

# 國立交通大學

## 電控工程研究所

### 碩士論文

結合觀測器與微分器技術於機動目標加速度估  
測



Acceleration Estimation of Maneuvering Targets via the  
Combination of Observer Design and Differentiator  
Techniques

研 究 生：呂鈞鈞

指導教授：梁耀文 博士

中 華 民 國 一 百 零 一 年 七 月

結合觀測器與微分器技術於機動目標加速度估  
測

**Acceleration Estimation of Maneuvering Targets via  
the Combination of Observer Design and  
Differentiator Techniques**

研 究 生：呂鈞鈞

Student：Chun-Chun Lu

指導教授：梁耀文 博士

Advisor：Dr. Yew-Wen Liang



A Thesis

Submitted to Institute of Electrical Control Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master

In

Electrical and Control Engineering

July 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 百 零 一 年 七 月

# 結合觀測器與微分器技術於機動目標加速度估測

學生：呂鈞鈞

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電控工程研究所



目標機動是影響導引準確度的關鍵因素之一，本論文利用擴張狀態觀測器與 Super-Twisting 演算法設計觀測器等方式，實現穩定而精確的目標跟蹤以供後續設計導引律時使用。我們針對實際導引系統中尋標器迴路之量測雜訊干擾，設計濾波器減弱量測雜訊。此外，本論文基於擴張狀態觀測器與 Super-Twisting 演算法等方式來設計微分器，實現相位超前用以彌補濾波所導致之量測輸出的相位損失。模擬結果顯示所提之結合濾波器與微分器之補償機制能有效降低輸出量測雜訊對估計結果的影響，說明了此結合技術之有效性。另一方面，本論文基於 Super-Twisting 演算法，利用其收斂時間估計來選取最佳化參數，所獲得的結果提供觀測器可以快速跟蹤至目標訊號。

# **Acceleration Estimation of Maneuvering Targets via the Combination of Observer Design and Differentiator Techniques**

Student : Chun-Chun Lu

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Institute of Electrical and Control Engineering  
National Chiao Tung University



Target maneuvering is one of the key factors that affects guidance accuracy. This paper applies an extended state observer and a Super-Twisting algorithm observer (STO) to achieve a stable and precise target tracking for the follow-up guidance law design. For the situation that the measurement noise of seeker in the practical guidance system is large, a linear filter is designed to attenuate the measurement noise. Besides, a differentiator which is composed of extended state observer and sliding mode technique is also presented to achieve the phase advance to cover the phase lag caused by the filter. Moreover, a methodology to select a set of better parameters for STO is presented. Simulation results demonstrate the benefits of the proposed scheme.

## 誌 謝

首先要感謝我的指導教授梁耀文博士，在兩年的研究生活中，老師紮實的專業知識以及嚴謹的研究態度，使我受益良多，更重要的是，老師慈悲心更讓我在待人處事各方面，獲得許多的體悟，以及老師對學生的關心讓我感到溫暖，由衷地感謝老師。接著要感謝我的口試委員廖德誠博士、陳科祥博士和陳俊宏博士給予寶貴的建議與指導，使得本論文更加完整且嚴謹。

接著要感謝實驗室學長學弟們，徐勝均學長、林立岡學長、陳智強學長以及鄭旭志學長及吳榮人及徐君豪，謝謝你們分享過來人寶貴的研究經驗，使得我在研究過程能夠更加順遂，並在我遇到任何難題時總是提供專業的意見以及實質的幫助。再來是實驗室的同窗，仰靚以及弘儒，兩年的研究生活我們總是能夠一起努力，互相鼓勵，謝謝你們。再來是學弟們，逸庭、詠鈞、俊宇以及國欽，謝謝你們在我苦思時，適時的給予我建議以及協助，使我能夠順利的突破難題。以及我的好友豐池、維德、奕君、郁瑄，謝謝你們給予我力量，繼續的向前邁進，沒有你們的鼓勵與幫忙，我的論文不可能順利完成。

最後要感謝我的家人，外公，爸爸以及媽媽，兄姐與弟弟，以及阿姨與姨丈和表姐及表弟妹們。謝謝你們始終全力支持我拿到各階段的學位，沒有你們，沒有現在的我，你們總是給我最大的鼓勵，讓我可以毫無後顧之憂，並在學業上努力地勇往直前，謝謝你們，你們辛苦了！在此，僅將這論文獻給你們。

呂鈞鈞 于新竹交大

101 年 7 月

# 目 錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
誌 謝 .....	iii
目 錄 .....	iv
圖 目 錄 .....	vi
表 目 錄 .....	viii
第 1 章 簡介 .....	1
1.1 研究背景與動機 .....	1
1.2 論文架構 .....	3
第 2 章 預備知識 .....	4
2.1 擴張狀態觀測器 .....	4
2.2 Super-Twisting演算法 .....	12
2.3 飛彈與目標相對運動模型 .....	15
第 3 章 機動目標加速度估測之應用 .....	18
3.1 應用擴張狀態觀測器於目標加速度估測 .....	19
3.2 應用Super-Twisting演算法於目標加速度估測 .....	22
3.3 機動目標加速度之模擬 .....	25
3.3.1 系統模擬設計與建立simulink .....	25
3.3.2 模擬結果 .....	26
第 4 章 考慮真實導引系統存在輸出量測雜訊之機動目標加速度估測 .....	38
4.1 問題描述 .....	39
4.2 尋標器雜訊放大效應 .....	41
4.3 尋標器雜訊干擾與補償 .....	44
4.3.1 雜訊濾除 .....	44

4.3.2 相位補償.....	45
4.4 含有量測雜訊之目標加速度估測模擬.....	55
第 5 章 結論與未來研究方向 .....	61
5.1 結論.....	61
5.2 未來研究方向.....	61
參考文獻 .....	62



# 圖目錄

圖 2.1	非線性函數示意圖 .....	5
圖 2.2	$(e_1, e_2)$ 相平面分區圖 .....	6
圖 2.3	不等式(2.16)成立時的情況 .....	9
圖 2.4	切跳現象示意圖 .....	12
圖 2.5	Super-Twisting之相軌跡(phase trajectory) .....	13
圖 2.6	縱向平面飛彈目標相對運動關係 .....	16
圖 3.1	$r_o$ 最佳選擇示意圖 .....	20
圖 3.2	$V^{1/2}(t)$ 沿著系統軌跡對時間的響應 .....	24
圖 3.3	未考慮輸出雜訊的導引系統方塊圖 .....	25
圖 3.4	目標為正弦波時三種觀測器的狀態誤差時間響應比較圖 .....	32
圖 3.5	當目標為正弦波時Super-Twisting控制律的時間響應圖 .....	32
圖 3.6	正弦波之目標訊號與ESO之估測結果 .....	33
圖 3.7	正弦波之目標訊號與STO之估測結果 .....	33
圖 3.8	正弦波之目標訊號與OPTIMAL之估測結果 .....	34
圖 3.9	目標為正弦波時三種觀測器之觀測誤差的時間響應比較圖 .....	34
圖 3.10	目標為步階時三種觀測器的狀態誤差時間響應比較圖 .....	35
圖 3.11	當目標為步階時Super-Twisting控制律的時間響應圖 .....	35
圖 3.12	方波之目標訊號與ESO之估測結果 .....	36
圖 3.13	方波之目標訊號與STO之估測結果 .....	36
圖 3.14	方波之目標訊號與OPTIMAL之估測結果 .....	37
圖 3.15	目標為步階時三種觀測器之觀測誤差的時間響應比較圖 .....	37
圖 4.1	尋標器模式示意圖 .....	39
圖 4.2	考慮輸出雜訊的導引系統方塊圖 .....	40
圖 4.3	彈目相對距離與量測雜訊之關係 .....	40



圖 4.4	尋標器追蹤迴路方塊圖.....	41
圖 4.5	利用線性濾波器濾除輸出雜訊之響應圖.....	44
圖 4.6	相位補償方塊圖.....	45
圖 4.7	利用微分器跟蹤 $f_1$ 之微分訊號之比較圖.....	46
圖 4.8	利用微分器跟蹤 $f_2$ 之微分訊號之比較圖.....	47
圖 4.9	利用微分器跟蹤 $f_3$ 之微分訊號之比較圖.....	47
圖 4.10	基於ESO之頻率響應圖.....	49
圖 4.12	衍生 STO 系統收斂軌跡.....	50
圖 4.13	基於 STO 之頻率響應圖.....	51
圖 4.13	基於STO之頻率響應圖.....	51
圖 4.14	結合ESO與STO實現帶通濾波.....	52
圖 4.15	結合ESO與STO提取中頻訊號之響應圖.....	52
圖 4.16	結合ESO與STO提取輸入及其微分訊號之方塊圖.....	53
圖 4.17	結合ESO與STO補償相位損失.....	54
圖 4.18	利用ESO補償相位損失之比較圖.....	54
圖 4.19	存在量測雜訊時正弦波之目標訊號與基於ESO之估測結果.....	57
圖 4.20	存在量測雜訊時正弦波之目標訊號與STO之估測結果.....	57
圖 4.21	存在量測雜訊時正弦波之目標訊號與OPTIMAL之估測結果.....	58
圖 4.22	存在量測雜訊且目標為正弦波三種觀測器之觀測誤差時間響應比較圖.....	58
圖 4.23	存在量測雜訊時方波之目標訊號與ESO之估測結果.....	59
圖 4.24	存在量測雜訊時方波之目標訊號與STO之估測結果.....	59
圖 4.25	存在量測雜訊時方波之目標訊號與OPTIMAL之估測結果.....	60
圖 4.26	存在量測雜訊且目標為方波三種觀測器之觀測誤差時間響應比較圖.....	60

## 表 目 錄

表 3.1 目標為正弦波時三種觀測器的狀態與間誤差收斂狀況比較表.....	28
表 3.2 目標為正弦波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表 .....	29
表 3.3 目標為方波時三種觀測器的狀態與間誤差收斂狀況比較表.....	29
表 3.4 目標為方波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表 .....	30
表 4.1 雜訊之特性 .....	43
表 4.2 擴張狀態觀測器之參數與菲波納奇數列 .....	48
表 4.3 目標為正弦波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表 .....	55
表 4.4 目標為方波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表 .....	56



# 第 1 章

## 簡介

### 1.1 研究背景與動機

目標機動是影響導引精度的關鍵因素之一，提高目標加速度的估測精度，實現穩定、可靠而精確的目標跟蹤，具有十分重要的意義。在目標估測的研究領域中，國內外學者已發展出許多純熟的估測方式[1]，例如Lee與Wang等人利用擴展型卡曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)於彈道估測[2]-[3]，Farinac等人針對再入段(re-entry)彈道目標追蹤介紹了四種非線性濾波器[4]，Young與Liaw等人利用卡曼濾波器(Kalman Filter)與類神經網路(Neural network)辨識飛彈的軌跡[5]，然而上述進行目標軌跡估測時，計算上需迭代，且卡曼濾波器需要精確知道系統模型與雜訊之統計特性。有鑑於此，我們探討不需要精確的機動目標模型與系統雜訊之統計特性的方式來建構觀測器。

本論文使用的方法有 i) 擴張狀態觀測器(Extended State Observer)及 ii) 滑模觀測器(Sliding Mode Observer)。擴張狀態觀測器是由韓京清先生所提出[6] -[8]，其基本概念是將系統模型不確定性(model uncertainties)和外在于擾(external disturbances)擴張成一個新的狀態，再利用特定的非線性函數做為回授(feedback)，選取適當的觀測器參數從而有效地估測模型不確定性和外在于擾。如果在控制律中補償擴張狀態的估計值，就有機會實現非線性不確定系統(uncertain nonlinear systems)的回授線性化(feedback linearization)，此即所謂的自抗擾控制技術(Active Disturbance Rejection Control, ADRC)。另一方面，由於滑模控制具有反應快速和對系統之不確定性和外界干擾具有極佳的抑制性能[12]-[13]，近年來已經被廣泛地應用在控制理論和相關實務上。Utkin首先利用滑模控制(Sliding Mode Control, SMC)的概念，採用了不連續的切換項，應用在觀測器的設計中[9]。Slotine

等人針對非線性系統設計了非線性滑模觀測器[10]。Walcott和Zak等人基於Lyapunov函數的方法設計滑模觀測器[11]，並論證其狀態觀測誤差在滿足一定的假設情況下是漸進收斂的。為了克服傳統滑模控制切跳(chattering)嚴重的問題，Levant首先提出高階順滑模態(High Order Sliding Mode, HOSM)的概念[14]，將不連續的控制輸入作用在順滑模的高階導數上，並在文獻[15]中有系統地提出幾種二階滑模控制演算法。Levant於1998年提出基於Super-Twisting演算法的二階滑模微分器[31]，極大促進高階順滑模態理論及應用上的發展。高階順滑模態控制不僅保有滑模控制的優點，同時還能夠解決滑模控制的抖振現象，並有擁有較高的控制精度。因此，在本論文中，我們採用高階順滑模技術之觀念，並利用Super-Twisting演算法來進行機動目標之估測。最後模擬驗證上述方法之有效性。

另外一方面，現有的觀測器雖然可以處理不確定性等問題，但通常都沒有考慮量測雜訊(measurement noise)干擾對系統輸出的影響，然而這在實際控制問題中是普遍存在的。一般做法是於控制迴路中使用濾波器對系統輸出進行濾波處理，以去除雜訊之干擾。但濾波後訊號的幅值(amplitude)與相位(phase)會與系統的真实輸出產生較大的差異，若直接以此輸出來建構觀測器，勢必造成較大的估測誤差(estimation error)。有鑑於此，本論文首先利用一階線性濾波器對量測雜訊進行濾波，然而濾波後導致的系統相位損失，我們進一步利用微分器(differentiator)[31]提取延遲之訊號及其微分訊號設計補償機制彌補相位損失，同時我們對微分器之濾波性能進行分析，考察微分器對正弦訊號的頻率特性，選取適當參數從而得到精確的目標加速度估計值以供後續設計導引律時使用。

## 1.2 論文架構

本論文的第二章中，我們將會介紹擴張狀態觀測器與 Super-Twisting 演算法理論，應用 Lyapunov 函數的方法證明系統之穩定性。第三章中，首先介紹彈目相對運動模型，探討導引系統中機動目標加速度估測之問題，並給出二階擴張狀態觀測器的誤差分析，及 Super-Twisting 收斂時間的最佳估計分析，最後比較擴張狀態觀測器與基於 Super-Twisting 演算法這兩種觀測方式的估測精度與收斂速度。在第四章中，我們將進一步考慮實際導引系統中尋標器雜訊模式所造成系統量測輸出一視線變化率干擾的問題。並分析微分器對輸入訊號的頻率特性藉以對輸出量測雜訊進行濾波，並提取其微分訊號用以補償濾波器造成的相位損失，從而實現目標加速度估測。最後，第五章我們提出結論與未來研究方向。



## 第 2 章

### 預備知識

#### 2.1 擴張狀態觀測器

擴張狀態觀測器的基本概念是將系統模型不確定性和外在干擾擴張成一個新的狀態，再利用特定的非線性函數做為回授，選取適當的觀測器參數從而得到系統不確定對象的估測值。如果在控制律中補償擴張狀態的估計值，就有機會實現非線性不確定系統的回授線性化(feedback linearization)，此即所謂的自抗擾控制技術(Active Disturbance Rejection Control, ADRC)[6]。擴張狀態觀測器只需要系統的控制輸入以及系統的量測輸出訊息，不需要不確定對象的資訊，即可有效地估測系統模型不確定性和外在干擾。

考慮如下一階系統

$$\dot{x}_1 = d + bu \quad (2.1)$$

其中  $x_1 \in \mathbb{R}^1$  為狀態變數， $b \in \mathbb{R}^1$  為已知參數， $u \in \mathbb{R}^1$  為控制輸入， $d \in \mathbb{R}^1$  為模型不確定性(model uncertainties)或外在干擾(external disturbances)。控制目標為設計觀測器跟蹤未知函數  $d$ 。設計擴張狀態觀測器基本概念就是將未知函數  $d$  擴張成一個新的狀態  $x_2$ ，將系統(2.1)擴張成新的系統如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + bu \\ \dot{x}_2 = -\mu \end{cases} \quad (2.2)$$

其中  $-\mu$  為未知函數  $x_2$  對時間  $t$  的導函數並且滿足假設 2.1。

**假設 2.1：**

未知函數  $d$  對時間  $t$  的導函數為有界的(bounded)，即  $|\dot{d}| = |-\mu| \leq \sigma, \forall t \geq 0$ 。



接下來我們針對系統(2.2)設計觀測器如下，並且令  $e_1$  為觀測器中第一個狀態  $z_1$  與系統(2.2)狀態  $x_1$  之誤差(error)。

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \beta_1 e_1 + bu \\ \dot{z}_2 = -\beta_2 fal(e_1, \alpha, \delta) \\ e_1 = z_1 - x_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\alpha$ 、 $\delta$  為擴張狀態觀測器參數且  $0 < \alpha < 1$ ， $fal(e_1, \alpha, \delta)$  函數為非線性函數定義如下，其示意圖如圖 2.1 所示

$$fal(e_1) = \begin{cases} |e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1), & |e_1| > \delta \\ \frac{e_1}{\delta^{1-\alpha}}, & |e_1| \leq \delta \end{cases} \quad (2.4)$$

其中  $\operatorname{sgn}(e_1)$  函數定義如下

$$\operatorname{sgn}(e_1) = \begin{cases} -1, & e_1 < 0 \\ 0, & e_1 = 0 \\ 1, & e_1 > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

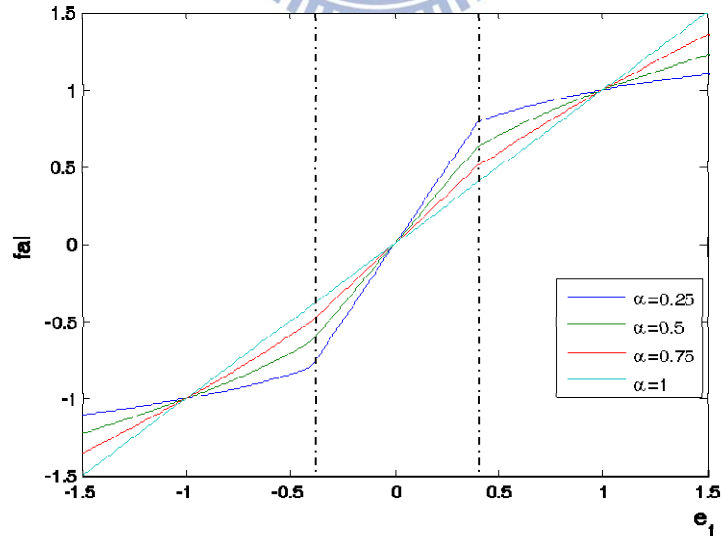


圖 2.1 非線性 fal 函數示意圖

我們知道當  $0 < \alpha < 1$ ，指數函數  $|e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1)$  在原點附近的變化非常大，因此 fal 函數以參數  $\delta = 0.4$  區分線性與非線性區(參照圖 2.1)，使其在原點附近的變化較

緩，用以避免急遽變化給系統帶來衝擊。同時依據圖 2.1 可得知參數  $\alpha$  越大 fal 函數從線性區到非線性區的過渡過程越為平穩，且當誤差之絕對值小於 1 時，fal 增益之絕對值越小，反之亦然。

考察 fal 函數的意義後，接下來我們針對觀測誤差進行分析。根據(2.2)式與(2.3)式，我們可以得到觀測器與系統的誤差動態為

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \beta_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -\beta_2 \text{fal}(e_1, \alpha, \delta) + \mu \\ e_i = z_i - x_i, i=1,2 \end{cases} \quad (2.6)$$

接下來我們要對誤差系統進行穩定性分析。首先我們把  $(e_1, e_2)$  平面分成五個區域，分別為  $G_0 \sim G_4$ ，如圖 2.2 所示。

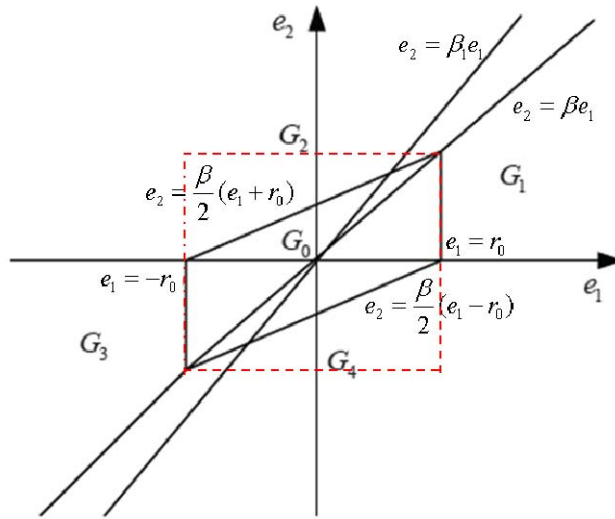


圖 2.2  $(e_1, e_2)$  相平面分區圖

其中  $G_i$  定義如下

$$\begin{aligned} G_0 &= \left\{ (e_1, e_2) \mid |e_1| < r_0, \frac{\beta}{2}(e_1 - r_0) \leq e_2 \leq \frac{\beta}{2}(e_1 + r_0) \right\} \\ G_1 &= \left\{ (e_1, e_2) \mid e_1 > r_0, 0 \leq e_2 \leq \beta e_1 \right\} \\ G_2 &= \left\{ (e_1, e_2) \mid e_2 > 0, e_2 \geq \frac{\beta}{2}(e_1 + r_0), e_2 \geq \beta e_1 \right\} \\ G_3 &= \left\{ (e_1, e_2) \mid e_1 < -r_0, 0 \geq e_2 \geq \beta e_1 \right\} \\ G_4 &= \left\{ (e_1, e_2) \mid e_2 < 0, e_2 \leq \frac{\beta}{2}(e_1 - r_0), e_2 \leq \beta e_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$



接下來針對  $G_1 \sim G_4$  構造如下之多李雅普諾夫函數(multiple Lyapunov function candidate)如下

$$V = \begin{cases} \frac{\beta}{2}(e_1 - r_0) & , (e_1, e_2) \in G_1 \\ e_2 - \frac{\beta}{2}(e_1 + r_0) & , (e_1, e_2) \in G_2 \\ -\frac{\beta}{2}(e_1 + r_0) & , (e_1, e_2) \in G_3 \\ -e_2 + \frac{\beta}{2}(e_1 - r_0) & , (e_1, e_2) \in G_4 \end{cases} \quad (2.8)$$

根據(2.8)式我們容易驗證  $V$  在  $G_0$  之外為正定函數且全域(global)連續，即  $V$  也在不同區域交界處都連續，接下來針對誤差系統(2.6)提出下列定理。隨後我們利用(2.8)式所構造的  $V$  來證明如下定理 2.1。另外，為了幫助討論，我們引入引理 2.1。

**定理 2.1：**

誤差系統(2.6)式在假設 2.1 成立的情況下，若  $V$  沿系統軌跡對時間的導數在  $G_0$  之外均小於零，則系統(2.6)最終收斂至區域  $G_0$ 。



**引理 2.1：** [24]

考慮切換系統(switched system)如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ， $i = \{1, 2, \dots, N\}$ 。若滿足如下之條件，則系統(2.9)為Lyapunov穩定 (stable in the sense of Lyapunov)。

(i) 對於  $G_i$ ， $i = \{1, 2, \dots, N\}$ ， $\bigcup G_i = \mathbb{R}^n$ 。

(ii) 每一個  $\mathbf{f}_i$  定義在區域  $G_i$  上。

(iii) 對於系統(2.9)，存在Lyapunov function  $V_i$ ，其定義在區域  $G_i$  上，也就是說

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in G_i \quad (2.10)$$

(iv) 對所有可能的切換序列(switching sequences)，假設系統狀態進入區域 $G_i$ 之時間序列為 $\{t_j^i\}, j \in \mathbb{N}$ ，即 $t_j^i$ 為系統狀態在第 $j$ 次進入 $G_i$ 之時間，當 $t_{j_1}^i < t_{j_2}^i$ ，

都滿足

$$V_i(t_{j_2}^i) < V_i(t_{j_1}^i) \quad (2.11)$$

若(2.10)與(2.11)式中的小於“ $<$ ”改為小於等於“ $\leq$ ”，則系統(2.9)為漸進穩定。

接著繼續完成證明，首先根據(2.8)式可得到

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} \frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1) & , (e_1, e_2) \in G_1 \\ -\frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1) + \mu - \beta_2 |e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1) & , (e_1, e_2) \in G_2 \\ -\frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1) & , (e_1, e_2) \in G_3 \\ -\frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1) - \mu + \beta_2 |e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1) & , (e_1, e_2) \in G_4 \end{cases} \quad (2.12)$$

為方便起見，我們在區域 $G_i$ 內以符號 $V_i$ 來表示 $V$ 。

• 在區域 $G_1$ 中，由於 $e_1 > 0$ 且 $e_2 \leq \beta e_1$ ，我們將 $V_1$ 對時間取導數可得到

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1) = \frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1 + \beta e_1 - \beta e_1) \leq \frac{\beta}{2}(\beta - \beta_1)e_1 \quad (2.13)$$

取充分小的 $\varepsilon > 0$ 並令 $\beta = \beta_1 - \varepsilon$ 即可使(2.13)為負。且在區域 $G_3$ 也會有相同結論。

• 在區域 $G_2$ 中，由於採用了 $\operatorname{fal}(e_1, \alpha, \delta)$ 函數，因此我們需要分兩種情況作討論。

情況一：考慮 $|e_1| > \delta$

對於任意 $\gamma \geq r_0$ ，可以得到 $e_2$ 的等高線方程： $e_2 = \frac{\beta}{2}(e_1 + \gamma)$ ，由圖 2.2我們知道

$e_2 > 0$ 且 $e_2 \geq \beta e_1$ ，因此只有 $|e_1| < \gamma$ 才是屬於這等高線，並且在這線段上 $V_2$ 對時間

的導數為

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_2}{dt} &= -\frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1) + \mu - \beta_2 |e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1) \\
 &= -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{2}(e_1 + \gamma) - \beta_1 e_1\right) + \mu - \beta_2 |e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1) \\
 &= \frac{\beta}{2}\left(\beta_1 - \frac{\beta}{2}\right)e_1 - \frac{\beta^2}{4}\gamma + \mu - \beta_2 |e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

若希望(2.14)式為負，則必須滿足

$$\frac{\beta}{2}\left(\beta_1 - \frac{\beta}{2}\right)e_1 - \frac{\beta^2}{4}\gamma < -\mu + \beta_2 |e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1) \tag{2.15}$$

將前述條件  $\beta = \beta_1 - \varepsilon$ 、 $\gamma \geq r_0$ 、 $|e_1| < \gamma$ 、 $|\mu| \leq \sigma$  整理帶回(2.15)式，可以得到

$$\frac{\beta_1^2 - \varepsilon^2}{4}\left(e_1 - \frac{(\beta_1 - \varepsilon)^2}{\beta_1^2 - \varepsilon^2}\gamma\right) < \beta_2(|e_1|^\alpha \operatorname{sgn}(e_1) - \frac{\sigma}{\beta_2}) \tag{2.16}$$

我們將不等式(2.16)的右側視為通過點  $\left(\frac{\sigma}{\beta_2}, 0\right)$  (參照圖 2.3 點(1))，以及通過點

$(0, -\sigma)$  (參照圖 2.3 點(2))的曲線，記為： $C_1$ 。

並將不等式(2.16)的左側視為通過點  $\left(\frac{(\beta_1 - \varepsilon)^2}{\beta_1^2 - \varepsilon^2}\gamma, 0\right)$  (參照圖 2.4 點(3))，以及通過點

$(0, -\frac{\beta_1^2 - \varepsilon^2}{4}\gamma)$  (參照圖 2.3 點(4))的直線，記為： $L_1$ 。

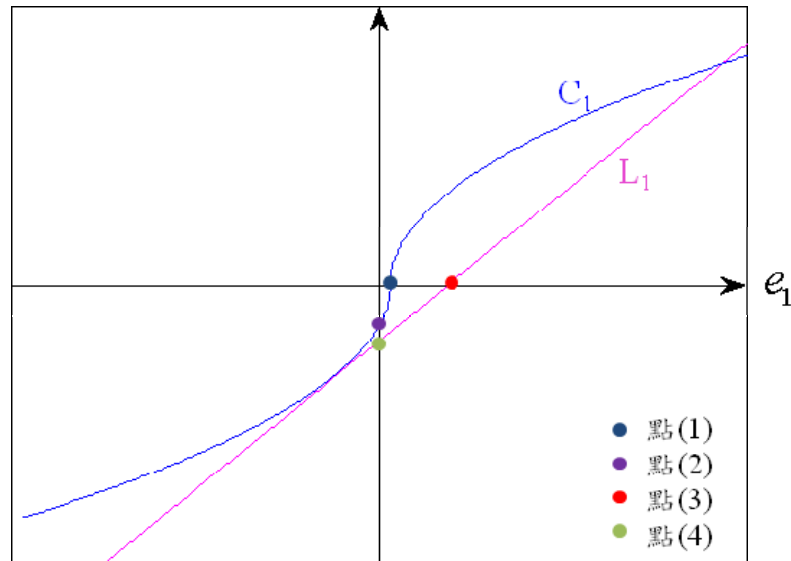


圖 2.3 不等式(2.16)成立時的情況

欲使不等式(2.16)在 $|e_1| < \gamma$ 的條件下成立，至少需要圖 2.3平面中點(3)在點(1)的

右側，點(2)在點(4)的上側。亦即， $\frac{(\beta_1 - \varepsilon)^2}{\beta_1^2 - \varepsilon^2} \gamma > \left| \frac{\sigma}{\beta_2} \right|^{1/\alpha}$  且  $-\sigma > -\frac{\beta_1^2 - \varepsilon^2}{4} \gamma$ ，因此

在 $0 < e_1 < \gamma$ 範圍內，我們可以得到如下之(2.17)式必可滿足(2.16)式。

$$\gamma > \left| \frac{\sigma}{\beta_2} \right|^{1/\alpha} \quad (2.17)$$

另一方面，在 $-\gamma < e_1 < 0$ 的範圍內，當直線L與曲線 $C_1$ 之差存在極大值，並且此極大值為負時，必可滿足(2.16)。我們利用偏微分求此差值之導數，可以得到此

點為 $-\left(\frac{4\alpha\beta_2}{\beta_1^2 - \varepsilon^2}\right)^{1/(1-\alpha)}$ 。接下來將此點代回(2.16)式可以得到

$$\frac{\beta_1^2 - \varepsilon^2}{4} \left( \left( \frac{4\alpha\beta_2}{\beta_1^2 - \varepsilon^2} \right)^{1/(1-\alpha)} + \frac{(\beta_1 - \varepsilon)^2}{\beta_1^2 - \varepsilon^2} \gamma \right) > \beta_2 \left( \left( \frac{4\alpha\beta_2}{\beta_1^2 - \varepsilon^2} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} + \frac{\sigma}{\beta_2} \right) \quad (2.18)$$

取 $\varepsilon = 0$ 簡化(2.17)式整理得

$$\gamma > \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha) \left( \frac{4\beta_2}{\beta_1^2} \right)^{1/(1-\alpha)} + \frac{4\sigma}{\beta_1^2} \quad (2.19)$$

經由以上的分析可知，對於充分小的 $\varepsilon = 0$ ，只要 $\gamma$ 滿足(2.17)，(2.19)式，則在 $G_2$

範圍內 $\frac{dV_2}{dt} < 0$ 。因此 $\gamma$ 必須同時滿足(2.17)，(2.19)式，亦即

$$\gamma > \max \left\{ \left| \frac{\sigma}{\beta_2} \right|^{1/\alpha}, \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha) \left( \frac{4\beta_2}{\beta_1^2} \right)^{1/(1-\alpha)} + \frac{4\sigma}{\beta_1^2} \right\} \quad (2.20)$$

在此，定義 $r_0$ 為最小 $\gamma$ ，也就是

$$r_0 = \max \left\{ \left| \frac{\sigma}{\beta_2} \right|^{1/\alpha}, \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha) \left( \frac{4\beta_2}{\beta_1^2} \right)^{1/(1-\alpha)} + \frac{4\sigma}{\beta_1^2} \right\} \quad (2.21)$$

同樣地，在區域 $G_4$ 使用前面分析之方式也會有相同的結論。

情況二：考慮 $|e_1| \leq \delta$

和前面討論一樣，對於任意  $\gamma \geq r_0$ ， $e_2 = \frac{\beta}{2}(e_1 + \gamma)$ ， $|e_1| < \gamma$  的線段。並且在這線

段上， $V_2$  對時間的導數為

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= -\frac{\beta}{2}(e_2 - \beta_1 e_1) + \mu - \beta_2 e_1 / \delta^{1-\alpha} \\ &= -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{2}(e_1 + \gamma) - \beta_1 e_1\right) + \mu - \beta_2 e_1 / \delta^{1-\alpha} \\ &= \frac{\beta}{2}\left(\beta_1 - \frac{\beta}{2}\right)e_1 - \frac{\beta^2}{4}\gamma + \mu - \beta_2 e_1 / \delta^{1-\alpha}\end{aligned}\quad (2.22)$$

將  $\beta = \beta_1 - \varepsilon$ 、 $|\mu| \leq \sigma$  整理帶回(2.22)式，若希望(2.22)式為負，必須滿足如下

$$\frac{\beta_1^2}{4}(e_1 - \gamma) < \frac{\beta_2}{\delta^{1-\alpha}}\left(e_1 - \frac{\delta^{1-\alpha}\sigma}{\beta_2}\right) \quad (2.23)$$

我們將不等式(2.23)的右側視為通過點  $(\frac{\delta^{1-\alpha}\sigma}{\beta_2}, 0)$  及點  $(0, -\sigma)$  的直線，記為： $L_2$ 。

並將不等式(2.23)的左側視為通過點  $(\gamma, 0)$  及點  $(0, -\frac{\beta_1^2}{4}\gamma)$  的直線，記為： $L_3$ 。

根據  $L_2$ 、 $L_3$  的位置關係，得到欲使(2.23)式成立，至少需滿足  $-\sigma > -\frac{\beta_1^2}{4}\gamma$ 。根

據(2.20)式，可以看出此條件已經滿足。另一方面，我們取另一條過  $(0, -\sigma)$  及

$(\delta, \frac{\beta_1^2(\delta - \gamma)}{4})$  的直線  $L_4$ ，只要直線  $L_2$  的斜率  $\frac{\beta_2}{\delta^{1-\alpha}}$  大於直線  $L_4$  的斜率

$\frac{1}{\delta}(\frac{\beta_1^2(\delta - \gamma)}{4} + \sigma)$ ，即可以得到在  $|e_1| \leq \delta$  範圍內，確保  $L_2$  恆在  $L_3$  之上。也就是

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\beta_1^2(\delta - \gamma)}{4} + \sigma\right) < \frac{\beta_2}{\delta^{1-\alpha}} \quad (2.24)$$

整理(2.24)式可以得到

$$\gamma > \delta + \frac{4\sigma}{\beta_1^2} - \frac{4\beta_2\delta^\alpha}{\beta_1^2} \quad (2.25)$$

當(2.25)式成立時， $\frac{dV_2}{dt} < 0$ 。在此，我們定義  $r_1$  為最小的  $\gamma$ ，也就是

$$r_1 = \delta + \frac{4\sigma}{\beta_1^2} - \frac{4\beta_2\delta^\alpha}{\beta_1^2} \quad (2.26)$$

對於區域  $G_4$  使用前面分析之方式也會有相同的結論。故經由以上證明以及透過

引理 2.1 可得到誤差系統(2.6)最終收斂至區域  $G_0$  (參照圖 2.2)。

## 2.2 Super-Twisting 演算法

為了克服傳統順滑模控制(Sliding Mode Control, SMC)中的切跳現象(chattering)，如圖 2.4所示。近年來學者提出高階順滑模態(High Order Sliding Mode, HOSM)的概念[17][19]，將不連續的控制輸入作用在順滑模的高階導數上，此作法不僅可以有效地消除切跳現象[17][18]，同時仍保有傳統順滑模控制[12][13]所擁有響應速度快、容易實現，以及對於模型不確定性(model uncertainties)或外在干擾(external disturbances)具有強健性等優點。基於此，本論文採用由Levant所提出之二階滑模控制中的Super-Twisting演算法[15]-[16]。

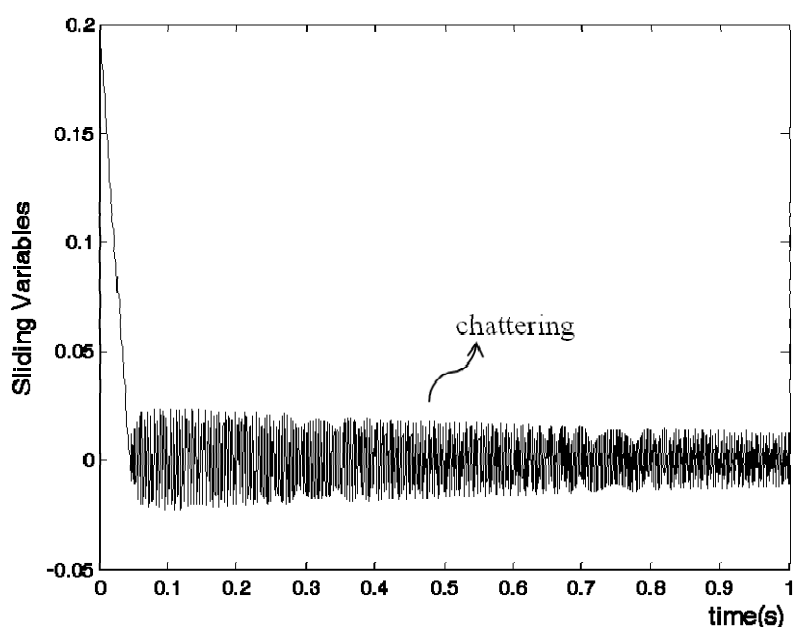


圖 2.4 切跳現象示意圖

接下來我們討論基於 Super-Twisting 演算法之二階順滑模控制的設計，首先考慮如下系統

$$\dot{x} = u + d \quad (2.27)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^1$  為狀態變數， $u \in \mathbb{R}^1$  為Super-Twisting演算法之控制律， $d \in \mathbb{R}^1$  為模型不確定性(model uncertainties)或外在干擾(external disturbances)。控制目標為設計控制律  $u$  使得系統軌跡於有限時間內在其相平面(phase plane)以扭轉(twisting)的方式收斂至原點，如圖 2.5所示。

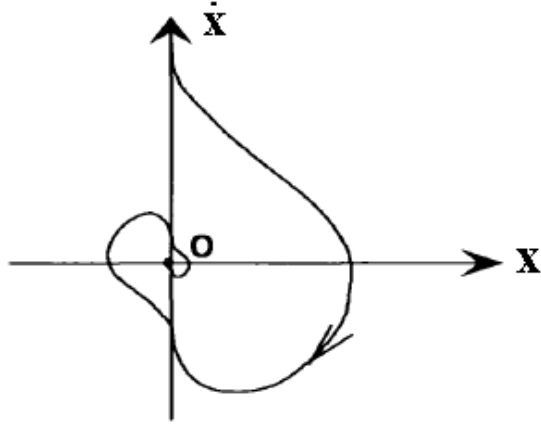


圖 2.5 Super-Twisting 之相軌跡(phase trajectory)

而(2.27)式中Super-Twisting演算法的控制律  $u$  為

$$u = u_1 + u_2 \quad (2.28)$$

其中  $u_1 = -k_1 |x|^{0.5} \text{sgn}(x)$ ， $\dot{u}_2 = -k_2 \text{sgn}(x)$ ，並且  $k_1 > 0$ 、 $k_2 > 0$  為控制律之參數。在這裡我們假設未知函數  $d$  對時間  $t$  的導數為有界的(bounded)，即

$$|\dot{d}| \leq \sigma, \forall t \geq 0 \quad (2.29)$$

若(2.27)式是在Filippov意義下的[20]，我們可以採取以下的狀態變換

$$y = d - k_2 \int_0^t \text{sgn}(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

系統(2.27)經由以上的狀態變換後成為如下

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1 |x|^{0.5} \text{sgn}(x) + y \\ \dot{y} = -k_2 \text{sgn}(x) + \dot{d} \end{cases} \quad (2.31)$$

接下來針對狀態變換後的系統(2.31)提出下列定理。

**定理 2.2：**

對於系統(2.31)，若  $|\dot{d}| \leq \sigma, \forall t \geq 0$ ，並且控制律參數滿足如下假設 2.2 時，則  $x$  與其對時間的導數  $\dot{x}$  在有限時間內收斂至原點。

**假設 2.2：**

控制律之參數滿足  $k_1 > 2$ ， $k_2 > \frac{k_1^3 + (4k_1 - 8)\sigma^2}{k_1(4k_1 - 8)}$ 。

接下來我們將透過Lyapunov定理來證明定理 2.2。首先我們令可能的Lyapunov函數(Lyapunov function candidate)為[21]

$$V = \mathbf{s}^T P \mathbf{s} \quad (2.32)$$

其中  $\mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} |x|^{0.5} \operatorname{sgn}(x) & y \end{bmatrix}$ ， $P$  為正定矩陣， $P = \begin{bmatrix} 2k_2 + 0.5k_1^2 & -0.5k_1 \\ -0.5k_1 & 1 \end{bmatrix}$ ，

則  $\mathbf{s}$  對時間  $t$  的導函數為  $\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2|x|^{0.5}} \cdot (-k_1 |x|^{0.5} \operatorname{sgn}(x) + y) \\ -k_2 \operatorname{sgn}(x) + \dot{d} \end{bmatrix}$ ，

令  $A = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & 0.5 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = [0 \ 1]^T$ ， $C = [1 \ 0]$ ， $\dot{d} = |s_1| \dot{d}$ ，

將  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\dot{d}$  帶入  $\dot{\mathbf{s}}$  中可以得到

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{|s_1|} (A\mathbf{s} + B\dot{d}) \quad (2.33)$$

將(2.33)式帶入  $V$  沿著系統軌跡對時間  $t$  的導函數可得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{|s_1|} \begin{bmatrix} s \\ \dot{d} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \dot{d} \end{bmatrix} \\ &\leq \frac{1}{|s_1|} \left\{ \begin{bmatrix} s \\ \dot{d} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \dot{d} \end{bmatrix} + \sigma^2 s_1^2 - \dot{d}^2 \right\} \\ &\leq \frac{1}{|s_1|} s^T (A^T P + PA + \sigma^2 C^T C + P B B^T P) s \end{aligned} \quad (2.34)$$

我們令(2.34)式中  $A^T P + PA + \sigma^2 C^T C + P B B^T P = -Q$ ，其中

$$Q = \begin{bmatrix} k_1 k_2 + 0.5k_1^3 - \sigma^2 - 0.25k_1^2 & -0.5k_1 - 0.5k_1^2 \\ -0.5k_1 - 0.5k_1^2 & -0.5k_1 - 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

在假設 2.2 成立的情況下，會得到  $Q > 0$  為一正定函數。接下來，我們可進一步

將(2.34)式整理成如下

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|s_1|} \mathbf{s}^T Q \mathbf{s} \quad (2.36)$$



推導至此，由(2.36)式以及Lyapunov理論可知 $V = \mathbf{s}^T P \mathbf{s}$ 為一個Lyapunov函數，即在控制律(2.28)參數滿足假設 2.2 下，可以確保對於任意正定對稱矩陣 $Q$ ，找到其相對應的正定對稱矩陣 $P$ 滿足Riccati方程。因此，由以上證明可得到系統(2.27)在控制律(2.28)的控制下為漸進穩定，也就是說系統(2.27)， $x$ 與 $\dot{x}$ 在有限時間內收斂至零。

## 2.3 飛彈與目標相對運動模型

在攔截過程中，飛彈—目標相對運動包含 i) 相互接近時彼此速度的變化以及 ii) 視線角速度的改變。在此我們將飛彈與目標視為質點，建立飛彈目標相對運動模型，從而設計觀測器實現目標跟蹤。首先我們引入視線座標系(Frame of Sight)，參照附註 2.1，並且在附註 2.2 給出視線(Line of Sight)的定義。

### 附註 2.1：

視線座標系以飛彈質心為原點 $O$ ， $\mathbf{x}$ 軸為飛彈—目標間的視線，並且指向目標為正方向， $\mathbf{y}$ 軸位於包含 $O\mathbf{x}$ 軸的鉛垂面內，並且與 $O\mathbf{x}$ 軸垂直，指向上方為正， $\mathbf{z}$ 軸則由安培右手定則決定。

### 附註 2.2：

假設 $q_\epsilon$ 與 $q_\beta$ 分別為視線高低角與方位角。 $q_\epsilon$ 定義為視線( $O\mathbf{x}$ 軸)與平面 $O\mathbf{X}_0\mathbf{Z}_0$ 的夾角，若視線在此平面之上則 $q_\epsilon$ 為正，反之為負。 $q_\beta$ 定義為視線在平面 $O\mathbf{X}_0\mathbf{Z}_0$ 上的投影與 $O\mathbf{X}_0$ 軸的夾角，若 $O\mathbf{X}_0$ 軸順時針轉到此投影上則 $q_\beta$ 為正，反之為負。

文獻[22]指出在視線座標系下彈目相對運動在視線的高低方向和方位方向之間存在耦合，本論文為了探討更精確、穩定的目標加速度估測以利後續設計導引律使用，我們採用二維導引模型，假定水平和縱向平面可以實現解耦，也就是將三維空間的運動視為在高低和方位兩個平面運動的合成，其估測結果可應用到三維空間中。在此我們考慮縱向平面內的彈目相對運動，亦即只考慮視線高低角 $q_e$ 的部分。為便於推導，我們將 $q_e$ 以 $q$ 表示，此時彈目相對運動如圖 2.6所示。

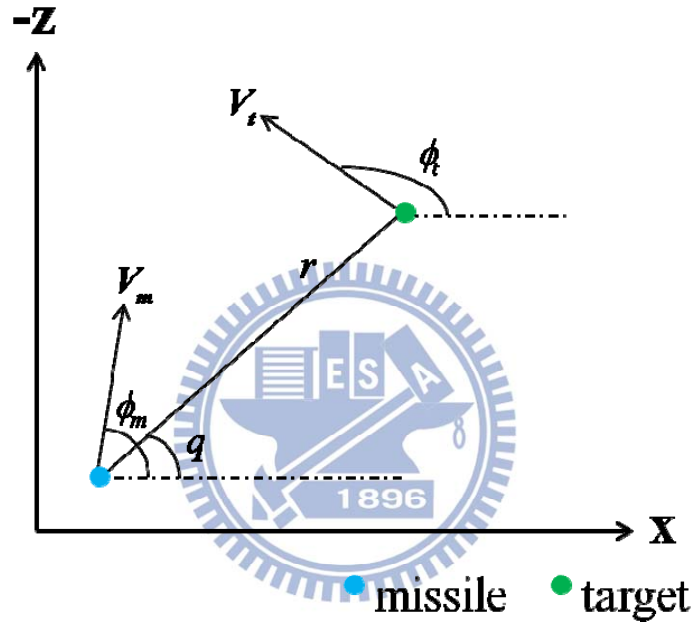


圖 2.6 縱向平面飛彈目標相對運動關係

圖 2.6中 $r$ 代表彈目相對距離， $q$ 代表視線角， $\phi_m$ 與 $\phi_t$ 分別代表飛彈和目標的速度方向角， $V_m$ 與 $V_t$ 分別代表飛彈和目標速度。接下來將飛彈與目標的速度向量分別沿視線方向與垂直視線方向進行分解，推導得到彈目相對運動方程如下

$$\dot{r} = V_t \cos(\phi_t - q) - V_m \cos(\phi_m - q) \quad (2.37)$$

$$r\dot{q} = V_t \sin(\phi_t - q) - V_m \sin(\phi_m - q) \quad (2.38)$$

$\dot{r}$ 為彈目相對速率， $\dot{q}$ 為視線角速率。為了簡便起見，我們令 $V_r = \dot{r}$ ， $V_q = r\dot{q}$ ，並將(2.37)式與(2.38)式對時間求一階導數得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_r = & -\dot{V}_m \cos(\phi_m - q) - V_m \sin(\phi_m - q)\dot{q} \\
& + V_m \dot{\phi}_m \sin(\phi_m - q) - V_t \dot{\phi}_t \sin(\phi_t - q) \\
& + \dot{V}_t \cos(\phi_t - q) + V_t \sin(\phi_t - q)\dot{q}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_q = & -\dot{q}[V_t \cos(\phi_t - q) - V_m \cos(\phi_m - q)] - \dot{V}_r \dot{q} \\
& - V_m \dot{\phi}_m \cos(\phi_m - q) - \dot{V}_m \sin(\phi_m - q) \\
& + V_t \dot{\phi}_t \cos(\phi_t - q) + \dot{V}_t \sin(\phi_t - q)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

顯然，由圖2.6可知， $\dot{V}_m \cos(\phi_m - q) + V_m \dot{\phi}_m \sin(\phi_m - q)$  與  $\dot{V}_t \cos(\phi_t - q) - V_t \dot{\phi}_t \sin(\phi_t - q)$  分別為飛彈加速度與目標加速度在視線方向上的分量。  
 $-V_m \dot{\phi}_m \cos(\phi_m - q) - \dot{V}_m \sin(\phi_m - q)$  與  $-V_t \dot{\phi}_t \cos(\phi_t - q) - \dot{V}_t \sin(\phi_t - q)$  則為飛彈加速度與目標加速度在視線法向上的分量，於是我們令

$$u_r = \dot{V}_m \cos(\phi_m - q) + V_m \dot{\phi}_m \sin(\phi_m - q) \tag{2.41}$$

$$w_r = \dot{V}_t \cos(\phi_t - q) - V_t \dot{\phi}_t \sin(\phi_t - q) \tag{2.42}$$

$$u_q = -V_m \dot{\phi}_m \cos(\phi_m - q) - \dot{V}_m \sin(\phi_m - q) \tag{2.43}$$

$$w_q = -V_t \dot{\phi}_t \cos(\phi_t - q) - \dot{V}_t \sin(\phi_t - q) \tag{2.44}$$

其中  $u_r$  和  $w_r$  分別是飛彈加速度與目標加速度在視線上的分量； $u_q$  和  $w_q$  分別是飛彈加速度與目標加速度在視線法向上的分量。將(2.41)-(2.44)式帶回(2.39)與(2.40)式，整理得

$$\ddot{r} = r\dot{q}^2 + w_r - u_r \tag{2.45}$$

$$\ddot{q} = -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{q} - \frac{w_q}{r} + \frac{u_q}{r} \tag{2.46}$$

(2.45)與(2.46)式即為縱向平面上的飛彈目標相對運動模型[23]。

## 第 3 章

### 機動目標加速度估測之應用

機動目標追蹤問題有廣泛的應用，因此觀測器之設計佔有極重要之地位，卡爾曼濾波器的應用更為其中之代表[25]。然而卡爾曼濾波只能用在線性的狀態空間模型且雜訊必須滿足高斯分佈(Gaussian distribution)，因此當實際系統為非線性系統或是雜訊特性偏離高斯分布時，卡爾曼濾波難以反映實際的目標機動。擴展型卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF) 中狀態模型及觀測模型雖然不需要是線性函數，即可將卡爾曼濾波算法應用於非線性系統中，但實質上是將非線性函數在當下估計值處線性化，若被忽略的高次項帶來較大的誤差時，可能會導致濾波器的發散。有鑑於此，我們探討不需要精確的機動目標模型、系統雜訊之統計特性的方式來建構觀測器。

在本章裡我們將利用第二章所建立之縱向面彈目相對運動模型設計擴張狀態觀測器與基於 Super-Twisting 演算法之二階滑模觀測器來估測終端導引階段目標加速度。此兩種觀測器皆不依賴目標模型，也毋須限制目標是時變(time variant)或非時變(time-invariant)的，且設計過程只需導引系統量測輸出與我方飛彈控制輸入的資訊即可。在 3.2 節我們設計擴張狀態觀測器估測目標加速度並以觀測誤差作為性能指標(performance index)，透過 2.1 節中  $G_0$  面積作為評價標準並且給出選取 ESO 參數的一種途徑，從而提高估測精度，在 3.3 節我們基於 Super-Twisting 演算法，以收斂時間之估計值為出發點，在控制參數之取值範圍內利用最佳化的方式求得最佳化參數使得觀測器與系統之間的誤差能夠盡快收斂又不失其估測精度，最後 3.4 節，我們以 simulink 軟體來建構飛彈目標相對運動模型，並設計兩種目標機動情形，討論分析兩種觀測器之模擬結果。

### 3.1 應用擴張狀態觀測器於目標加速度估測

我們採用比例導引律的前提下，設計擴張狀態觀測器估測機動目標的加速度。

由 2.3 節推導可知，縱向面導引方程如下

$$\ddot{q} = -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{q} - \frac{w_q}{r} + \frac{u_q}{r} \quad (3.1)$$

(3.1)式中  $r$  代表飛彈與目標之間的相對距離、 $\dot{r}$  代表即彈目相對速率、 $q$  代表視線角、 $\dot{q}$  代表視線角速率。 $u_q$  和  $w_q$  分別代表飛彈加速度和目標加速度在視線法向上的分量。在本章我們假設  $r$ 、 $\dot{r}$ 、 $q$  及  $\dot{q}$  可以精準量測得到。由 2.1 節所談論的擴張狀態觀測器設計方式可知，需要將模型不確定性(model uncertainties)擴張成新的狀態。在這裡，我們先作變數變換，令  $x_1 = \dot{q}$ ，則(3.1)式可化為

$$\dot{x}_1 = -\frac{2\dot{r}}{r}x_1 - \frac{w_q}{r} + \frac{u_q}{r} \quad (3.2)$$

接下來我們將不確定性  $-\frac{w_q}{r}$  擴張成新的狀態  $x_2$ ，亦即令  $x_2 = -\frac{w_q}{r}$ ，則系統(3.2)可以進一步描述為

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{2\dot{r}}{r}x_1 + x_2 + \frac{u_q}{r} \\ \dot{x}_2 = -\mu \end{cases} \quad (3.3)$$

其中  $-\mu$  為  $-\frac{w_q}{r}$  對時間  $t$  的導函數，為了繼續完成觀測器之設計，我們引進下列假設。

**假設 3.1：**

模型不確定性(model uncertainties)  $x_2$  對時間的變化率為有界的(bounded)，亦即

$$|\dot{x}_2| = |-\mu| \leq \sigma, \forall t \geq 0。$$

接下來針對系統(3.3)構造擴張狀態觀測器

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \beta_1 e_1 - \frac{2\dot{r}}{r}x_1 + \frac{u_q}{r} \\ \dot{z}_2 = -\beta_2 fal(e_1, \alpha, \delta) \end{cases} \quad (3.4)$$

接下來我們定義  $e_1 = z_1 - x_1$ 、 $e_2 = z_2 - x_2$  為系統誤差，並假定  $0 < \alpha < 1$ 。根據(3.3)

與(3.4)式，可以得到誤差動態為

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \beta_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -\beta_2 \cdot \text{fal}(e_1, \alpha, \delta) + \mu \end{cases} \quad (3.5)$$

根據 2.1 節的證明得知誤差系統必在有限時間內收斂至區域  $G_0$  (參照圖 2.2)，也就

是說，誤差系統(3.5)的收斂程度最終由區域  $G_0$  所限定。根據圖 2.3 可知  $G_0$  面積為

$2\beta r_0^2$ ，其中  $\beta = \beta_1 - \varepsilon$ ， $\varepsilon$  大於零且充分小，因此  $G_0$  的大小由  $\beta_1$  及  $r_0$  所決定。由

(2.25)式我們知道  $r_0 = \max \left\{ \left| \frac{\sigma}{\beta_2} \right|^{1/\alpha}, \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha) \left( \frac{4\beta_2}{\beta_1^2} \right)^{1/(1-\alpha)} + \frac{4\sigma}{\beta_1^2} \right\}$ ，在此我們進一

步分析  $r_0$  與  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  的關係來提高ESO的估測精度。令

$$\begin{aligned} h_1(\alpha) &= \left( \frac{\sigma}{\beta_2} \right)^{1/\alpha} \\ h_2(\alpha) &= \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha) \left( \frac{4\beta_2}{\beta_1^2} \right)^{1/(1-\alpha)} + \frac{4\sigma}{\beta_1^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

這裡我們假定  $\beta_2 > \sigma$ ，而當  $\beta_1$  與  $\beta_2$  固定時，可以得到  $h_1(\alpha)$  是由  $(0^+, 0)$  遞增到

$(1, \frac{\sigma}{\beta_2})$  的函數，而  $h_2(\alpha)$  是由  $(0^+, \frac{4\beta_2}{\beta_1^2} + \frac{4\sigma}{\beta_1^2})$  遞減到  $(1, \frac{4\sigma}{\beta_1^2})$  的函數，如圖 3.1 所示。

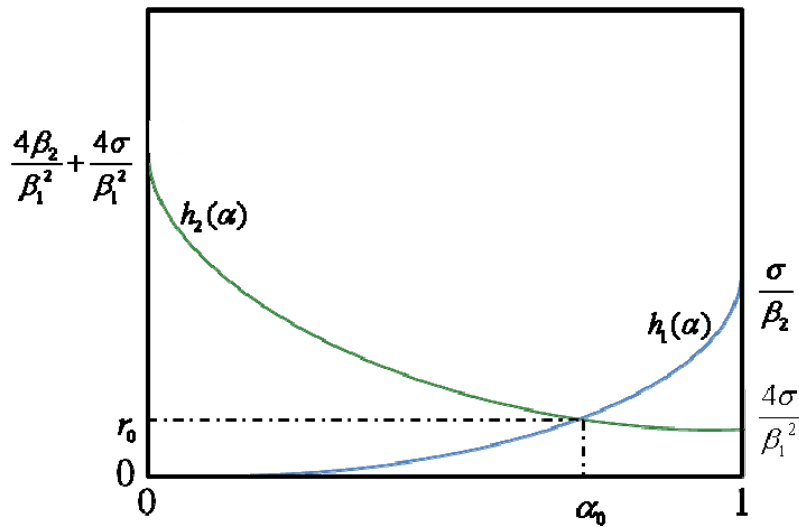


圖 3.1  $r_0$  最佳選擇示意圖

當  $\alpha=1$  時， $r_0 = \max \left\{ \frac{\sigma}{\beta_2}, \frac{4\sigma}{\beta_1^2} \right\}$ ，然而只要滿足

$$\frac{\sigma}{\beta_2} > \frac{4\sigma}{\beta_1^2} \quad (3.7)$$

$h_1(\alpha)$  與  $h_2(\alpha)$  必在  $0 < \alpha < 1$  的某一點  $\alpha_0$  相交，此時  $r_0 = h_1(\alpha_0) = h_2(\alpha_0) = \left(\frac{\sigma}{\beta_2}\right)^{1/\alpha_0}$ ，

參照圖 3.1。因此，當假設(3.7)成立時，只要  $\beta_2 > \sigma$  即可使擴張狀態觀測器(3.4)的

估測精度優於  $\alpha=1$  時的情況。經由以上分析，若欲進一步降低  $r_0$  來提升ESO的

估測精度，則必須降低  $\frac{\sigma}{\beta_2}$  與  $\alpha_0$ ，其中，要降低  $\alpha_0$ ，根據圖 3.1 中  $h_2(\alpha)$  的性質

知，必須降低  $\frac{4\beta_2}{\beta_1^2}$  與  $\frac{4\sigma}{\beta_1^2}$ 。基於以上的分析，可得選取ESO參數的一種憑藉，即

擴大不等式

$$\frac{\beta_1^2}{4} > \beta_2 > \sigma \quad (3.8)$$

這裡我們定義  $G_0$  的面積為誤差收斂的性能指標(performance index)，透過(3.8)式

作為選取ESO參數的原則，合理地選取ESO參數，使得  $G_0$  面積盡量小，也就是誤

差系統收斂的區域範圍盡量小(參照圖 2.2)，從而提升ESO的估測精度。此外基於

以上分析我們可以進一步得到二階擴張狀態觀測器的收斂誤差為

$$\begin{cases} |e_1| \leq r_0 = \left(\frac{\sigma}{\beta_2}\right)^{1/\alpha_0} \\ |e_2| \leq \beta_1 r_0 = \beta_1 \left(\frac{\sigma}{\beta_2}\right)^{1/\alpha_0} \end{cases} \quad (3.9)$$

這樣即可繼續完成觀測器之設計，得到  $z_1$  是  $x_1$  的估測值， $z_2$  是  $x_2$  的估測值。根

據(3.3)式，我們知道擴張狀態  $x_2 = -\frac{w_q}{r}$ ，因此，我們可以得到目標加速度  $w_q$  的估

測值為

$$w_q \approx -rz_2 \quad (3.10)$$



### 3.2 應用 Super-Twisting 演算法於目標加速度估測

本節我們將利用 2.1 節所談論的基於 Super-Twisting 演算法應用於導引系統中機動目標加速度的估測。在這裡，我們先作變數變換，將模型不確定性(model uncertainties)  $\frac{w_q}{r}$  令為  $d$ ，即  $d = \frac{w_q}{r}$ ，並且令  $x_1 = \dot{q}$ ，則導引方程(3.1)式可描述為

$$\dot{x}_1 = -\frac{2\dot{r}}{r}x_1 - d + \frac{u_q}{r} \quad (3.11)$$

接下來我們進一步設計觀測器如下

$$\dot{z}_1 = -\frac{2\dot{r}}{r}x_1 + \frac{u_q}{r} + u \quad (3.12)$$

其中  $u$  為 Super-Twisting 演算法中的控制律。接下來我們定義  $e_1 = z_1 - x_1$  為系統誤差，則根據(3.11)與(3.12)式，可以得到誤差動態為

$$\dot{e}_1 = u + d \quad (3.13)$$

根據 2.2 節，控制律為  $u = u_1 + u_2$ ，其中  $u_1 = -k_1|e_1|^{0.5}\text{sgn}(e_1)$ ， $\dot{u}_2 = -k_2\text{sgn}(e_1)$ ，並且  $k_1$ 、 $k_2$  為控制律之參數。為了繼續完成觀測器之設計，我們引進下列假設。

**假設 3.2：**

未知函數  $d$  對時間  $t$  的導函數為有界的(bounded)，即  $|\dot{d}| \leq \sigma, \forall t \geq 0$ 。

對於誤差系統(3.13)，在假設 3.2 的條件成立下，依據定理 2.1，當  $k_1$ 、 $k_2$  取值

滿足  $k_1 > 2$  且  $k_2 > \frac{k_1^3 + (4k_1 - 8)\sigma^2}{k_1(4k_1 - 8)}$ ，則系統(3.13)式  $(e_1, \dot{e}_1)$  於有限時間內收斂至原

點。基於以上分析以及根據(3.13)式知道，有限時間內  $\dot{e}_1 \approx 0$ ，然而  $\dot{e}_1 = u + d$ ，

也就是說  $-u \approx d$ ，亦即  $-u$  是模型不確定性(model uncertainties)  $d$  的估測值，由於

$d = \frac{w_q}{r}$ ，因此我們可以透過控制律  $u$  的設計從而得到目標加速度  $w_q$  的估測值為

$$w_q \approx -ru \quad (3.14)$$



在這裡我們欲進一步討論收斂時間的問題，根據 2.2 節的證明得知  $V = \mathbf{s}^T P \mathbf{s}$  為一個可用 Lyapunov 函數，其中  $\mathbf{s}^T = [s_1 \quad s_2] = \left[ |e_1|^{0.5} \operatorname{sgn}(e_1) \quad d - k_2 \int_0^t \operatorname{sgn}(\tau) d\tau \right]$ ， $\|\mathbf{s}\|_2^2 = s_1^2 + s_2^2$ 。由於  $P$  為正定矩陣，故  $\lambda_{\min}(P) \|\mathbf{s}\|_2^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\mathbf{s}\|_2^2$ ，其中  $\lambda_{\min}(P)$  與  $\lambda_{\max}(P)$  分別為  $P$  矩陣之最小與最大特徵值，因此可得

$$|s_1| = |e_1|^{0.5} \leq \|\mathbf{s}\|_2 \leq \frac{V^{1/2}}{\lambda_{\min}^{1/2}(P)} \quad (3.15)$$

另一方面， $V$  沿著系統軌跡對時間  $t$  之導函數由 (2.36) 式得知

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|s_1|} \mathbf{s}^T Q \mathbf{s} \quad (3.16)$$

其中  $Q$  為正定矩陣，因此

$$\lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{s}\|_2^2 \leq \mathbf{s}^T Q \mathbf{s} \leq \lambda_{\max}(Q) \|\mathbf{s}\|_2^2 \quad (3.17)$$

根據 (3.15)-(3.17) 式可以進一步得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{|s_1|} \lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{s}\|_2^2 = -\frac{\|\mathbf{s}\|_2}{|s_1|} \lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{s}\|_2 \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{s}\|_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

接下來利用  $\lambda_{\min}(P) \|\mathbf{s}\|_2^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\mathbf{s}\|_2^2$  這個性質，可以整理 (3.18) 式為

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P)} V^{1/2} \quad (3.19)$$

為便於討論，我們令

$$\gamma(P, Q) = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P)} \quad (3.20)$$

也就是說

$$\dot{V} \leq -\gamma(P, Q) V^{1/2} \quad (3.21)$$

亦即  $V$  沿著系統軌跡對時間的變化率小於等於  $-\gamma(P, Q) V^{1/2}$ ，隨後整理 (3.21) 式得

$$\int_{V(0)}^{V(t)} V^{-1/2} dV \leq -\int_0^t \gamma(P, Q) dt \quad (3.22)$$

故

$$0 \leq 2V^{1/2}(t) \leq 2V^{1/2}(0) - \gamma(P, Q)t \quad (3.23)$$

也就是說  $0 \leq V^{1/2}(t) \leq (0)$  當  $t = 2V^{1/2}(0) / \gamma(P, Q)$ ，為有限值，亦即  $V^{1/2}(t)$  必在有限時間  $t = 2V^{1/2}(0) / \gamma(P, Q)$  收斂至零，如圖 3.2 所示。

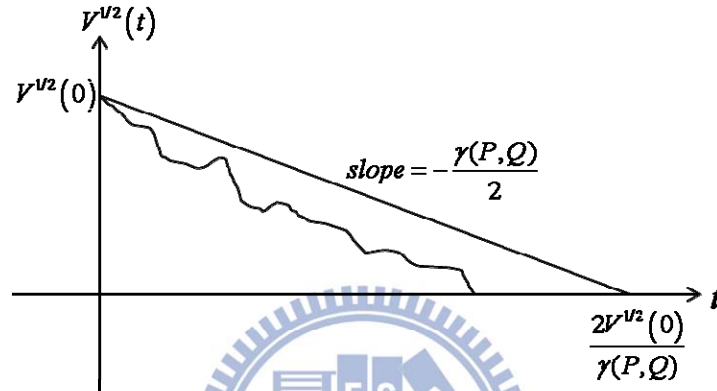


圖 3.2  $V^{1/2}(t)$  沿著系統軌跡對時間的響應

若希望收斂時間  $t = 2V^{1/2}(0) / \gamma(P, Q)$  的估計是最佳的，即

$$t_{optimal} = \min 2V^{1/2}(0) / \gamma(P, Q) \quad (3.24)$$

我們可以將(3.24)式最佳化的問題視為

$$\gamma_{optimal} = \max \gamma(P, Q) \quad (3.25)$$

又  $\gamma(P, Q) = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P)}$ ，故我們可將(3.25)式最佳化的問題等價為

$$\gamma_{optimal} = \min \frac{\lambda_{\max}^{1/2}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \quad (3.26)$$

在這裡，矩陣  $P$  及  $Q$  為 2.2 節所取的正定矩陣(參照(2.32)式與(2.35)式)。綜合以上分析，我們將在參數  $k_1$ 、 $k_2$  的取值範圍內，以誤差系統收斂時間的最佳化作為選取觀測器參數的一種憑藉使得觀測器追蹤到目標的時間估計是最佳的。

### 3.3 機動目標加速度之模擬

#### 3.3.1 系統模擬設計與建立 simulink

在這一小節中，我們利用 simulink 軟體來建構 3.1 節所提及的視線座標系下彈目相對運動模型，並且加入 3.2 節與 3.3 節所設計的兩種觀測器來對目標加速度進行估測。首先考慮 2.3 節建立之縱向面飛彈目標相對運動模型

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{q}^2 \\ \ddot{q} &= -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{q} - \frac{w_q}{r} + \frac{u_q}{r}\end{aligned}\quad (3.27)$$

我們可將(3.27)整理為

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.28)$$

其中  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [r \ \dot{r} \ q \ \dot{q}]^T$ ， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 x_4^2 & x_4 & \frac{-2x_2 x_4}{x_1} \end{bmatrix}^T$ ，

$\mathbf{u} = [u_q \ w_q]^T$ ， $G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x_1 \end{bmatrix}^T$ 。在接下來的模擬，我們假設飛彈

初始位置為 $[0 \ 0]^T$ (m)，初始速率為 1200(m/s)，速率高低角為 5(度)；目標位置為 $[10000 \ -1500]^T$ (m)，初始速率為-2400(m/s)，速率高低角為-5(度)。可以直接計算

得 $\mathbf{x}(0) = [10112 \ -3531.1 \ 0.1489 \ -0.0419]^T$ 。其模擬方塊流程圖如下圖所示

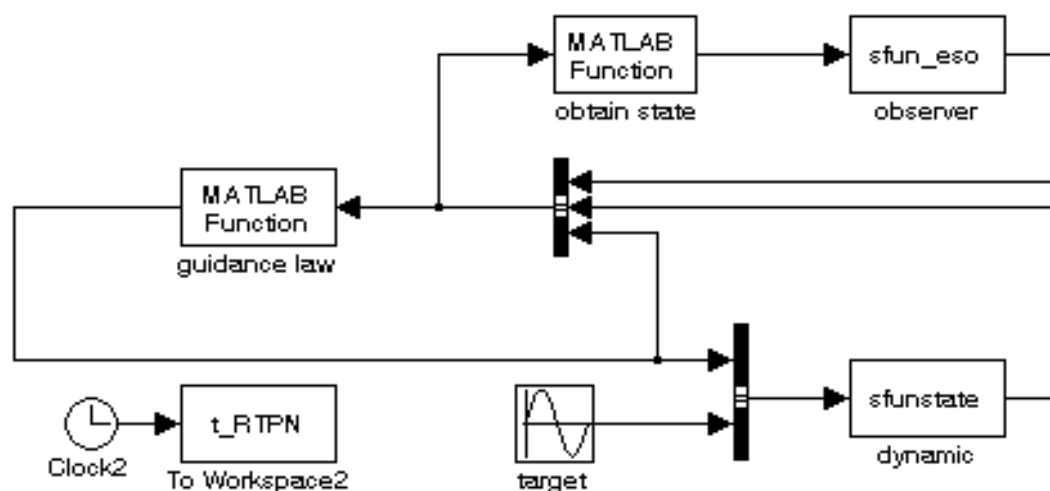


圖 3.3 未考慮輸出雜訊的導引系統方塊圖

### 3.3.2 模擬結果

此節我們利用simulink進行目標加速度估測，並分析估測精度及收斂時間等性能。另一方面對於飛彈系統而言，Paul指出常見的飛行技巧有筒滾式(barrel roll)與垂直剪式(vertical scissors)[26]，Chadwick指出目標機動頻率約在 0.5~1(Hz)[27]。為了展示本論文所設計的觀測方式，我們設計下面兩種情況進行模擬。

- 一、以機動頻率為 0.5(Hz)，最大機動能力為 $\pm 14g$  ( $m/s^2$ )的正弦波訊號作為筒滾式(barrel roll)目標訊號。
- 二、以機動頻率為 0.5(Hz)，最大機動能力為 $\pm 5g$  ( $m/s^2$ )的方波訊號作為垂直剪式(vertical scissors)目標訊號。

#### 附註 3.1：

由於導引系統除了 $r=0$ 處其它地方皆連續，而這奇異點即為飛彈目標碰撞處，但就技術而言，通常飛彈的攔截點不是發生在 $r=0$ 處，而是發生在 $r^0 \in [r_{\min}, r_{\max}]$ 區間內，這個攔截距離定義為zero intercept[28]，本論文假設 $r^0 \in [0.05, 100](m)$ 。

由於觀測器參數的選取直接影響目標加速度的估測效果，因此我們利用 3.2 與 3.3 節給出選取參數的一種憑藉來決定觀測器之參數，在此我們分別討論。

#### (i) 擴張狀態觀測器的參數選取

根據 3.2 節的分析，在假設 3.1 成立的情況下擴大不等式 $\frac{\beta_1^2}{4} > \beta_2 > \sigma$ 來提高估測精度，我們利用此憑藉針對兩種模擬情況選取觀測器參數如下

筒滾式機動(barrel roll)	垂直剪式機動(vertical scissors)
$\delta = 0.001$ $\alpha = 0.3$ $\beta_1 = 85$ $\beta_2 = 125$	$\delta = 0.001$ $\alpha = 0.4$ $\beta_1 = 85$ $\beta_2 = 125$

(ii) 基於 Super-Twisting 演算法之二階滑模觀測器的參數選取

根據 3.3 節的分析，在假設 3.2 成立的情況下我們透過求解 Riccati 方程得到參數的取值範圍來確保系統收斂。另一方面，為了得到收斂時間的最佳估計我們進一步使用 MATLAB 工具箱(MATLAB toolbox)得到

$$\lambda_{\max}(P) = k_2 + (k_1^4 / 4 + 2k_1^2 k_2 + 4k_2^2 - 4k_2 + 1)^{0.5} / 2 + k_1^2 / 4 + 1 / 2 \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(Q) = & -(\sigma^4 - \sigma^2 k_1^3 + \sigma^2 k_1^2 / 2 - 2\sigma^2 k_1 k_2 + \sigma^2 k_1 - 2\sigma^2 + k_1^6 / 4 \\ & - k_1^5 / 4 + k_1^4 k_2 + 9k_1^4 / 16 - k_1^3 k_2 / 2 - 3k_1^3 / 4 + k_1^2 k_2^2 + 1 \\ & - k_1^2 k_2 + 3k_1^2 / 4 + 2k_1 k_2 - k_1)^{0.5} / 2 + k_1 / 4 + k_1 k_2 / 2 - 1 / 2 \\ & - k_1^2 / 8 + k_1^3 / 4 - \sigma^2 / 2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

整理(3.29)與(3.30)式得到  $\frac{\lambda_{\max}^{1/2}(P)}{\lambda_{\min}(Q)}$ ，同時控制參數依據定理 2.1 必須滿足  $k_1 > 2$  且

$k_2 > \frac{k_1^3 + (4k_1 - 8)\sigma^2}{k_1(4k_1 - 8)}$ ，接著利用 MATLAB 得到  $k_1$  與  $k_2$  的最佳值如下

	筒滾式機動(barrel roll)	垂直剪式機動(vertical scissors)
最佳化前	$k_1 = 2.5$ $k_2 = 6$	$k_1 = 2.5$ $k_2 = 4.5$
最佳化後	$k_1 = 5.0856$ $k_2 = 14.1021$	$k_1 = 4.9835$ $k_2 = 13.2529$

模擬結果顯示在圖 3.4到圖 3.15，在此我們以符號ESO表示經由擴張狀態觀測器估測目標加速度之結果；以符號STO表示經由Super-Twisting演算法估測目標加速度之結果；最後以符號OPTIMAL來表示基於Super-Twisting演算法並且進一步利用收斂時間估計選取最佳化參數的結果。

圖 3.4到圖 3.9為情況一的模擬結果。圖 3.4(a)與(b)分別代表ESO和導引系統之間的狀態誤差  $e_1$  及  $e_2$  (參照(3.5)式)，而(c)與(d)分別代表STO和導引系統之間的狀態誤差  $e_1$  及  $\dot{e}_1$  (參照(3.13)式)，而(e)與(f)分別代表OPTIMAL和導引系統之間

的狀態誤差  $e_1$  及  $\dot{e}_1$ ，由此圖可以看出所設計的觀測器幾乎使其狀態誤差收斂至原點，我們將觀測器狀態  $z_1$  與  $\dot{q}$  間誤差的收斂狀況整理在下表。

表 3.1 目標為正弦波時三種觀測器的狀態  $z_1$  與  $\dot{q}$  間誤差收斂狀況比較表

觀測方式	性能指標(performance index)	
	穩定度	收斂時間(s)
ESO	穩定	0.078
STO	穩定	0.043
OPTIMAL	穩定	0.02

為了比較觀測器的收斂速度，我們定義穩定為觀測器狀態  $z_1$  與  $\dot{q}$  間誤差的絕對值收斂到 0.00007 內，而收斂時間定義為狀態誤差之絕對值收斂到 0.00007 內後確保不再大於 0.00007 所對應的時間，由此可知三種方式皆可使狀態誤差盡可能的在零附近。同時也驗證了基於收斂時間估計進行最佳化分析的估測方式有最快的收斂時間 0.02 秒。另一方面，由圖 3.5 可以看出基於 Super-Twisting 演算法無論有否進行最佳化給出參數  $k_1$  與  $k_2$ ，其控制律不存在切跳現象，這也說明參數  $k_1$  與  $k_2$  的取值範圍是正確的。由以上模擬結果，我們知道誤差系統(參照(3.5)與(3.13))於有限時間收斂至原點，其結果與 3.2 與 3.3 節理論分析一致，亦即代表觀測器之有效性，從而得到目標加速度的估測值，如圖 3.6 到圖 3.8 所示。另一方面，我們知道加速度估測值與彈目相對距離  $r$  成正比，然而當狀態誤差進入穩態前也就是終端導引階段初期，飛彈目標相對距離甚遠，因此估測結果有極大的振幅，圖 3.6 到圖 3.8 飛行初期估測結果有極大的振幅就是上述原因所造成的。而當狀態誤差進入穩態後，所對應的估測結果與目標訊號幾乎重合。接著我們進一步檢視估測結果與目標訊號之間的誤差，如圖 3.9(a)及(b)所示，其中(b)是擷取(a)圖 0 到 0.35 秒方便視其估測誤差收斂情形，我們將其收斂狀況整理在下表。



表 3.2 目標為正弦波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表

觀測方式	性能指標(performance index)	
	穩定度	收斂時間(s)
ESO	穩定	0.163
STO	穩定	0.14
OPTIMAL	穩定	0.078

表 3.2 中穩定是指估測誤差的絕對值是否收斂到  $0.5g(m/s^2)$  內，收斂時間則定義為估測誤差的絕對值確保收斂到  $0.5g(m/s^2)$  時所對應的時間。由表 3.2 同時對照圖 3.9 可看出觀測器追蹤速度很快並且擁有不錯的估測精度，再次驗證觀測器之有效性。另一方面，由表 3.2 與圖 3.9 一樣可以發現在三種觀測方式中，我們利用收斂時間估計來選取最佳化參數的方式有最快的估測誤差收斂時間 0.078 秒。

圖 3.10 到圖 3.15 為情況二的模擬結果。圖 3.10 (a) 與 (b) 分別代表 ESO 和導引系統之間的狀態誤差  $e_1$  及  $e_2$ ，而 (c) 與 (d) 分別代表 STO 和導引系統之間的狀態誤差  $e_1$  及  $\dot{e}_1$ ，而 (e) 與 (f) 分別代表 OPTIMAL 和導引系統之間的狀態誤差  $e_1$  及  $\dot{e}_1$ ，我們將觀測器狀態  $z_1$  與  $\dot{q}$  間誤差的收斂狀況整理在下表。

表 3.3 目標為方波時三種觀測器的狀態  $z_1$  與  $\dot{q}$  間誤差收斂狀況比較表

觀測方式	性能指標(performance index)					
	飛行初期		目標第一次機動		目標第二次機動	
觀測方式	穩定度	收斂時間(s)	穩定度	收斂時間(s)	穩定度	收斂時間(s)
ESO	穩定	0.123	穩定	0.066	穩定	0.072
STO	穩定	0.077	穩定	0.028	穩定	0.043
OPTIMAL	穩定	0.033	穩定	0.015	穩定	0.017

圖 3.10 可以看出於 1 秒及 2 秒處有些許的變化，這是因為目標於 1 秒及 2 秒時突

然的機動所引起的，我們於表 3.3 檢視當目標發生機動後，觀測器狀態  $z_1$  與  $\dot{q}$  間誤差的收斂情形。我們定義穩定為狀態誤差的絕對值是否收斂到  $10^{-5}$  內，而收斂時間定義為狀態誤差之絕對值確保收斂到  $10^{-5}$  內所對應的時間，由表 3.3 可看出即使目標發生急遽變化，狀態誤差仍可盡快且盡可能地收斂到零附近，且再次驗證基於收斂時間估計進而選取最佳化參數的方式有最快的收斂時間。此外由圖 3.11 可以看出基於 Super-Twisting 演算法的控制律不存在切跳現象。另外，根據圖 3.10，觀測器之誤差系統(參照(3.5)與(3.13))於有限時間收斂至原點，其結果與 3.2 與 3.3 節理論分析一致。而估測結果與彈目相對距離成正比，故估測誤差隨著距離越遠而越大，導致圖 3.12 到圖 3.14 飛行初期估測結果有極大的振幅。隨後當狀態誤差進入穩態後，估測結果與目標訊號幾乎重合，但於 1 秒及 2 秒時目標突然的變化再次使得我們的估測結果一時無法追蹤到目標訊號，因此我們利用圖 3.15 來檢視估測結果與目標訊號之間的估測誤差方便探討目標突然機動時觀測器的追蹤情形，同時將觀測誤差收斂狀況整理在下表。這裡我們以符號 ESO 表示經由擴張狀態觀測器估測目標加速度之結果；符號 STO 表示經由 Super-Twisting 演算法估測目標加速度之結果；最後以符號 OPTIMAL 來表示基於 Super-Twisting 演算法並且進一步利用收斂時間估計選取最佳化參數的結果。

表 3.4 目標為方波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表

	性能指標(performance index)					
	飛行初期		目標第一次機動		目標第二次機動	
觀測方式	穩定度	收斂時間(s)	穩定度	收斂時間(s)	穩定度	收斂時間(s)
ESO	穩定	0.139	穩定	0.081	穩定	0.059
STO	穩定	0.13	穩定	0.065	穩定	0.037
OPTIMAL	穩定	0.08	穩定	0.046	穩定	0.03

圖 3.15 中(b)-(d)分別為(a)的局部放大圖，方便視其估測誤差收斂情形，我們將之



對照表 3.4，其中我們所談的穩定是指估測誤差的絕對值是否收斂到  $0.5\text{g}(\text{m/s}^2)$  內，另外收斂時間則定義為估測誤差的絕對值確保收斂到  $0.5\text{g}(\text{m/s}^2)$  時所對應的時間，可以發現即使目標突然機動仍可看出觀測器很快地追蹤到目標並且擁有不錯的估測精度，再次驗證觀測器之有效性。另一方面，由表 3.4與圖 3.15一樣可以發現在三種觀測方式中，我們利用收斂時間估計來選取最佳化參數的方式，其估測誤差於飛行初期有最快的收斂時間 0.08 秒，即使在 1 秒以及 2 秒時目標有  $+10\text{g}(\text{m/s}^2)$  與  $-10\text{g}(\text{m/s}^2)$  的突然變化，其估測誤差仍以最快的時間 0.046 秒與 0.03 秒追蹤到目標訊號。

另一方面，這裡我們選取ESO參數的基本原則是擴大不等式(3.8)來提高估測精度，但在情況二目標突然的變化勢必影響ESO的估測結果，因此我們將  $\alpha = 0.3$  增加至 0.4，讓fal函數的斜率變小也就是降低誤差的變化速率，使得估測結果不要有極大的變化給導引系統帶來衝擊。而STO的部分我們知道

$$\ddot{e}_1 = -\frac{k_1 \dot{e}_1}{2|e_1|^{0.5}} - k_2 \text{sgn}(e_1) + \dot{d} \quad (3.31)$$

然而在情況二目標突然地變化前，經由STO的設計  $e_1$  幾乎已經收斂至零，因此目標發生機動的那一瞬間(3.31)式極負，但我們希望接下來相平面  $(e_1, \dot{e}_1)$  軌跡下降緩一點，這是因為  $w_q$  的估測值與控制律  $u$  有關，而  $u$  又與  $e_1$  有關，因此我們將  $k_2 = 6$  下降至 4.5 用以降低控制律  $u$  的變化，使得估測結果不要有極大的變化給飛彈導引系統帶來衝擊。最後，綜合以上討論得到在本節ESO與STO參數的選取下，以誤差系統收斂時間估計選取最佳化參數的方式確實最快追蹤到目標訊號，也就是說有最快的觀測誤差收斂時間。

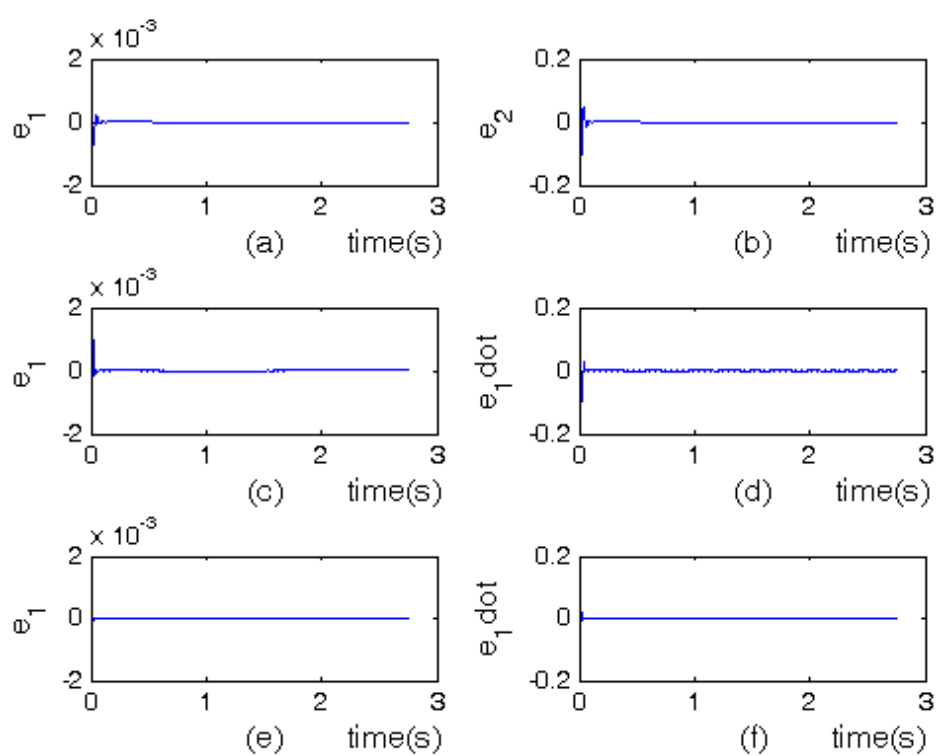


圖 3.4 目標為正弦波時三種觀測器的狀態誤差時間響應比較圖

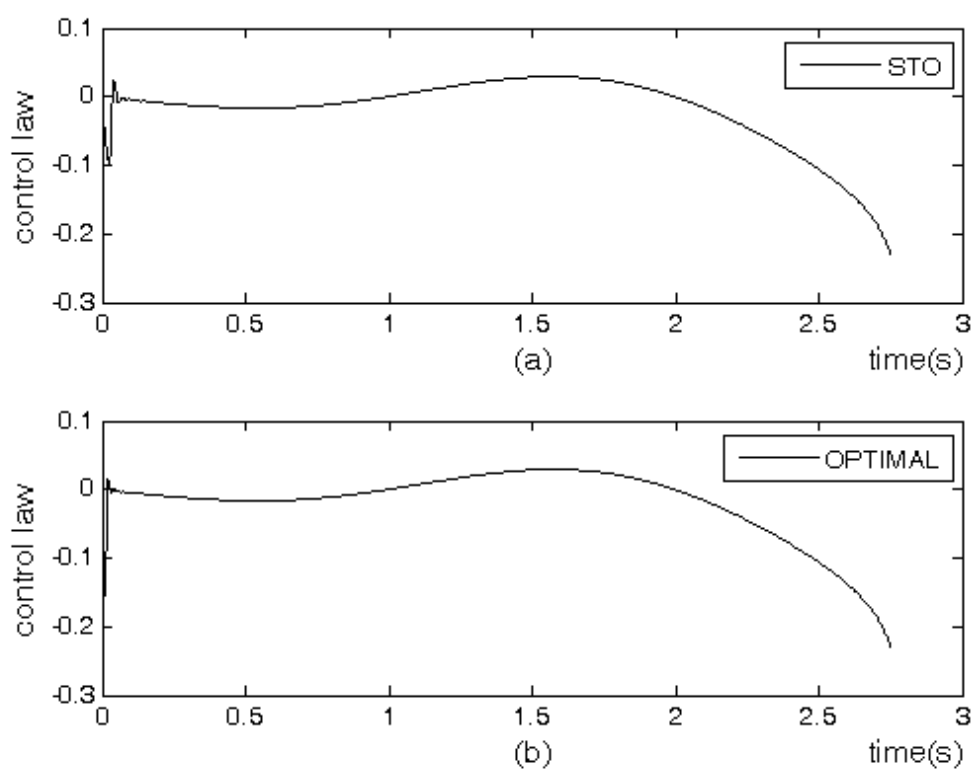


圖 3.5 當目標為正弦波時 Super-Twisting 控制律的時間響應圖

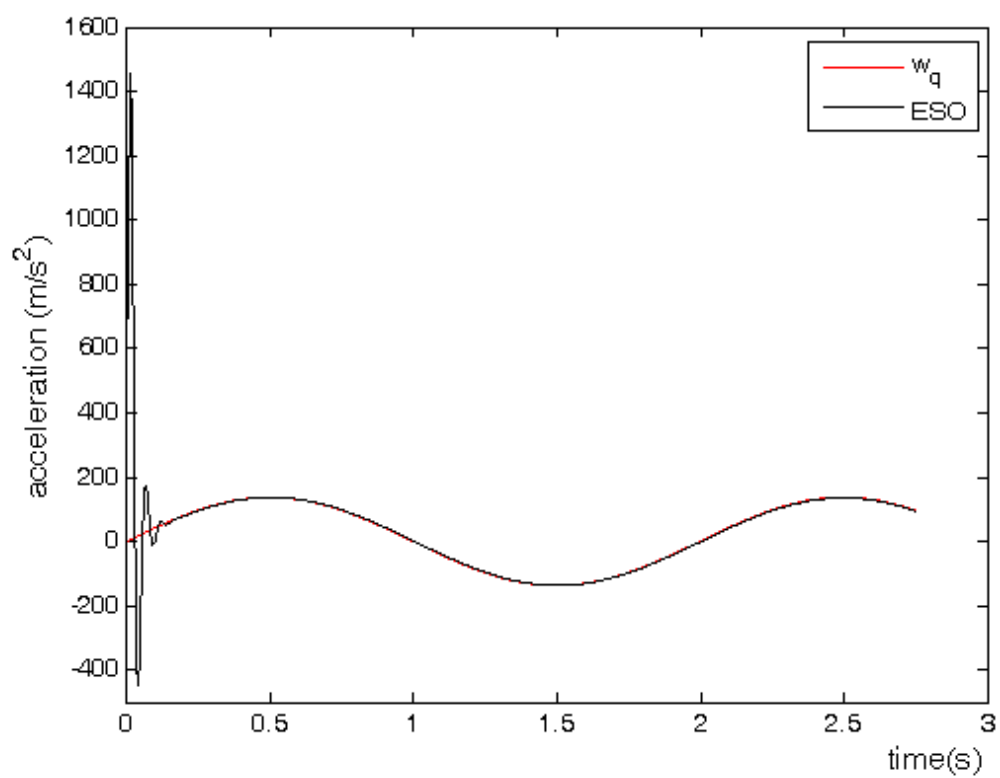


圖 3.6 正弦波之目標訊號與 ESO 之估測結果

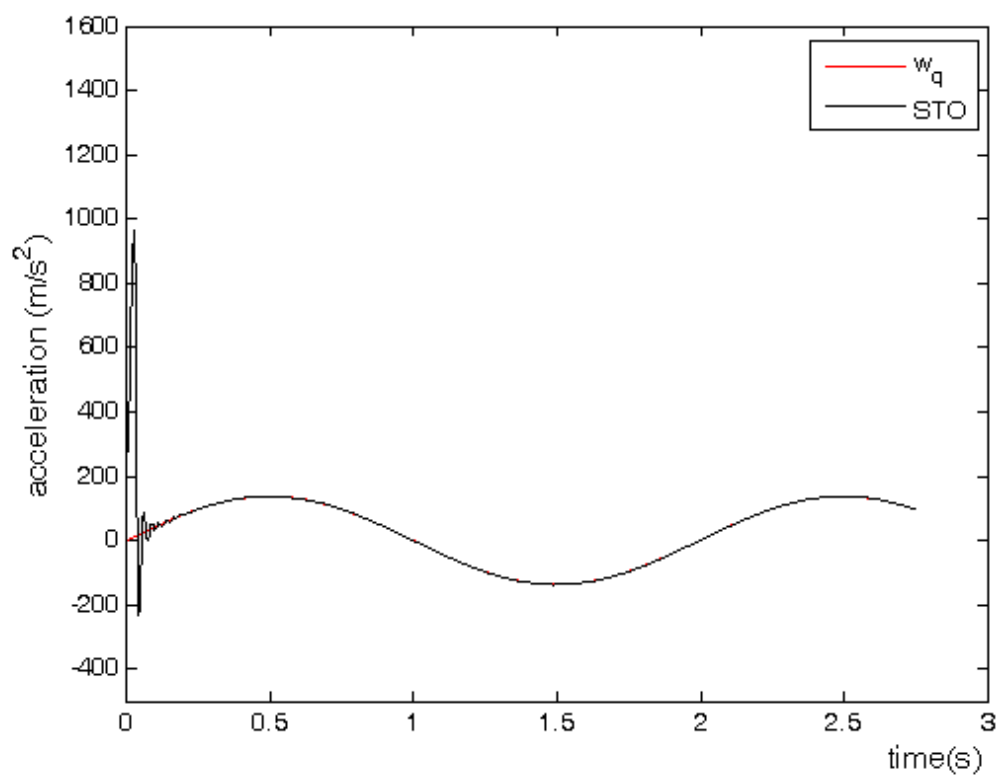


圖 3.7 正弦波之目標訊號與 STO 之估測結果

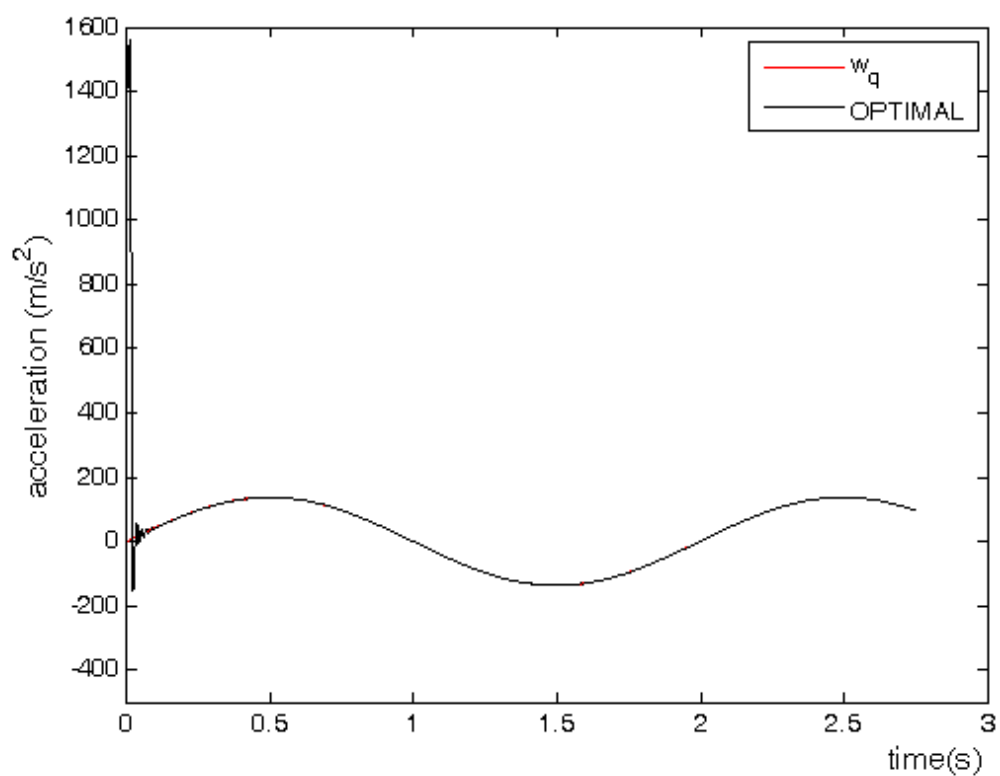


圖 3.8 正弦波之目標訊號與 OPTIMAL 之估測結果

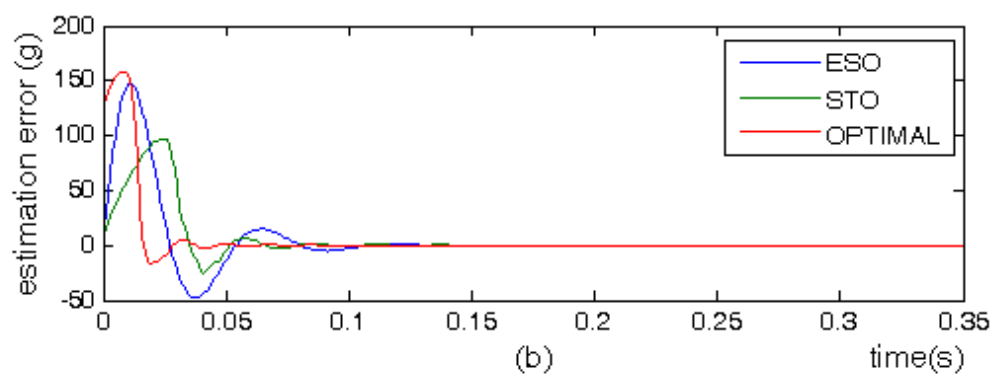
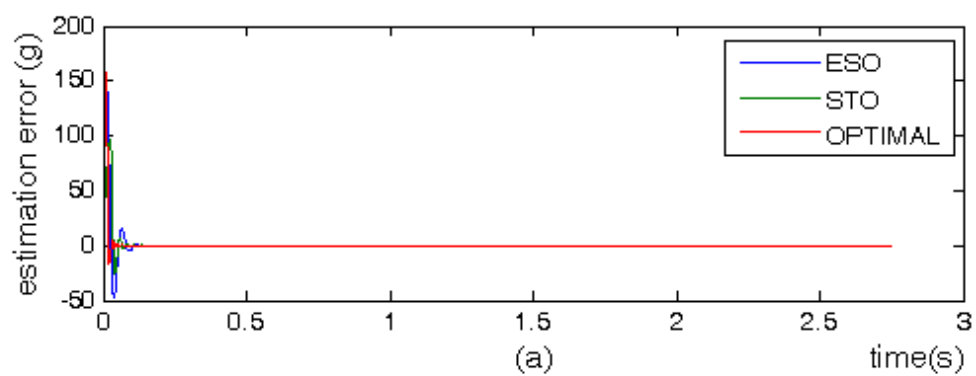


圖 3.9 目標為正弦波時三種觀測器之觀測誤差的時間響應比較圖

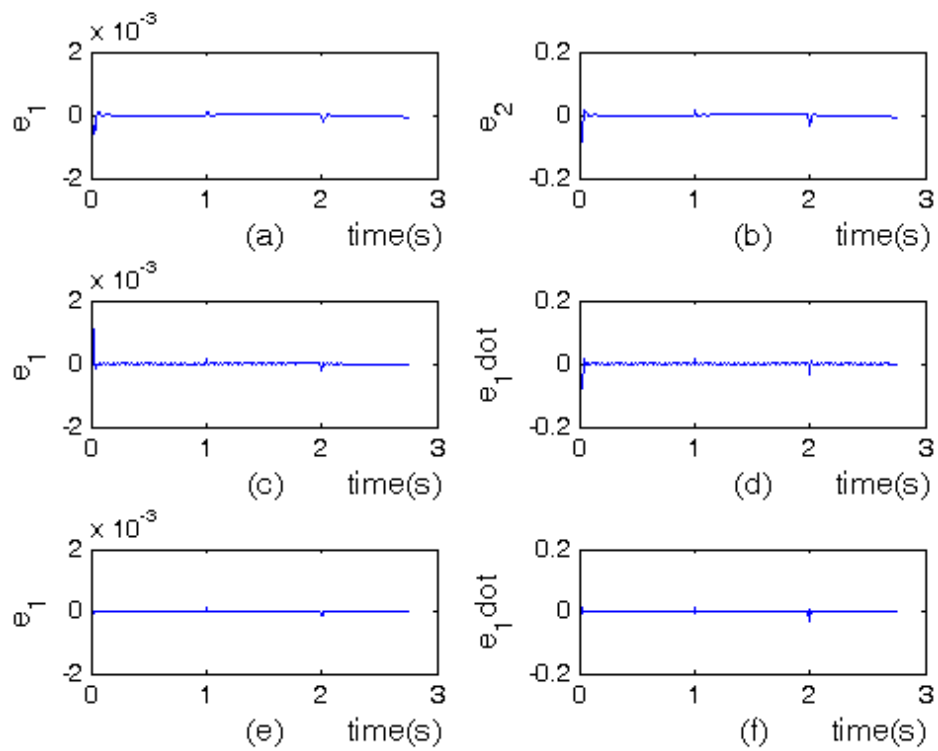


圖 3.10 目標為步階時三種觀測器的狀態誤差時間響應比較圖

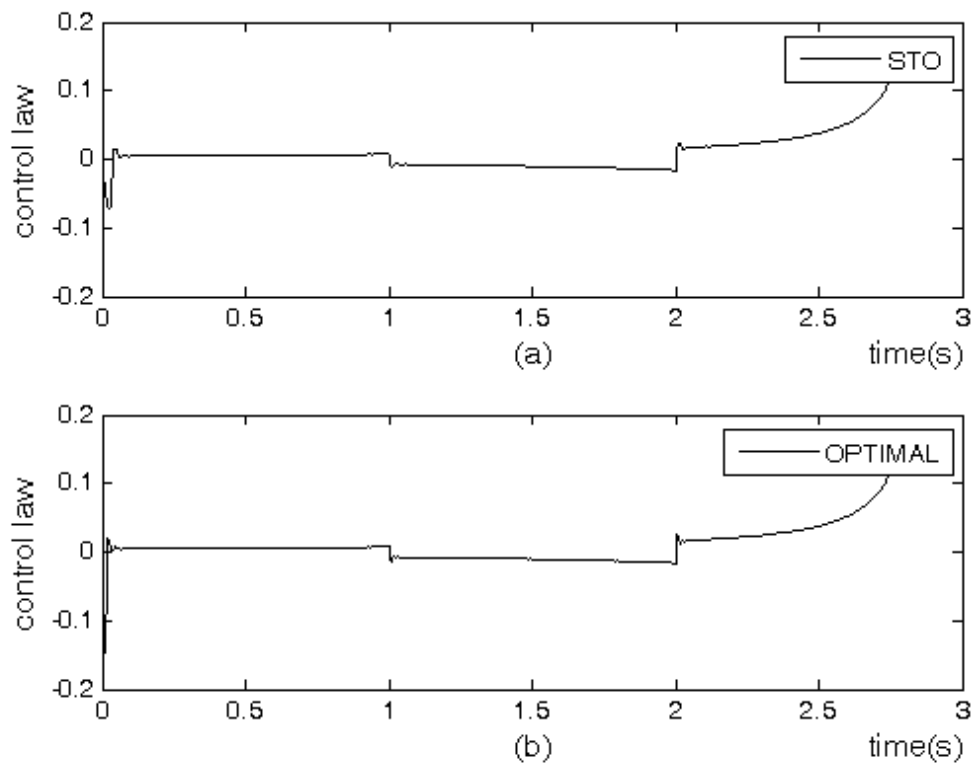


圖 3.11 當目標為步階時 Super-Twisting 控制律的時間響應圖

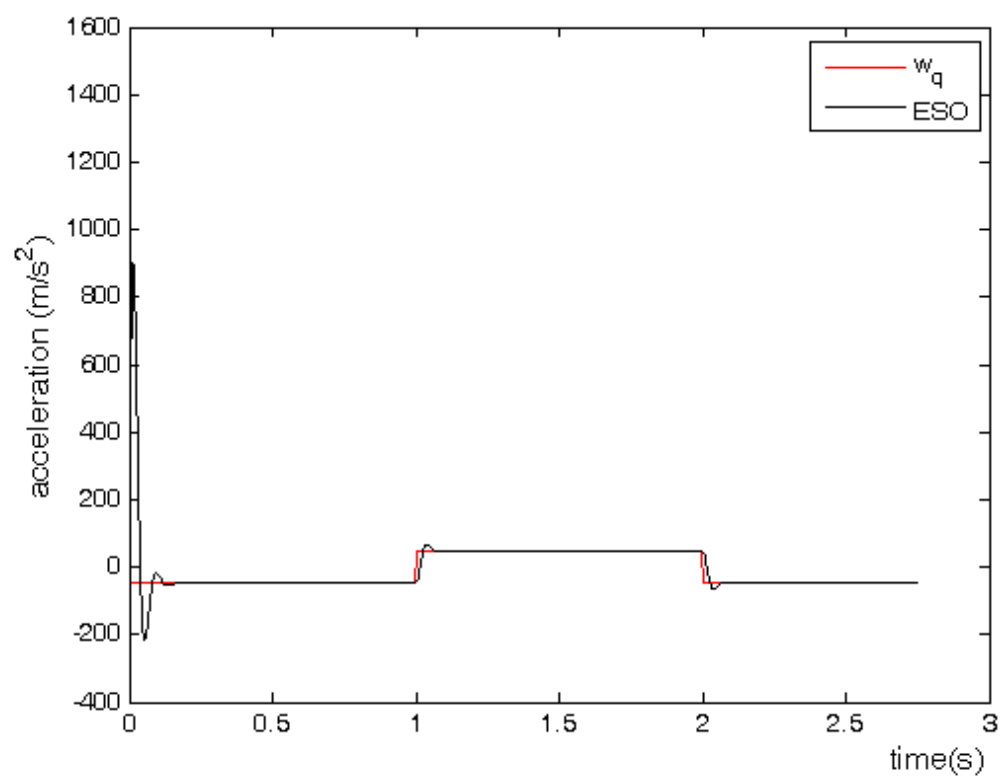


圖 3.12 方波之目標訊號與 ESO 之估測結果

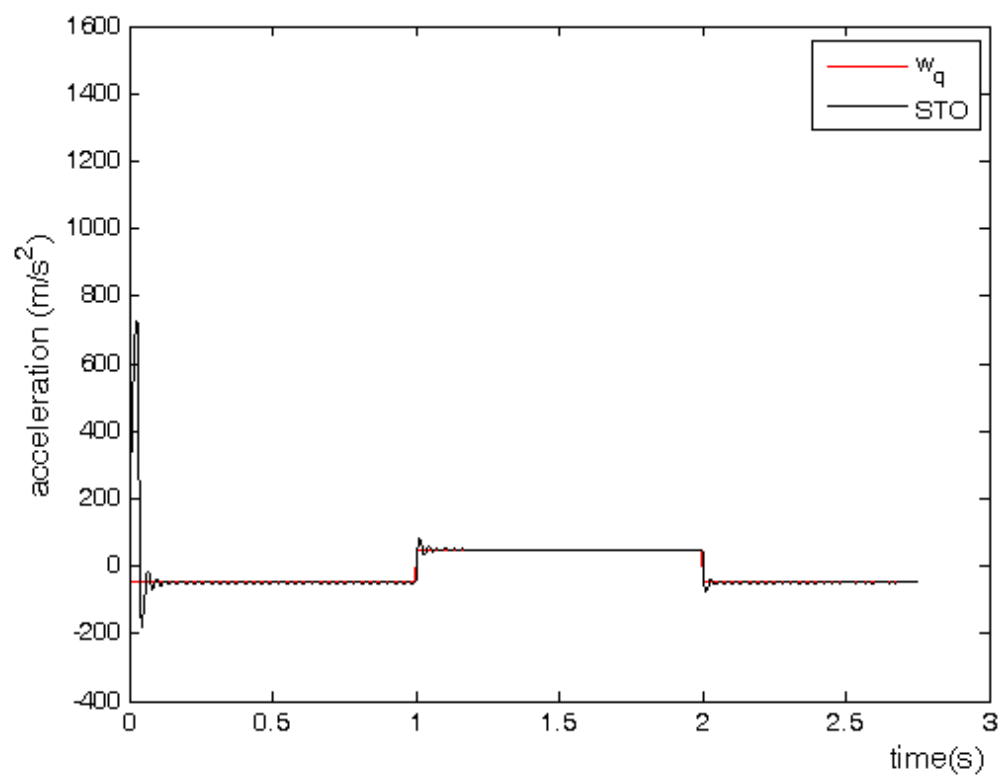


圖 3.13 方波之目標訊號與 STO 之估測結果

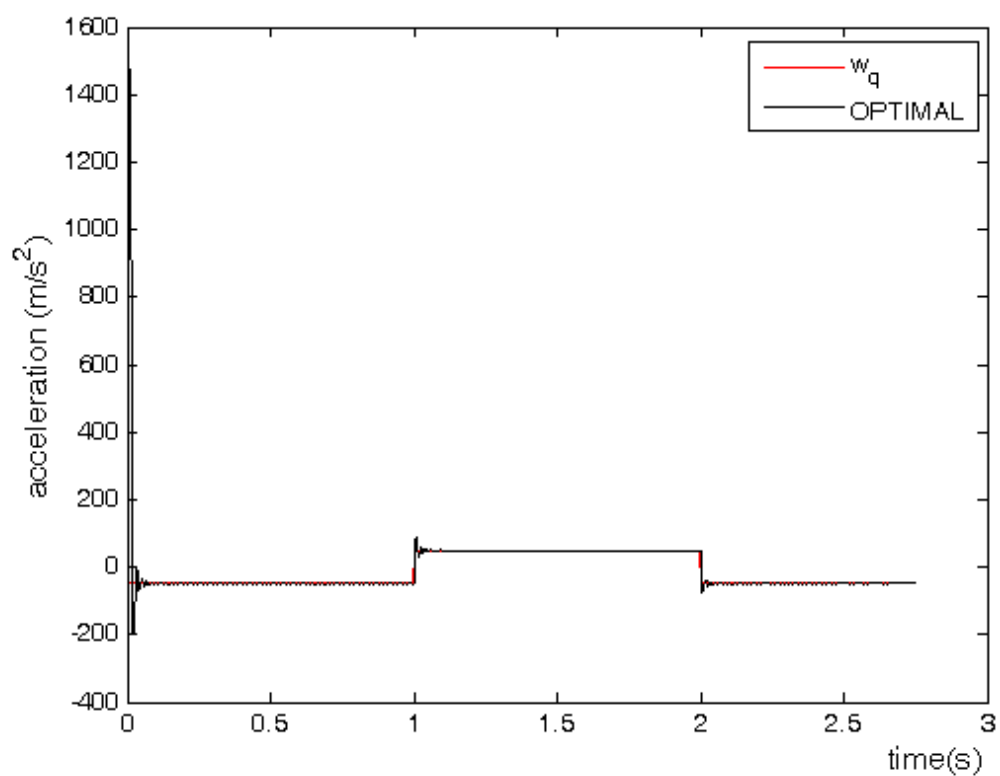


圖 3.14 方波之目標訊號與 OPTIMAL 之估測結果

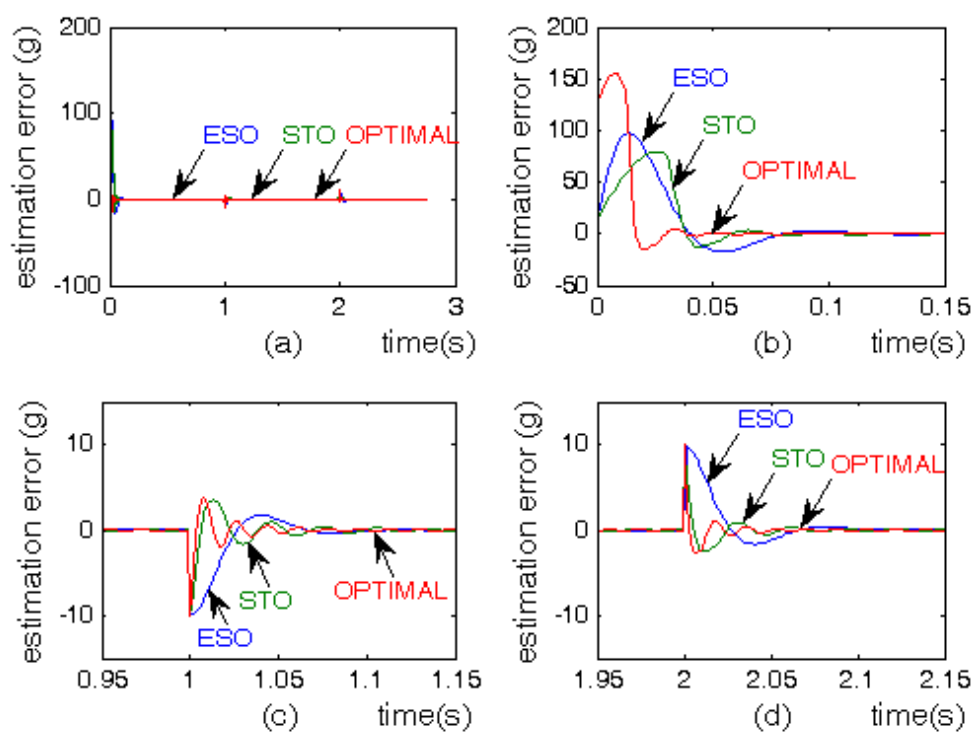


圖 3.15 目標為步階時三種觀測器之觀測誤差的時間響應比較圖



## 第 4 章

# 考慮真實導引系統存在輸出量測雜訊之機動目標加速度估測

對於實際的飛彈導引系統，由於硬體因素的限制，飛彈飛行過程中，尋標器 (missile seeker) 迴路往往存在無可避免的輸出雜訊干擾，然而這些雜訊會對機動目標的追蹤精度造成不良的影響，因而提高飛彈的誤失距離 (miss distance)。現有的觀測器雖然可以處理不確定性等問題，但大多數沒有考慮輸出雜訊干擾對系統的影響，或者是較為一般的做法是於控制迴路中使用濾波器對系統輸出進行濾波處理，以去除雜訊之干擾。但濾波後訊號的幅值 (amplitude) 與相位 (phase) 會與系統的真實輸出產生較大的差異，若直接以此輸出來建構觀測器，勢必造成非預期的估測誤差 (estimation error)。除此之外，尋標器迴路中存在著追蹤迴路時間常數，此模式將導致系統輸出的相位損失，亦即在尋標器雜訊模式下，對於目標估測將產生很大的影響。有鑑於此，本論文透過微分器 (differentiator) 的應用，先對含有雜訊之系統輸出進行濾波從而得到濾波後之訊號以及其微分訊號，並且進一步利用濾波後之訊號及其微分訊號補償經由尋標器所造成系統輸出的相位損失，隨後與觀測器結合從而得到機動目標加速度的估測值。

在本章中，我們將在 4.1 節介紹飛彈導引系統中的尋標器模式與主要輸出雜訊來源，接著，在 4.2 節中，我們將探討尋標器作為微分器之含義與雜訊放大的根本原因並進一步分析雜訊之特性，而在 4.3 節我們設計補償機制來對導引系統中尋標器之輸出進行雜訊濾波與相位補償，最後 4.4 節，我們將補償機制結合擴張狀態觀測器與滑模觀測器兩種估測方式，同樣以第三章中飛彈目標相對運動模型為例子來進行模擬，並且比較補償前與補償後的估測結果以及分析討論兩種觀測器的模擬結果。

## 4.1 問題描述

尋標器主要的功能在於搜尋以及追蹤目標，其基本組成包含感測器與接收器。感測器用以追蹤感應目標之訊號，而接收器接收感測器所提供之訊號並加以處理，從而得到飛彈與目標之間的相對運動特性。然而，尋標器存在某些雜訊干擾以及整個追蹤迴路時間常數約莫 0.1 秒[29]，此模式的限制將影響飛彈導引的追蹤精度。因此，在本章中我們主要的目的為，考慮實際導引系統中尋標器模式的限制並分析其特性，將這些干擾及其所造成之時間延遲有效地抑制及補償，進而結合觀測器估測目標加速度以供設計導引律時使用。在此我們先介紹本論文考慮之尋標器其雜訊來源，主要包括兩種形態[29]：

(i)  $u_{RNA}$ ：其強度與飛彈和目標間距離平方呈正比。

(ii)  $u_{FN}$ ：其強度不隨彈目相對距離而改變。

詳細尋標器模式參照圖 4.1，本論文將透過理論分析設計觀測器估測目標加速度，再利用 Simulink 程式來模擬終端導引階段目標加速度估測之結果。

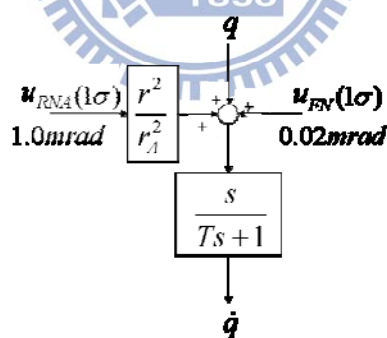


圖 4.1 尋標器模式示意圖

圖 4.1 說明尋標器雜訊模式，其中追蹤迴路時間常數  $T$  為 0.1 秒， $r_A$  為尋標器參數 10000 公尺， $u_{RNA}$  為屬於高斯雜訊(Gaussian Noise)其均值(mean)為零，標準差(standard deviation)為  $10^{-3}$ ，而  $u_{FN}$  同樣屬於高斯雜訊其均值為零，標準差為  $2 \times 10^{-5}$ 。由於此模式的限制將導致  $\dot{q}$  存在量測雜訊，另一方面，量測飛彈目標相對距離  $r$ 、相對速率  $\dot{r}$ 、及視線角  $q$  之精度甚高，故本論文將此視為無誤差之量測量。整個

觀測導引迴路如下圖所示。

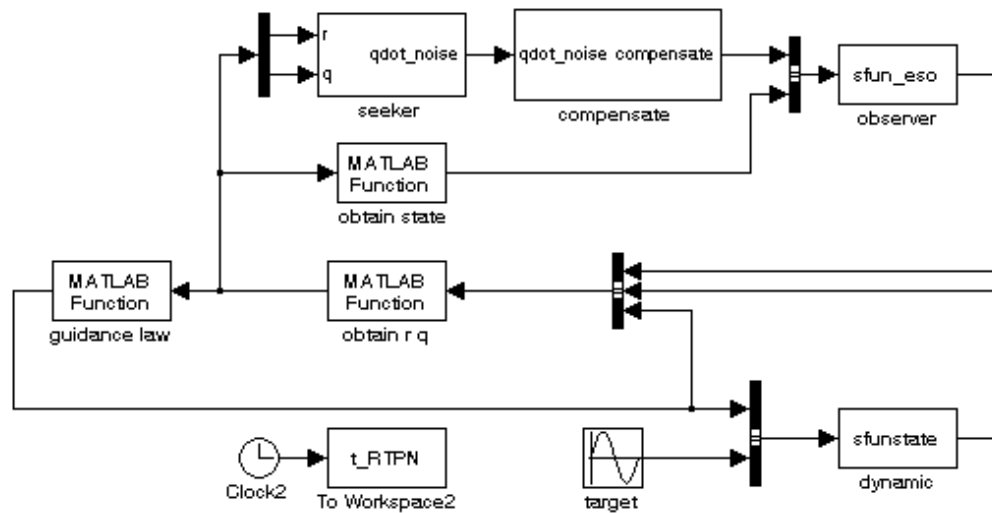


圖 4.2 考慮輸出雜訊的導引系統方塊圖

圖 4.2說明經由量測得到 $r$ 、 $\dot{r}$ 、及 $q$ 後再透過尋標器模式得到受雜訊污染的 $\dot{q}$ ，接著我們將於 4.3 節設計補償機制補償尋標器輸出雜訊對系統的影響，並於 4.4 節與觀測器結合從而得到目標加速度。而導引過程相對距離與雜訊之關係如下

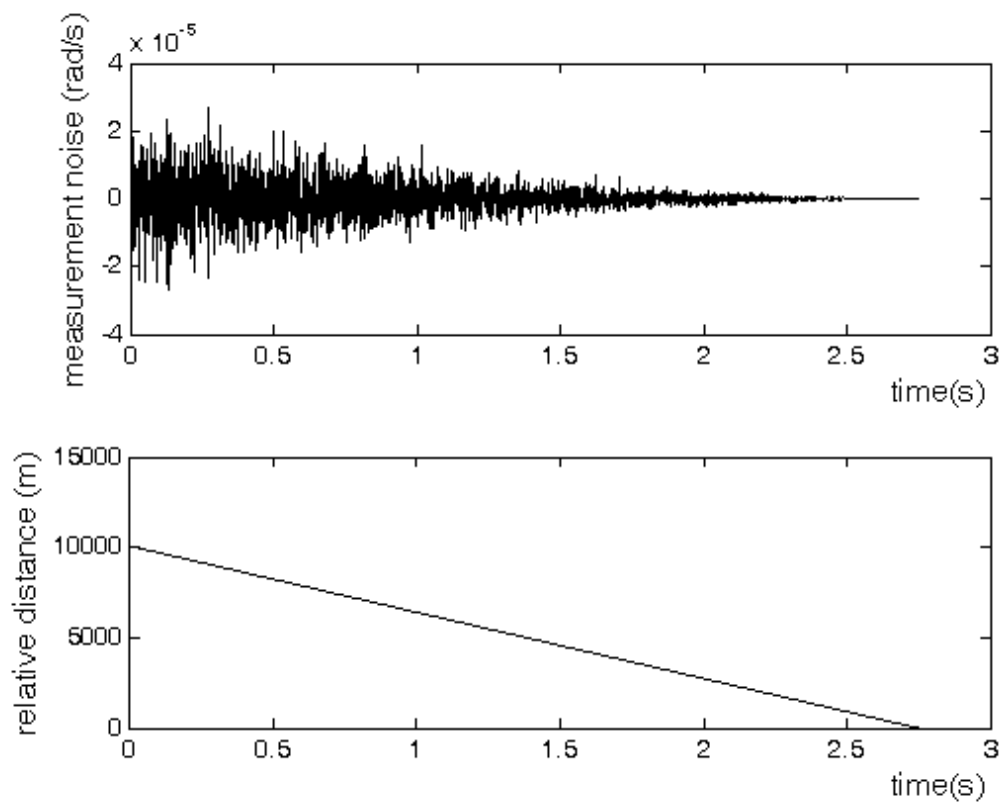


圖 4.3 彈目相對距離與量測雜訊之關係

## 4.2 尋標器雜訊放大效應

由圖 4.3 可看出彈目相對距離越遠，雜訊對系統輸出的影響越大。本節中我們理論分析尋標器雜訊放大的原因，我們首先討論尋標器如何提取微分訊號  $\dot{q}$ ，

考慮圖 4.1 尋標器模式中  $\frac{s}{Ts+1}$  的部分，我們令

$$y = \frac{s}{Ts+1} v \quad (4.1)$$

其中  $T$  為尋標器追蹤迴路時間常數，並假設  $v$  為給定輸入訊號。我們可以將(4.1)式寫為

$$y = \frac{1}{T} \left( 1 - \frac{1}{Ts+1} \right) v \quad (4.2)$$

接下來令  $\frac{1}{Ts+1} v = \bar{v}$ ，則(4.2)式成為

$$y = \frac{1}{T} (v - \bar{v}) \quad (4.3)$$

針對上式  $\bar{v}$  的部分，我們知道當  $\bar{v}$  變化較為減緩且時間常數  $T$  較小時，可近似為  $\bar{v} \approx v(t-T)$ ，故(4.3)可進一步近似為

$$y \approx \frac{1}{T} (v - v(t-T)) \approx \dot{v} \quad (4.4)$$

此即尋標器提取輸入訊號之微分訊號的含義。然而，參照圖 4.1 我們知道輸入訊

號  $v = q + \left( \frac{r}{r_A} \right)^2 \cdot u_{RNA} + u_{FN}$  已被雜訊汙染，便於討論我們令  $n = \left( \frac{r}{r_A} \right)^2 \cdot u_{RNA} + u_{FN}$ ，

亦即  $v = q + n$ ，接著對照(4.3)式可知含有雜訊之輸入訊號經由尋標器所得到的系統輸出可表示為下圖

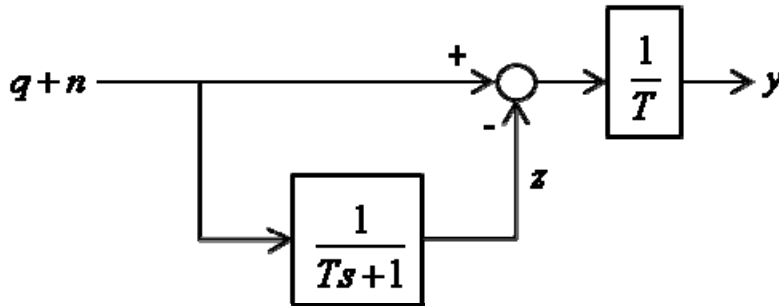


圖 4.4 尋標器追蹤迴路方塊圖

根據圖 4.4得知

$$y = \frac{1}{T}(q + n - z) \quad (4.5)$$

且當時間常數 $T$ 較小時， $z$ 滿足微分方程

$$\dot{z} = \frac{1}{T}(q + n - z) \quad (4.6)$$

接著對(4.6)式進行求解，我們可求得 $z$ 如下

$$z = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} q(\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} n(\tau) d\tau \quad (4.7)$$

由於尋標器 $u_{RNA}$ 與 $u_{FN}$ 皆為均值為零的雜訊，因此 $\frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} n(\tau) d\tau$ 幾乎為零。

故 $z$ 可近似為

$$z \approx \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} q(\tau) d\tau \approx q(t-T) \quad (4.8)$$

將(4.8)式帶回(4.5)式得

$$\begin{aligned} y &\approx \frac{1}{T}(q + n - q(t-T)) \\ &= \frac{1}{T}(q - q(t-T) + n) \\ &\approx \dot{q} + \frac{n}{T} \end{aligned} \quad (4.9)$$

此即為理論上雜訊放大之原因。然而 $u_{RNA}$ 與 $u_{FN}$ 為高斯雜訊，在此為了分析尋標器模式對系統輸出之影響，為了幫助討論，本論文中，若隨機變量 $X$ 為常態分佈，且其均值(mean)為 $\mu$ ，變異數(variance)為 $\sigma^2$ ，我們記為 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。我們先介紹將用到的常態分布之隨機訊號的一些性質[30]如下，

一、如果 $P \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 $\mu$ 為隨機變量 $P$ 之均值、 $\sigma^2$ 為 $P$ 之變異數，對於

$$a, b \in \mathbb{R}, \text{ 則 } (aP + b) \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)。$$

二、如果 $P \sim N(\mu_P, \sigma_P^2)$ 與 $Q \sim N(\mu_Q, \sigma_Q^2)$ 為統計獨立的常態隨機變量，那麼

$$(P + Q) \sim N(\mu_P + \mu_Q, \sigma_P^2 + \sigma_Q^2)。$$

接下來，我們檢視彈目相對距離為 10112、7000、3400 公尺時，雜訊之隨機行為。

I. 相對距離為 10112 公尺，對於  $n = \left(\frac{r}{r_A}\right)^2 \cdot u_{RNA} + u_{FN}$  而言， $\left(\frac{r}{r_A}\right)^2 \approx 1.0225$ ，

根據上面性質，我們知道  $n \sim N\left(1.0225\mu_{RNA} + \mu_{FN}, (1.0225\sigma_{RNA})^2 + \sigma_{FN}^2\right)$ 。

II. 相對距離為 7000 公尺，對於  $n = \left(\frac{r}{r_A}\right)^2 \cdot u_{RNA} + u_{FN}$  而言， $\left(\frac{r}{r_A}\right)^2 = 0.49$ ，根據

上面性質一、二我們知道  $n \sim N\left(0.49\mu_{RNA} + \mu_{FN}, (0.49\sigma_{RNA})^2 + \sigma_{FN}^2\right)$ 。

III. 相對距離為 3400 公尺，對於  $n = \left(\frac{r}{r_A}\right)^2 \cdot u_{RNA} + u_{FN}$  而言， $\left(\frac{r}{r_A}\right)^2 = 0.1156$ ，根

據上面性質一、二我們知道  $n \sim N\left(0.1156\mu_{RNA} + \mu_{FN}, (0.1156\sigma_{RNA})^2 + \sigma_{FN}^2\right)$ 。

在以上三種距離時，其雜訊之特性我們整理如下

表 4.1 雜訊之特性

相對距離(m)	$n \sim N(\mu, \sigma^2)$
10112	$n \sim N(0, 1.046 \cdot 10^{-6})$
7000	$n \sim N(0, 2.405 \cdot 10^{-7})$
3400	$n \sim N(0, 1.3763 \cdot 10^{-8})$

根據常態分佈的機率密度函數可知約有 99.73% 的面積在均值左右三個標準差的範圍內[30]。故由以上分析知當彈目相對距離為 10112 公尺時，約有 99.73% 在  $\pm 0.0031$  的範圍內；當彈目相對距離為 7000 公尺時，約有 99.73% 在  $\pm 0.0015$  的範圍內；而當彈目相對距離為 3400 公尺時，約有 99.73% 在  $\pm 0.00035$  的範圍內。舉這三處相對距離為例的用意為我們可以利用性質一與性質二來推估導引過程中雜訊之隨機行為可能對系統輸出的影響，從而設計補償機制，彌補尋標器對系統輸出的不良影響，以供後續觀測器使用得到精確的機動目標加速度估測值。

## 4.3 尋標器雜訊干擾與補償

### 4.3.1 雜訊濾除

我們知道若直接以含有雜訊之系統輸出來建構觀測器，勢必降低觀測精度。

因此我們根據Levant所提及之線性微分器(linear differentiator) [31]如下所示

$$\frac{s}{(Ts+1)^2} \quad (4.10)$$

它可以有效減弱雜訊之影響並且提取微分訊號，因此我們於尋標器後串接一個低

通濾波器  $\frac{1}{T_2s+1}$ ，達到(4.10)式線性微分器的效果。接下來我們用simulink來檢視

利用此方式實現雜訊濾波同時提取微分訊號的效果如下。

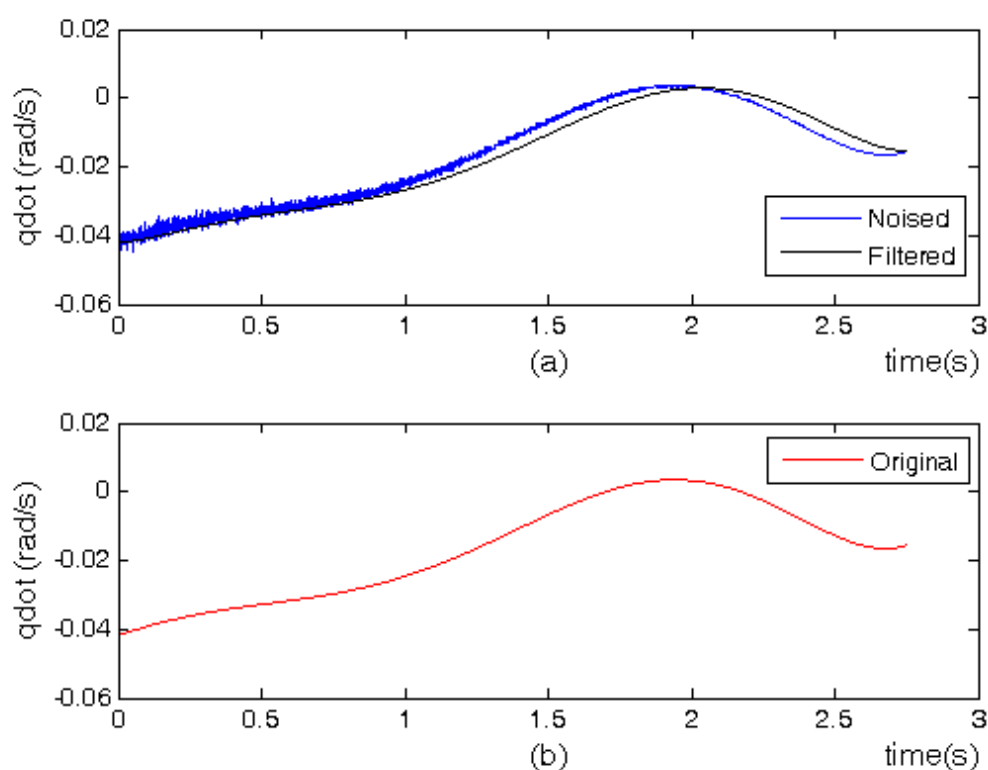


圖 4.5 利用線性濾波器濾除輸出雜訊之響應圖

圖 4.5(b)為無量測雜訊時 $\dot{q}$ 對時間之響應，以符號ORIGINAL表示，而(a)中NOISED代表真實導引系統中，尋標器存在量測雜訊時系統輸出 $\dot{q}$ 對時間之響應，

FILTERED則代表於尋標器後串接一個低通濾波器 $\frac{1}{T_2s+1}$ ，使其與尋標器結合作



為線性微分器之效果，由此圖可看出飛行初期雜訊之干擾極大，而濾波後雖可有效的消滅雜訊訊號，卻也同時造成系統輸出的相位延遲。

### 4.3.2 相位補償

接下來我們將設計補償機制彌補經由低通濾波器所造成估測訊號之相位延遲。我們的想法是使用尤拉法的概念來預估  $h$  時刻後  $\dot{q}$  的值，用以修正相位損失。

其示意圖如下所示

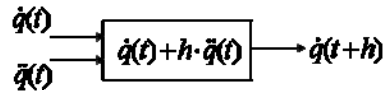


圖 4.6 相位補償方塊圖

然而此想法需要  $\ddot{q}$  的資訊，但  $\ddot{q}$  無法由尋標器量測得到，因此我們設計微分器來盡可能地追蹤輸入訊號  $\dot{q}$  以及進一步提取其微分訊號。在這裡我們一樣以基於 ESO 及 STO 的方式設計微分器(Differentiator)並與線性微分器比較提取微分訊號之效果。為便於討論，我們將濾波後具延遲之  $\dot{q}$  以符號  $\dot{q}_{delay}$  表示，並令其為  $f$ ，這裡我們假設  $f$  對時間的導函數為有界的，即  $|\dot{f}| \leq C, \forall t \geq 0$ 。則以 ESO 作為微分器之設計如下

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \beta_1 e_1 \\ \dot{z}_2 = -\beta_2 \text{fal}(e_1, \alpha, \delta) \\ e_1 = z_1 - f \end{cases} \quad (4.11)$$

依據第二章的討論我們可以選取適當的 ESO 參數使得  $z_1 \rightarrow f$ ， $z_2 \rightarrow \dot{f}$ 。另一方面，以 STO 作為微分器之設計如下

$$\dot{z} = u \quad (4.12)$$

其控制律  $u$  為

$$\begin{cases} u = -k_1 |z - f|^{0.5} \text{sgn}(z - f) + u_2 \\ \dot{u}_2 = -k_2 \text{sgn}(z - f) \end{cases} \quad (4.13)$$

若滿足下列假設，則  $z \rightarrow f$ ， $u \rightarrow \dot{f}$ 。

**假設 4.1[31]：**

控制律之參數滿足  $k_1^2 \geq 4C \frac{k_2 + C}{k_2 - C}$ ， $k_2 > C$ 。

我們設計三種合成訊號來比較此兩種微分器與線性微分器追蹤微分訊號之效果

1.  $f_1(t) = \sin(t) + 5t$
2.  $f_2(t) = \sin(t) + 5t + 0.01\cos(10t)$
3.  $f_3(t) = \sin(t) + 5t + 0.001\cos(30t)$

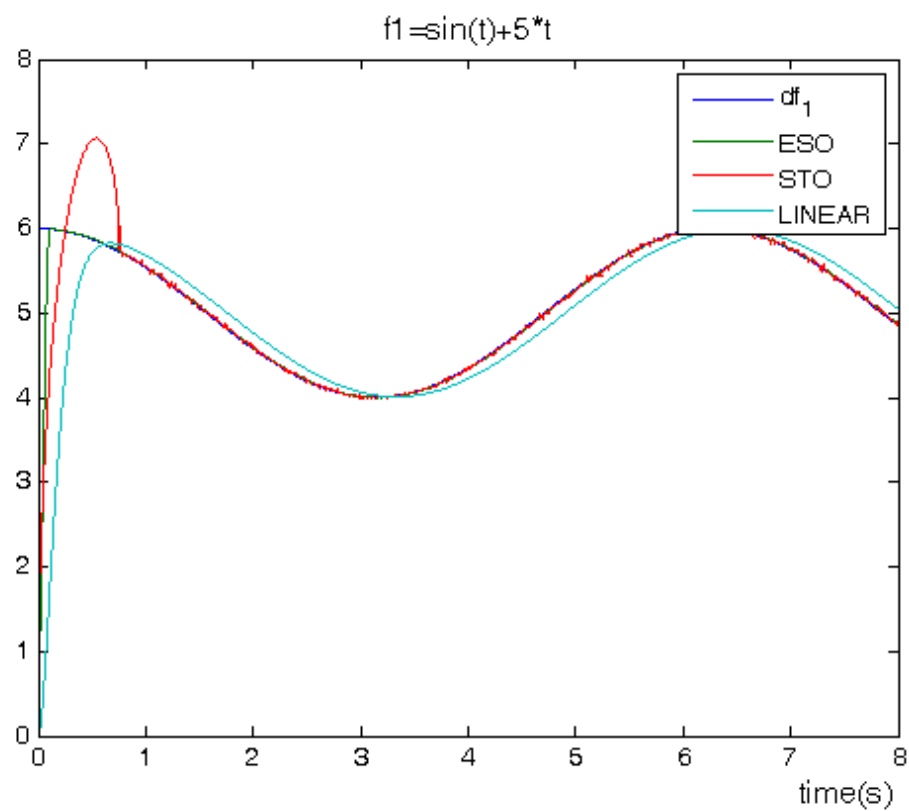


圖 4.7 利用微分器跟蹤  $f_1$  之微分訊號之比較圖

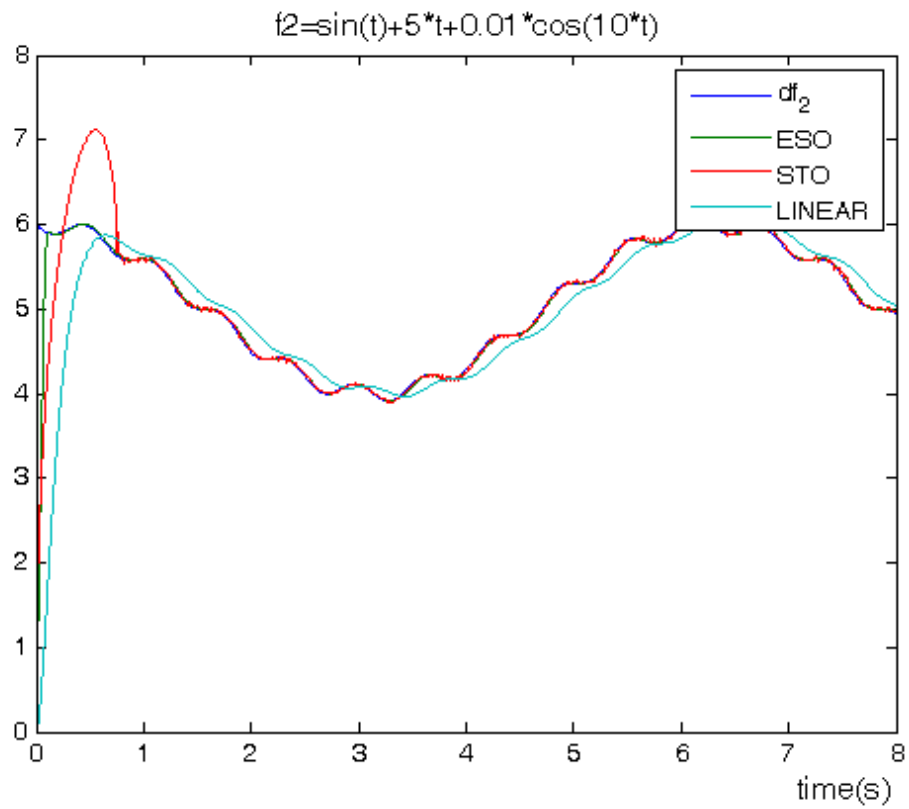


圖 4.8 利用微分器跟蹤  $f_2$  之微分訊號之比較圖

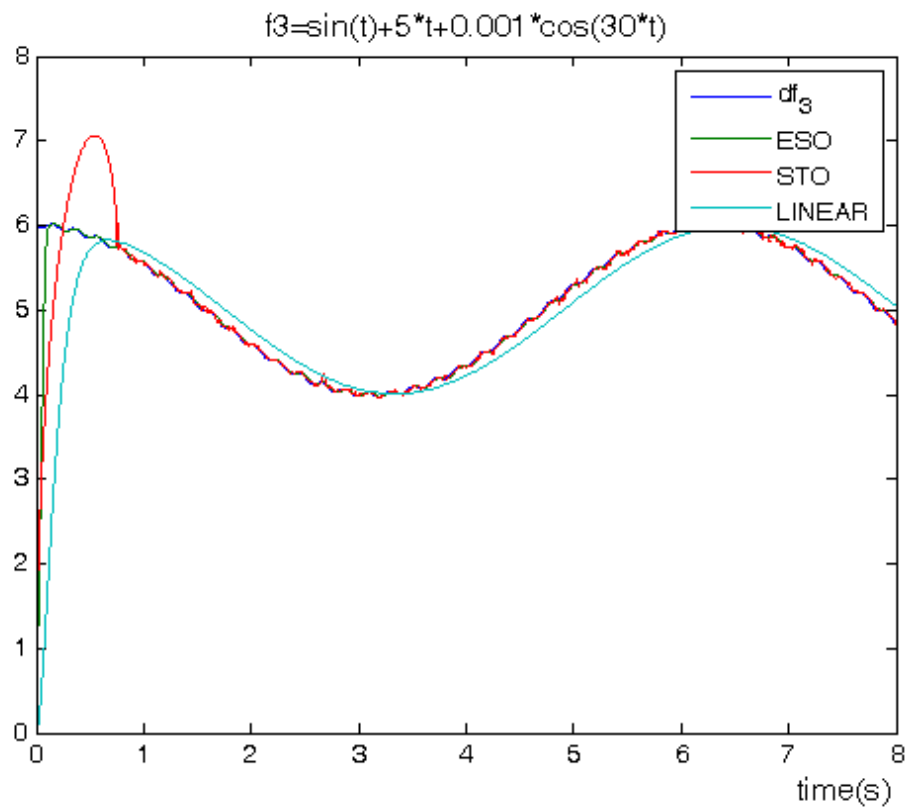


圖 4.9 利用微分器跟蹤  $f_3$  之微分訊號之比較圖

圖 4.7到圖 4.9為 $f$ 之微分訊號以及經由三種微分器所提取的近似微分訊號對時間之響應圖。我們以 $df$ 來表示 $f$ 之微分訊號，以ESO來表示利用ESO提取微分訊號之結果，以STO來表示利用STO提取微分訊號之結果。由此可看出線性微分器提取微分訊號的能力較為不佳，因此我們將利用ESO及STO來提取 $\dot{q}$ 的近似微分訊號用以補償相位延遲。

至於微分器參數的選取，文獻[31]給出STO可選取 $k_1 = \sqrt{C}$ ， $k_2 = 1.1C$ ，或 $k_1 = 0.5\sqrt{C}$ ， $k_2 = 4C$ ，文獻[32]給出對於 $0 < p < 1$ ， $k_1 > \sqrt{\frac{2}{k_2 - C} \frac{(k_2 + C)(1 + p)}{(1 - p)}}$ ， $k_2 > C$ ，皆可選用，顯然STO已有一套比較完整的理論體系。另一方面，應用ESO來解決實際控制工程問題時卻遇到可調參數太多的難題，文獻[6]透過大量模擬研究得到與菲波納奇數列(Fibonacci Sequence)緊密相關的參數數列，如表 4.2所示，並指出用這些參數設計的線性ESO跟蹤七階以下的狀態仍然有不錯的效果。

表 4.2 擴張狀態觀測器之參數與菲波納奇數列

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
$\frac{1}{h}$	$\frac{1}{(3h)^1 h}$	$\frac{1}{(8h)^2 h}$	$\frac{1}{(13h)^3 h}$
$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
$\frac{1}{(21h)^4 h}$	$\frac{1}{(34h)^5 h}$	$\frac{1}{(55h)^6 h}$	$\frac{1}{(89h)^7 h}$

在實際應用中可把表 4.2作為參考值，在其附近選取合適的參數，然而 $h$ 的不同取法對提取微分訊號的效果會有很大的差異，這裡我們檢視利用ESO對正弦訊號的頻域特性，也就是選定 $h$ 之後，對於輸入 $f(t) = A\sin(\omega t)$ 而言，當系統進入穩態時，其響應幾乎為 $A'\sin(\omega t + \varphi)$ ，這裡我們以 $\log(\omega)$ 為X軸， $20\log(\frac{A'}{A})$ 為Y軸，作為ESO系統的幅頻響應(Amplitude response)，以 $\log(\omega)$ 為X軸， $\varphi$ 為Y軸，作

為ESO系統的相位響應(Phase response)。如圖 4.10所示。

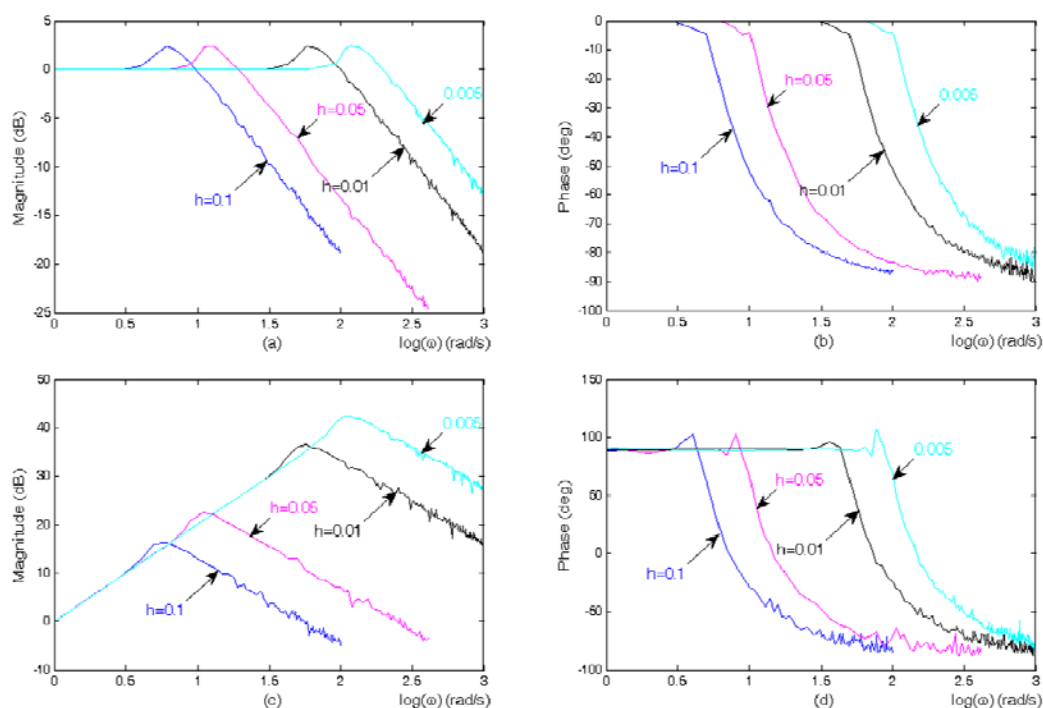


圖 4.10 基於 ESO 之頻率響應圖

圖 4.10(a)與(b)為  $f(t)$  到輸出  $z_1$  之間的幅頻與相頻響應，可看出其關係為一低通濾波器，而(c)與(d)為  $f(t)$  到輸出  $z_2$  之間的幅頻與相頻響應，可看出其關係為一帶通濾波器。此圖同時顯示在截止頻率(cutoff frequency)之前，輸出訊號  $z_1$  對於  $f(t)$  之振幅幾乎一致，而輸出訊號  $z_2$  對於  $f(t)$  之幅頻有極接近  $+20\text{dB/decade}$  的斜率，且相頻幾乎領先  $90^\circ$ 。在此我們以同樣分析方式另外考察由STO衍生的系統[6]之頻率響應，其系統形如

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -|z_1|^{0.5} \text{sgn}(z_1) - z_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

系統(4.14)收斂軌跡如下所示

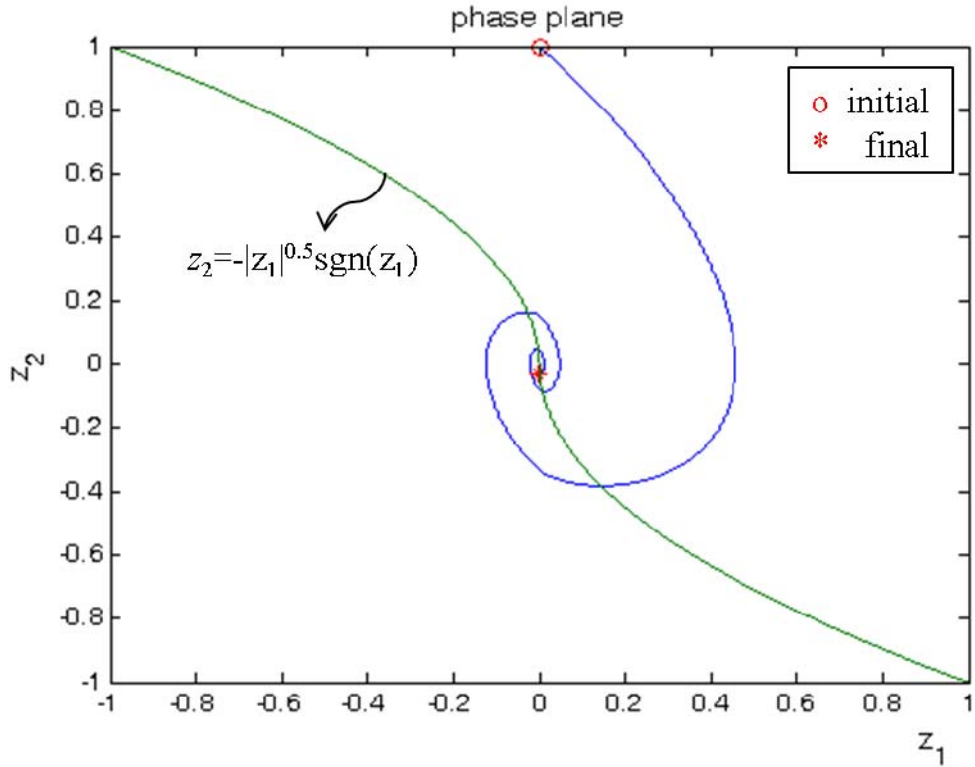


圖 4.11 衍生 STO 系統收斂軌跡

我們欲用系統(4.14)作為微分器提取  $f(t)$  及其微分訊號，故將(4.14)式設計成

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -p^2 |z_1 - f|^{0.5} \text{sgn}(z_1 - f) - pz_2 \end{cases} \quad (4.15)$$

其中參數  $p$  影響系統收斂速度，選取適當的  $r$  使得  $z_1$  盡快跟蹤輸入訊號  $f$ ， $z_2$  盡快跟蹤輸入訊號  $f$  之近似微分訊號。這裡我們同樣以  $f(t) = A \sin(\omega t)$  作為輸入訊號，考察系統進入穩態後其頻率響應如圖 4.13 與圖 4.14 所示。由圖 4.13 與圖 4.14 之(a)與(b)為  $f(t)$  到輸出  $z_1$  之間當  $r$  值改變時幅頻及相頻響應，可看出其關係為一低通濾波器，而圖 4.13 與圖 4.14 之(c)與(d)為  $f(t)$  到輸出  $z_2$  之間當  $r$  值改變時幅頻及相頻響應，可看出其關係為一帶通濾波器。此圖同時顯示在截止頻率之前，輸出訊號  $z_1$  對於  $f(t)$  之振幅幾乎一致，而輸出訊號  $z_2$  對於  $f(t)$  之幅頻有極接近  $+20\text{dB/decade}$  的斜率，且相頻幾乎領先  $90^\circ$ 。

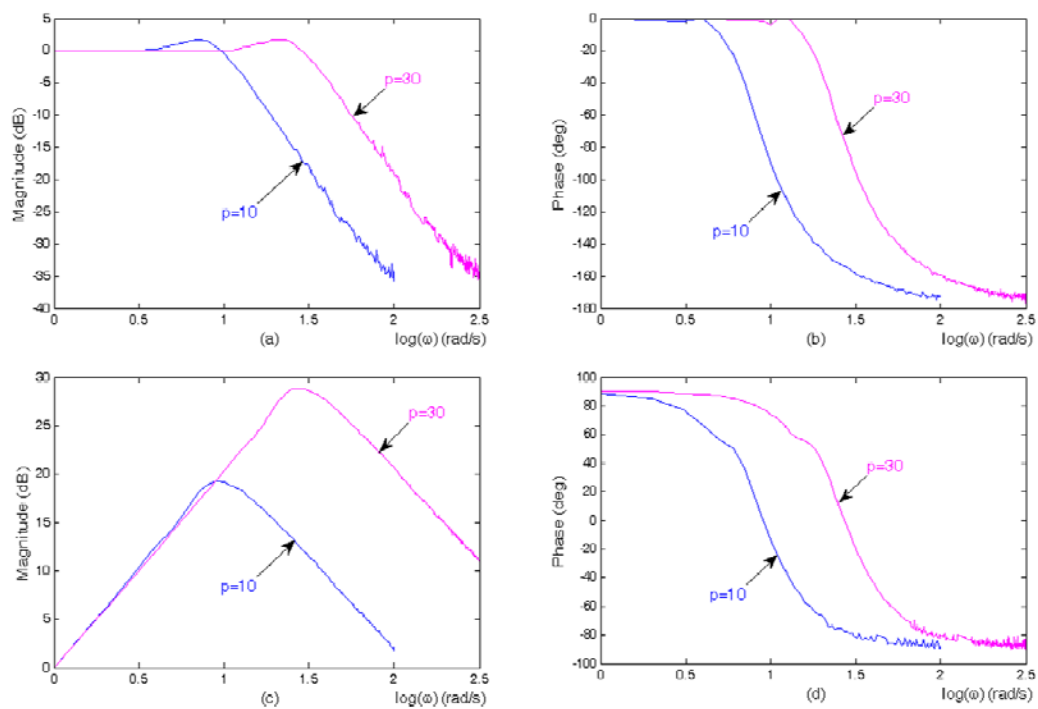


圖 4.12 基於 STO 之頻率響應圖

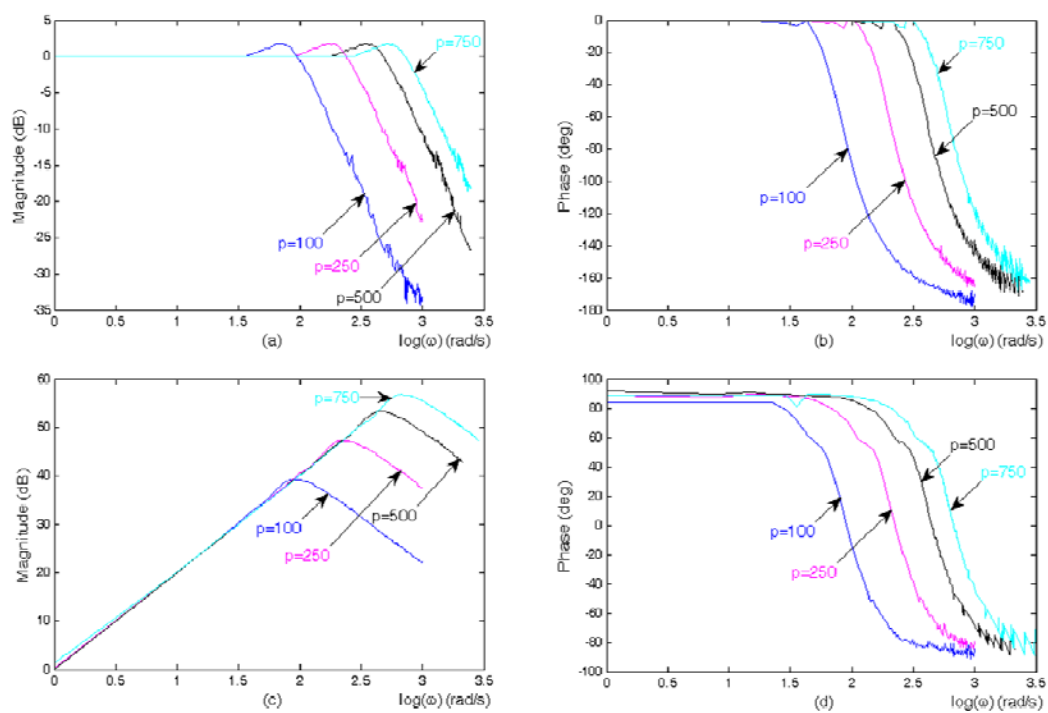


圖 4.13 基於 STO 之頻率響應圖



雖然基於ESO及STO設計之微分器皆含有非線性控制項，但經由以上分析方式仍可看出微分器於頻域上反映在系統輸出之效果，因此若知道輸入訊號之頻率特性，我們可以依據圖 4.11及圖 4.13來限定可通過訊號的頻率範圍。例如當輸入訊號為

$$f(t) = \sin(2t) + \sin(30t) + \sin(150t) \quad (4.16)$$

若我們欲提取訊號 $\sin(30t)$ ，亦即將高頻訊號 $\sin(150t)$ 與低頻訊號 $\sin(2t)$ 去除，依據圖 4.10與圖 4.13 及圖 4.14，可知道基於ESO，當 $h=0.1$ 時其截止頻率約為 $3.16(\text{rad/s})$ ，而基於STO，當 $r=100$ 時其截止頻率約為 $31.62(\text{rad/s})$ ，因此我們可以將之結合，獨讓頻域 $\omega=30$ 的訊號通過，其想法與模擬結果如下所示

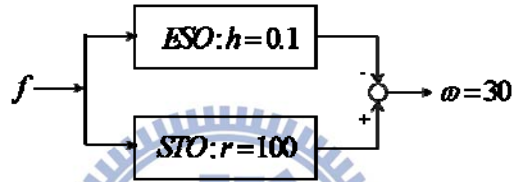


圖 4.14 結合 ESO 與 STO 實現帶通濾波

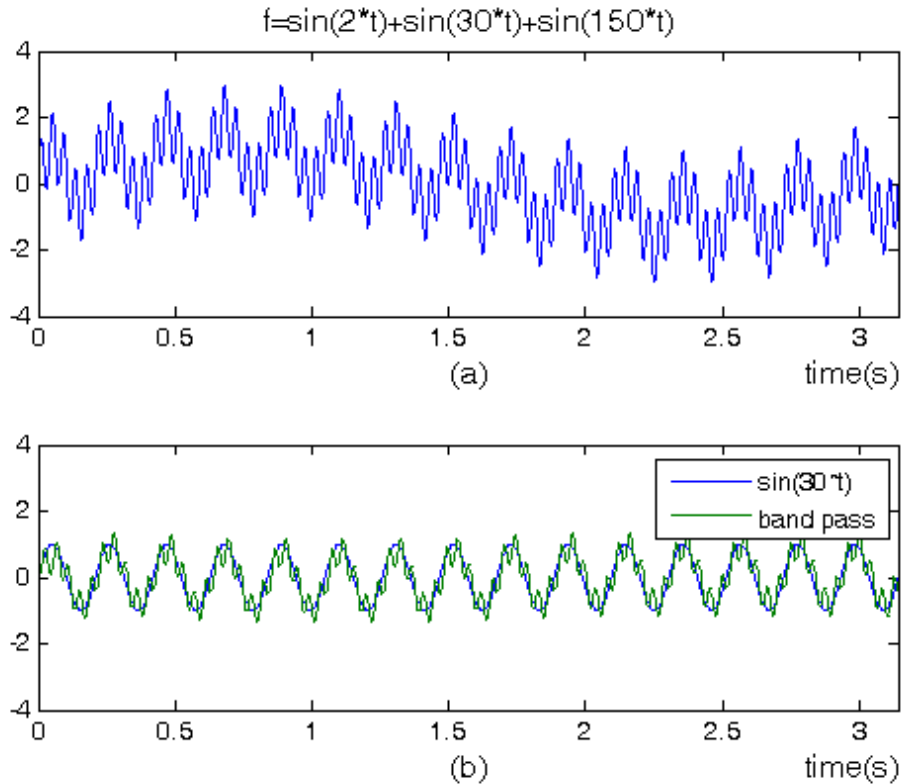


圖 4.15 結合 ESO 與 STO 提取中頻訊號之響應圖

圖 4.15之(a)為合成輸入訊號  $f$  對時間之響應圖，(b)圖為這樣設計下提取訊號之結果，並與真實訊號  $\sin(30t)$  比較，可以看出低頻及高頻的部分幾乎被濾除，也驗證我們以頻域分析來選取參數之可行性。因此應用於導引系統時，可以利用此方式，依據圖 4.10與圖 4.13、圖 4.14 選取合適之參數，將高頻雜訊濾除提取，提取輸入訊號  $\dot{q}_{delay}$  及其微分訊號。

有了以上分析作為選取微分器參數依據後，我們正式針對導引系統設計微分器補償尋標器後接低通濾波器  $\frac{1}{T_2s+1}$  所造成相位延遲的現象，而此低通濾波器之時間常數  $T$  我們設計為 0.1 秒，由圖 4.5可看出濾波後訊號之大小衰減一點，而相位落後約 0.1 秒，因此我們利用微分器來補償 0.1 秒的相位損失。這裡我們利用先前分析微分器之特性(參照圖 4.10與圖 4.13、圖 4.14)來選取微分器之參數，避免再度造成系統相位損失。首先我們嘗試利用圖 4.14的概念來提取輸入近似訊號及其微分訊號，其方塊圖如下所示

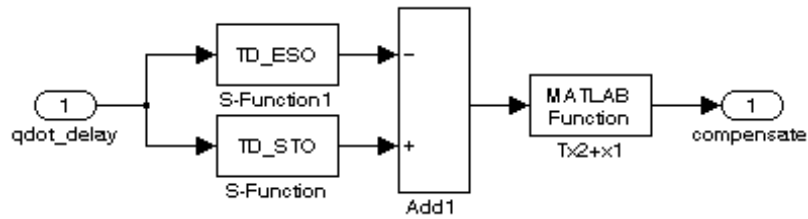


圖 4.16 結合 ESO 與 STO 提取輸入及其微分訊號之方塊圖

其模擬結果如圖 4.17所示，從圖 4.17之(a)圖可發現經由ESO及STO提取輸入訊號之能力相當，幾乎讓輸入訊號  $f = \dot{q}_{delay}$  通過，因此兩微分器結合的結果導致輸出為零，參照圖 4.17之(b)所示，這現象也讓我們推測輸入訊號之頻率  $\omega$  小於 3.16(rad/s)，因此於本論文我們利用  $h=0.1$  之ESO作為微分器，同時提取輸入訊號及其微分訊號用以補償濾波器對系統造成的相位損失。並以模擬來驗證利用此微分器實現尤拉法的概念來預估 0.1 秒後  $\dot{q}_{delay}$  這方法的可行性，如圖 4.18所示。圖 4.18中ORIGINAL代表無量測雜訊時  $\dot{q}$  對時間之響應，由圖 4.18之(b)可看出我們幾乎補償了濾波後所造成的相位損失(參照圖 4.18之(a))。

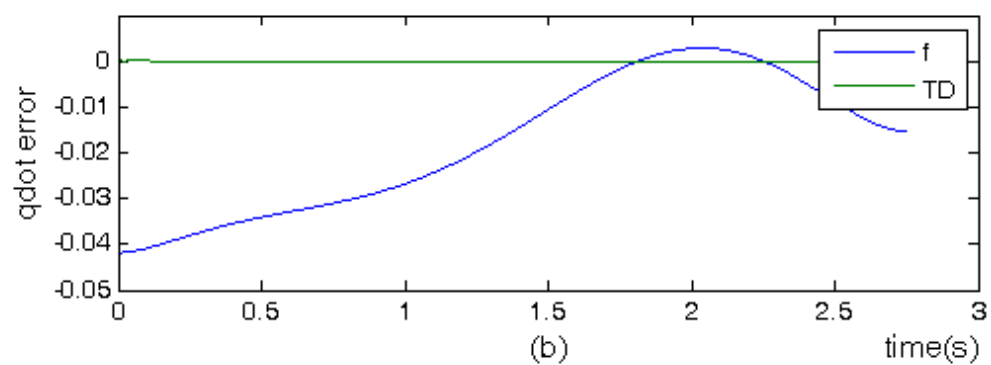
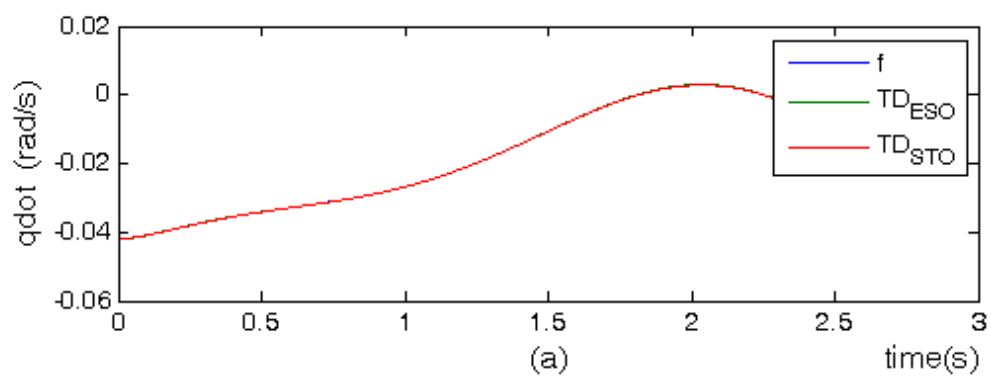


圖 4.17 結合 ESO 與 STO 補償相位損失

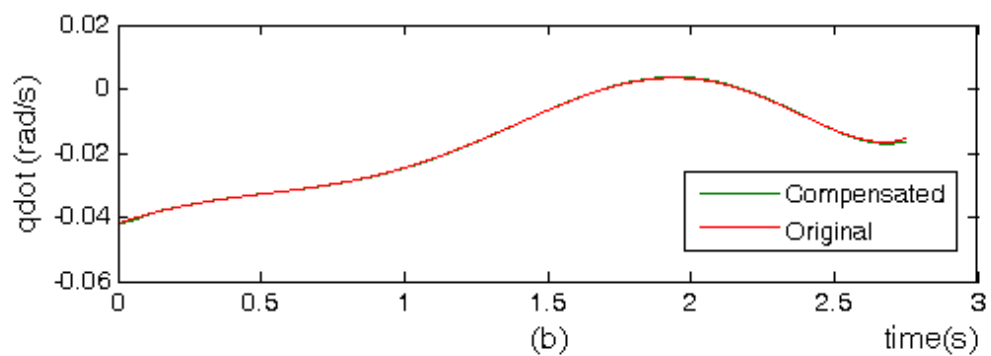
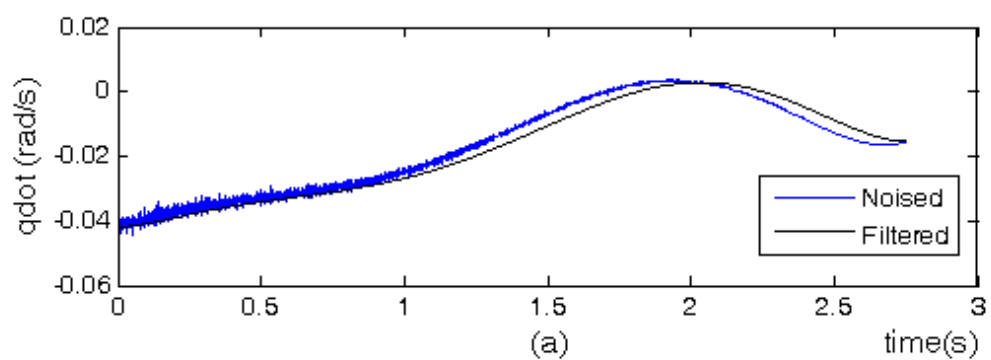


圖 4.18 利用 ESO 補償相位損失之比較圖

## 4.4 含有量測雜訊之目標加速度估測模擬

本節我們利用 simulink 軟體來模擬系統存在量測雜訊時，利用 4.3 節設計之雜訊補償機制結合第三章設計之三種觀測方式來對目標加速度進行估測。同樣地，我們以與 3.4 節相同的兩種情況進行模擬。

一、以機動頻率為 0.5(Hz)，機動能力為  $\pm 14g$  ( $m/s^2$ ) 的正弦波訊號作為目標訊號。

二、以機動頻率為 0.5(Hz)，機動能力為  $\pm 5g$  ( $m/s^2$ ) 的方波訊號作為目標訊號。

在 4.3 節我們已對尋標器量測雜訊進行濾波與補償濾波後之相位損失，並於模擬結果驗證設計方式之可行性。因此這裡我們選取與 3.4 節相同之觀測器參數。模擬結果顯示在圖 4.19 到圖 4.26，同樣地，以符號 ESO、STO、OPTIMAL 表示經由擴張狀態觀測器、Super-Twisting 演算法、與進一步利用收斂時間估計選取最佳化參數的估測目標加速結果。

圖 4.19 到圖 4.22 為情況一的模擬結果。圖 4.19 到圖 4.21 可看出飛行初期估測結果有極大的振幅，這是由於狀態誤差尚未收斂，同時加速度估測值與彈目相對距離  $r$  成正比，因此估測誤差隨著距離越遠而越大，導致估測結果有極大的振幅。而當狀態誤差進入穩態後，估測結果與目標訊號幾乎重合。在此我們進一步檢視估測結果與目標訊號之間的誤差，如圖 4.22 所示，其中(b)是擷取(a)圖 0 到 0.6 秒方便視其估測誤差收斂情形，我們將其收斂情形整理在下表。

表 4.3 目標為正弦波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表

觀測方式	性能指標(performance index)	
	穩定度	收斂時間(s)
ESO	穩定	0.399
STO	穩定	0.773
OPTIMAL	穩定	0.392

表 4.3 中我們所談的穩定是指估測結果與目標訊號間估測誤差的絕對值是否收斂到  $0.5g(m/s^2)$  內，另外收斂時間則定義為估測誤差的絕對值確保收斂到  $0.5g(m/s^2)$

時所對應的時間。依據表 4.3與圖 4.22可看出即使存在輸出量測誤差，三種觀測器仍擁有不錯的估測精度。另一方面，OPTIMAL之收斂時間雖與ESO差不多，但相較於STO仍快了約 0.391 秒，幾乎是STO收斂時間的兩倍，再次驗證以收斂時間估計來選取最佳化參數的方式有較快的估測誤差收斂時間。

圖 4.23到圖 4.26為情況二的模擬結果。圖 4.23到圖 4.25顯示飛行初期，估測結果同樣有極大的振幅，而當狀態誤差進入穩態後，估測結果與目標訊號幾乎重合，但 1 秒及 2 秒時目標突然的變化導致估測結果一時無法追蹤到目標訊號，這裡我們檢視估測誤差，如圖 4.26所示，並將估測誤差收斂情形整理在下表。

表 4.4 目標為方波時三種觀測器的估測誤差收斂狀況比較表

	性能指標(performance index)					
	飛行初期		目標第一次機動		目標第二次機動	
觀測方式	穩定度	收斂時間(s)	穩定度	收斂時間(s)	穩定度	收斂時間(s)
ESO	穩定	0.394	穩定	0.308	穩定	0.291
STO	穩定	0.37	穩定	0.303	穩定	0.291
OPTIMAL	穩定	0.356	穩定	0.2655	穩定	0.2615

我們所談的穩定是指估測誤差的絕對值是否收斂到  $0.5g(m/s^2)$ 內，另外收斂時間則定義為估測誤差的絕對值確保收斂到  $0.5g(m/s^2)$ 時所對應的時間，對照圖 4.26，其中(b)-(d)分別為(a)的局部放大圖，可發現即使目標突然機動，觀測器仍很快地追蹤到目標並且擁有不錯的估測精度，再次驗證觀測器之有效性。另一方面，由表 4.4與圖 4.26一樣可以發現在三種觀測方式中，我們利用收斂時間估計來選取最佳化參數的方式，其估測誤差於飛行初期有最快的收斂時間 0.356 秒，即使在 1 秒以及 2 秒時目標有  $+10g(m/s^2)$ 與  $-10g(m/s^2)$ 的突然變化，其估測誤差仍以最快的時間 0.2655 秒與 0.2615 秒追蹤到目標訊號。綜合本節的模擬結果，經由我們設計之補償機制與觀測器結合，可以使得估測訊號盡快追蹤到目標訊號並且仍可保持估測誤差在  $0.5g(m/s^2)$ 內。

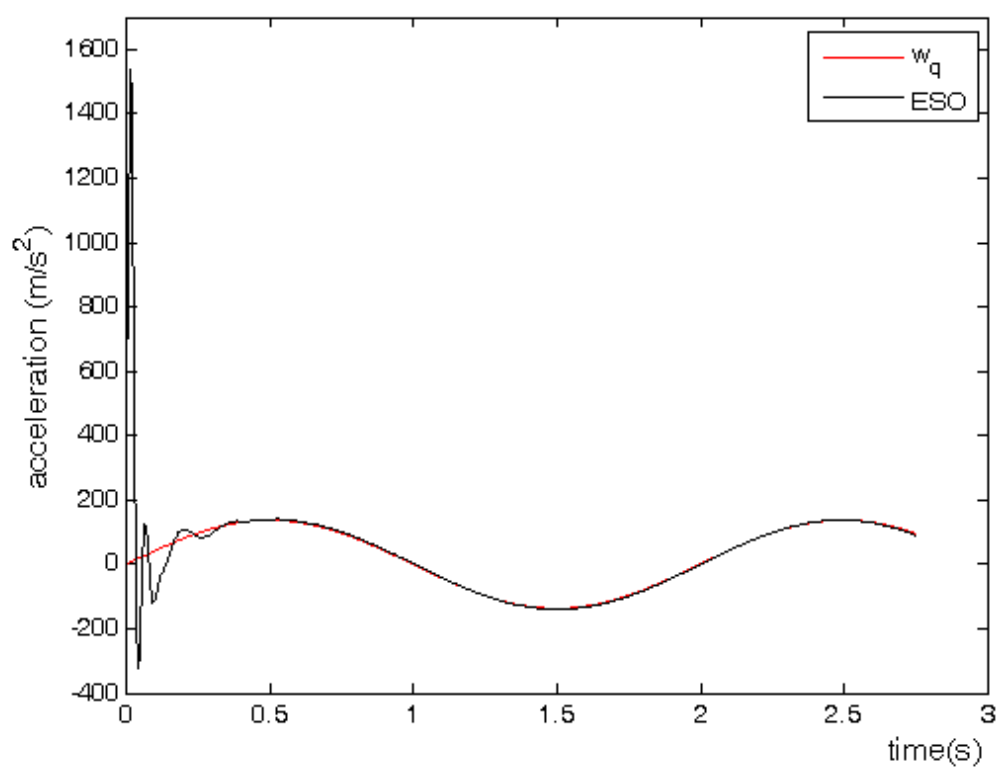


圖 4.19 存在量測雜訊時正弦波之目標訊號與基於 ESO 之估測結果

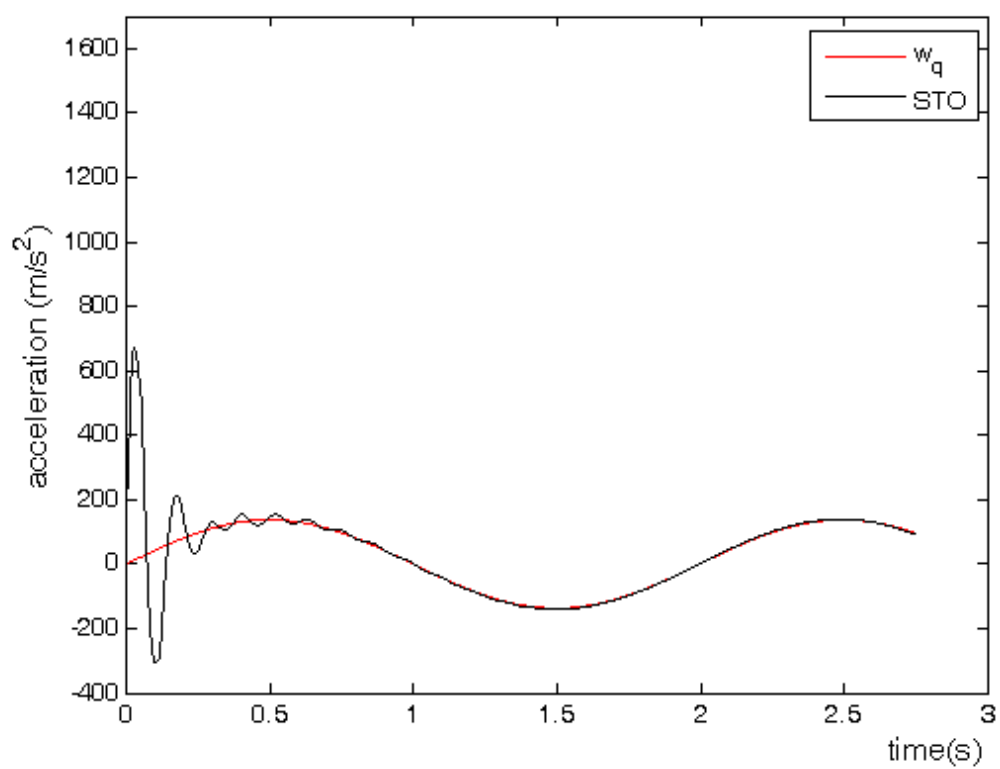


圖 4.20 存在量測雜訊時正弦波之目標訊號與 STO 之估測結果

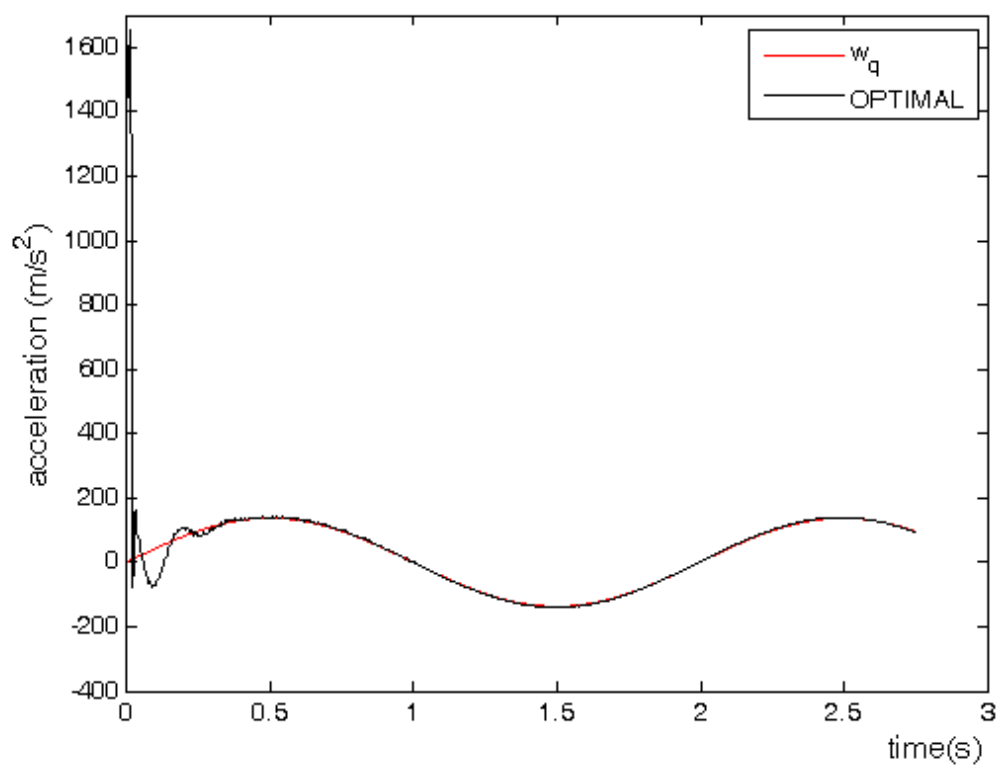


圖 4.21 存在量測雜訊時正弦波之目標訊號與 OPTIMAL 之估測結果

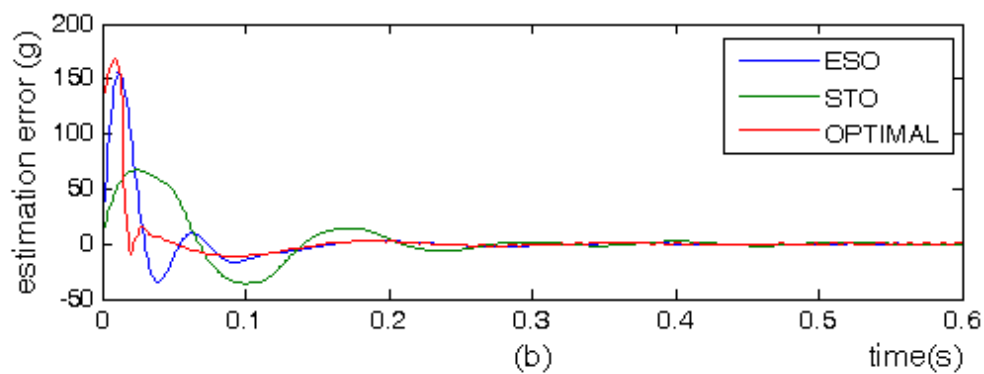
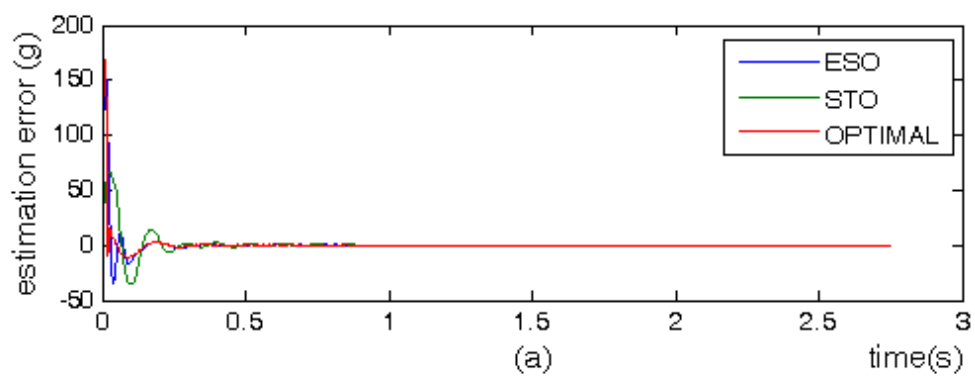


圖 4.22 存在量測雜訊且目標為正弦波三種觀測器之觀測誤差時間響應比較圖



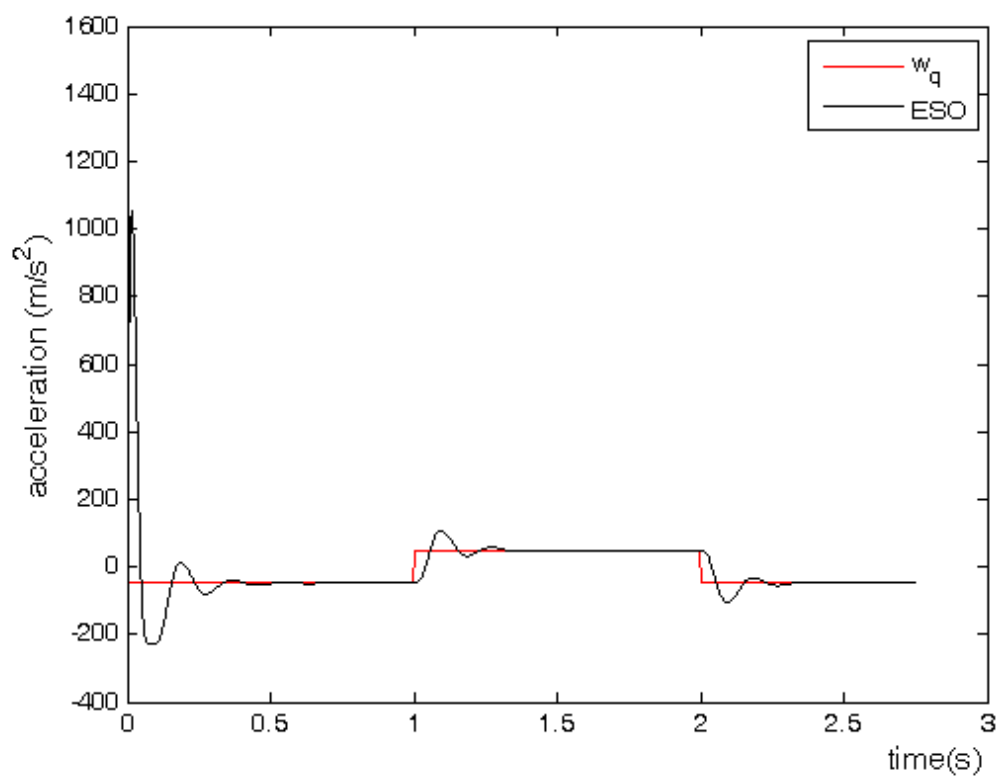


圖 4.23 存在量測雜訊時方波之目標訊號與 ESO 之估測結果

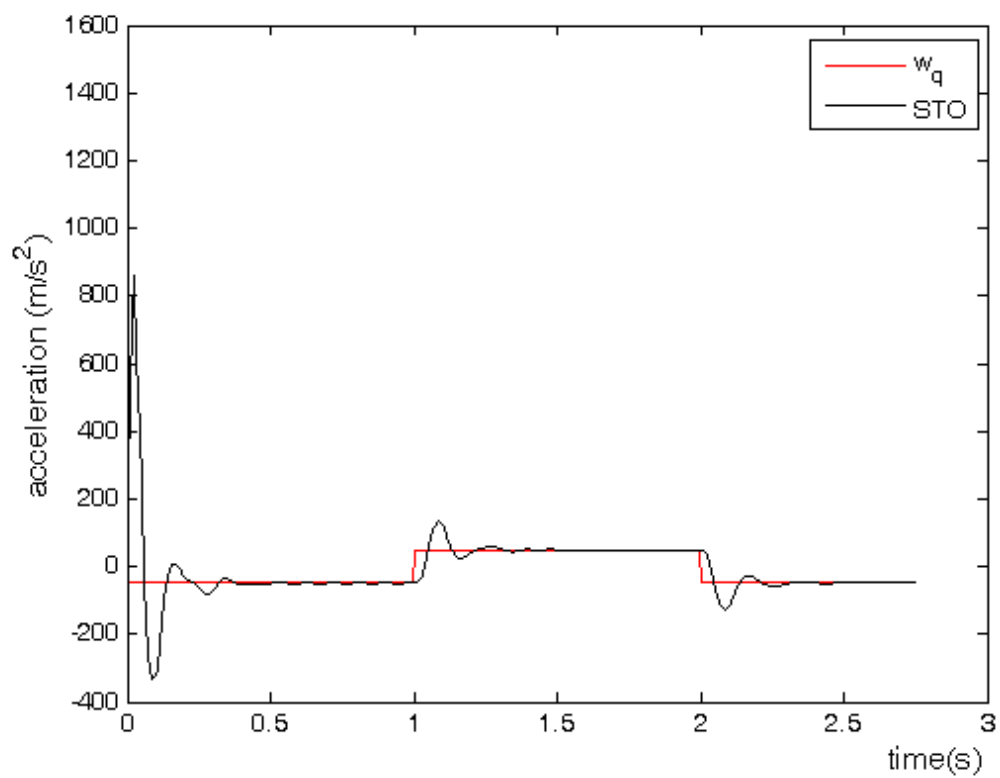


圖 4.24 存在量測雜訊時方波之目標訊號與 STO 之估測結果

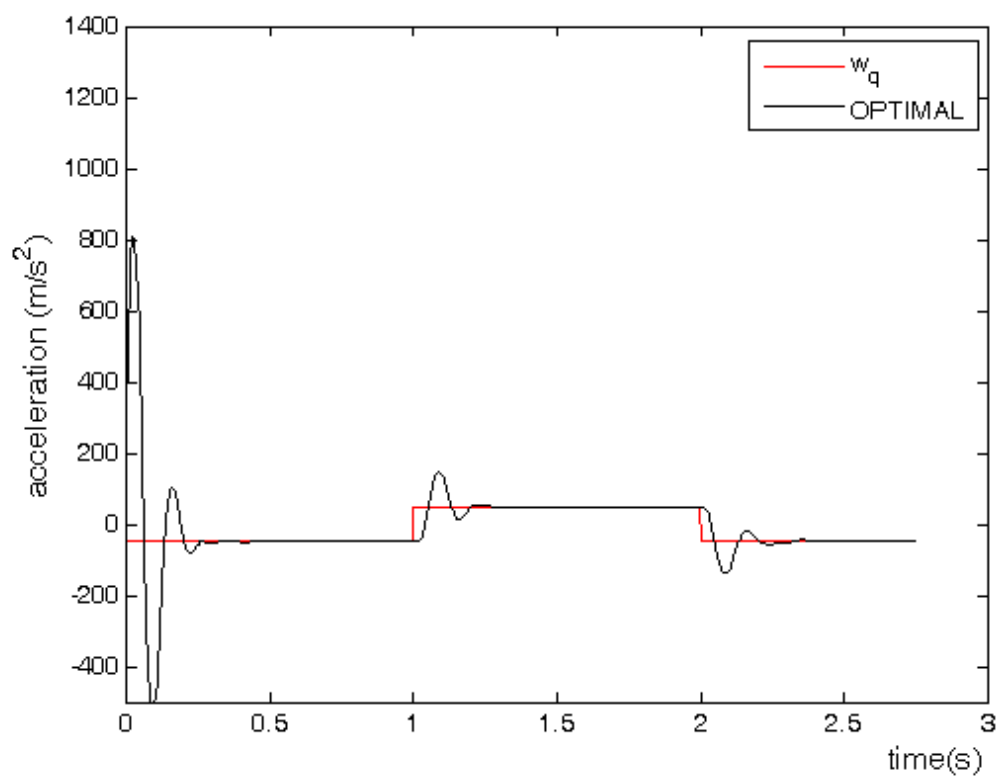


圖 4.25 存在量測雜訊時方波之目標訊號與 OPTIMAL 之估測結果

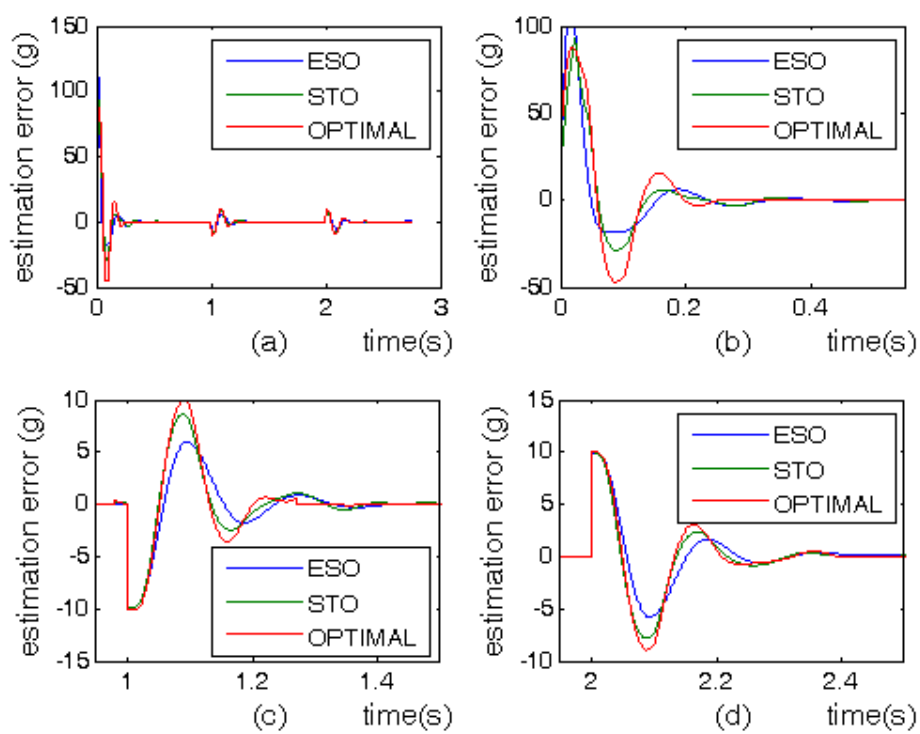


圖 4.26 存在量測雜訊且目標為方波三種觀測器之觀測誤差時間響應比較圖

## 第 5 章

### 結論與未來研究方向

#### 5.1 結論

在本論文中，我們結合微分器與觀測器，將其應用到導引系統機動目標加速度估測問題上，我們所提出的設計方式能夠使得尋標器模式存在輸出量測雜訊時，估測訊號仍然可以盡快追蹤到目標訊號並且保有不錯的估測精度。此外，我們所提出的基於收斂時間估計來選取最佳化參數的方式，在本論文選取的參數下有最快的收斂速度，因此可以以此方式做為選取 STO 參數的依據，不僅如此，此方式成功克服傳統順滑模控制中的切跳現象。再者，雖然 ESO 與 STO 皆為非線性控制系統，但於頻域上仍然反映在系統輸出之濾波與帶通的效果，以此為依據可以解決 ESO 可調參數太多的難題。最後，模擬顯示受干擾系統保有如同第三章相同估測精度的性能表現，確實驗證了補償機制的可行性。

#### 5.2 未來研究方向

本論文採用線性濾波器濾除量測雜訊，雖然濾波器這樣的設計，並利用微分器設計補償機制隨後與觀測器結合，最終擁有不錯之估測精度，但雜訊之大小隨著彈目相對距離而變，依據我們在 4.2 分析量測雜訊的放大效應並提供導引過程中雜訊之隨機行為可能對系統輸出的影響，以及在 4.3 節給出 ESO 與 STO 於頻域之響應圖來設計時變之觀測器是值得我們繼續探討的問題。

## 參考文獻

- [1] X.-R. Li and V. Jilkov, "Survey of maneuvering target tracking," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. 39, No. 4, pp. 1333-1364, 2003.
- [2] S.-C. Lee, Y.-C. Huang, and C.-Y. Liu, "Trajectory estimation for tactical ballistic missiles in terminal phase using on-line input estimator," *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC*, Vol. 23, No. 5, pp. 644-653, 1999.
- [3] G. Chen and J. Wang, "Tracking an incoming ballistic missile using an extended interval Kalman filter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 33, No. 1, pp. 232-240, 1997.
- [4] A. FARINA, B. Bristic, and D. Benvenuti, "Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, Vol. 38, No. 3, pp. 854-867, 2002.
- [5] 楊谷洋, 廖德誠, "TBM 辨識與追蹤法則之研究," 國立交通大學電子與資訊研究中心技術報告, 2003.
- [6] J.-Q. Han, *Active disturbance rejection control technique-the technique for estimating and compensating the uncertainties*, National Defence Industry Press, Beijing, 2009
- [7] J.-Q. Han, "From PID to active disturbance rejection control," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, No. 3, pp. 900-906, 2009.
- [8] J.-Q. Han, "Extended state observer for a class of uncertain plants," *Control Decis.*, Vol. 10, No. 1, pp. 85-88, 1995.
- [9] V. Utkin, *Sliding modes in control optimization*, Berlin: Springer, 1992.
- [10] J. Slotine, J. Hedrick, and E. Misawa, "On sliding observers for nonlinear systems," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 109, pp. 245-252, 1987.

- [11] B. Walcott and S. Zak, "Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with application," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 18, No. 1, pp. 88-104, 1988.
- [12] Y.-W. Liang and S.-D. Xu, "Reliable control of nonlinear systems via variable structure scheme," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No. 10, pp. 1721-1726, 2006.
- [13] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, and C.-L. Tsai, "Study of VSC reliable designs with application to spacecraft attitude stabilization," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 15, No. 2, pp. 332-338, 2007.
- [14] A. Levant, *Higher order sliding modes and their application for controlling uncertain processes*, Ph.D. Dissertation, Institute for System Studies of the USSR Academy of Science, Moscow, 1987.
- [15] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 6, pp. 1247-1263, 1993.
- [16] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant, and E. Usai, "On second order sliding mode controllers," *Lecture Notes in Control and Information Science*, London: Springer-Verlag, pp. 329-350, 1999.
- [17] A. Levant, "Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, pp. 1812-1816, 2005.
- [18] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai, "Chattering avoidance by second order sliding mode control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 2, pp. 241-246, 1998.
- [19] S. V. Emelyanov, S. K. Korovin, and A. Levant, "High-order sliding modes in control systems," *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 7, No. 3, pp. 294-318, 1996.

- [20] A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [21] J. A. Moreno and M. Osorio, "A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers," *IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008.
- [22] C.-D. Yang, "Analytical solution of 3D true proportional navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 32, No. 4, pp. 1509-1522, 1996.
- [23] Di Zhou, Y.-A. Zhang, and G.-R. Duan, "Multiple model adaptive two-step filter and motion tracking sliding-mode guidance for missile with time lag in acceleration," *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, Vol. 47, No. 156, pp. 81-89, 2005.
- [24] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 475-482, 1998.
- [25] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *ASME Journal of Basic Engineering*, pp. 35-45, 1960.
- [26] P. Zarchan, *Tactical and strategic missile guidance*, 5ed. AIAA, Inc., 2007.
- [27] William R. Chadwick, "Augmentation of high-altitude maneuver performance of a tailrolled missile using lateral thrust," *Tech. Rep. ADA-328973, AD Report*, 1997.
- [28] C. H. Tournes and Y. B. Shtessel, "Integrated autopilot and guidance for dual control missiles using higher order sliding mode control and observers," *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
- [29] 林清安, "攔截器防禦區間與最佳攔截時間分析(II)," 期末報告, 100 年 11

月.

- [30] A. De Moivre, *The doctrine of chances*, Second edition, London, 1738.
- [31] A. Levant, “Robust exact differentiation via sliding mode technique,” *Automatica*, Vol. 34, No. 3, pp. 379-384, 1998.
- [32] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, “Second-order sliding-mode observer for mechanical systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, pp. 1785-1789, 2005.

