.03	kg · m ²
車體前輪軸到後輪軸的距離	l	2.45	m

表 5.2 模擬中所使用的”Magic formula”輪胎模型參數

參數	符號	數值
縱向輪胎係數	B _x	$\frac{-4.96 \times 10^{-5} F_z^2 + 0.026 F_z}{C_x D_x e^{6.9 \times 10^{-5} F_z}}$
縱向輪胎係數	C _x	1.65
縱向輪胎係數	D _x	$-2.13 \times 10^{-5} F_z^2 + 1.144 F_z$
縱向輪胎係數	E _x	$-6 \times 10^{-9} F_z^2 + 5.6 \times 10^{-5} F_z + 0.486$
側向輪胎係數	B _y	$\frac{1078 \sin\left(1.82 \tan^{-1}(2.08 \times 10^{-4} F_z)\right)}{C_y D_y}$
側向輪胎係數	C _y	1.3
側向輪胎係數	D _y	$-2.2 \times 10^{-5} F_z^2 + 1.001 F_z$
側向輪胎係數	E _y	$-3.54 \times 10^{-4} F_z + 0.707$

5.1 J-turn

在轉向模擬的部分是以在轉向角的駕駛情況下，呈現控制器控制的結果。模擬一為 2 度轉向，控制器能控制橫擺角速度與質心側滑角皆跟隨參考值。圖 5.3 表示上層適應性控制器前輪轉向角、直接橫擺力矩分配結果，可以觀察到直接橫擺力矩的值相當小。圖 5.4 表各輪胎的輸入功率，可以發現在 2 秒到 3 秒時，除了右前輪的輸入功率($P_{2,in}$) 為正(加速)外，左側 2 個輪胎的輸入功率均為負(剎車)，表示左右兩側的縱向摩擦力不同向，因此能以較小的縱向摩擦力產生所需直接橫擺力矩;3 秒後四個輪胎的輸入功率均為負，應該是因為車輛持續轉彎導致縱向速度減低，各輪胎的轉速也為之降低，但為使輪胎縱向摩擦力符合力分配結果所造成，輪胎縱向摩擦力如圖 5.5，此外在 2 秒到 3 秒半左右，左後輪的縱向摩擦力為正，這是因為下層控制器裡的順滑膜態控制器對未知項的假設範圍不夠大所致。圖 5.6 表各輪胎的耗損功率之總和，對時間積分後即可得輪胎總能量耗損 $E_{lost} = 3893.3(J)$ 和後面其它控制方法相比，這是個相當低的能量耗損。圖 5.7 參考值和車輛控制結果在質心側滑角有最大約 7%的誤差，在橫擺角速度有最大約 1%的誤差，這是在能量消耗與控制上取得平衡的結果。圖 5.8 因質心側滑角和橫擺角速度有些許誤差，導致運動軌跡也有些許誤差。

模擬一：車輛以初速 $V_x = 33.34m/s$ 直線前進，2 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 2 度的 J-turn 命令，路面狀況模擬在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

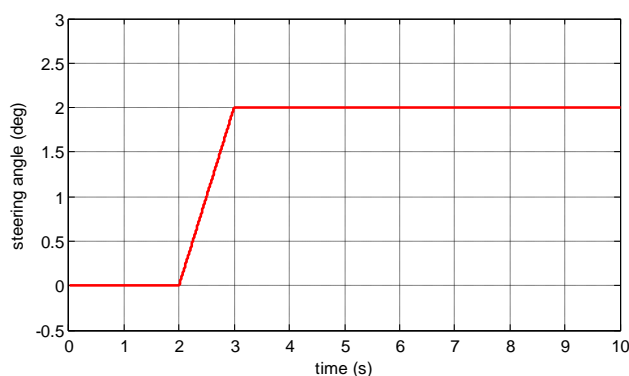


圖 5.2 模擬一之駕駛者轉向命令

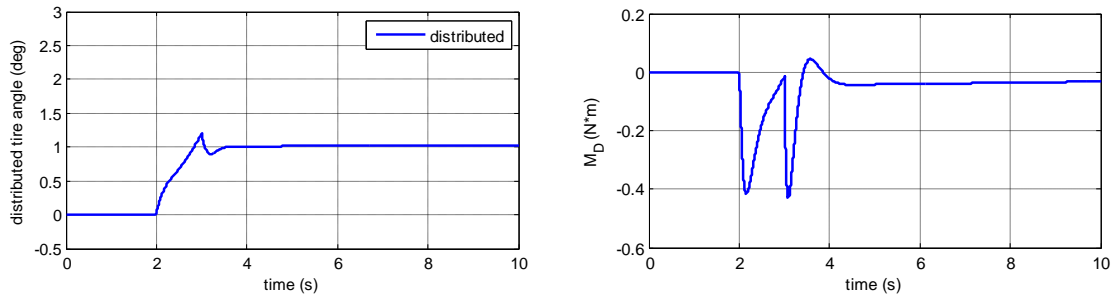


圖 5.3 模擬一之適應性 H_{∞} 控制器前輪轉向角(左)、直接橫擺力矩(右)分配結果

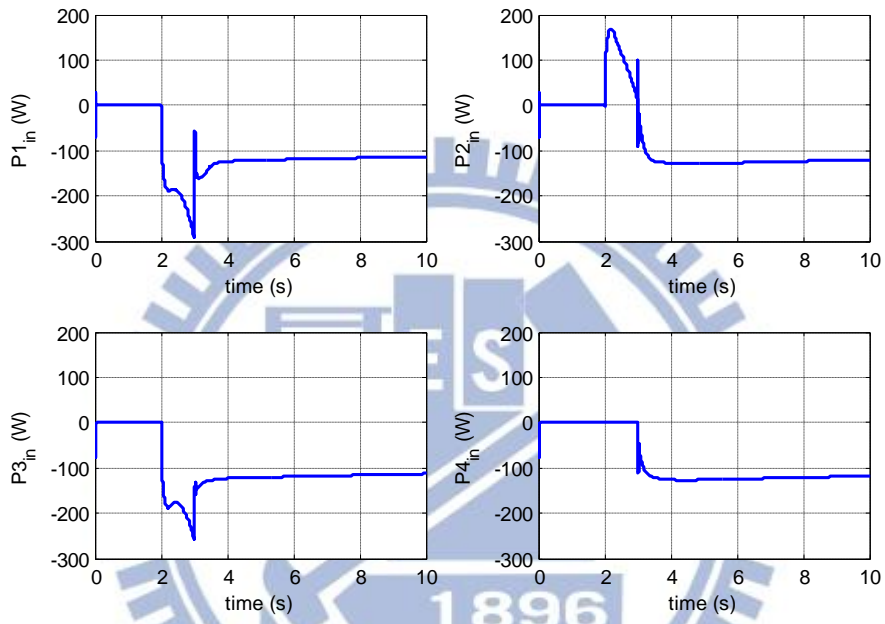


圖 5.4 模擬一之各輪胎輸入功率

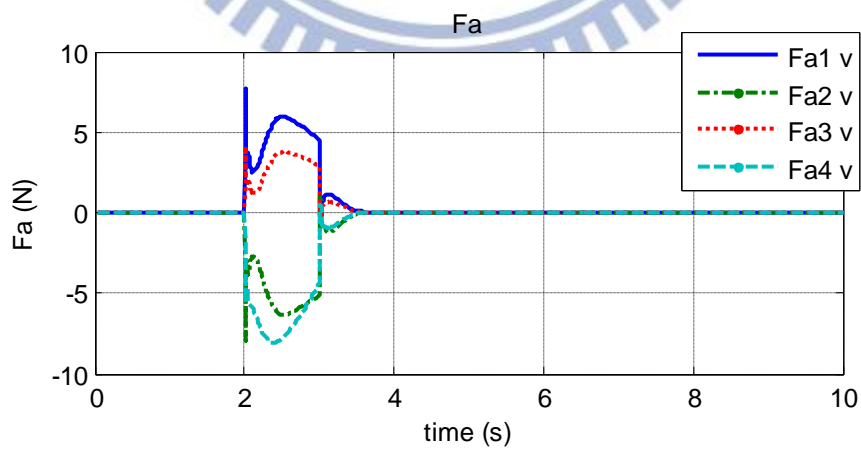


圖 5.5 模擬一之各輪胎的縱向摩擦力

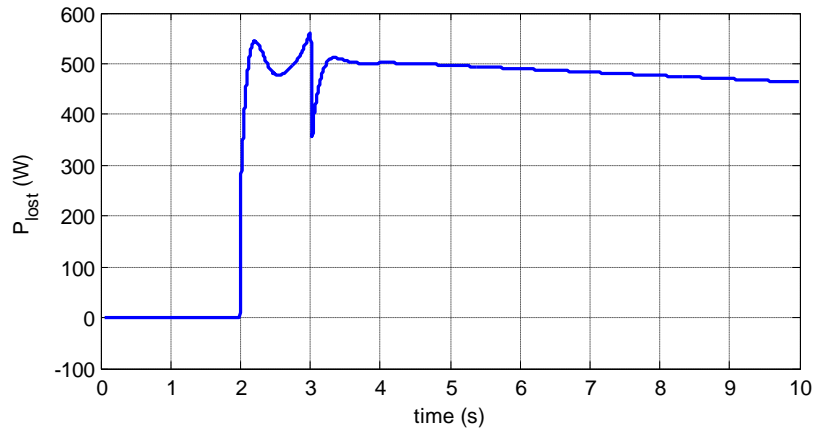


圖 5.6 模擬一之輪胎耗損功率總和

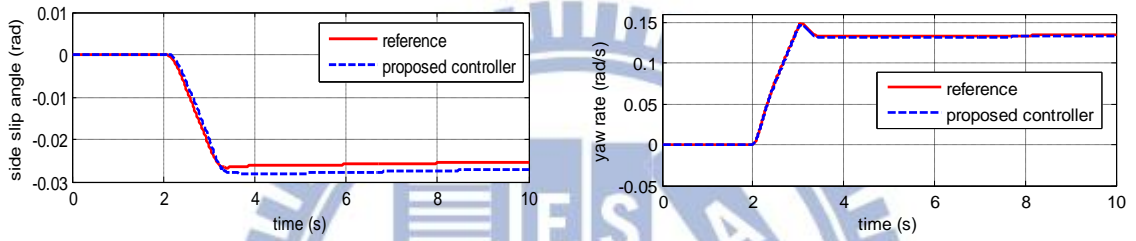


圖 5.7 模擬一之質心側滑角(左)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

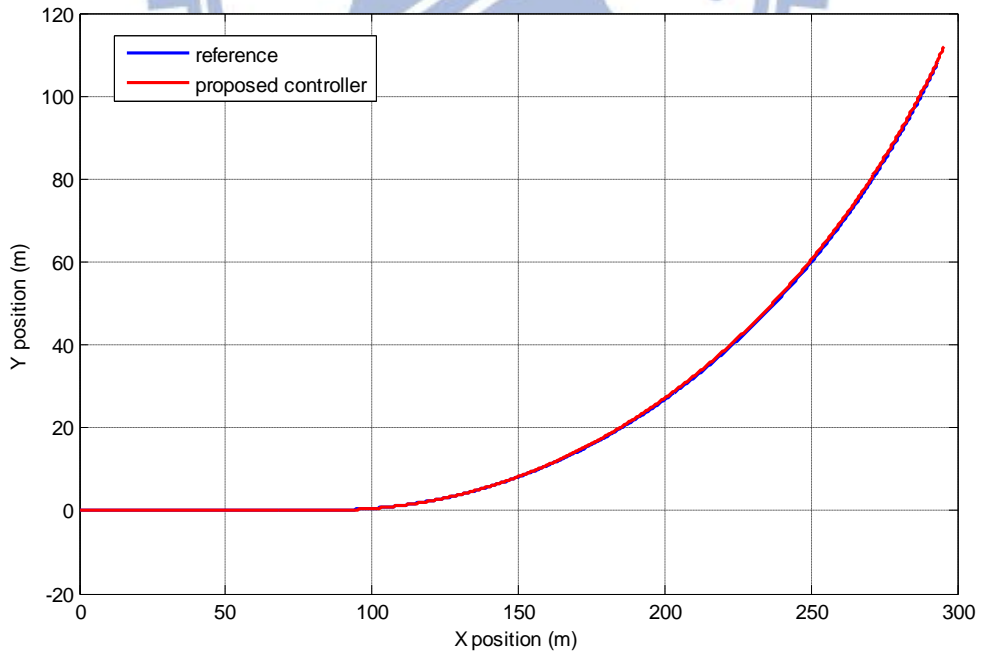


圖 5.8 模擬一之車輛於地表座標上所行駛的參考軌跡與車輛控制結果

5.2 Single-lane change

在變換車道模擬部分模擬變換一個車道的駕駛情況，如圖 5.9。控制器能控制橫擺角速度與質心側滑角皆跟隨參考值。圖 5.10 表示上層適應性 H_∞ 控制器前輪轉向角、直接橫擺力矩分配結果，前輪轉向角和直接橫擺力矩在 5 秒和 6 秒附近有震盪的現象，這是因為適應性控制器調整權重參數所造成。圖 5.11 表各輪胎的輸入功率，觀察可發現，左右兩側輸入功率必不同向，因此也能以較小的縱向摩擦力產生所需直接橫擺力矩；此外各輪胎均有些突起訊號，這是因為前輪轉向角和直接橫擺力矩在該時間有迅速的震動所導致。圖 5.12 表各輪胎的耗損功率之總和，對時間積分後即可得輪胎能量耗損總和 $E_{lost} = 1844.3(J)$ 和後面其它控制方法相比，這是個相當低的能量耗損。圖 5.13 參考值和車輛控制結果在質心側滑角有最大約 4.5% 的誤差，在橫擺角速度則控制相當好。圖 5.14 因質心側滑角有些許誤差，因此運動軌跡有些微誤差存在，最大誤差為 0.3m。

模擬二：車輛以初速 $V_x = 33.34m/s$ 直線前進，4 秒時駕駛者進行車道變換，路面狀況模擬在一般柏油路 ($\mu = 0.85$)。

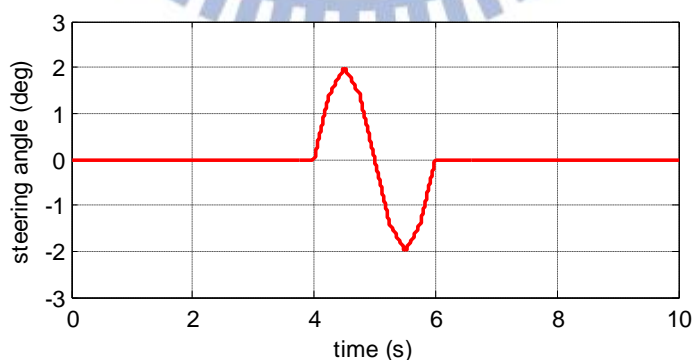


圖 5.9 模擬二之駕駛者轉向命令

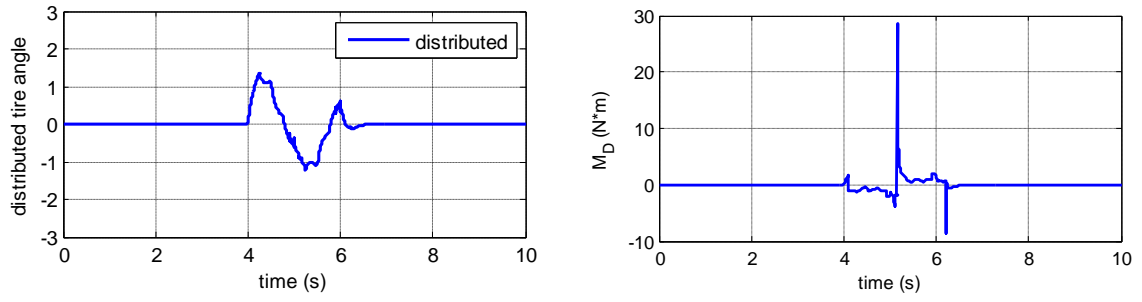


圖 5.10 模擬二之適應性 H_∞控制器前輪轉向角(左)、直接橫擺力矩(右)分配結果

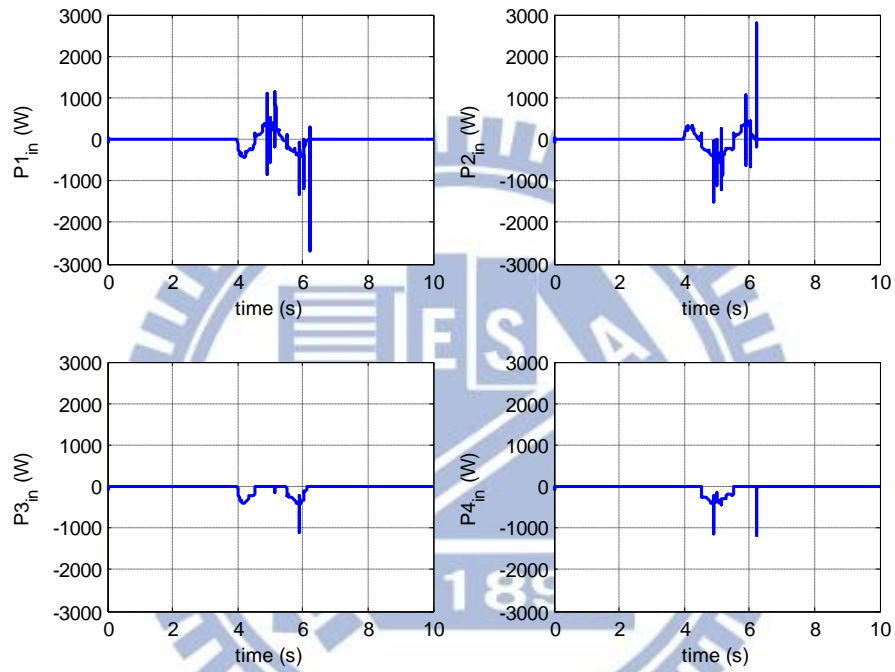


圖 5.11 模擬二之各輪胎輸入功率

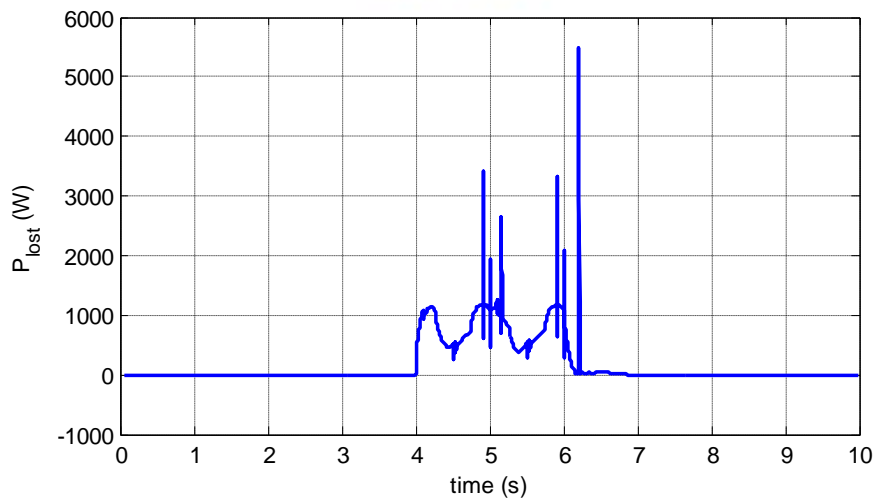


圖 5.12 模擬二之輪胎消耗功率總和

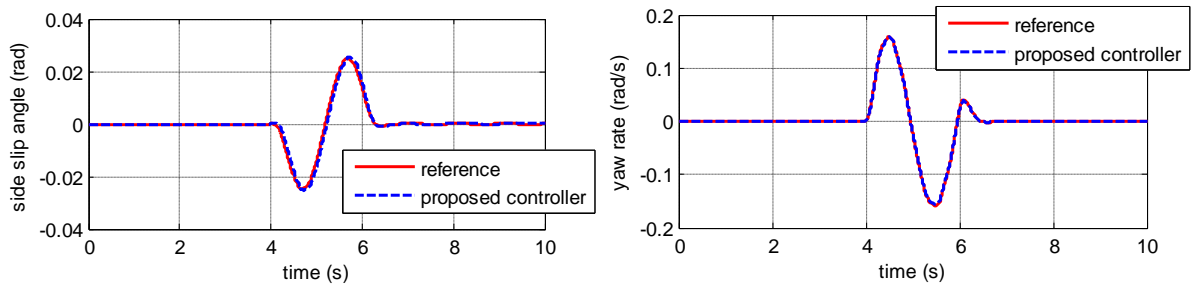


圖 5.13 模擬二之質心側滑角(左)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

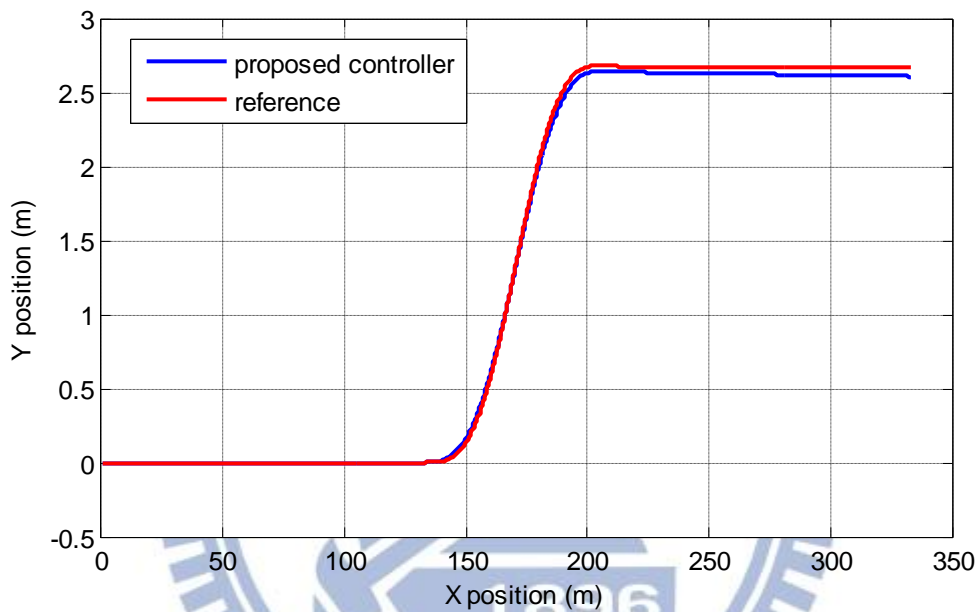


圖 5.14 模擬二之車輛於地表座標上所行駛的參考軌跡與車輛控制結果

5.3 相關控制器控制結果比較

相關控制器控制結果比較部分，基於所考慮的車輛模型為前輪轉向、前輪驅動，將與 Cho [16]、Nam[17]所各別提出來的控制策略和一般 H_{∞} 控制器作比較(分別簡稱為 Cho-UCC、N-DYC 與 H_{∞})。在 N-DYC 架構中使用前輪轉向角和直接橫擺力矩為控制輸入，但是沒有在節能方面做最佳化設計，所以輪胎能量損耗較大，加上該研究的直接橫擺力矩只能由後輪產生，當所需直接橫擺力矩較大時，後輪產生的摩擦力可能會超出摩擦力圓的限制，造成失控的情形；Cho-UCC 則進一步加入最佳化設計，希望將縱向速

度的變化最小化，其設計方法為先使用順滑模態來求出所需的橫擺力矩，再用最佳化求解出產生橫擺力矩所需的前輪補償轉向角和輪胎縱向力，此方法也與本研究較為相似，輪胎能量損耗也只有略多一些，但是因為其順滑平面 $s = (r - r_d) + \eta \cdot \beta$ (η 為權重參數，本模擬中設為 0.001) 有 yaw rate 和 side slip angle 需要控制，卻只有一個控制項(橫擺力矩)的關係，導致在跟隨參考軌跡方面較差一些，此外該方法假設所需補足的橫擺力矩和轉向方向同向，但實際上有可能不同向，當不同向時，有可能會發生輪胎摩擦力超出摩擦力圓的情形，導致控制結果不佳；另外考慮在本研究的上層控制器中僅使用一個固定的 H_∞ 控制器設計，用於比較上層控制器有無適應性之差異。這裡的 H_∞ 控制器是取適應性 H_∞ 控制器中的一組候選控制器，在跟隨參考軌跡方面，兩者的表現都想當優異，但在輪胎能量損耗的部分則表現較差，這證明了適應性 H_∞ 控制器與一般的 H_∞ 控制器比較，適應性 H_∞ 控制器的確可較固定的 H_∞ 控制器達到更好的效能。

模擬三為小角度 2 度轉向輸入，圖 5.16 為控制車輛橫擺角速度比較圖，可以看出本研究控制器與 H_∞ 控制器表現都相當好，Cho-UCC 和 N-DYC 都有些穩態誤差。圖 5.17 為控制車輛質心側滑角比較圖，同樣地本研究控制器和 H_∞ 控制器表現較好，Cho-UCC 和 N-DYC 都有不小的誤差。圖 5.18 為縱向速度比較圖，可以發現縱向速度的變化量並不大。圖 5.19 為控制車輛於地表座標上所行駛路徑質心軌跡比較圖，當中參考軌跡的縱向速度設為定速 33.34m/s，可發現本研究的控制器由於在橫擺角速度和側滑角跟隨的相當不錯，因此能緊密地跟隨參考軌跡。圖 5.20 為控制車輛前輪轉向角比較圖，觀察可以發現 N-DYC 沒有做最佳化設計，分配了過多的前輪轉向角，導致需要產生更多的直接橫擺力矩來控制車輛，Cho-UCC 和 H_∞ 則分配了略多的前輪轉向角，本研究由於分配適量的前輪轉向角，因此在節能上表現較佳。圖 5.21 和圖 5.22 相比較可發現所需的直接橫擺力矩和輪胎耗損功率確實有正比的關係。表 5.3 為各控制方法的輪胎能量耗損總和，可以發現本研究控制器的輪胎能量耗損總和相較於沒考慮最佳化的 N-DYC 和 H_∞ 控制器少了相當多；Cho-UCC 控制器則因有考量到最佳化，所以在輪胎能量耗損方面只有略多，但在跟隨參考軌跡方面表現較差。

模擬三：

車輛以初速 $V_x = 33.34\text{m/s}$ 直線前進，2 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 2 度的 J-turn 命令，路面狀況模擬在一般柏油路 ($\mu = 0.85$)。

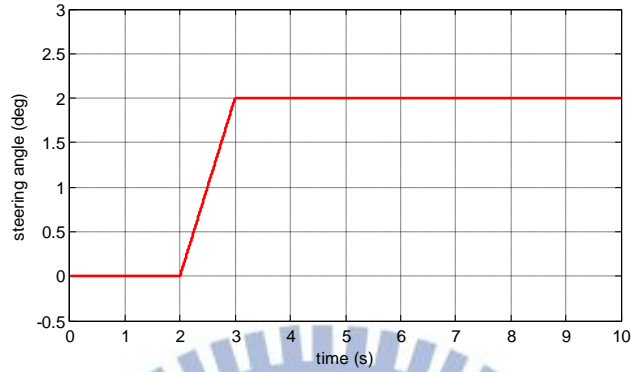


圖 5.15 模擬三之駕駛者轉向命令

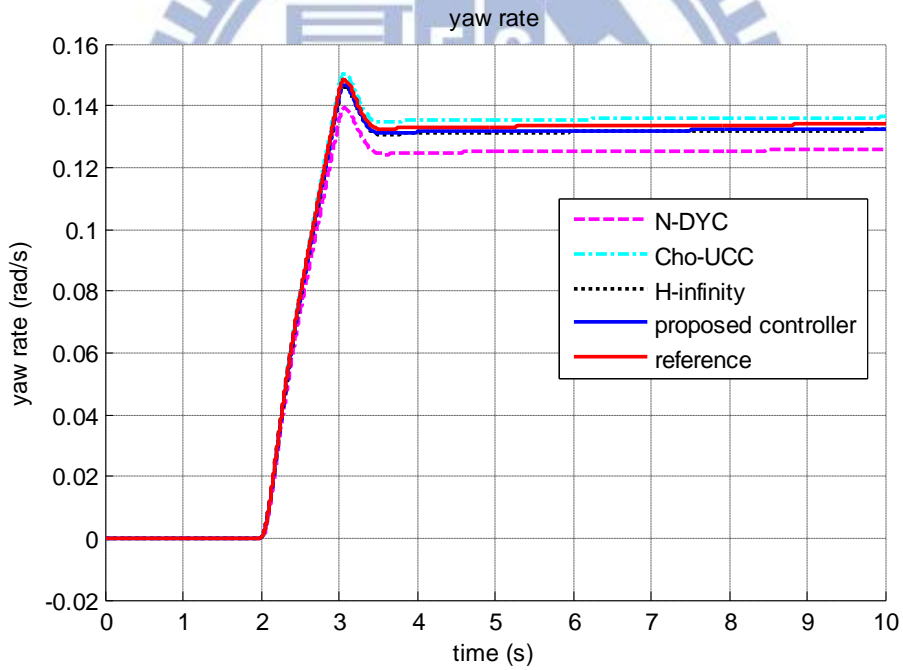


圖 5.16 模擬三之控制車輛橫擺角速度比較圖

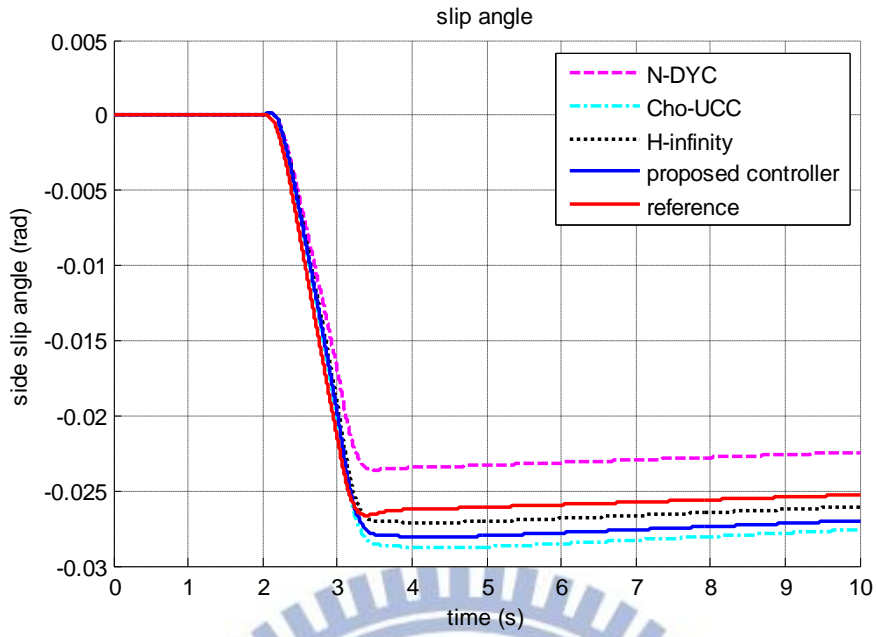


圖 5.17 模擬三之控制車輛質心側滑角比較圖

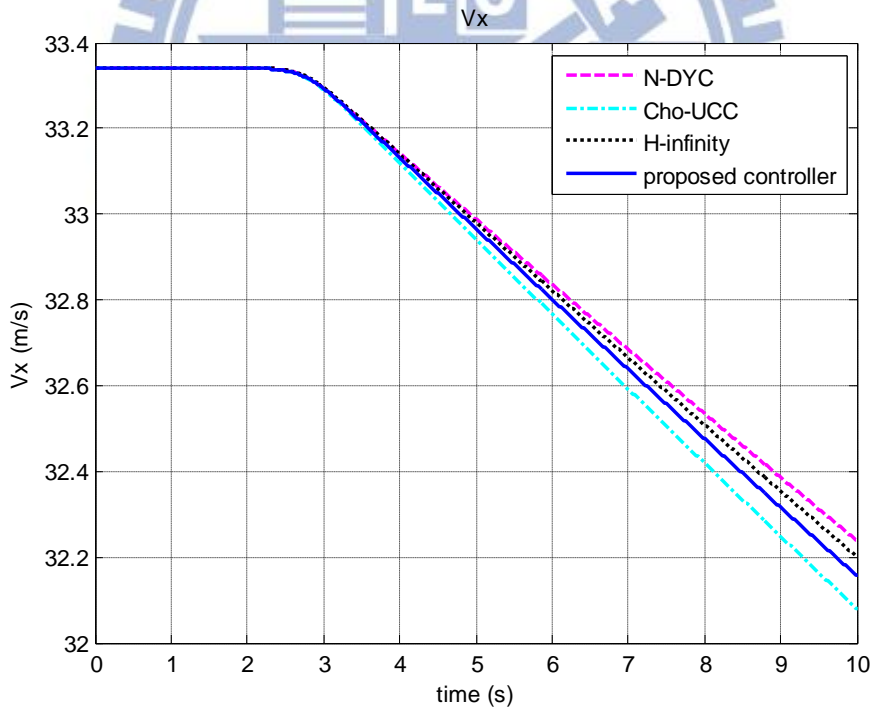


圖 5.18 模擬三之控制車輛縱向速度比較圖

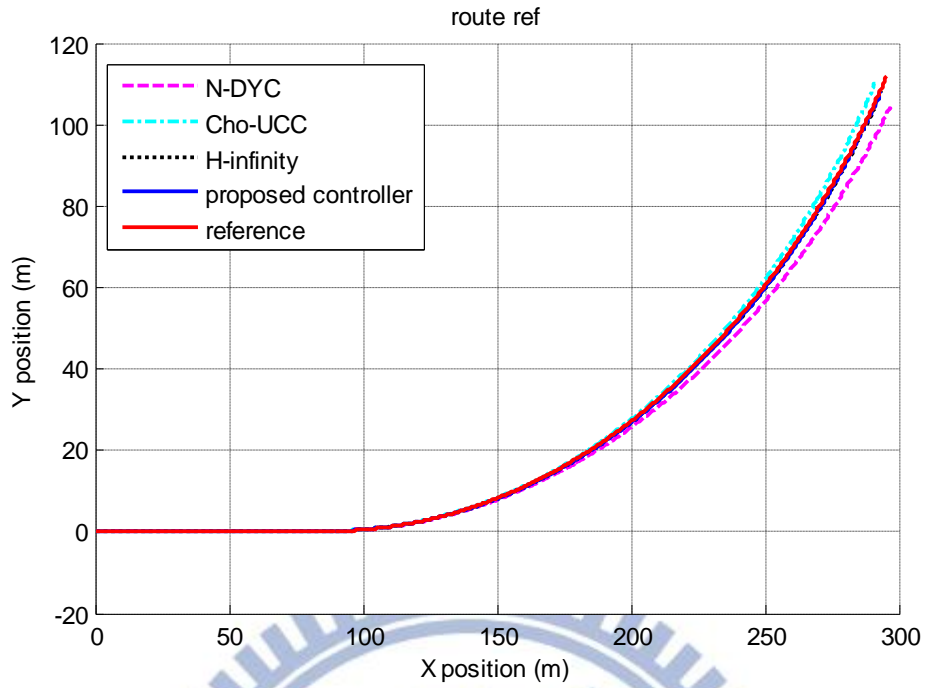


圖 5.19 模擬三之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖

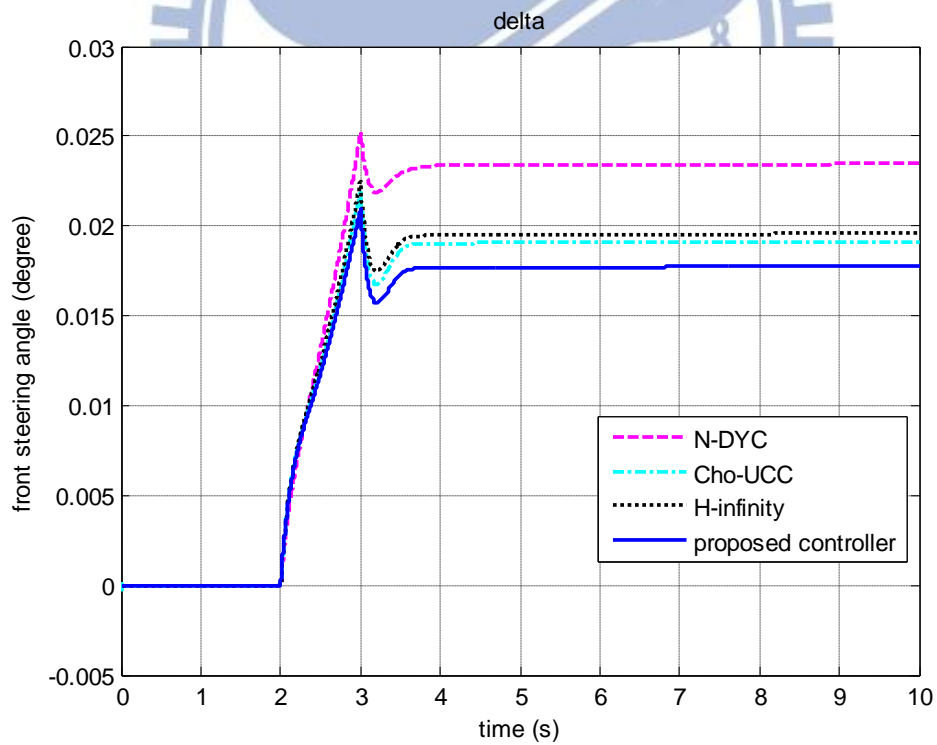


圖 5.20 模擬三之控制車輛前輪轉向角比較圖

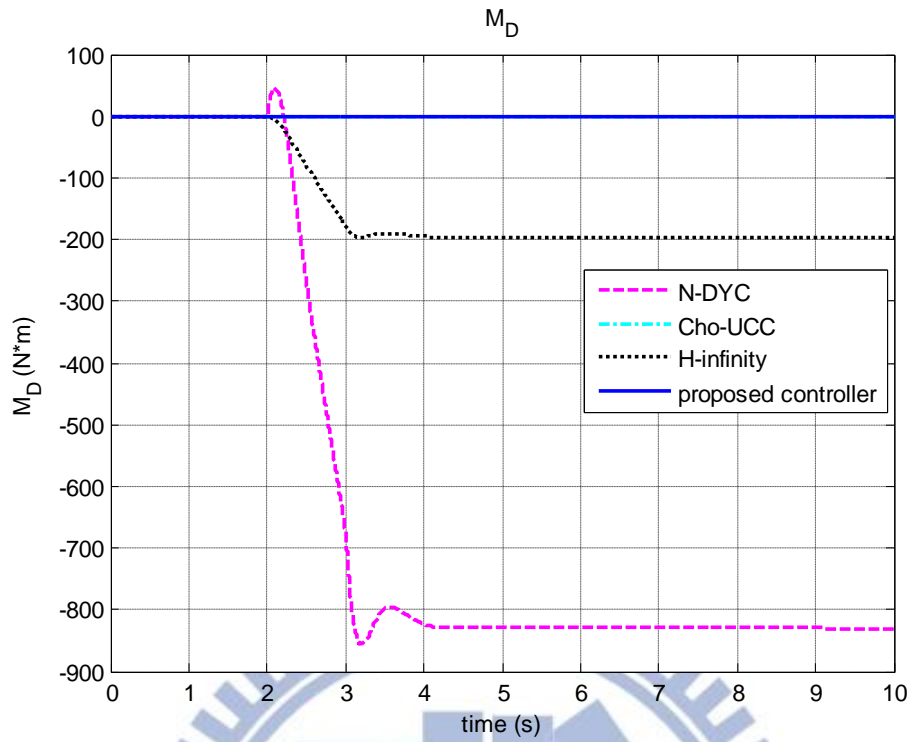


圖 5.21 模擬三之控制車輛直接橫擺力矩比較圖

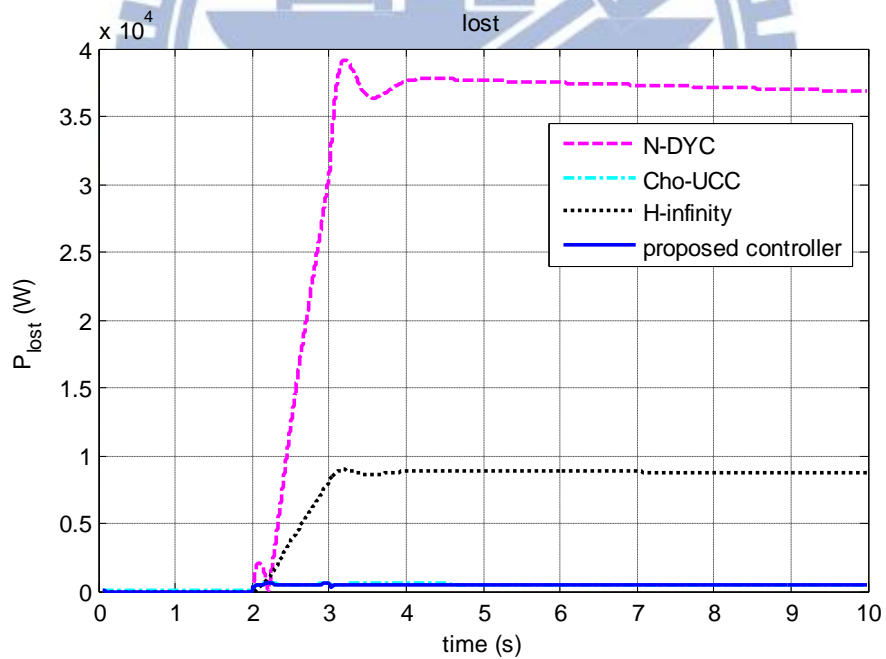


圖 5.22 模擬三之輪胎耗損功率總和比較圖

表 5.3 各控制器的輪胎能量耗損總和

	N-DYC	Cho-UCC	H_{∞}	Proposed controller
E_{lost} (J)	2.73×10^5	4.13×10^3	6.51×10^4	3.89×10^3

模擬四為模擬變換一個車道的駕駛情況，圖 5.24 為控制車輛橫擺角速度比較圖，可以看出本研究控制器與 H_{∞} 控制器表現都相當好，Cho-UCC 和 N-DYC 略差一些。圖 5.25 為控制車輛質心側滑角比較圖，同樣地本研究控制器、 H_{∞} 和 Cho-UCC 控制器表現較好，N-DYC 則明顯較差。圖 5.27 為控制車輛於地表座標上所行駛路徑質心軌跡比較圖，當中參考軌跡的縱向速度設為定速 33.34m/s，可發現本研究的控制器的軌跡相當接近參考軌跡。表 5.4 為各控制方法的輪胎能量耗損總和，仍是較 N-DYC 和 H_{∞} 控制器少了相當多，但和 Cho-UCC 控制器相比則略多，這是因為本控制器在上層控制器分配的前輪轉向角和直接橫擺力矩有些許的峰值，導致輪胎耗損功率也有些許的峰值產生，造成了輪胎能量耗損略大的結果。

模擬四：

車輛以初速 $V_x = 33.34\text{m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者進行車道變換，路面狀況模擬在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

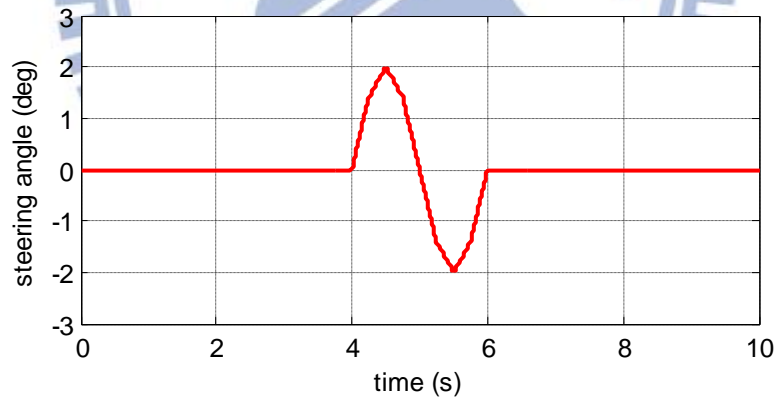


圖 5.23 模擬四之駕駛者轉向命令

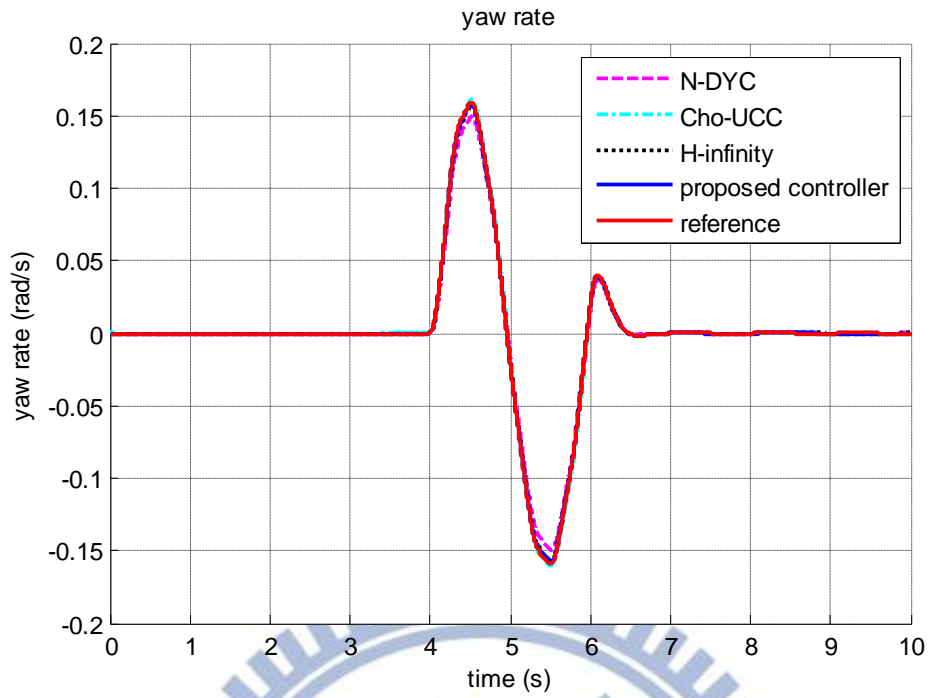


圖 5.24 模擬四之控制車輛橫擺角速度比較圖

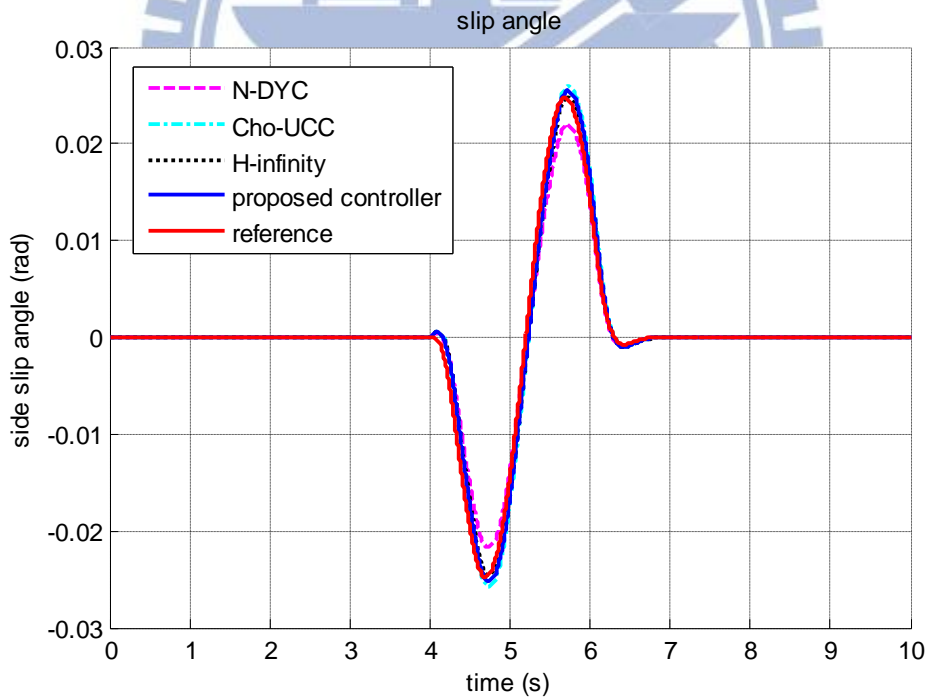


圖 5.25 模擬四之控制車輛質心側滑角比較圖

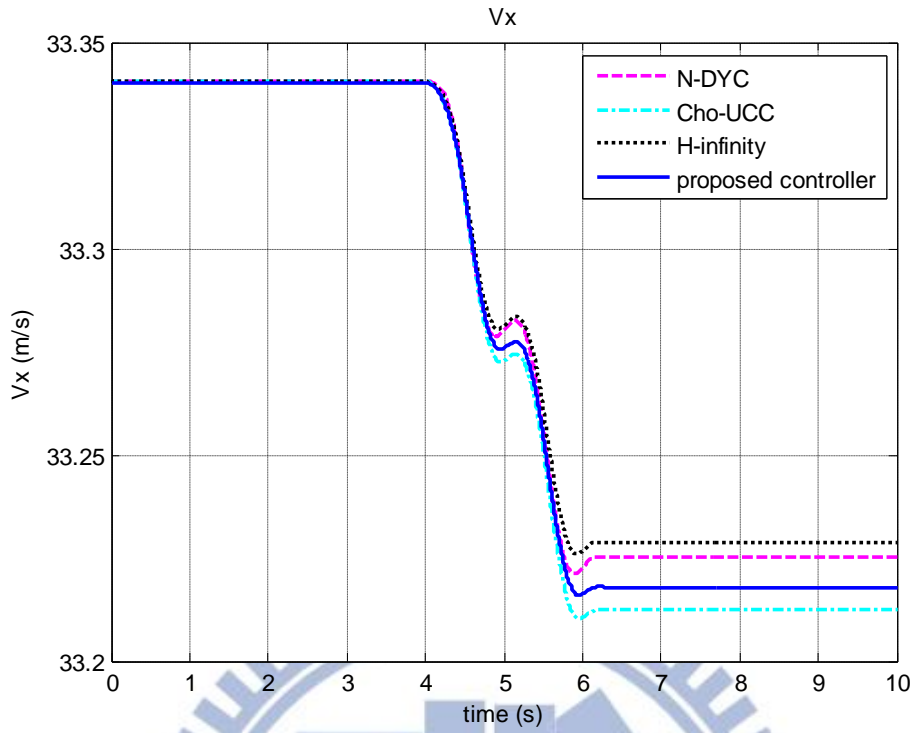


圖 5.26 模擬四之控制車輛縱向速度比較圖

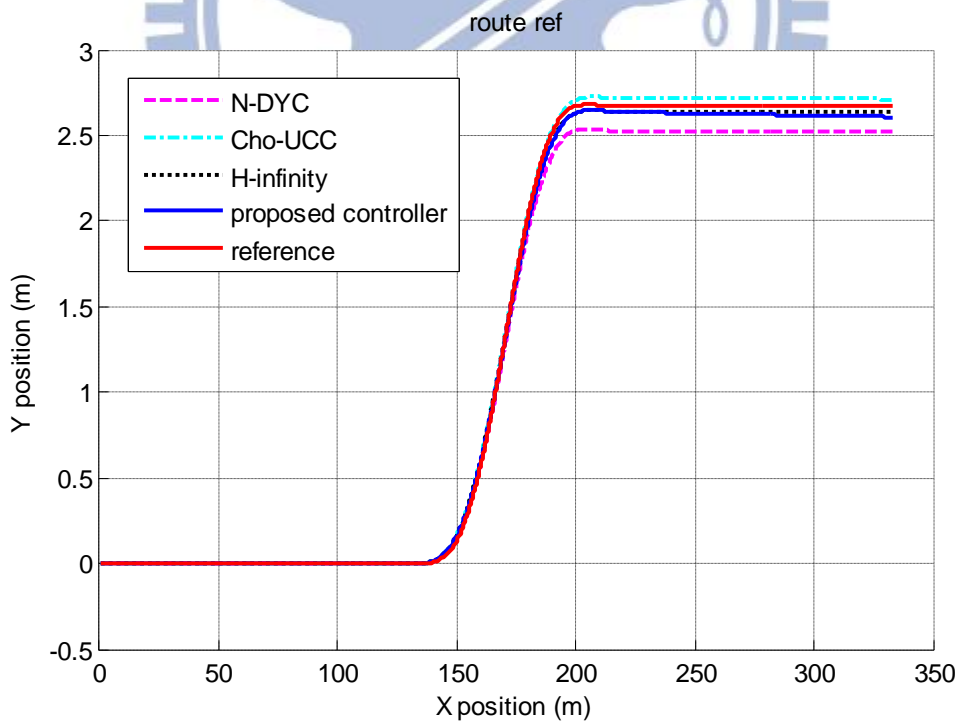


圖 5.27 模擬四之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖

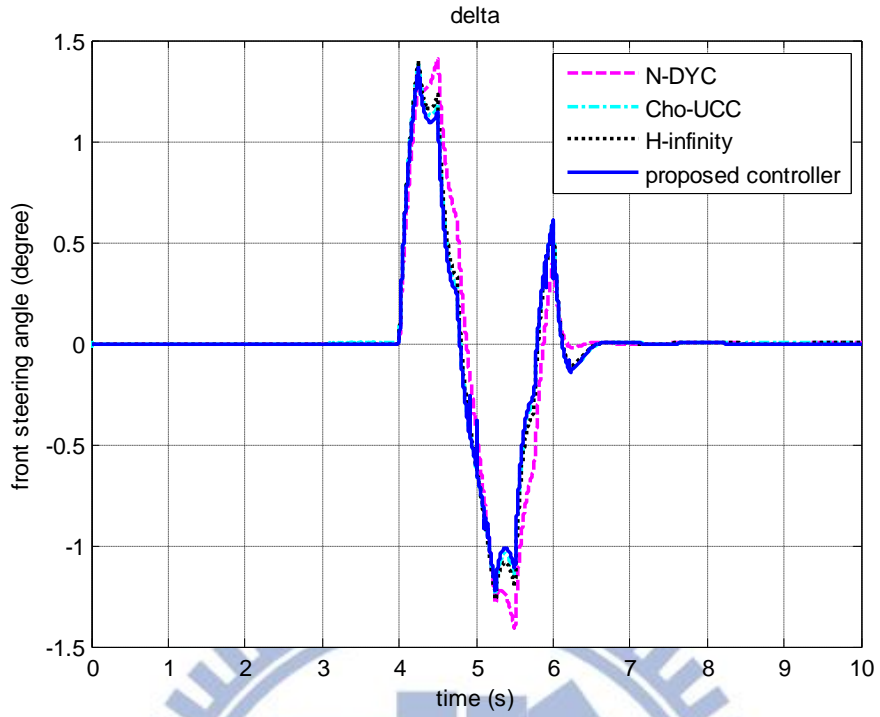


圖 5.28 模擬四之控制車輛前輪轉向角比較圖

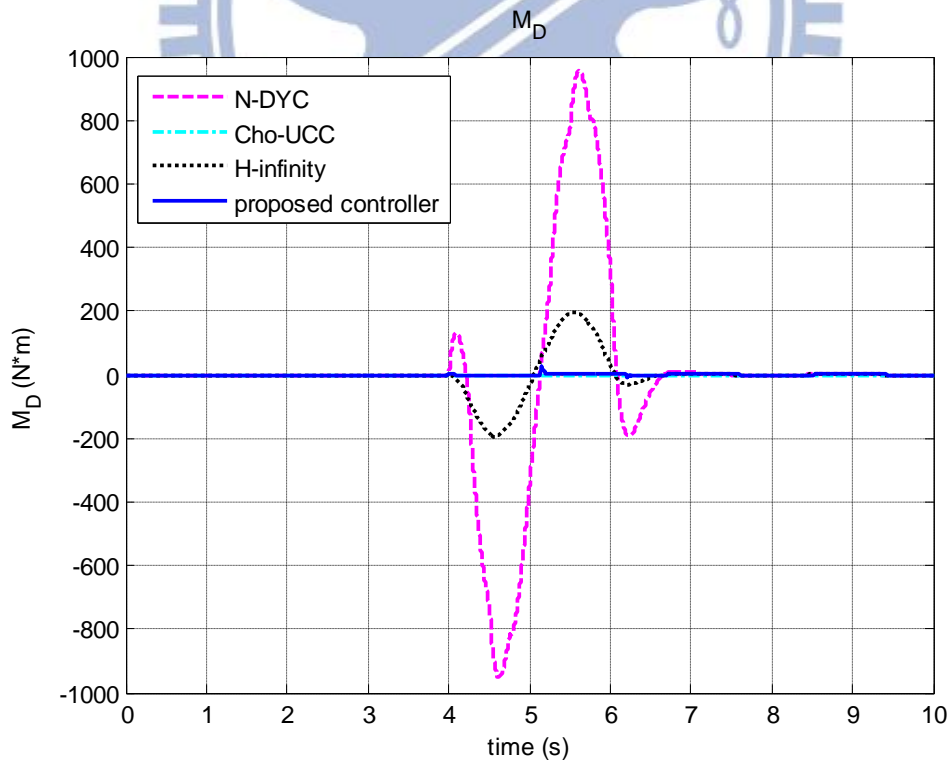


圖 5.29 模擬四之控制車輛直接橫擺力矩比較圖

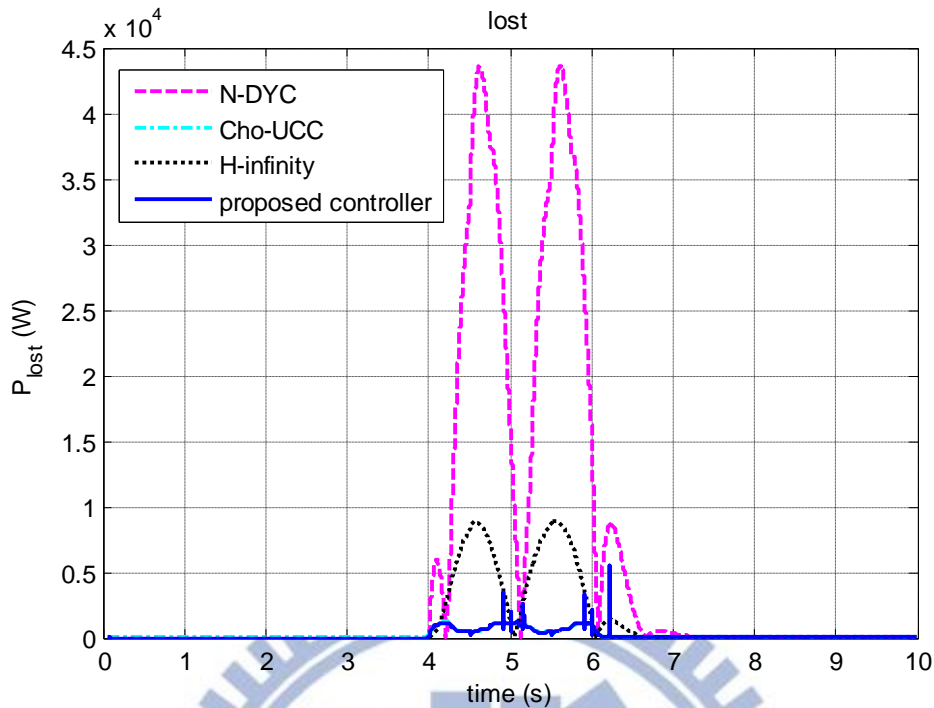


圖 5.30 模擬四之輪胎損耗功率總和比較圖

表 5.4 各控制器的輪胎能量耗損總和

	N-DYC	Cho-UCC	H_{∞}	Proposed controller
$E_{lost} (J)$	5.32×10^4	1.68×10^3	1.12×10^4	1.74×10^3

總結控制器模擬比較分析部分，在車輛的安全性部分，N-DYC 控制器、Cho-UCC 控制器、 H_{∞} 控制器與本研究控制器都有針對車輛側向動態(質心側滑角與橫擺角速度)作控制，並在模擬上反應其控制成效；在環保節能部分，本控制器設計的輪胎能量耗損總和較沒有最佳化設計的控制器的來的小。本研究控制器的優勢在於上層控制器加入了節能的概念，並在車輛動態控制中利用最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配使輪胎轉矩能以最少能量輸入來產生所需輪胎縱向力，且下層控制器考慮到輪胎不準確性做設計，整體模擬不僅在暫態響應、穩態響應與節能方面都表現相當優異。

第六章、結論與未來展望

6.1 結論

本研究針對前輪轉向、前輪驅動之車輛設計上、下層控制器控制架構，以最小的能量耗損來控制車輛側向與橫擺運動。上層控制器採用適應性設計，可隨駕駛情況做調整，目的是將車輛動態跟隨給定參考軌跡所需的控制輸入前輪轉向角與直接橫擺力矩做最佳化的分配，希望將直接橫擺力矩最小化，接著再透過最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配，並且將輪胎摩擦力圓與前輪驅動的限制考慮進去，將上層控制器所需之直接橫擺力矩以最小化輪胎縱向摩擦力平方和的最佳化方式分配成每個輪胎需產生的縱向摩擦力，之後再由下層輪胎縱向摩擦力回授控制，考慮輪胎的非線性特性，藉由控制輪胎力矩產生所需的輪胎縱向摩擦力。此外，本研究在最佳化 H_{∞} 控制器權重比例分配和最佳化輪胎縱向摩擦力分配演算法中得到的是一組解析解，使控制器得以應用於即時控制系統 (real-time control system)。

在第五章模擬了常見的駕駛情況，包括轉向與車道變換，模擬結果可以看出控制器在做轉向與車道變換時，對車輛的側向與橫擺運動都有不錯的控制且能量耗損相當小，上層控制器所計算出的直接橫擺力矩有做到最小化，最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配適當地分配至每個輪胎；下層縱向力控制器控制輪胎扭矩使輪胎與路面間產生所需之縱向力，因為最小化輪胎縱向摩擦力平方和的關係，各個輪胎扭矩的輸入功率都相當低，所以輪胎扭矩的總能量損耗也相當低。模擬中也有和統合底盤控制以及 H_{∞} 控制做比較，由比較結果可以看出本研究設計的控制器在不但側向與橫擺運動皆有比較好的控制結果，且輪胎扭矩的總能量損耗也相當低。

6.2 未來工作

未來工作分成以下幾點陳述：

一、加入再生式剎車回充剎車的能量，若能將剎車所消耗的能量回充，則可以進一步的減少能量損耗，而達成更節能省碳的設計。

二、摩擦力係數估測部分目前只有當已知常數運用，但對於實際車輛行駛於路面時，輪胎與路面間的摩擦力係數是會隨著路面狀態而有所改變的。未來若能加入摩擦力的係數估測部分，在最佳化輪胎與路面間縱向摩擦力分配若可以利用摩擦力係數估測結果的資訊，將可提升車輛的安全性。

三、在本研究中忽略了車身的側傾(Roll)與俯仰(Pitch)運動的影響，對於質心位置較高的休旅車，高速下或者大角度的轉向容易造成側翻，上層控制器可以考慮加入車身的側傾與俯仰對橫擺運動動態影響。

四、未來實驗驗證部分，初期會以建構單一個輪胎動態實驗平台(Quarter car model)與模擬軟體模擬的車輛動態整合成一個 Hardware-in-the-loop 的實驗環境，驗證下層控制器控制和節能的結果；之後進展到實車驗證，上層控制器會需要回授車輛的側向速度和橫擺角速度，以及需要估測車輛質心側滑角，就如第四章所提到的：車輛縱向與側向速度可以利用全球定位系統(GPS)來判斷質心的位置與移動速度；用陀螺儀來量測橫擺角速度；質心側滑角可借助文獻上已有的估測方法估測[24]；計算輪胎扭矩的輸入功率所需的輪胎扭矩和輪胎轉速可由扭矩感測器和轉速器獲得，所以這些都是控制器在實車驗證上會需要考慮如何獲得的資訊。

參考文獻

- [1] *FEDERAL REGISTER*, vol.76, no.231, part II, <http://www.gpo.gov/fdsys/pkg/FR-2011-12-01/pdf/2011-30358.pdf>, Dec. 2011.
- [2] Y. Hori, “Future Vehicle Driven by Electricity and Control—Research on Four-Wheel-Motored ‘UOT Electric March II’,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, no. 5, pp. 954-962, Oct. 2004.
- [3] P. He, and Y. Hori, “Experimental Evaluation of Dynamic Force Distribution Method for EV Motion Control,” in *IEEE Power Conversion Conf. PCC’04*, Nagoya, Japan, Apr. 2007, pp. 682-687.
- [4] P. He, and Y. Hori, “Improvement of EV Maneuverability and Safety Force Distribution with Disturbance Observer,” *WEVA Journal*, vol. 1, pp. 258-263, May 2007.
- [5] Y. Furukawa, N. Yuhara, S. Sano, H. Takeda and Y. Matsushita, “A Review of Four-Wheel Steering Studies from the Viewpoint of Vehicle Dynamics and Control,” *Vehicle System Dynamics*, 18, pp. 151-186, 1989.
- [6] J. Ackermann, “Robust Decoupling, Ideal Steering Dynamics and Yaw Stabilization of 4WS Cars,” *Automatica*, vol. 30, no. 11, pp.1761-1768, 1994.
- [7] V.Nikzad. S. and M. Naraghi, “Model Reference Tracking Control of A 4WS Vehicle Using Single and Dual Steering Strategies,” *SAE 2002 Transactions, Journal of Passenger Cars : Mechanical Systems*, no. 2002-01-1590, pp.1841-1851.
- [8] T. Pilutti, G. Ulsoy and D. Hrovat, “Vehicle steering intervention through differential braking,” *Journal of Dynamics Systems Measurement and Control Transactions of the ASME*, vol. 120, Issue:3, pp. 314-321, Sep. 1998.
- [9] Y. Shibahata, K. Shimada and T. Tomari, “Improvement of Vehicle Maneuverability by Direct Yaw Moment Control,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 22, pp. 456-481, 1993.

- [10] M. Abe, "Vehicle dynamics and control for improving handling and active safety: from four-wheel steering to direct yaw moment control," *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, vol. 213, Part K, pp. 87-101, June 1999.
- [11] P. Raksincharoensak, M. Nagai and M. Shino, "Lane keeping control strategy with direct yaw moment control input by considering dynamics of electric vehicle," *Vehicle System Dynamics*, vol. 44, pp. 192-201, 2006.
- [12] E. Esmailzadeh, A. Goodarzi, G.R. Vossoughi, "Optimal yaw moment control law for improved vehicle handling," *Mechatronics*, vol. 13, pp. 659-675, 2003.
- [13] M. Mirzaei, "A new strategy for minimum usage of external yaw moment in vehicle dynamic control system," *Transportation Research Part C*, vol. 18, pp. 213-224, 2010.
- [14] M.J. Yang et al. "A Cost-Effective Method of Electric Brake with Energy Regeneration for Electric Vehicles," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 6, June 2009.
- [15] T. Hwang, K. Park, et al. "Design of integrated chassis control logics for AFS and ESP." *International Journal of Automotive Technology*, vol.9(1),pp.17-27,2008
- [16] W. Cho, J. Yoon, J. Kim, J. Hur, et al. "An investigation into unified chassis control scheme for optimised vehicle stability and manoeuvrability." *Vehicle System Dynamics*, vol.46(Supplement 1),pp.87-105,2008.
- [17] K. Nam, H. Fujimoto, et al. "Lateral Stability Control of In-Wheel-Motor-Driven Electric Vehicles Based on Sideslip Angle Estimation Using Lateral Tire Force Sensors." *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol.61(5),pp.1972-1985,2012
- [18] E. Bakker, L. Nyborg and H.B. Pacejka, "Tyre Modeling for Use in Vehicle Dynamics Studies," SAE 870421., 1987.
- [19] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, New York: Cambridge University Press, 2004.
- [20] U. Kiencke and L. Nielsen, *Automotive Control Systems*, 2nd ed. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, ch. 10.

- [21] O. Mokhiamar and M. Abe, "How the four wheels should share force in an optimum cooperative chassis control," *Control Engineering Practice*, vol. 14, pp. 295-304, Mar. 2006.
- [22] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [23] Kemin Zhou, *ESSENTIALS OF ROBUST CONTROL*, New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [24] D.M. Bevly, J. Ryu and J.C. Gerdes, "Integrating INS Sensors With GPS Measurements for Continuous Estimation of Vehicle Sideslip, Roll, and Tire Cornering Stiffness," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol.7, pp.483-493, Dec. 2006.

