

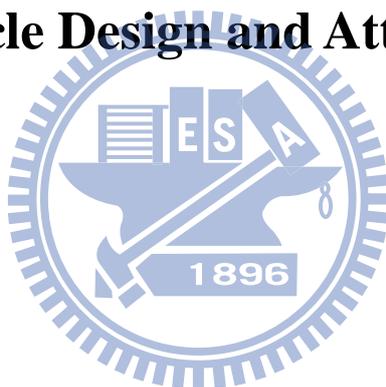
國立交通大學

電控工程研究所

碩 士 論 文

衛星載具的設計及姿態控制

Launch Vehicle Design and Attitude Control



研 究 生：陳逸棋

指 導 教 授：林清安 教授

中華民國一〇一年九月

衛星載具的設計及姿態控制

Launch Vehicle Design and Attitude Control

研究生：陳逸棋

Student: Yi-Chi Chen

指導教授：林清安

Advisor: Prof. Ching-An Lin

國立交通大學



Submitted to Institute of Electrical and Control Engineering

College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master

In

Electrical and Control Engineering

September 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇一年九月

衛星載具的設計及姿態控制

學生：陳逸棋

指導教授：林清安 教授

國立交通大學 電控工程研究所

摘要

本論文根據能量的觀點探討各節火箭質量配置的問題，利用最佳化的方法計算質量最佳分配發現即使在重力及氣動力的影響之下，所得的最佳分配與純理論分析所得相差不遠。設計的導引律分成三個部分：第一節火箭採用重力轉彎，利用俯仰角速度回授控制攻角為零度，避免火箭因氣動力造成損壞。第二節火箭採用線性正切律，利用事先計算得知的角度，讓火箭大幅度轉向，使火箭慢慢平飛於地球表面，在滿足期望高度的同時，也降低飛行路徑角。第三節火箭為精準入軌，同時採用角度控制及高度回授。角度控制的目的是控制火箭平飛，使飛行路徑角為零度。高度回授則是透過查表的方式將高度變化量轉換成角度補償，使火箭飛行在期望高度。當速度達到入軌要求則脫節並將酬載送入軌道運行。最重要的是入軌後酬載繞行地球軌道的高度誤差。透過模擬的結果顯示，設計的導引律能順利地將酬載送入軌道運行，且繞軌的高度誤差不大。

Launch Vehicle Design and Attitude Control

Student: Yi-Chi Chen

Advisor: Prof. Ching-An Lin

Institute of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

This thesis discusses the mass configuration of rocket based on energy, we use optimization method to calculate the best mass distribution, and we found that the best distribution almost has the same result with theoretical analysis even under the influence of gravity and aerodynamic forces. Guidance law of this thesis can be divided into three stages. The first stage is gravity turn, we control the angle of attack to zero by using pitch angular velocity feedback, that avoid rocket damage due to aerodynamic forces. The second stage is linear tangent law, we use the angle which calculated in advance to make rocket turns, let the rocket is in level flight at Earth's surface so that the rocket meet desired altitude and reduces flight path angle. The third stage is precise orbit injection, we use angle control and altitude feedback, angle control is to control the rocket is in level flight, this can made flight path angle to zero. Altitude feedback transfers altitude variation to angle compensation through look-up table, let the rocket fly at desired altitude. When the rocket speed meet the condition of orbit injection, the rocket separates and sends the payload into orbit. The most important is the error of altitude after orbit injection. Results of simulation show that the guidance can send the payload into orbit successfully.

誌謝

本論文得以順利完成，首先必須感謝我的指導教授林清安博士悉心指導，感謝老師對我的鼓勵與支持，讓我在研究上碰到挫折時，能繼續堅持下去，並且提供思考的方向，得以讓我的研究完成。在這兩年的碩士生涯上，不論是在研究上，面對問題的態度，以及為人處事的態度皆深受老師的影響，讓我獲益匪淺。

其次要感謝 606 實驗室的建賢學長和國展學長，在我的研究及生活上提供許多寶貴的意見，讓我能繼續努力下去。以及要感謝仁猷學長、同學柏宏、玟芳以及鈺婷在課業上的幫忙，也感謝 606 實驗室的其他成員。學習的路上有你們的陪伴讓我的研究生生活過得很充實。

最後感謝我的家人對我的支持與鼓勵，感謝父母的付出及包容，讓我能專注在學業上。感謝鳳儀的陪伴，跟我一起分享喜悅以及度過不順心的時候。因為你們的支持，讓我可以順利完成碩士學位。

目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	VIII
第一章 緒論.....	1
第二章 動態方程式.....	3
2.1 座標系統定義[8].....	3
2.2 火箭運動方程式.....	5
2.2.1 尤拉角.....	5
2.2.2 尤拉方程式.....	7
2.2.3 四元素方程式.....	8
2.3 六自由度運動方程式.....	9
2.3.1 平移運動方程式.....	9
2.3.2 轉動運動方程式.....	10
2.3 氣動力模型.....	10
第三章 火箭物性設計.....	13
3.1 火箭方程式.....	13
3.2 節數(N)及結構比(σ)對火箭的影響.....	14
3.2.1 節數(N)對火箭的影響.....	14
3.2.2 結構比(σ)對火箭的影響.....	15
3.3 各節質量分配.....	16
3.3.1 不同的酬載比(λ_k)對火箭的影響.....	16
3.3.2 不同的結構比(σ_k)對火箭的影響.....	19
3.4 討論.....	21
第四章 載具及衛星入軌的導引與控制.....	22
4.1 推力向量系統(TVC).....	23
4.2 重力轉彎.....	25
4.3 第二階段.....	27
4.3.1 線性正切導引律.....	27
4.3.2 t_e 的影響.....	30

4.3.3 θ_f 的計算.....	32
4.4 第三階段.....	35
4.4.1 入軌高度及速度.....	35
4.4.2 入軌要求.....	38
第五章 模擬結果與討論.....	39
5.1 400km 入軌.....	40
5.1.1 火箭飛行情形.....	40
5.1.2 角度誤差.....	45
5.1.3 時間誤差.....	46
5.2 不同高度入軌.....	47
5.3 不同發射仰角入軌.....	49
5.4 各節質量分配的影響.....	52
5.5 討論.....	55
第六章 結論.....	56
參考文獻.....	57



圖目錄

圖 2.1 慣性座標、地心座標.....	4
圖 2.2 慣性座標、地心座標(經過 t 秒).....	4
圖 2.3 發射座標.....	4
圖 2.4 體座標.....	4
圖 2.5 發射座標與體座標轉換.....	6
圖 2.6 氣動力模型.....	11
圖 3.7 不同節數的火箭，總酬載比(λ_T)對 $\frac{v}{v_e}$ 的曲線圖.....	15
圖 3.8 三節火箭在不同的 σ 下，總酬載比(λ_T)對 $\frac{v}{v_e}$ 的曲線圖.....	16
圖 4.1 推力向量系統.....	23
圖 4.2 火箭受力狀況.....	25
圖 4.3 第一階段控制系統方塊圖.....	27
圖 4.4 θ 跟 α 、 γ 關係圖.....	28
圖 4.5 α 變化示意圖.....	29
圖 4.6 γ 變化示意圖.....	29
圖 4.7 V 變化示意圖.....	30
圖 4.8 高度對 t_e 圖.....	31
圖 4.9 速度對 t_e 圖.....	31
圖 4.10 飛行路徑角對 t_e 圖.....	32
圖 4.11 速度變化圖(400km).....	33
圖 4.12 取 sin 函數後的飛行路徑角變化圖(400km).....	33
圖 4.13 速度變化圖(300km).....	34
圖 4.14 取 sin 函數後的飛行路徑角變化圖(300km).....	34
圖 4.15 第二階段控制方塊圖.....	35
圖 4.16 高度變化曲線圖.....	37
圖 4.17 第三階段控制方塊圖.....	37
圖 4.18 圓周運動示意圖.....	38
圖 5.1 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角).....	40
圖 5.2 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角).....	41
圖 5.3 火箭飛行過程圖(動壓、空氣阻力、空氣力矩).....	42
圖 5.4 火箭飛行過程圖(推力加速度、質量、推力、距離).....	42
圖 5.5 火箭飛行過程圖(所需能量、總能量).....	43

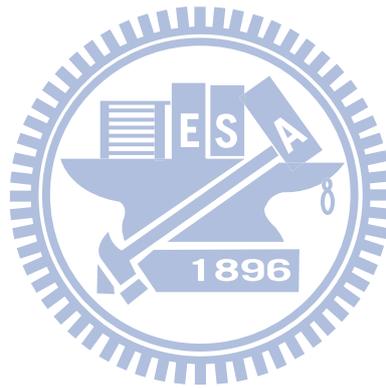


圖 5.6 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角).....	44
圖 5.7 入軌後的飛行情形(經度、緯度).....	44
圖 5.8 角度誤差圖.....	45
圖 5.9 時間誤差圖.....	46
圖 5.10 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角).....	47
圖 5.11 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角).....	47
圖 5.12 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角).....	48
圖 5.13 入軌後的飛行情形(經度、緯度).....	48
圖 5.14 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角).....	49
圖 5.15 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角).....	50
圖 5.16 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角).....	51
圖 5.17 入軌後的飛行情形(經度、緯度).....	51
圖 5.18 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角).....	52
圖 5.19 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角).....	53
圖 5.20 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角).....	53
圖 5.21 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角).....	54
圖 5.22 入軌後的飛行情形(經度、緯度).....	54



表目錄

表 2.1 座標系統.....	5
表 3.1 節數和 $\frac{v}{v_e}$ 的關係表.....	15
表 3.2 結構比和 $\frac{v}{v_e}$ 的關係表.....	16
表 3.3 不同 λ 的高度、速度、能量表.....	18
表 3.4 不同 σ 的高度、速度、能量表.....	21
表 4.1 高度變化量.....	36
表 5.1 火箭參數.....	39
表 5.2 新的火箭參數.....	53



第一章 緒論

太空資源的掌握及利用對國家的經濟及國防安全非常重要。雖然美國及蘇聯的太空競賽已成歷史，本世紀至今各國在太空方面的競爭卻是有增無減，太空科技的應用層面也不斷地擴充。第三世界國家如韓國、印度、巴基斯坦、伊朗等都紛紛投入原來只有美國、俄羅斯、歐盟、日本、中國的太空競技場。近幾年韓國、印度等國密集自行發射衛星，中國完成載人繞地球軌道的飛行及利用飛彈擊落失能的衛星等只是這個競爭的部分體現。太空的應用也從原來的科學實驗、通訊監控、擴展至今的全球定位系統、全球通訊以及剛起步的太空旅遊。不管是發射衛星或是運送太空梭進軌道飛行，最根本的關鍵是發射載具(Launch vehicle)。

利用發射載具成功的運送衛星至地球軌道已有超過40年的歷史，今日美國、俄羅斯的載具均有極高的成功率，但是目前其他國家自行研發的衛星載具仍然有許多試射失敗的例子：如韓國的 Naro-1 載具[11]經過 6 年的發展，仍經歷第一次(2009 年 8 月)及第二次(2010 年 6 月)試射的失敗，這顯示載具的自主發展在許多技術領域仍是很大的挑戰。

依軌道高度可將衛星區分為高、中、低軌道衛星。通常在兩千 km 以下的軌道稱為近低軌道，大多數人造衛星為近地軌道衛星。由於把一枚衛星放上近地軌道所需的能量較少，而近地衛星僅需功率較低的放大器也可成功輸送訊號，因此許多通訊項目使用了近地軌道。國際太空站[12]即是屬於低軌衛星，運行於距離地球表面約 360 km 的軌道上運行。本文探討的衛星即是低軌衛星。

發射載具包括許多方面的技術如材料、推進、通訊、感測、導引及控制。本文是對載具的物性、導引及控制作探討。所設計的載具為四節火箭。在火箭剛升空時，尚處在空氣密度高的地方，如有些許攻角則會產生力矩造成火箭控制上的困難，若使攻角為 0 度，也就是速度與火箭的長軸方向一致，可以大大降低氣動力對火箭的影響；在第二節火箭啟動前，火箭已經達到空氣密度低的高空，這時便可以做轉向的機制，讓火箭達到期望高度的同時，也降低飛行路徑角以順利讓

火箭平行於地球表面；第三節火箭則是控制火箭在一定的高度，且讓飛行路徑角趨近於 0 度，直到火箭加速達到入軌要求的速度，則脫節將第四節火箭(酬載)送入軌道中。

本文一開始探討各節火箭質量配置的問題，利用火箭方程式建立最佳化問題計算質量最佳分配。設計的導引律分成三個部分：第一節火箭採用重力轉彎，利用俯仰角速度回授控制攻角為零度，避免火箭因氣動力造成損壞。第二節火箭採用線性正切律，利用事先計算得知的角度，讓火箭大幅度轉向，使火箭慢慢平飛於地球表面，在滿足期望高度的同時，也降低飛行路徑角。第三節火箭為精準入軌，同時採用角度控制及高度回授。角度控制的目的是控制火箭平飛，使飛行路徑角為零度。高度回授則是透過查表的方式將高度變化量轉換成角度補償，使火箭飛行在期望高度。當速度達到入軌要求則脫節並將酬載送入軌道運行。本文所探討的軌道為圓形軌道，最重要的是入軌後酬載繞行地球軌道的高度誤差。本文第二章介紹動態方程式，第三章介紹火箭物性設計，第四章介紹導引與控制，第五章介紹模擬結果與討論，第六章為結論。



第二章 動態方程式

物體在空間中的運動可分為平移與轉動，各為三自由度的運動，因此在三維空間中物體為六自由度的運動，受到力與力矩的影響，會使其位置、速度、姿態有所改變。在三維空間中要描述火箭的動態必須定義所需的座標系統，以及火箭六自由度運動方程式。在本章中，2.1 節介紹座標系統，2.2 節介紹火箭運動方程式，2.3 節介紹氣動力模型。

2.1 座標系統定義[8]

為了方便描述火箭在飛行中的動態及姿態，定義四個座標系統如下：

1. 慣性座標系 (S_I)

以地心為原點， x 軸為 $t=0$ 時指向格林威治子午線之方向， z 軸為往地球北極之方向， y 軸則符合右手定則，可計算出目前地心與載具之間的位置關係，包括高度、速度及方位等。

2. 地球座標系 (S_R)

以地心為原點，隨著時間自轉之座標系， $t=0$ 時與慣性座標正 x 軸方向重合， R 為物體質心與地心之距離， λ 為物體與子午線的夾角， τ 為物體與赤道面的夾角。因地球自轉使得座標時變，可以將地球座標與慣性座標關係式寫為：

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos(\lambda + \omega t) \cos \tau \\y(t) &= R \sin(\lambda + \omega t) \cos \tau \\z(t) &= R \sin \tau\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 ω 為地球自轉之角速度值。

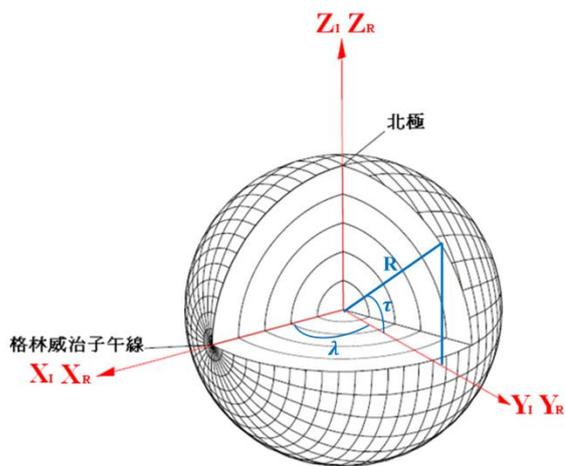


圖 2.1 慣性座標、地心座標

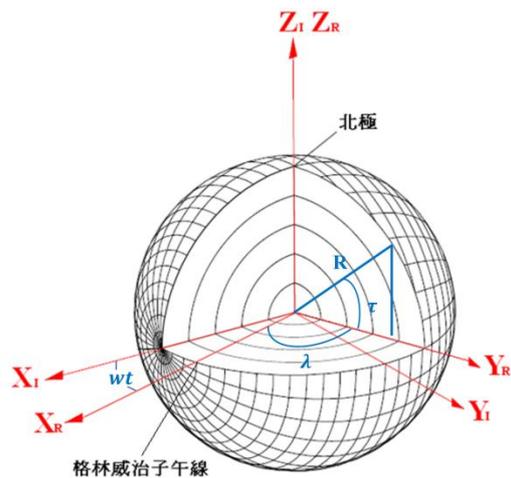


圖 2.2 慣性座標、地心座標(經過 \$t\$ 秒)

3. 發射座標系 (\$S_L\$)

以發射點為原點，x 軸地表平面之正上方，z 軸地表平面往發射方向，y 軸符合右手定則。

4. 體座標 (\$S_B\$)

x 軸為火箭的長軸方向，y 軸垂直 x 軸指向火箭右方，z 軸符合右手定則。

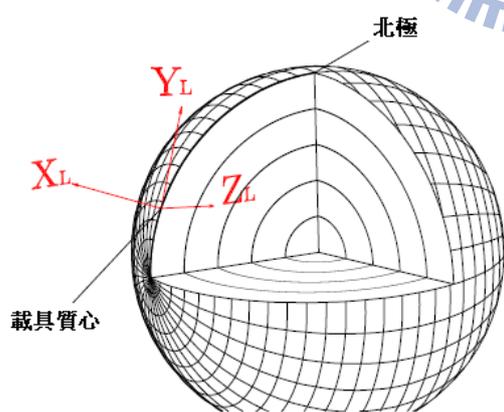


圖 2.3 發射座標

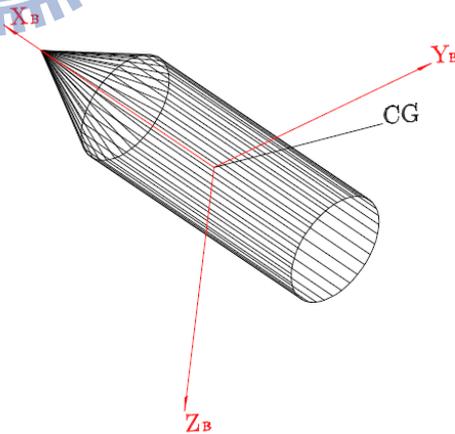


圖 2.4 體座標

將座標系統整理成如表 2.1：

座標名稱	原點	座標定義
慣性座標 (s_I)	地心位置	X_I ：指向初始($t=0$)格林威治子午線以及赤道面 Y_I ：符合右手座標系統 Z_I ：指向北極
地球座標 (s_R)	地心位置	X_R ：指向格林威治子午線以及赤道面 Y_R ：符合右手座標系統 Z_R ：指向北極
發射座標 (s_L)	發射點的位置	X_L ：發射點所在的地表平面垂直向上 Z_L ：發射點所在的地表平面指向要發射的方向 Y_L ：符合右手座標系統
體座標 (s_B)	火箭的質心位置	X_B ：為火箭的長軸方向，指向前方 Y_B ：垂直 X_B 在火箭的左右平面上，指向右方 Z_B ：符合右手座標系統

表 2.1 座標系統

2.2 火箭運動方程式

2.2.1 尤拉角

為了描述火箭的姿態，推導發射座標與體座標之間的轉換，由發射座標經過三個角度的旋轉得到體座標，這種有次序的旋轉稱為尤拉角，以 (ϕ, θ, ψ) 表示。首先將發射座標和體座標的原點重合，在經過三個次的旋轉，可以將發射座標轉換成體座標，推導過程如圖 2.5 所示：

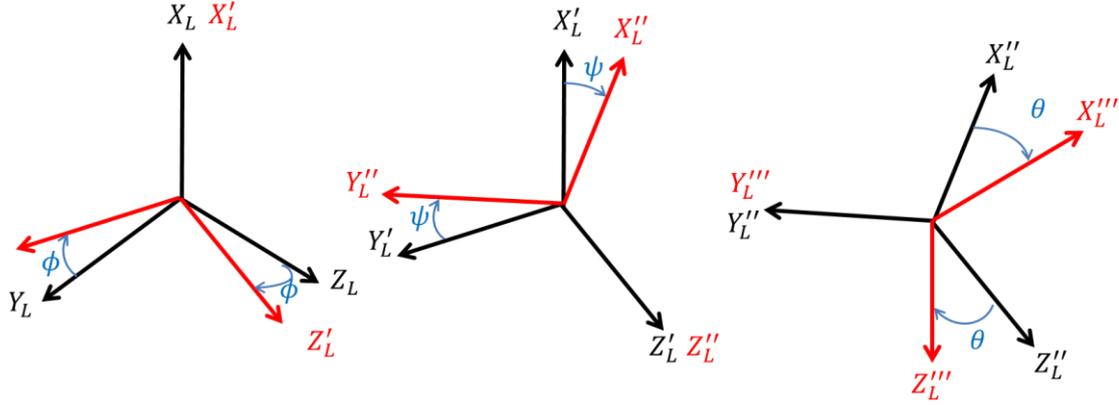


圖 2.5 發射座標與體座標轉換

1. 繞 X_L 軸旋轉 ϕ 角，使得旋轉後的 Y'_L 投影在 $Y_B - Z_B$ 的平面上為 Y_B ，此時經一次旋轉後的座標軸為 $X'_L - Y'_L - Z'_L$ 。

$$\begin{bmatrix} X'_L \\ Y'_L \\ Z'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2. 繞 Z'_L 軸旋轉 ψ 角，使得旋轉後的 Y''_L 與 Y_B 重合，此時經過兩次旋轉後的座標軸為 $X''_L - Y''_L - Z''_L$ 。

$$\begin{bmatrix} X''_L \\ Y''_L \\ Z''_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_L \\ Y'_L \\ Z'_L \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} X'_L \\ Y'_L \\ Z'_L \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

3. 繞 Y''_L 軸旋轉 θ 角，使得旋轉後的 X'''_L 與 X_B 重合， Z'''_L 與 Z_B 重合，則此時經過三次旋轉後的發射座標軸為 $X'''_L - Y'''_L - Z'''_L$ 。

$$\begin{bmatrix} X'''_L \\ Y'''_L \\ Z'''_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X''_L \\ Y''_L \\ Z''_L \end{bmatrix} = T_3 \begin{bmatrix} X''_L \\ Y''_L \\ Z''_L \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

經過三次的旋轉使得發射座標與體座標的三軸重合，合併(2.2)、(2.3)、(2.4)可以得到發射座標跟體座標之間的轉換矩陣為

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = T_3 T_2 T_1 \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = T_{BL} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.2.2 尤拉方程式

假設角速度為

$$\omega = p\bar{X}_B + q\bar{Y}_B + r\bar{Z}_B \quad (2.6)$$

其中(p,q,r)為角速度在體座標中的三個分量。透過發射座標跟體座標之間的轉換關係，將角速度改寫成

$$\omega = \dot{\phi}\bar{X}'_L + \dot{\theta}\bar{Y}_B + \dot{\psi}\bar{Z}''_L \quad (2.7)$$

其中

$$\bar{Z}''_L = -\sin\theta\bar{X}_B + \cos\theta\bar{Z}_B \quad (2.8)$$

$$\bar{X}'_L = \cos\psi\bar{X}''_L - \sin\psi\bar{Y}''_L = \cos\psi\cos\theta\bar{X}_B - \cos\psi\sin\theta\bar{Z}_B - \sin\psi\bar{Y}_B \quad (2.9)$$

代入整理後可得

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\phi}\bar{X}'_L + \dot{\theta}\bar{Y}_B + \dot{\psi}\bar{Z}''_L \\ &= \dot{\phi}(\cos\psi\cos\theta\bar{X}_B - \cos\psi\sin\theta\bar{Z}_B - \sin\psi\bar{Y}_B) + \dot{\theta}\bar{Y}_B + \dot{\psi}(-\sin\theta\bar{X}_B + \cos\theta\bar{Z}_B) \\ &= (\dot{\phi}\cos\psi\cos\theta - \dot{\psi}\sin\theta)\bar{X}_B + (-\dot{\phi}\sin\psi + \dot{\theta})\bar{Y}_B + (-\dot{\phi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\psi}\cos\theta)\bar{Z}_B \end{aligned} \quad (2.10)$$

與(2.6)式比較係數後，可以得到

$$\begin{cases} p = \dot{\phi}\cos\psi\cos\theta - \dot{\psi}\sin\theta \\ q = -\dot{\phi}\sin\psi + \dot{\theta} \\ r = -\dot{\phi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ -\sin\psi & 1 & 0 \\ \cos\psi\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

經過整理可得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec\psi\cos\theta & 0 & \sec\psi\sin\theta \\ \tan\psi\cos\theta & 1 & \tan\psi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

上式即為尤拉方程式，也就是火箭姿態角的計算公式。

2.2.3 四元素方程式

四元素是一種用來描述尤拉角的方式，當尤拉方程式無法計算時(如 $\psi = 90^\circ$)，此時便可用四元素方程式替代，公式如下所示：

$$e_0 = \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \quad (2.13)$$

$$e_1 = \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \quad (2.14)$$

$$e_2 = \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \quad (2.15)$$

$$e_3 = \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \quad (2.16)$$

由(2.13)~(2.16)可以發現，當在計算尤拉角轉換時，轉換次序不同也會造成四元素方程式的不同。透過四元素與尤拉角之間的關係，我們可以用一個四元素方程式來表示四元素與角速度之間的關係，如(2.17)所示：

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

尤拉角可以透過四元素計算出來如(2.18)式所示：

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{2(e_2 e_3 + e_0 e_1)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2} \right) \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{2(e_1 e_3 + e_0 e_2)}{e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2} \right) \\ \psi &= \sin^{-1}(e_0 e_3 - e_1 e_2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.17)式中四元素的初始值可以從(2.13)式至(2.16)式中計算尤拉角的初始值可得，再由(2.17)式計算出 (e_0, e_1, e_2, e_3) ，最後帶入(2.18)式可以算出尤拉角。

2.3 六自由度運動方程式

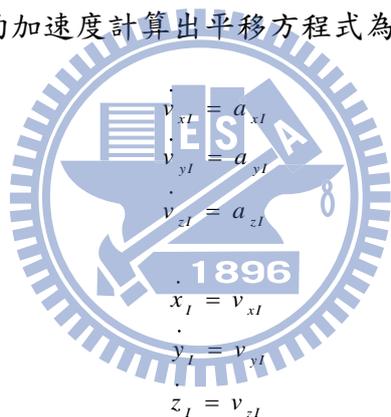
2.3.1 平移運動方程式

火箭除了受到重力和空氣阻力外，還會受到推力器的力作用，火箭所受到的力產生的加速度為

$$\begin{bmatrix} a_{xI} \\ a_{yI} \\ a_{zI} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} T_{IB} \begin{bmatrix} F_{TxB} + F_{AxB} \\ F_{TyB} + F_{AyB} \\ F_{TzB} + F_{AzB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{xI} \\ g_{yI} \\ g_{zI} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

其中 F_{TxB} 、 F_{TyB} 、 F_{TzB} 為推力器在體座標的推力分量， F_{AxB} 、 F_{AyB} 、 F_{AzB} 為空氣阻力在體座標的推力分量， m 為火箭的質量， g 為重力加速度， T_{IB} 為體座標轉換成慣性座標的轉換矩陣。

利用(2.19)式所得到的加速度計算出平移方程式為


$$\begin{aligned} \dot{v}_{xI} &= a_{xI} \\ \dot{v}_{yI} &= a_{yI} \\ \dot{v}_{zI} &= a_{zI} \end{aligned} \quad (2.20a)$$
$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= v_{xI} \\ \dot{y}_I &= v_{yI} \\ \dot{z}_I &= v_{zI} \end{aligned} \quad (2.20b)$$

其中 a_{xI} 、 a_{yI} 、 a_{zI} 為火箭在慣性座標的加速度分量， v_{xI} 、 v_{yI} 、 v_{zI} 為火箭在慣性座標的速度分量， x_I 、 y_I 、 z_I 為火箭在慣性座標的位置分量。

2.3.2 轉動運動方程式

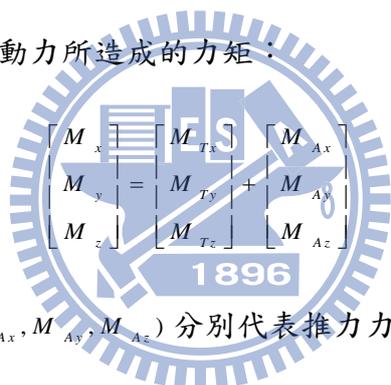
假設火箭為圓柱體，也就是對稱於 x-y 平面及 x-z 平面，則轉動慣量

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ ，且質心在幾何中心，則轉動運動方程式為

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{qr(I_y - I_z)}{I_x} + \frac{M_x}{I_x} \\ \dot{q} &= \frac{rp(I_z - I_x)}{I_y} + \frac{M_y}{I_y} \\ \dot{r} &= \frac{pq(I_x - I_y)}{I_z} + \frac{M_z}{I_z} \end{aligned} \quad (2.21)$$

其中 (M_x, M_y, M_z) 、 (I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}) 、 (p, q, r) 分別為力矩、轉動慣量、角速度在體座標下的三個分量。

力矩包含了推力及氣動力所造成的力矩：



$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{Tx} \\ M_{Ty} \\ M_{Tz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

其中 (M_{Tx}, M_{Ty}, M_{Tz}) 、 (M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}) 分別代表推力力矩和氣動力力矩在體座標下的三個分量。

2.3 氣動力模型

火箭在飛行過程中會受到空氣阻力的影響，空氣阻力的大小與火箭相對於空氣的速度、火箭的形狀等都有很大的關係，一般來說火箭速度越大，受到的空氣阻力越大。為了計算氣動力係數，必須知道火箭當時的全攻角、馬赫數、風向角等參數，氣動力模型如圖 2.6 所示：

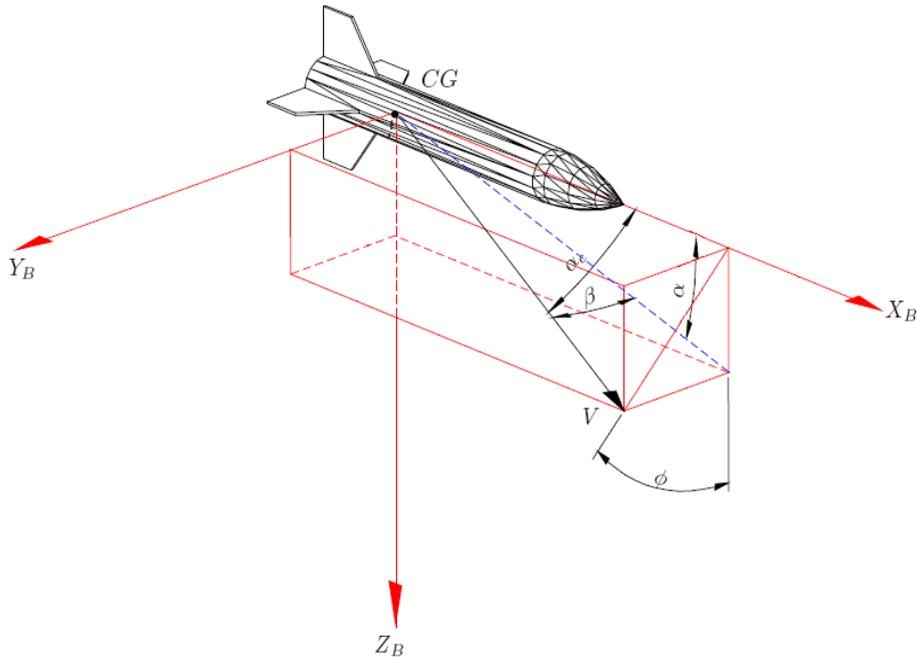


圖 2.6 氣動力模型

其中 (X_B, Y_B, Z_B) 為體座標的三軸， (X_s, Y_s, Z_s) 為速度座標的三軸， V 為火箭速度的方向， α_c 為全攻角， α 為攻角， β 為側滑角， ϕ 為風向角。令 $V = (v_x, v_y, v_z)$ ，以上角度的計算公式如下：

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \cos^{-1} \frac{v_x}{V} & \alpha &= \tan^{-1} \frac{v_z}{v_x} \\ \beta &= \sin^{-1} \frac{v_y}{V} & \phi &= \tan^{-1} \frac{v_y}{v_z} \end{aligned} \quad (2.23)$$

在計算氣動力所造成的力和力矩的氣動力係數如下：

$$\begin{aligned} C_{fx} &= -C_A(M, \alpha_c) \\ C_{fy} &= -C_N(M, \alpha_c) \sin \phi \\ C_{fz} &= -C_N(M, \alpha_c) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.24)$$

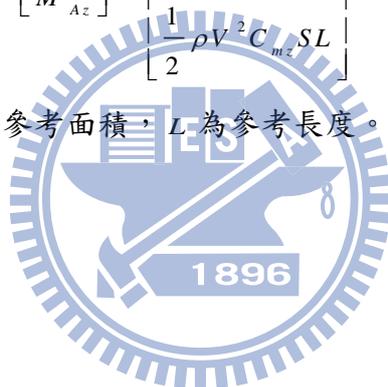
$$\begin{aligned} C_{mx} &= 0 \\ C_{my} &= [C_m(M, \alpha_c) - X_{CG} C_N(M, \alpha_c)] \cos \phi \\ C_{mz} &= [-C_m(M, \alpha_c) + X_{CG} C_N(M, \alpha_c)] \sin \phi \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中 M 為馬赫數， C_{f_x} 、 C_{f_y} 、 C_{f_z} 為力的氣動係數， C_{m_x} 、 C_{m_y} 、 C_{m_z} 為力矩的氣動係數， X_{CG} 為質心位置， C_A 、 C_N 、 C_m 可經由查表得到。氣動力所產生的力與力矩方程式如下：

$$F_A = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho V^2 C_{f_x} S \\ \frac{1}{2} \rho V^2 C_{f_y} S \\ \frac{1}{2} \rho V^2 C_{f_z} S \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$M_A = \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho V^2 C_{m_x} SL \\ \frac{1}{2} \rho V^2 C_{m_y} SL \\ \frac{1}{2} \rho V^2 C_{m_z} SL \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

其中 ρ 為大氣密度， S 為參考面積， L 為參考長度。



第三章 火箭物性設計

3.1 火箭方程式

本節利用火箭方程式來討論多節火箭的質量、燃料比等參數對性能的影響，進而探討理想的物性設計。考慮單節火箭利用燃燒質量產生推力使火箭加速，假設火箭初始質量為 m_0 ，燃畢質量為 m ，噴嘴出口有效排出速度為 v_e ，則根據火箭方程式[1]，火箭燃畢時的速度 v 可表示為

$$v = v_e \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \quad (3.1)$$

由(3.1)式可以看出火箭燃畢的速度只和速度 v_e 及比率 $\frac{m_0}{m}$ 有關：和 v_e 是線性關係，和 $\frac{m_0}{m}$ 是對數關係。當然當 v 是燃燒時任一時間的速度， m 為當時的剩餘質量時，(3.1)式關係仍然成立。值得注意的是速度 v 和燃燒速率沒有關係。(3.1)式是在理想狀況下(不考慮重力及氣動力影響)火箭物性的基礎。將(單節)火箭的質量分成三部分，分別是結構質量 m_s ，燃料質量 m_p ，酬載質量 m_L ，其中 m_s 及 m_L 為定值， m_p 為時間函數。所以火箭初始總質量 $m_0 = m_s + m_L + m_p(0)$ ，火箭燃畢的質量 $m_f = m_s + m_L$ ，將燃畢質量對初始質量的比率寫成

$$\frac{m_f}{m_0} = \frac{m_s + m_L}{m_s + m_L + m_p(0)} = \frac{m_s}{m_s + m_p(0)} + \frac{m_p(0)m_L}{m_0(m_s + m_p(0))} = \sigma + (1 - \sigma)\lambda \quad (3.2)$$

其中 $\sigma = \frac{m_s}{m_s + m_p(0)}$ 為結構比， $\lambda = \frac{m_L}{m_0}$ 為酬載比，則可以將(3.1)式改寫成

$$v = -v_e \ln[\sigma + (1 - \sigma)\lambda] \quad (3.3)$$

由於 $0 < \sigma < 1$ 且 $0 < \lambda < 1$ ，所以 $0 < \sigma + (1 - \sigma)\lambda < 1$ ，因此

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -v_e \frac{1 - \lambda}{\sigma + (1 - \sigma)\lambda} < 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = -v_e \frac{1 - \sigma}{\sigma + (1 - \sigma)\lambda} < 0 \quad (3.5)$$

由(3.4)式及(3.5)式可以看出當結構比或酬載比增加時，燃畢速度均遞減。多節火箭的速度計算也一樣：每節脫離後以剩餘的質量為新的初始質量，當時的速度為初始速度，利用(3.3)可計算速度的改變量。以三節火箭為例。 $m_{01} = m_0$ ， m_{02} 、 m_{03} 分別為火箭原始質量，第一節脫離之後的剩餘質量和第二節脫離之後的剩餘質量。

令 m_{04} 為第三節火箭脫離之後的剩餘質量，即 $m_{04} = m_L$ ，定義各節酬載比為

$$\lambda_1 = \frac{m_{02}}{m_{01}}, \lambda_2 = \frac{m_{03}}{m_{02}}, \lambda_3 = \frac{m_{04}}{m_{03}}, \text{ 則總酬載比 } \lambda_T = \frac{m_L}{m_0} \text{ 可表示為 } \lambda_T = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \text{ 依(3.3)}$$

的方程式，三節燃畢時的火箭速度(即酬載速度)為

$$v = - \sum_{k=1}^3 v_{ek} \ln[\sigma_k + (1 - \sigma_k)\lambda_k] \quad (3.6)$$

其中 $\sigma_1 = \frac{m_{s1}}{m_{s1} + m_{p1}}$ 、 $\sigma_2 = \frac{m_{s2}}{m_{s2} + m_{p2}}$ 、 $\sigma_3 = \frac{m_{s3}}{m_{s3} + m_{p3}}$ 為各節的結構比， m_{s1} 、 m_{s2} 、

m_{s3} 為各節的結構質量， m_{p1} 、 m_{p2} 、 m_{p3} 為各節的燃料質量， v_{e1} 、 v_{e2} 、 v_{e3} 為各

節的噴嘴出口有效排出速度，更多節火箭的速度公式也一樣，如果是N節火箭

則 v_{ek} 、 σ_k 、 λ_k 的定義類似，上式的3改為N即可。

3.2 節數(N)及結構比(σ)對火箭的影響

3.2.1 節數(N)對火箭的影響

本節利用數值計算來看載具火箭的節數對最終速度的影響。為簡化討論考慮，

v_{ek} 、 σ_k 、 λ_k 均為固定常數，其中 $\sigma_k = 0.1$ ， $v_{ek} = 2450 \text{ m/s}$ ， $\lambda_k = \sqrt[N]{\frac{m_L}{m_0}}$ ， $k = 1, \dots, N$ 。

圖 3.7 顯示 $\lambda_T (= \frac{m_L}{m_0})$ 和 $\frac{v}{v_e}$ 的關係。由圖可以看出多節火箭的優點：在固定的酬

載比之下，節數越多，酬載的速度越大。例如當 $\lambda_T = 0.01$ 時，節數和 $\frac{v}{v_e}$ 的關係如

表 3.1 所示：

節數(N)	1	2	3	4	10
$\frac{v}{v_e}$	2.22	3.32	3.67	3.82	4

表 3.1 節數和 $\frac{v}{v_e}$ 的關係表

以 $v_e=2450$ m/s 為例，入軌要求需要 $\frac{v}{v_e} \geq 3.13$ ，從表 3.1 可以看出三節火箭有足夠的速度入軌，更多節的火箭在速度上的改善不大，但是系統更複雜。這是為什麼大部分的載具均未超過三節的原因。

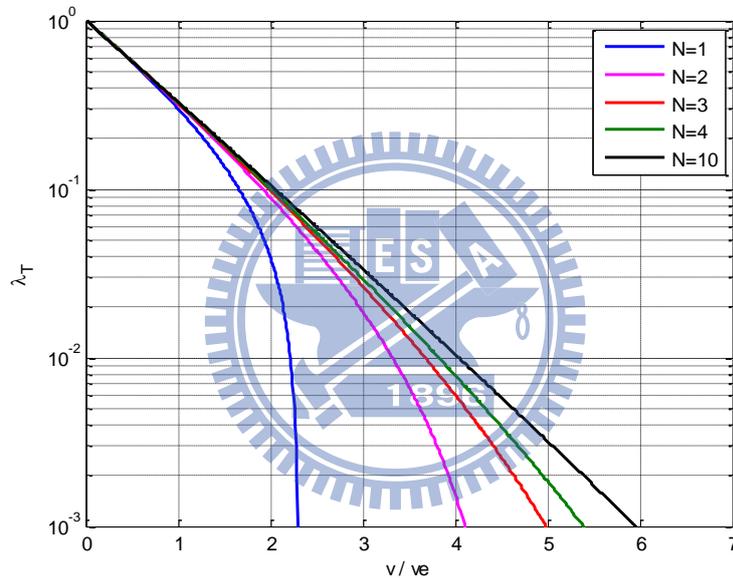


圖 3.7 不同節數的火箭，總酬載比(λ_T)對 $\frac{v}{v_e}$ 的曲線圖

3.2.2 結構比(σ)對火箭的影響

本節使用 3.2.1 節所討論的三節火箭為例，利用數值計算不同結構比對火箭

的影響，其中 $v_{ek}=2450$ m/s， $\lambda_k = \sqrt[3]{\frac{m_L}{m_0}}$ ， $k=1,2,3$ 。圖 3.8 顯示三節火箭在不同的

結構比之下，酬載比與速度比的關係。由圖 3.8 可以看出在 σ 越小的情況下，

酬載的速度越大。例如當 $\lambda_T=0.01$ 時，結構比和 $\frac{v}{v_e}$ 的關係如表 3.2 所示，由表 3.2

可以看出，當 σ 越大時，代表推進劑燃料比率越小，則速度也相對的減少。

結構比(σ)	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
$\frac{v}{v_e}$	4.1	3.67	3.3	2.96	2.66

表 3.2 結構比和 $\frac{v}{v_e}$ 的關係表

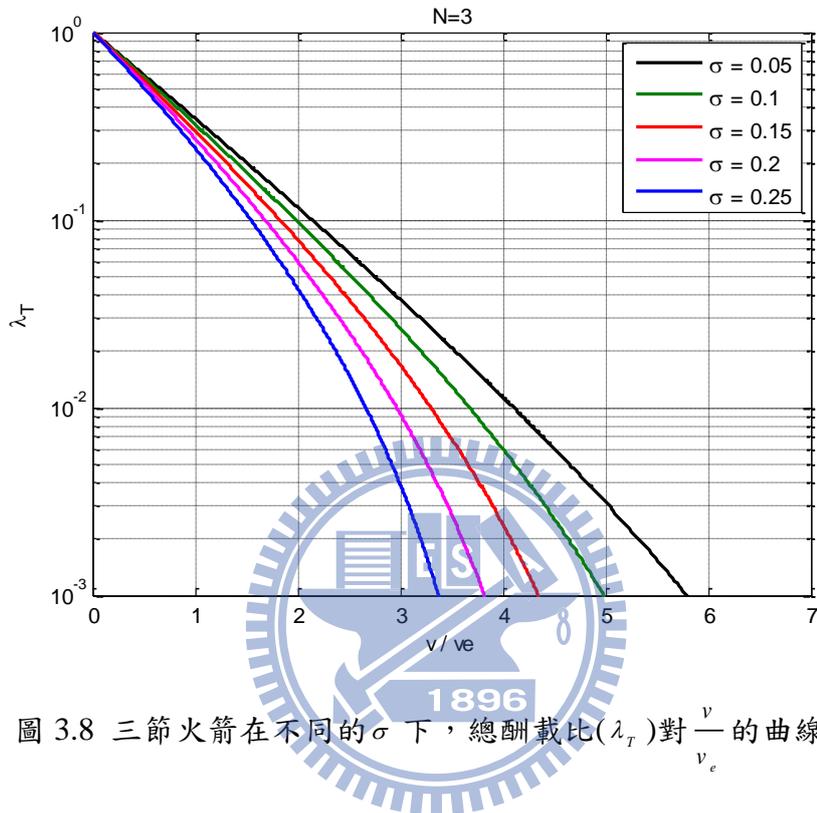


圖 3.8 三節火箭在不同的 σ 下，總酬載比(λ_T)對 $\frac{v}{v_e}$ 的曲線圖

3.3 各節質量分配

3.3.1 不同的酬載比(λ_k)對火箭的影響

火箭設計的一個問題是如何分配各節的質量才能達到最大的燃畢速度。以三節火箭為例，這個問題可以利用最佳化的方法來求解。我們考慮一個 30kg 的酬載，固定總酬載比為 $\lambda_T = 2 \times 10^{-3}$ ，所以三節火箭的初始總質量為 $m_0 = 15000 \text{ kg}$ ，同時固定各節的結構比及排出速度為 $\sigma_k = 0.15$ ， $v_{ek} = 2450 \text{ m/s}$ ， $k = 1, 2, 3$ 。

終端速度最大化的問題可表示為

$$\begin{cases} \max_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} & - \sum_{k=1}^3 2450 \ln[0.15 + 0.85\lambda_k] \\ \text{sub. to} & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 2 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (3.7)$$

其中限制式代表總酬載比(λ_T)必須等於 2×10^{-3} 。透過解析法求解，求解過程如下所示：

令

令

$$L = -v + \phi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2 \times 10^{-3}) \quad (3.8)$$

其中 $v = - \sum_{k=1}^3 2450 \ln[0.15 + 0.85\lambda_k]$ ， ϕ 為 lagrange multiplier。最大化的必要條件如下所示：

如下所示：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (3.10)$$

透過(3.9)式可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{2450 \times 0.85}{0.15 + 0.85\lambda_1} + \lambda_2 \lambda_3 \phi = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \frac{2450 \times 0.85}{0.15 + 0.85\lambda_2} + \lambda_1 \lambda_3 \phi = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \frac{2450 \times 0.85}{0.15 + 0.85\lambda_3} + \lambda_1 \lambda_2 \phi = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2450 \times 0.85}{0.15 + 0.85\lambda_1} \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \phi = 0 \\ \frac{2450 \times 0.85}{0.15 + 0.85\lambda_2} \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \phi = 0 \\ \frac{2450 \times 0.85}{0.15 + 0.85\lambda_3} \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \phi = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

由(3.12)式可以整理出下列關係式：

$$\frac{\lambda_1}{0.15 + 0.85\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{0.15 + 0.85\lambda_2} = \frac{\lambda_3}{0.15 + 0.85\lambda_3} \quad (3.13)$$

最後可得到當 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 有最佳解，即 v 為最大值。將結果代入(3.10)式可得到

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.126$ 。將所求出的最佳酬載比代入實際模擬(有重力及氣動力影響)

和其他酬載比做比較，如表 3.3 所示：

λ_1	λ_2	λ_3	V (m/s)	Altitude (km)	E(總能 J)
0.1	0.2	0.1	6438	1541	-8.904×10^8
0.1	0.3	0.0667	6147	1362	-9.803×10^8
0.2	0.1	0.1	6559	1421	-8.901×10^8
0.2	0.2	0.05	6290	1192	-9.884×10^8
0.2	0.3	0.033	5908	1012	-1.097×10^9
0.3	0.1	0.0667	6727	1035	-9.365×10^8
0.3	0.2	0.033	6498	811	-1.032×10^9
0.3	0.3	0.0556	6231	636	-1.125×10^9
0.126	0.126	0.126	6539	1609	-8.578×10^8

表 3.3 不同 λ 的高度、速度、能量表

表 3.3 為在氣動力及重力的影響下，將各節火箭以不同的酬載比進行模擬，可得到在第三節燃畢時($t=350s$)的速度、高度及能量值，其中能量為動能及位能的總和如(3.14)式所定義：

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mV^2 \quad (3.14)$$

其中 G 為萬有引力常數， M 為地球質量， m 為酬載質量， R 為酬載與地心之距離，(3.14)式前項是位能，後項為動能。由於最佳化問題(3.7)並未考慮重力及氣動力的影響，因此模擬的結果顯示在酬載比相同的情況下($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.126$)，火箭在第三節燃畢時並未達到最大速度，但是和表 3.3 中其他酬載比組合來比較，相同的酬載比有最大的能量。由(3.14)式可以看出高度越高(R 越大)或速度越大(V 越大)則總能量越大。由於入軌的需求，除了飛行路徑角的需求之外，就是高度

及速度的需求，因此也可以視為總能量的需求，所以最大能量的設計從入軌的觀點來看就是最好的設計。在不考慮重力場的狀況下，位能為零，火箭的動能就是總能量。因此最佳化問題(3.7)將速度最大化就是將能量最大化，所以從表 3.3 的結果所得的結論也應可預期。

3.3.2 不同的結構比(σ_k)對火箭的影響

在 3.3.1 節的討論中得知酬載比對火箭的影響，而火箭設計的另一個問題則是如何分配各節的燃料質量才能達到最大的燃畢速度。這個問題同樣也可以用最佳化的方法來求解。我們考慮一個 30kg 的酬載，將各節的酬載比固定為 0.126，所以三節火箭的初始總質量為 $m_0 = 15000\text{kg}$ ，各節的排出速度為 $v_{ek} = 2450\text{ m/s}$ ， $k = 1, 2, 3$ 。將整體的結構比固定在 $\sigma = 0.15$ 。假設我們限制各節結構比的下限為 0.1，即 $\sigma_1 \geq 0.1$ 、 $\sigma_2 \geq 0.1$ 、 $\sigma_3 \geq 0.1$ ，則終端速度最大化的問題可表示為

$$\begin{cases} \max_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} & -\sum_{k=1}^3 2450 \ln[\sigma_k + 0.126(1-\sigma_k)] \\ \text{sub. to} & 13110\sigma_1 + 1652\sigma_2 + 178\sigma_3 = 2246 \\ & -\sigma_1 + 0.1 \leq 0 \\ & -\sigma_2 + 0.1 \leq 0 \\ & -\sigma_3 + 0.1 \leq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

其中第一個限制式代表各節火箭的結構質量要等於火箭整體的結構質量。透過解析法求解，求解過程如下：

令

$$L = -v + \phi(13110\sigma_1 + 1652\sigma_2 + 178\sigma_3 - 2246) + \mu_1(0.1 - \sigma_1) + \mu_2(0.1 - \sigma_2) + \mu_3(0.1 - \sigma_3) \quad (3.16)$$

其中 $v = -\sum_{k=1}^3 2450 \ln[\sigma_k + 0.126(1-\sigma_k)]$ ， ϕ 為相對於等式限制 lagrange multiplier，

μ_1 、 μ_2 、 μ_3 為三個不等式的 lagrange multiplier。最大化的必要條件為

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (3.18)$$

$$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\mu_1(0.1 - \sigma_1) = 0 \quad (3.20)$$

$$\mu_2(0.1 - \sigma_2) = 0 \quad (3.21)$$

$$\mu_3(0.1 - \sigma_3) = 0 \quad (3.22)$$

當然另外的限制是各節結構比必須小於 1，即 $\sigma_1 \leq 1$ 、 $\sigma_2 \leq 1$ 、 $\sigma_3 \leq 1$ 。由(3.17)

式及(3.18)式可得

$$\frac{k}{\sigma_1 + 0.126(1 - \sigma_1)} + 13110\phi - \mu_1 = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{k}{\sigma_2 + 0.126(1 - \sigma_2)} + 1652\phi - \mu_2 = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{k}{\sigma_3 + 0.126(1 - \sigma_3)} + 178\phi - \mu_3 = 0 \quad (3.25)$$

$$13110\sigma_1 + 1652\sigma_2 + 178\sigma_3 = 2246 \quad (3.26)$$

其中 $k = 2450 \times 0.874$ 。利用(3.20)~(3.22)式於(3.23)~(3.25)式可得

$$\left(\frac{k}{\sigma_1 + 0.126(1 - \sigma_1)} + 13110\phi\right)(0.1 - \sigma_1) = 0 \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{k}{\sigma_2 + 0.126(1 - \sigma_2)} + 1652\phi\right)(0.1 - \sigma_2) = 0 \quad (3.28)$$

$$\left(\frac{k}{\sigma_3 + 0.126(1 - \sigma_3)} + 178\phi\right)(0.1 - \sigma_3) = 0 \quad (3.29)$$

由於 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 受到(3.26)式的限制，不能選擇 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$ ，因此(3.27)~(3.29)

的左邊第一項必有一個為 0，所以 ϕ 確定為負值，即 $\phi < 0$ 。我們不能選擇 $\sigma_3 > 0.1$

，因為這樣的選擇造成

$$\phi = -\frac{1}{178} \frac{k}{0.126 + 0.874\sigma_3} > -\frac{1}{178} \frac{k}{0.126 + 0.0874} \quad (3.30)$$

將(3.30)式代入(3.28)式可知若(3.28)要滿足則必須令 $\sigma_2 \leq 0.1$ ，同理由(3.27)式可

得 $\sigma_1 \leq 0.1$ ，所以得到 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ ，代回(3.26)得到 $\sigma_3 = 4.3 > 1$ ，違反結構比小

於 1 的要求，因此可得到 $\sigma_3 = 0.1$ 。由(3.26)~(3.28)式可知 σ_1 及 σ_2 只有兩種可能

的選擇，即 $\sigma_2 > 0.1$ 、 $\sigma_1 = 0.1$ 或 $\sigma_2 = 0.1$ 、 $\sigma_1 > 0.1$ 。比較這兩種選擇所造成的速

度，可知最佳的選擇是 $\sigma_1 = 0.15736$ 、 $\sigma_2 = 0.1$ 、 $\sigma_3 = 0.1$ 。若結構比的下限為 0.2，即 $\sigma_1 \geq 0.2$ 、 $\sigma_2 \geq 0.2$ 、 $\sigma_3 \geq 0.2$ ，則最佳的選擇是 $\sigma_1 = 0.1434$ 、 $\sigma_2 = 0.2$ 、 $\sigma_3 = 0.2$ 。將所求出的最佳結構比(理想情況)代入實際模擬(有重力及氣動力影響)的速度、高度及能量如表 3.4 所示。由表 3.4 可以看出，在設計上若整體結構質量不變下，當第一節的結構比越大時，速度越快，且得到的能量越多。

σ_1	σ_2	σ_3	V (m/s)	Altitude (km)	E(總能 J)
0.15	0.15	0.15	6539	1609	-8.578×10^8
0.15736	0.1	0.1	7412	1741	-6.515×10^8
0.1434	0.2	0.2	5810	1498	-1.014×10^9

表 3.4 不同 σ 的高度、速度、能量表

3.4 討論

在 3.2 節探討節數及結構比對火箭速度的影響，得知在三節火箭的情況下為最佳的火箭節數設計，而結構比越大則會使得火箭速度越慢。在 3.3 節中分成兩個部份，第一部份為探討不同酬載比對火箭的影響，透過建立最佳化問題，我們得知在各節酬載比皆相同的情況下，可以得到最大的終端速度，將所得到的最佳解(理想情況)代入實際模擬(有重力及氣動力影響)和其他酬載比做比較，由能量的觀點得到三節酬載比皆相同時有最大總能量，符合預期的結果。第二部分則是在總結構比固定的情況下，探討各節不同的結構比對火箭的影響，透過最佳化問題所求得的最佳解(理想情況)代入實際模擬(有重力及氣動力影響)和其他結構比做比較，發現在第一節結構比越大時，則總能量越大，符合預期的結果。

第四章 載具及衛星入軌的導引與控制

運送衛星入軌的載具通常為三節火箭加酬載(payload,即衛星)的結構。各節火箭依序點火燃畢拋離，最後將衛星送入選定的軌道。各節火箭的質量燃料分配的最佳設計已於前面章節討論，大致上三節火箭的結構為最常見的選擇，而理論上(忽略重力及氣動力的影響)也有簡單的公式來決定各節質量最佳分配。前面的探討利用最佳化的方法計算質量最佳分配發現即使在重力及氣動力的影響之下，所得的最佳分配與純理論分析所得相差不遠。

依載具各節火箭點火時間劃分可將載具的飛行區分為三個階段：

第一階段：火箭升高階段，導引控制最重要的目標是火箭穩定性及結構完整性。

第二階段：透過俯仰的姿態控制將載具的飛行路徑角從近垂直控制到近水平的方

向，在這個過程中也將能量適當地分配到高度及速度的增加上。

第三階段：精準入軌的階段，必須使速度、高度及飛行路徑角同時控制到滿足預設的入軌條件。

各個階段有不同的規格需求，其導引及控制的法則也因此不同。在全程從發射到衛星入軌的飛行中火箭必須維持姿態的穩定，因此控制除了要滿足上面所提的需求外尚必須達到三軸穩定，其中橫向的偏航角及滾轉角均控制在零。控制透過推力向量角度的改變來達成。

4.1 推力向量系統(TVC)

在使用推力向量系統時，y 軸與 z 軸兩個方向的轉動最大不超過 $\pm 5^\circ$ ，以避免火箭呈現旋轉的情況發生，系統的定義如圖 4.1 所示：

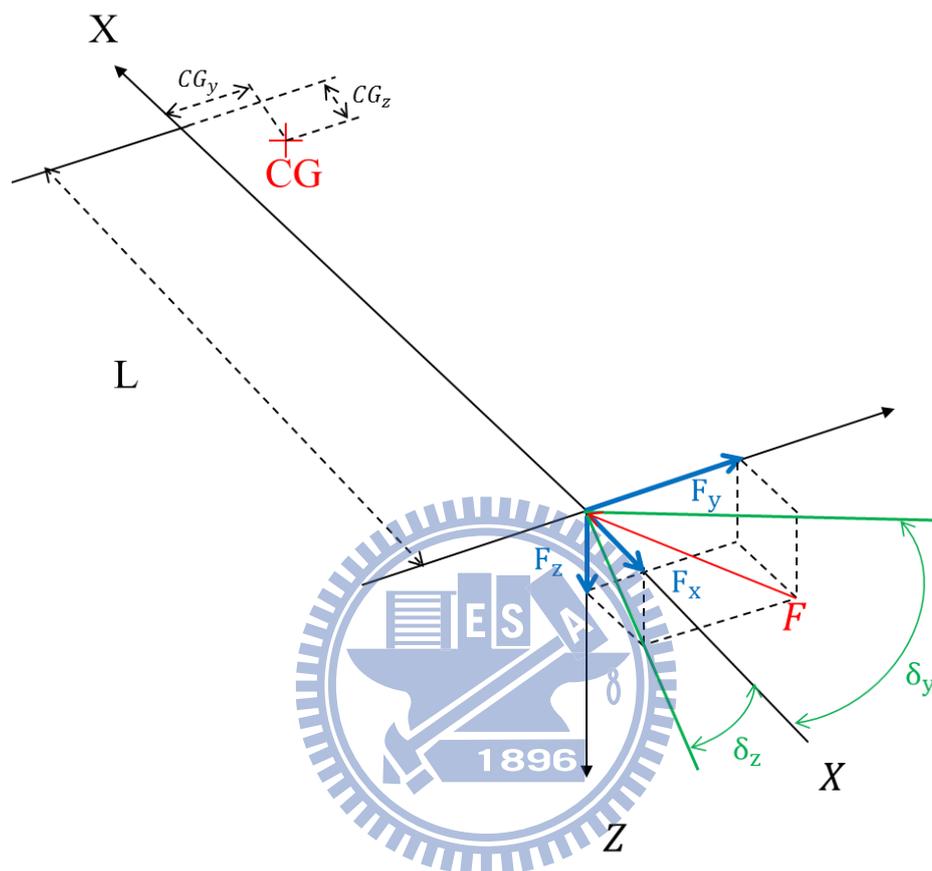


圖 4.1 推力向量系統

其中 (X, Y, Z) 是體座標軸， F 代表三個推力器所產生的推力方向， CG 為火箭質心位置， L 為質心跟推力器之間的距離， δ_y 為 F 在 X - Y 平面上的投影向量跟 X 軸之間的夾角， δ_z 為 F 在 X - Z 平面上的投影跟 X 之間的夾角。

由圖 4.1 的定義我們可以推導出 y 方向及 z 方向的推力為

$$\begin{aligned} F_y &= -F \sin \delta_y \\ F_z &= -F \sin \delta_z \end{aligned} \quad (4.1)$$

且

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \quad (4.2)$$

將(4.1)代入(4.2)可得

$$F^2 = F_x^2 + F^2 \sin^2 \delta_y + F^2 \sin^2 \delta_z \quad (4.3)$$

整理得到

$$\begin{aligned} F_x^2 &= F^2 - F^2 \sin^2 \delta_y - F^2 \sin^2 \delta_z \\ \Rightarrow F_x &= F \sqrt{1 - \sin^2 \delta_y - \sin^2 \delta_z} \end{aligned} \quad (4.4)$$

令 $\Delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta_y - \sin^2 \delta_z}$

，可以得到推力的力方程式為

$$\begin{bmatrix} F_{Tx} \\ F_{Ty} \\ F_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \\ 0 & 0 & -F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \sin \delta_y \\ \sin \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

由圖 4.1 的定義我們可以推導出推力的力矩方程式為

$$\begin{bmatrix} M_{Tx} \\ M_{Ty} \\ M_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -FCG_z & FCG_y \\ -FCG_z & 0 & -F_2L \\ F_2CG_y & F_2L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \sin \delta_y \\ \sin \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

由於 δ_{yi} 和 δ_{zi} 有 $\pm 5^\circ$ 的限制，變化範圍很小，則 $\Delta_i \approx 1$ ， $\sin \delta_{yi} \approx \delta_{yi}$ ， $\sin \delta_{zi} \approx \delta_{zi}$ ，

所以可以將(4.5)和(4.6)簡化成

$$\begin{bmatrix} F_{Tx} \\ F_{Ty} \\ F_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \\ 0 & 0 & -F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} M_{Tx} \\ M_{Ty} \\ M_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -FCG_z & FCG_y \\ -FCG_z & 0 & -FL \\ FCG_y & FL & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

(4.7)及(4.8)即為推力器的力與力矩方程式。

4.2 重力轉彎

載具通常以垂直或接近垂直於地平面的角度發射。如果載具以接近垂直的角度(即斜角)發射，則發射之後可立即進行重力轉彎的控制，發射的角度越斜則重力轉彎的角度變化速度越快。在火箭剛升空的時候，尚處在空氣密度高的階段，當火箭的速度增加，動壓亦幾乎是以速度平方的比例增加，此時即使只有幾度的攻角亦可能造成火箭折斷的力矩(bending moment)，不但會造成控制上的困難，也可能會使得載具受到損害，因此在發射之後必須立即設法將攻角控制至零。將載具的攻角控制為零度，即將體座標的 x 軸與火箭速度向量維持在重合的狀況稱為重力轉彎控制，可以使空氣阻力對火箭造成的影響變小。由於攻角不易準確量測，重力轉彎的控制通常利用角速度回授，透過俯仰角速度的控制來達到零攻角的目的。

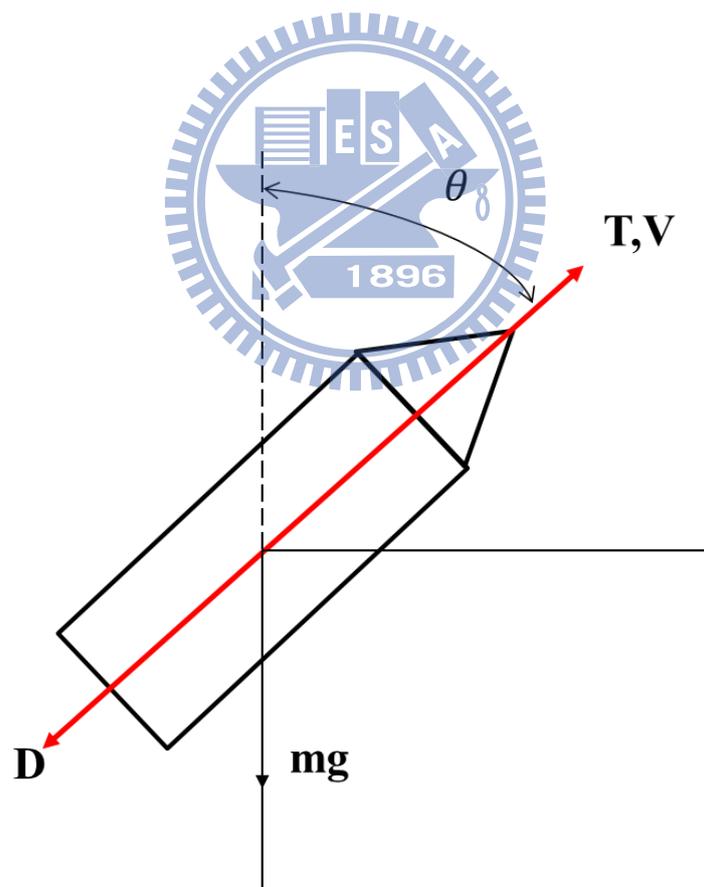


圖 4.2 火箭受力狀況

圖 4.2 顯示載具在零攻角之下縱向的受力狀況，其中 T 為火箭推力的方向，大致上即火箭體座標 x 軸的方向， V 為火箭(縱向)的速度向量， D 為火箭所受的空氣阻力， mg 代表火箭所受的重力，火箭的俯仰角為 θ (火箭垂直向上時 θ 為 0 度，水平向前時 θ 為 -90 度)。由於 V 和 T 同方向，攻角為 0 度，且火箭未受到垂直於 x 軸的力量也因此沒有力矩作用其上。在這個情況下火箭的縱向運動方程式如(4.9)式及(4.10)式所示[5]。

$$T - D - mg \cos \theta = m \frac{dV}{dt} \quad (4.9)$$

$$mg \sin \theta = mV \frac{d\theta}{dt} \quad (4.10)$$

(4.9)式描述火箭速度 V 的大小因在體座標 x 軸方向受力而改變。(4.10)式描述速度方向因重力影響而改變。由圖 4.2 亦可看出速度向量 V 因為重力加速度而趨水平使 $|\theta|$ 角度增加，因此稱為重力轉彎。由(4.10)式可得到速度轉彎的速率 $\dot{\theta}$ 如(4.11)式所示。



$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{g \sin \theta}{V} \quad (4.11)$$

(4.11)式顯示 $\dot{\theta}$ 和 $|\sin \theta|$ 成正比。如果能將 θ 控制著一直滿足(4.11)式則能確保 T 和 V 重合而達到攻角為 0 度的目的。控制系統的設計方塊圖如圖 4.3 所示。姿態角的動態以簡單的雙積分加增益模式近似，即

$$\ddot{\theta} = \frac{M_y}{I_y} \quad (4.12)$$

其中 M_y 為力矩， I_y 為轉動慣量。控制器的輸出為推力向量角度的命令 δ_{yc} ，實際的推力向量角度為 δ_y ，一階轉移函數 $\frac{a}{s+a}$ 描述推力噴嘴的動態。控制系統的參考輸入為(4.11)式所列角速度命令即

$$\dot{\theta}_c = \frac{g \sin \theta}{V} \quad (4.13)$$

由上式可看出要產生 $\dot{\theta}_c$ 需要量測角度 θ 及速度大小 V 。方塊圖中 K_A 代表單位推向量角度所產生的力矩。由於受控系統為簡單的二階系統且含一個積分器，控制器可以使用簡單的增益，即比例控制器即可。

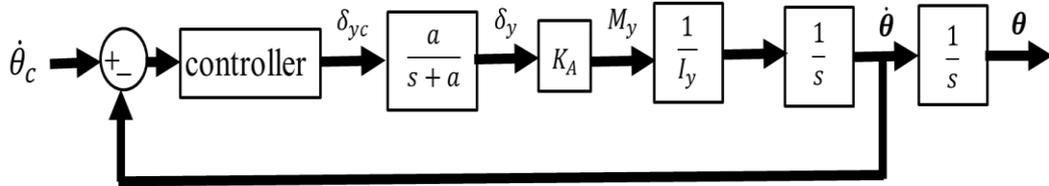


圖 4.3 第一階段控制系統方塊圖

4.3 第二階段

4.3.1 線性正切導引律

在第一階段結束後，空氣密度已經變得很低，所以可以開始轉向的機制。第二階段火箭主要的目的是達到期望高度，並且降低飛行路徑角。第二階段火箭的導引律如下[9]：

$$\tan \theta_c = \tan \theta_0 - (\tan \theta_0 - \tan \theta_f) \frac{t}{t_e}, \quad t \leq t_e \quad (4.14.a)$$

$$\theta_c = \theta_f - \frac{R_a}{R_E} \times 2\pi, \quad t > t_e \quad (4.14.b)$$

其中(4.14.a)式中 θ_0 為第二階段啟動時的 θ 角， t_e 為 θ 達到 θ_f 的時間， θ_f 為 $t = t_e$

的 θ 角。(4.14.b)式中 R_a 為當時的射程， R_E 為地球周長，右手邊第二項是為補償

因地球曲面所造成的水平面(local horizontal plane)的變化。在 $t \leq t_e$ 時，利用(4.14.a)

式控制火箭轉向，在 $t > t_e$ 時，利用(4.14.b)式控制火箭飛行直到第二階段結束。

此導引律的控制參數為 t_e 及 θ_f ，在計算上將 t_e 固定，進而求解 θ_f ，而 θ_f 的大小

則取決於期望高度，計算的方法會在後面的章節討論。

我們可以知道高度、速度、飛行路徑角變化率如下：

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (4.15)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{m} (T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma) + R \omega^2 \cos \tau [\cos \tau \sin \gamma - \sin \tau \cos \gamma \sin \psi] \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = \frac{1}{mV} [& (T \sin \alpha + L) \cos \mu - mg \cos \gamma] + \frac{V \cos \gamma}{R} + 2\omega \cos \tau \cos \psi \\ & + \frac{R\omega^2}{V} \cos \tau (\cos \tau \cos \gamma + \sin \tau \sin \gamma \sin \psi) \end{aligned} \quad (4.17)$$

其中 m 為載具重量， T 為火箭推力， g 為(地球海平面的)重力加速度， λ 為(載具所在位置的)經度， τ 為緯度， R 為載具離地心的距離， V 為載具的速度(純量)， γ 為載具的飛行路徑角， ψ 為速度方向角， α 為攻角， D 為載具所受的氣動阻力， L 為氣動浮力(垂直於速度方向)， ω 為地球自轉的速率， h 為載具距海平面的高度， μ 為體座標 x 軸在速度座標 $y-z$ 平面的投影和 y 軸的夾角。而 θ 跟 α 、 γ 的關係如下圖所示：

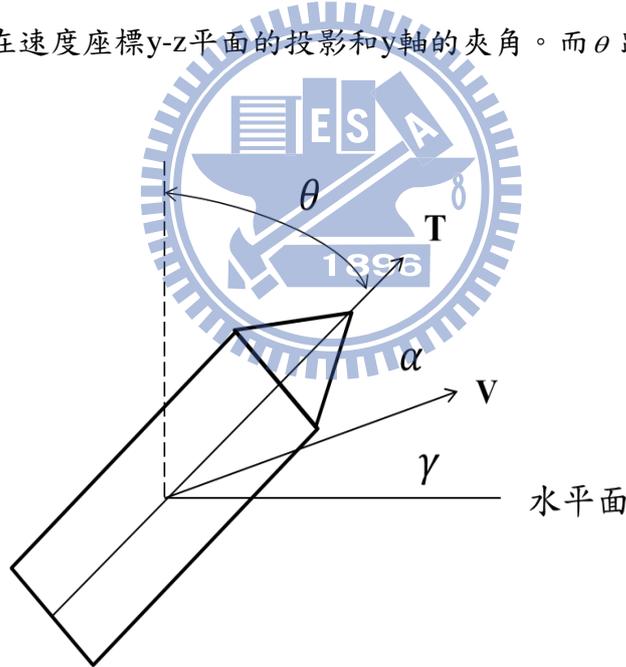


圖 4.4 θ 跟 α 、 γ 關係圖

由圖 4.4 可以得到 θ 跟 α 、 γ 關係為

$$\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma\right) \quad (4.18)$$

負號是因為 θ 介於 $-\frac{\pi}{2} \sim 0$ ，在第二階段啟動時會有大幅度轉向， α 有瞬間的大角度變化，而後呈現遞增，如圖 4.5 所示：

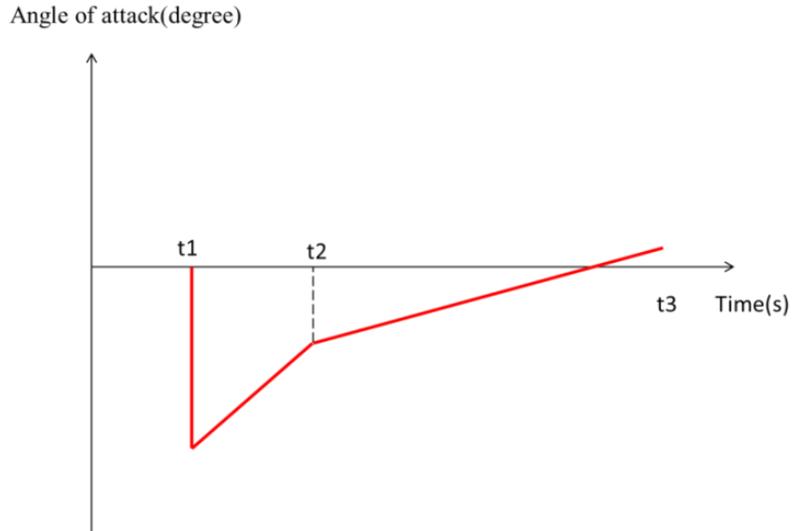


圖 4.5 α 變化示意圖

其中 t_1 為第二節火箭啟動的時間， t_2 為第二節火箭結束的時間， t_3 為第三節火箭啟動的時間。由(4.16)及(4.17)可以發現速度及飛行路徑角的變化率是非線性的，無法直接由計算得到，但是由(4.18)式及圖 4.5 可以得知， γ 會呈現遞減的情況，在有推力或無推力的情況下，飛行路徑角的變化可以近似為線性，而速度可近似為二次曲線形式，如圖 4.6、圖 4.7 所示：

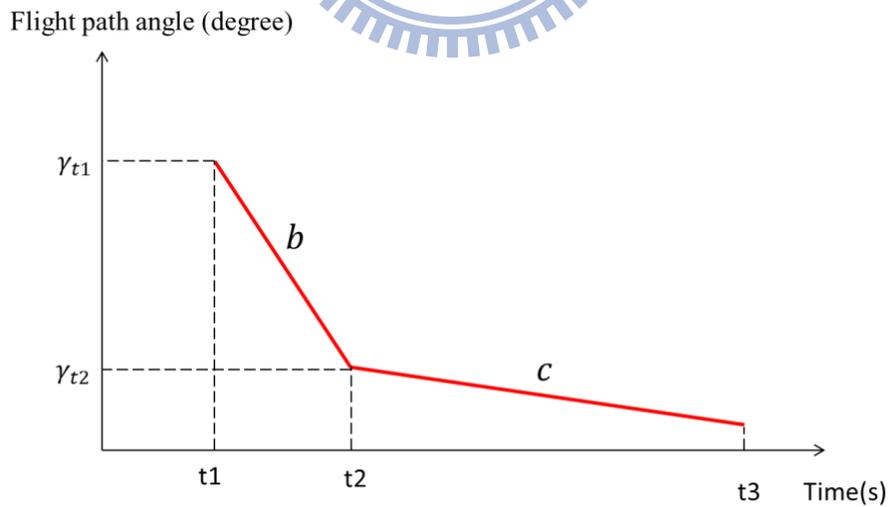


圖 4.6 γ 變化示意圖

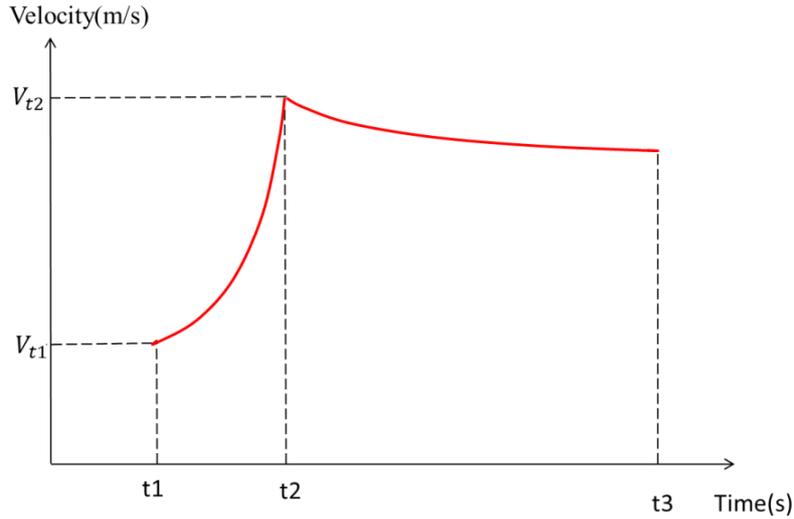


圖 4.7 V 變化示意圖

利用圖 4.6 及圖 4.7 將速度及飛行路徑角的公式寫成如(4.19)式及(4.20)式所示：

$$V = \begin{cases} m_1(t-t_1)^2 + V_{t1}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ m_2(t-t_1)^2 + V_{t2}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_{t1} + b(t-t_1), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \gamma_{t2} + c(t-t_2), & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (4.20)$$

其中 b、c 為斜率， m_1 、 m_2 為拋物線參數，所以可以將(4.15)做分段式積分得到

$$h(t_3) = h(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} V \sin \gamma dt + \int_{t_2}^{t_3} V \sin \gamma dt \quad (4.21)$$

其中 $h(t_1)$ 為第二階段啟動前的高度，透過(4.21)可以得到火箭在第三階段啟動前的高度。

4.3.2 t_e 的影響

t_e 可以控制火箭到達 θ_f 的時間，也就表示會影響火箭在第二階段飛行時的高度、速度及飛行路徑角。圖 4.8、圖 4.9 及圖 4.10 分別為第二階段結束時，在不同的 t_e 及 θ_f 情況下，火箭的高度、速度及飛行路徑角的結果。

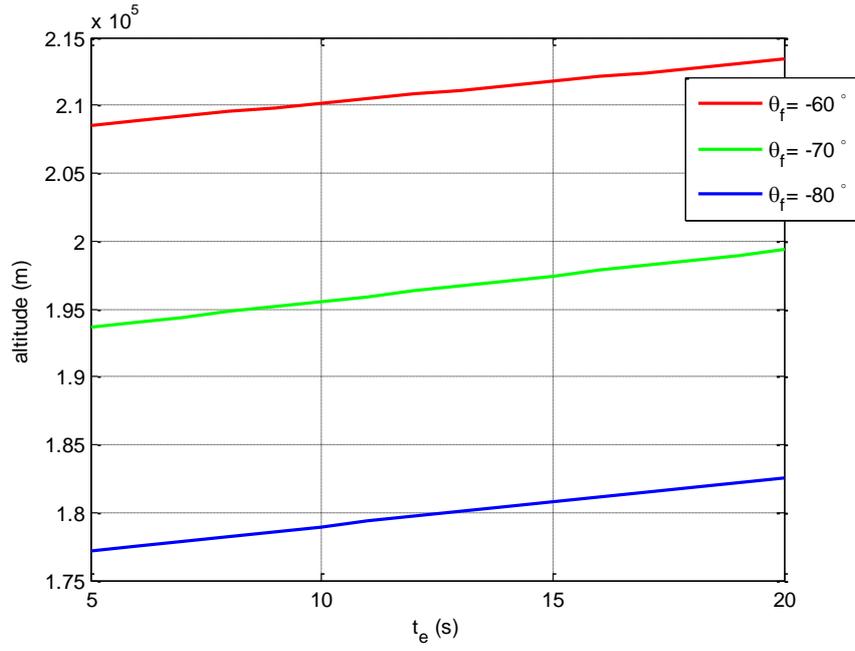


圖 4.8 高度對 t_e 圖

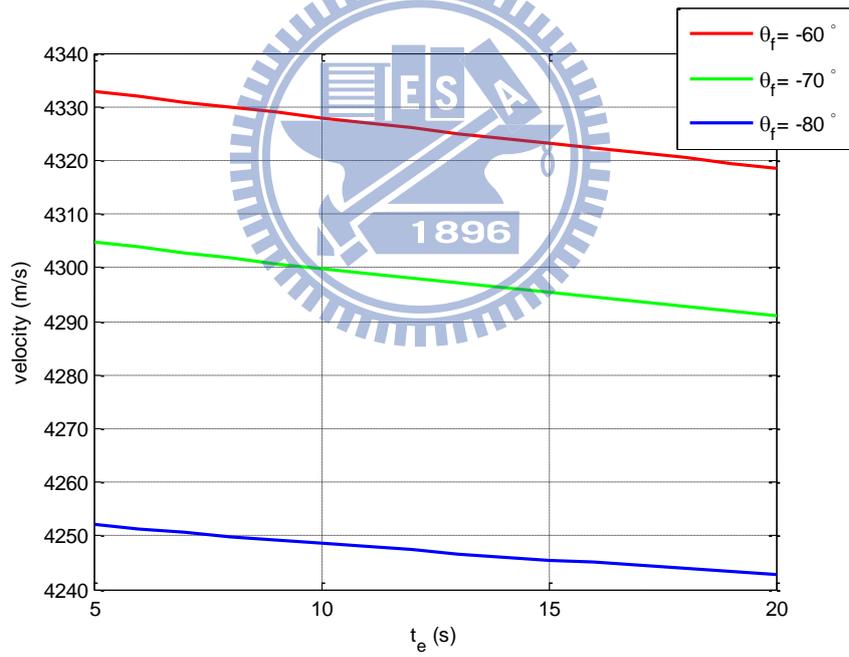


圖 4.9 速度對 t_e 圖

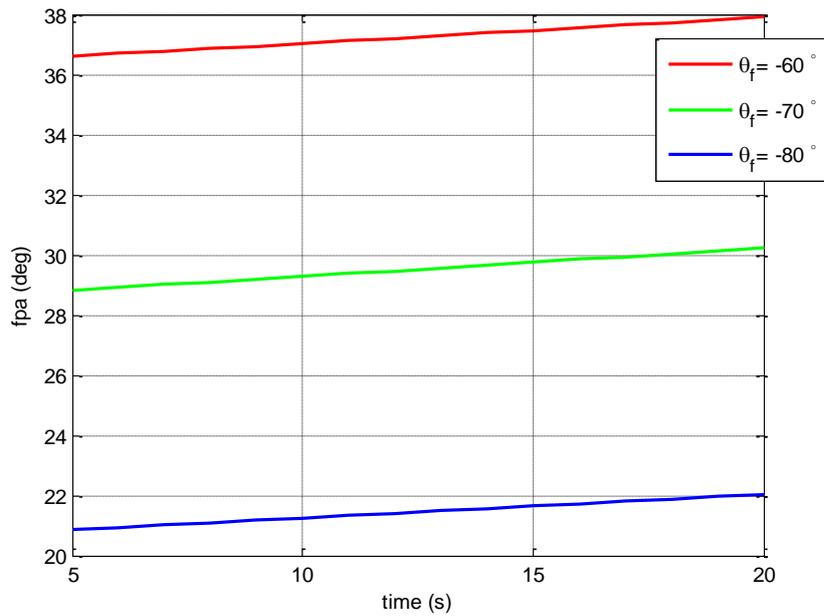


圖 4.10 飛行路徑角對 t_e 圖

由圖 4.8 可以看出，當 θ_f 越小(越接近水平面)，則高度越低。 t_e 越大，代表轉向的速度越慢，則高度越高。由圖 4.9 可以看出，當 θ_f 越小，則速度越大。 t_e 越大，則速度越小。由圖 4.10 可以看出，當 θ_f 越小，則飛行路徑角越小。 t_e 越大，則飛行路徑角越大。

4.3.3 θ_f 的計算

由 4.3.2 節可以知道 t_e 對火箭的影響，但是影響的效果有限，如果要讓火箭飛到一定的高度，則必須控制 θ_f 的大小來達成目標。在計算 θ_f 時以 -70 度為基準點且 $t_e = 15$ ，令 $\theta_f = -70^\circ - x^\circ$ ，透過模擬可以得到 $\gamma_{i_2}^{-70^\circ} = 29.73^\circ$ ， $\gamma_{i_3}^{-70^\circ} = 11.43^\circ$ ， $V_{i_2}^{-70^\circ} = 4303 \text{ m/s}$ ， $V_{i_3}^{-70^\circ} = 3760 \text{ m/s}$ 。根據經驗法則，當 θ_f 每減少一度(越靠近水平面)，則在第二階段結束時速度會減少 4 m/s，飛行路徑角會少 0.8 度，在第三節啟動之前速度會增加 15 m/s，飛行路徑角會減少 0.9 度，所以我們可以得到

$$\begin{aligned}
 \gamma_{t_2}^{\theta_f} &= \gamma_{t_2}^{-70^\circ} - 0.8x \\
 \gamma_{t_3}^{\theta_f} &= \gamma_{t_3}^{-70^\circ} - 0.9x \\
 V_{t_2}^{\theta_f} &= V_{t_2}^{-70^\circ} - 4x \\
 V_{t_3}^{\theta_f} &= V_{t_3}^{-70^\circ} + 15x
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

將(4.22)式代入(4.21)式求解 x 值。以高度必須達到 400km 為例，也就是 $h(t_2) = 400000m$ ，利用(4.21)及(4.22)式可以求得 $x=5$ ，得到 $\theta_f = -75^\circ$ 。圖 4.11 及圖 4.12 為 V、 γ 在第二階段的近似結果及模擬結果：

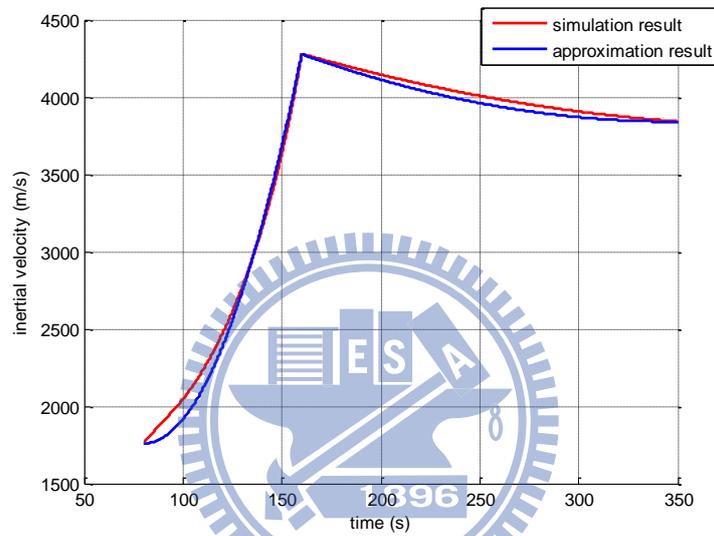


圖 4.11 速度變化圖(400km)

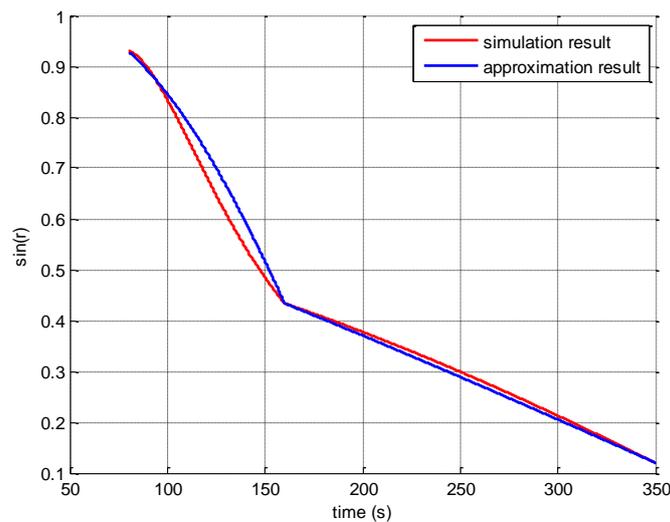


圖 4.12 取 sin 函數後的飛行路徑角變化圖(400km)

由圖 4.11 及圖 4.12 可以發現，近似結果與模擬結果差距並不大，實際模擬的結果得到高度為 395km。如果期望高度不同的話，很顯然地改變 θ_f 的大小會比改變 t_i 有效。如果期望高度改為 300km，也就是 $h(t_2) = 300000m$ ，利用(4.21)及(4.22)式可以求得 $x=12$ ，得到 $\theta_f = -82^\circ$ 。圖 4.13 及圖 4.14 為 V 、 γ 在第二階段的近似結果及模擬結果：

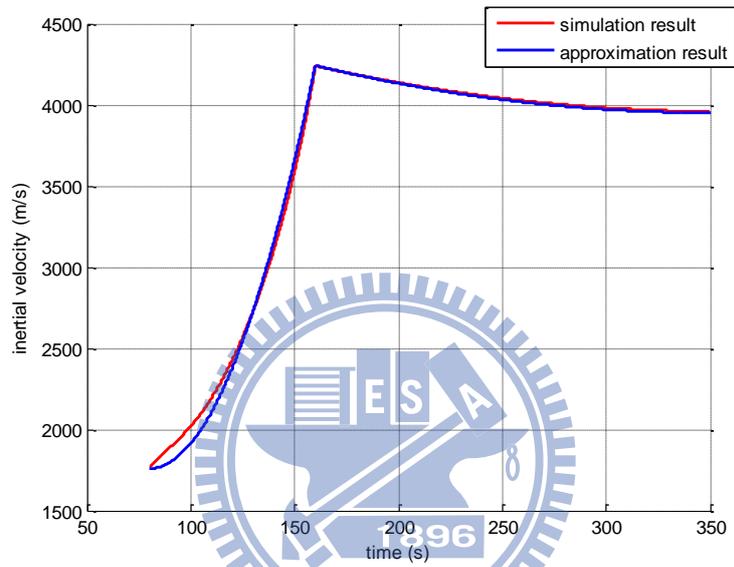


圖 4.13 速度變化圖(300km)

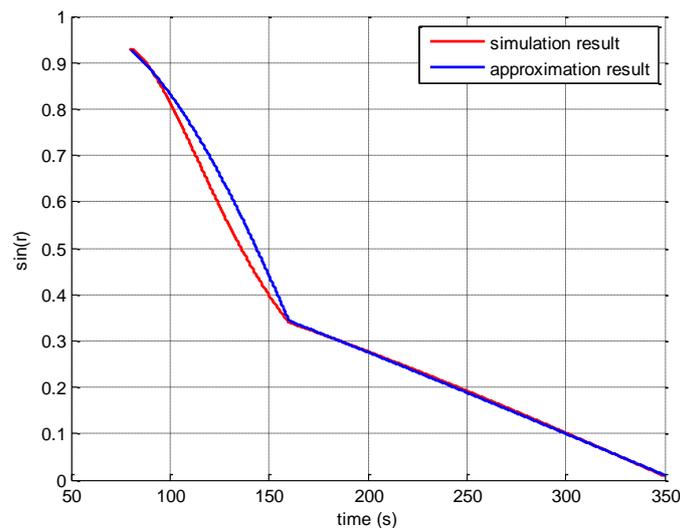


圖 4.14 取 sin 函數後的飛行路徑角變化圖(300km)

由圖 4.13 及圖 4.14 可以發現，近似結果與模擬結果差距並不大，實際模擬的結果得到高度為 298km，所以(4.21)及(4.22)可以適用於不同的高度，求出所需要的 θ_f 值。

第二階段採用的控制器大致上與第一階段的控制器相同，但是參考輸入為角度。第二階段控制方塊圖如下圖所示：

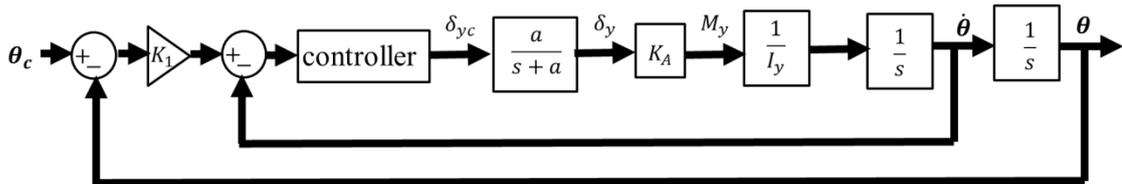


圖 4.15 第二階段控制方塊圖

4.4 第三階段

4.4.1 入軌高度及速度

在第三階段啟動之前，高度已經達到所要求的目標，而第三階段的目的是精確入軌，將火箭控制在平行於水平面，且將火箭加速達到入軌要求的速度。第三階段的導引律如下：

$$\theta_c = -\frac{\pi}{2} - \frac{R_a}{R_E} \times 2\pi \quad (4.23)$$

其中 R_a 為當時的射程， R_E 為地球周長，上式右手邊第二項是為補償因地球曲面所造成的水平面(local horizontal plane)的變化。

利用(4.23)可將火箭控制在平行水平面，進而使飛行路徑角趨近於 0 度，此時若高度不在預期高度，則必須利用高度回授控制達到所要求的高度。因為此時的 γ 已經很小，所以可以將(4.15)式近似成

$$\dot{h} = V \gamma \quad (4.24)$$

可以利用目前高度(h)與期望高度(h_d)的差透過查表的方式計算出需要的高度變化(h_k)，公式如下：

$$\dot{h}_k = f(h - h_d) \quad (4.25)$$

其中 h 為目前高度， h_d 為期望高度， f 如表 4.1 所示。將 \dot{h}_k 帶入下式：

$$\theta_k = \frac{K_2(\dot{h}_k - \dot{h})}{V} \quad (4.26)$$

合併(4.23)及(4.26)可以得到第三階段的導引律為

$$\theta_c = -\frac{\pi}{2} - \frac{R_a}{R_E} \times 2\pi + \theta_k \quad (4.27)$$

高度差(km)	高度變化量(m/s)	高度差(km)	高度變化量(m/s)
-20	400	0	0
-10	390	2	-200
-8	310	2.5	-250
-7	300	3	-330
-6	280	4	-340
-5	260	5	-350
-4	250		
-3	240		
-2.5	230		
-2	220		

表 4.1 高度變化量

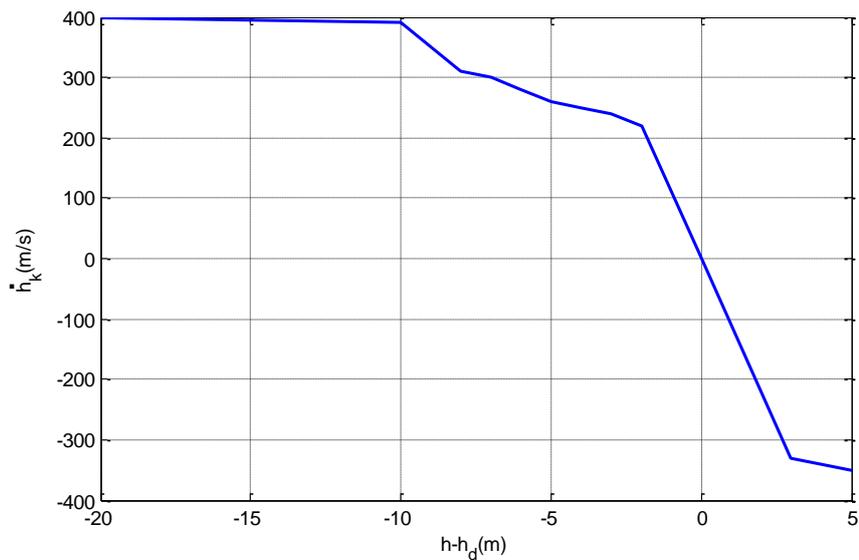


圖 4.16 高度變化曲線圖

由圖 4.16 可以看出約在 ± 2 km 以內的地方變化幅度較大， ± 2 km 以外的地方變化幅度較慢。我們希望在越接近期望高度的地方變化越快，而離期望高度較遠的地方變化較慢，因為在靠近期望高度時就必須很精準地控制高度，才能有效的減少高度誤差。

第三階段控制方塊圖大致上與第二階段相同，但是為了使火箭精準入軌，加入補償角度 θ_k 。第三階段控制方塊圖如下：

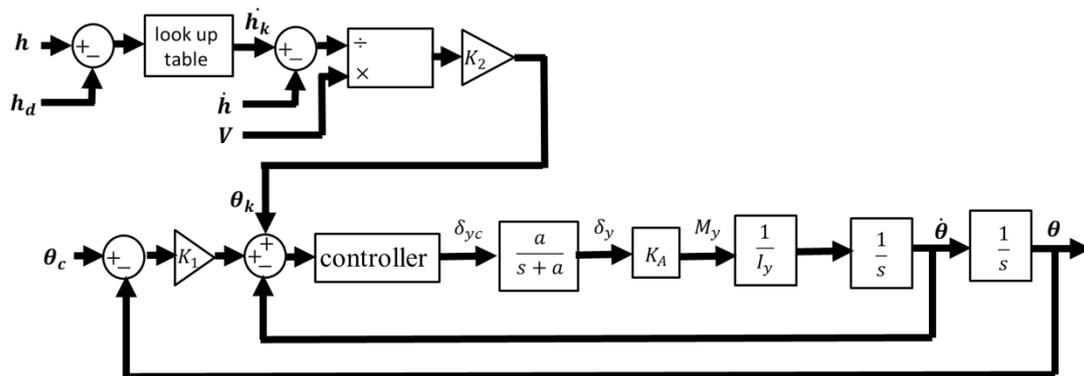


圖 4.17 第三階段控制方塊圖

4.4.2 入軌要求

要作圓周運動，必須始終有一個力作用在火箭上。其大小等於該火箭運行線速度的平方乘以其質量再除以公轉半徑，即 $F = \frac{mv^2}{R}$ ，其中 $\frac{v^2}{R}$ 是物體作圓周運動的向心加速度。

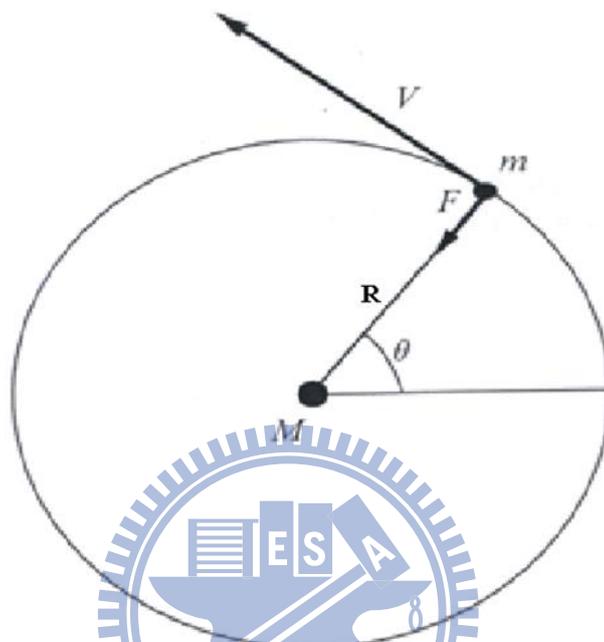


圖 4.18 圓周運動示意圖

利用地球的引力在合適的軌道半徑和速度下，地球對物體的引力正好等於物體作圓周運動的向心力，公式為

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mV^2}{R} \quad (4.28)$$

等式兩邊消去 R、m 得到

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (4.29)$$

當速度滿足(4.29)式時，第三節即進行脫節，使衛星在軌道上進行等速率圓周運動。

第五章 模擬結果與討論

本章利用 MATLAB 模擬火箭飛行情形，入軌成功的條件包含高度、速度及飛行路徑角。當火箭飛到期望高度時，火箭速度必須滿足(4.29)的條件才能有足夠的速度達到入軌要求，而飛行路徑角會造成火箭在繞地球軌道運行時的誤差，如果角度越小，則誤差越小。在分析的過程中還必須探討火箭的姿態角，確保火箭以正確的姿態飛行。我們考慮一個 30kg 的酬載，固定總酬載比為 $\lambda_r = 2 \times 10^{-3}$ ，所以三節火箭的初始總質量為 15000kg，所設計的火箭參數如表 5.1 所示：

	Stage1	Stage2	Stage3(含酬載)
Total mass(kg)	15000	4000	600
Propellent mass (kg)	9395	2890	485
Payload ratio(λ)	0.267	0.15	0.05
Structure ratio(σ)	0.15	0.15	0.15
I_{sp} (s)	250	250	250
Burn time(s)	t=60	t=80	t=100
Ignition time(s)	t=0	t=80	t=350

表 5.1 火箭參數

利用表 5.1 的火箭參數模擬火箭飛行情形(有重力及氣動力影響)，在分析的過程中皆使用第四章所介紹的導引律， t_c 皆設定為 15 秒， θ_f 由第四章計算可以得到。由表 5.1 的燃燒時間及點火時間可以得知，我們希望火箭在升空後的 450 秒內可以達到入軌條件。

5.1 400km 入軌

5.1.1 火箭飛行情形

在本節模擬火箭實際飛行情形(有重力及氣動力影響)。火箭發射角度為-2

度， θ_f 則透過第四章的計算可以得到 $\theta_f = -75^\circ$ ，模擬結果如下：

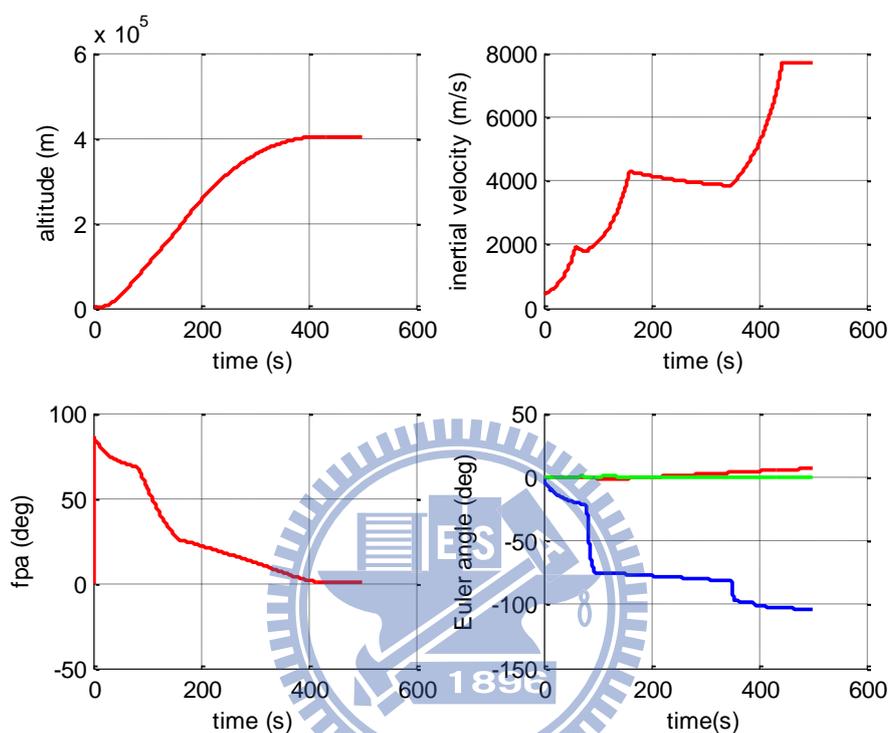


圖 5.1 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角)

由圖 5.1 可以看出第一階段飛行的時候($t < 80$)，由於是使用重力轉彎，火箭的尤拉角與飛行路徑角呈現緩慢的下降。在第二階段飛行的時候($80 < t < 160$)，由於轉向機制的關係，火箭在一開始會有大幅度的轉向，之後控制 θ 在一定的角度繼續飛行， ϕ 、 ψ 角則是控制在接近 0 度的地方。當 $t = 443.5$ 秒時，火箭滿足(4.29)式，此時 γ 為 0.01 度，高度為 404km 左右。由尤拉角圖可以知道火箭是呈現穩定的狀態。

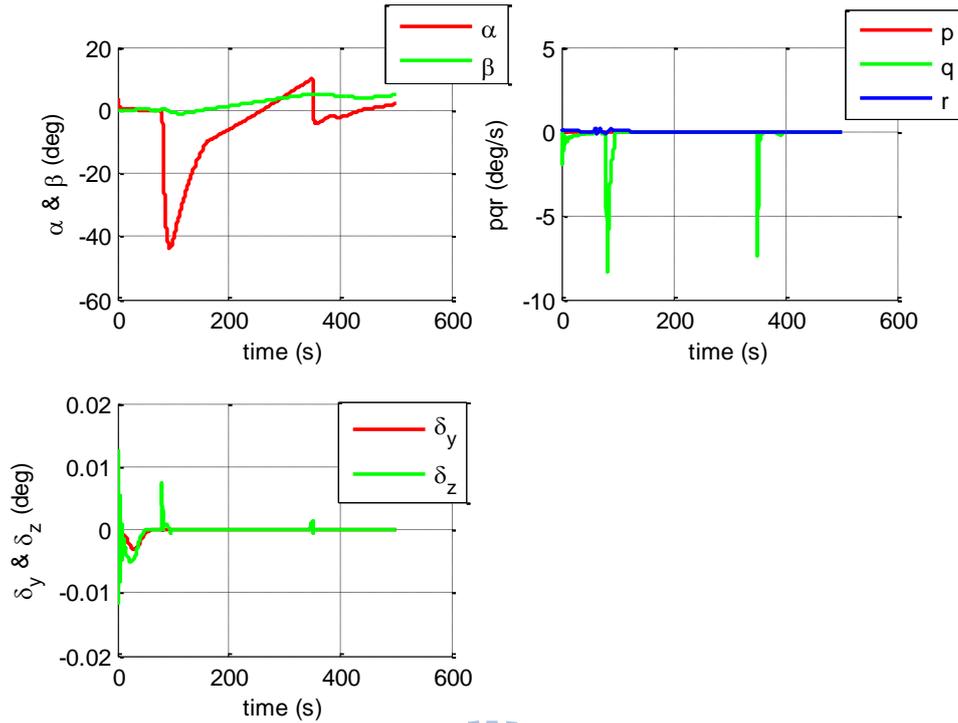


圖 5.2 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角)

由圖 5.2 可以看出在第一階段飛行的時候攻角非常小，可以讓火箭得以穩定升空。由於必須控制角速度跟隨重力轉彎的角度，所以推力角 δ_z 會有較大的角度變化，角速度 q 也因為推力角 δ_z 的變化會產生改變。在第二階段飛行的時候，因為轉向機制的關係會有大幅度轉向，攻角、角速度 q 、推力角 δ_z 會有較大幅度的變化，而攻角會再慢慢地增加，因為火箭體軸方向跟速度方向已經慢慢地接近。在第三階段飛行的時候，由於必須將火箭控制在一定的高度，所以攻角會有震盪的情況發生，角速度 q 、推力角 δ_z 也會隨之變化。

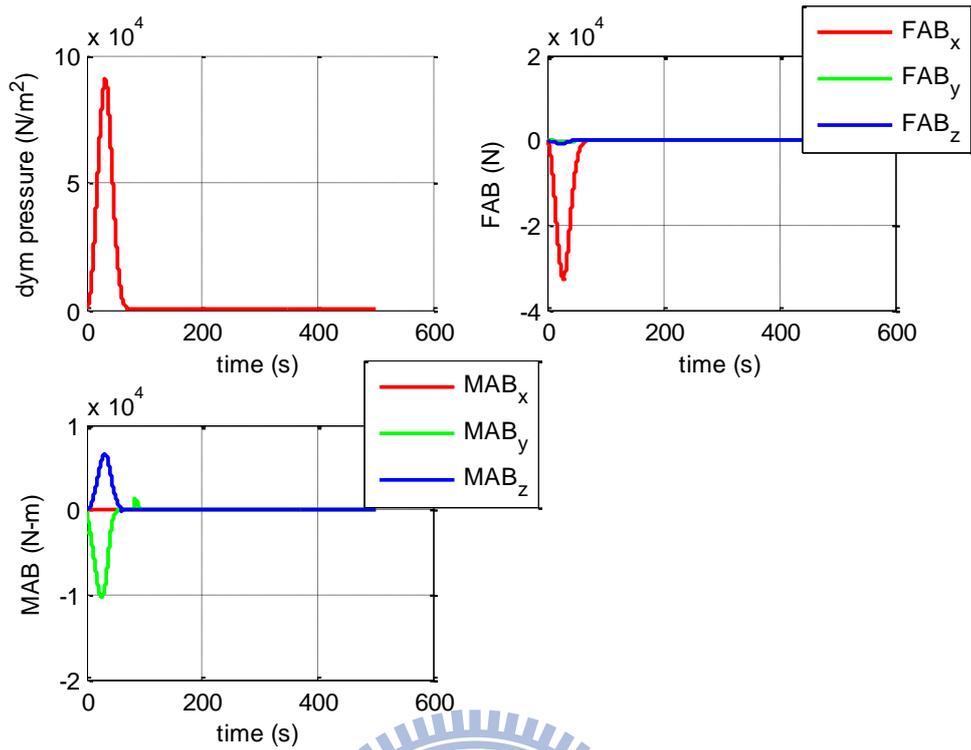


圖 5.3 火箭飛行過程圖(動壓、空氣阻力、空氣力矩)

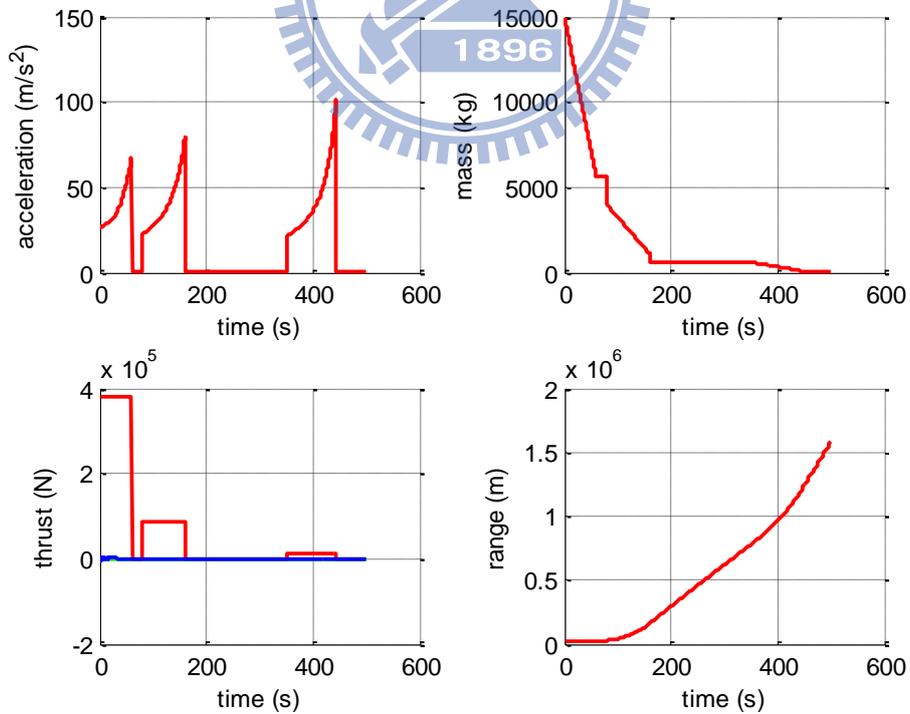


圖 5.4 火箭飛行過程圖(推力加速度、質量、推力、距離)

由圖 5.3 可以看出，動壓在第一階段的時候最大為 $9.106 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ ，空氣阻力最大為 $-3.27 \times 10^4 \text{ N}$ ，空氣力矩在 y 方向最大為 $-1.026 \times 10^4 \text{ N-m}$ ，在 z 方向最大為 6706 N-m 。在第二階段啟動前，動壓及空氣阻力已經變得很小，空氣阻力也隨之變小，所以在第二階段之後空氣對火箭的影響已經不大。經緯度也呈現穩定的變化。由圖 5.4 可以看出火箭在第一階段的推力加速度由 25.45 m/s^2 升至 67.17 m/s^2 ，推力大小則為 $3.818 \times 10^5 \text{ N}$ ；在第二階段的推力加速度由 22.12 m/s^2 升至 79.48 m/s^2 ，推力大小則為 $8.851 \times 10^4 \text{ N}$ ；在第三階段的推力加速度由 20.82 m/s^2 升至 101 m/s^2 。由圖 5.5 可以看出火箭在飛行過程的能量變化以及經緯度變化情形，呈現穩定的狀態。

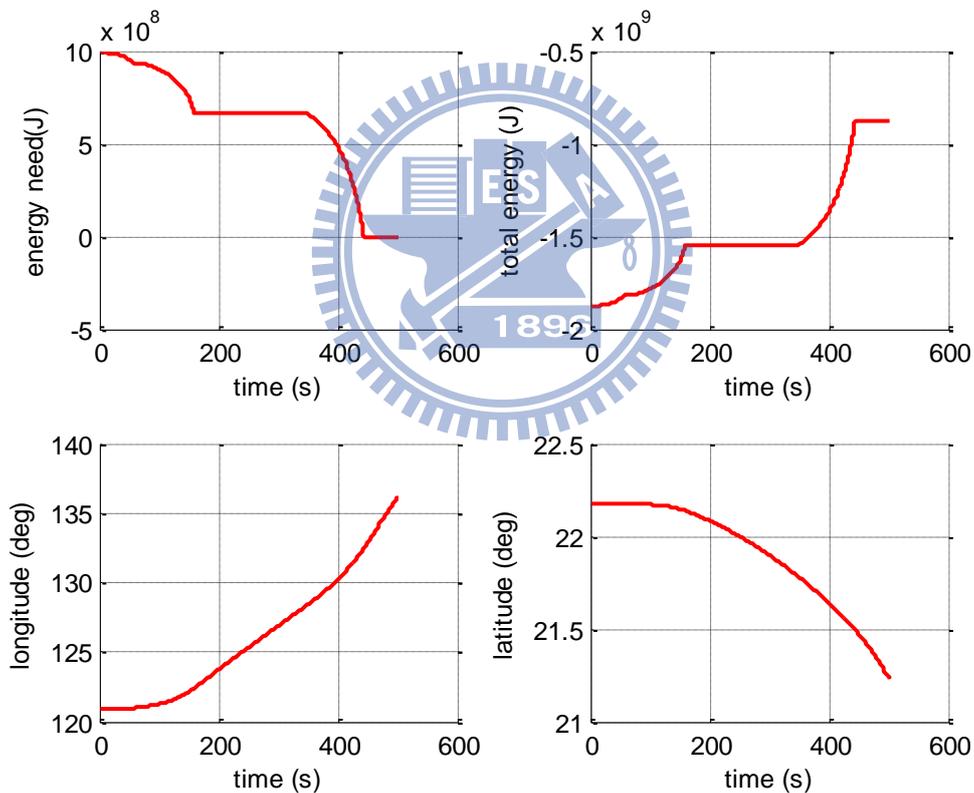


圖 5.5 火箭飛行過程圖(所需能量、總能量)

入軌後火箭的飛行情形如下：

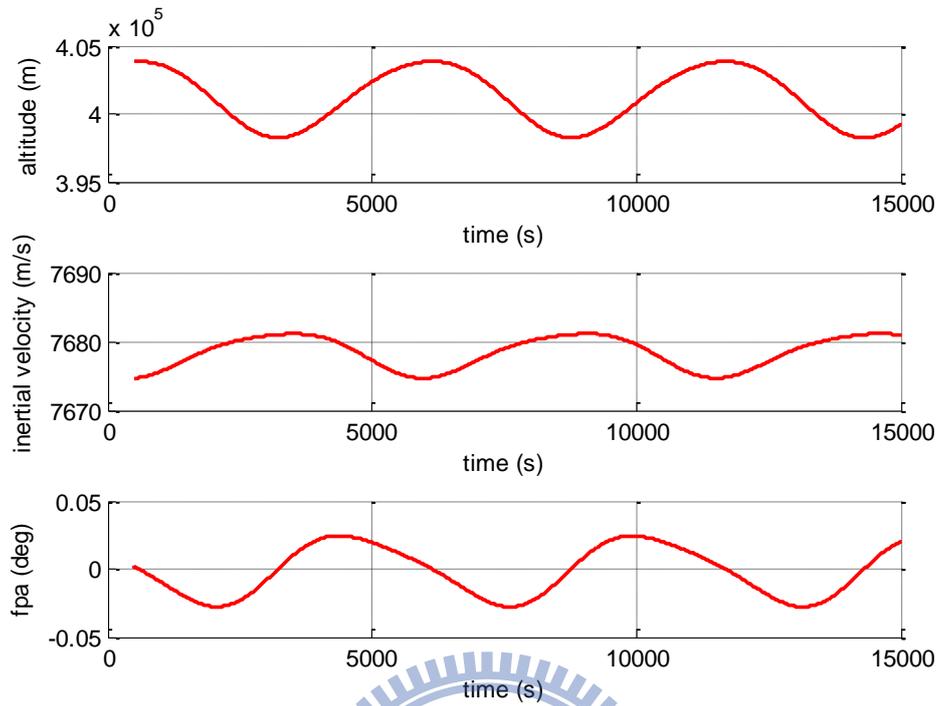


圖 5.6 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角)

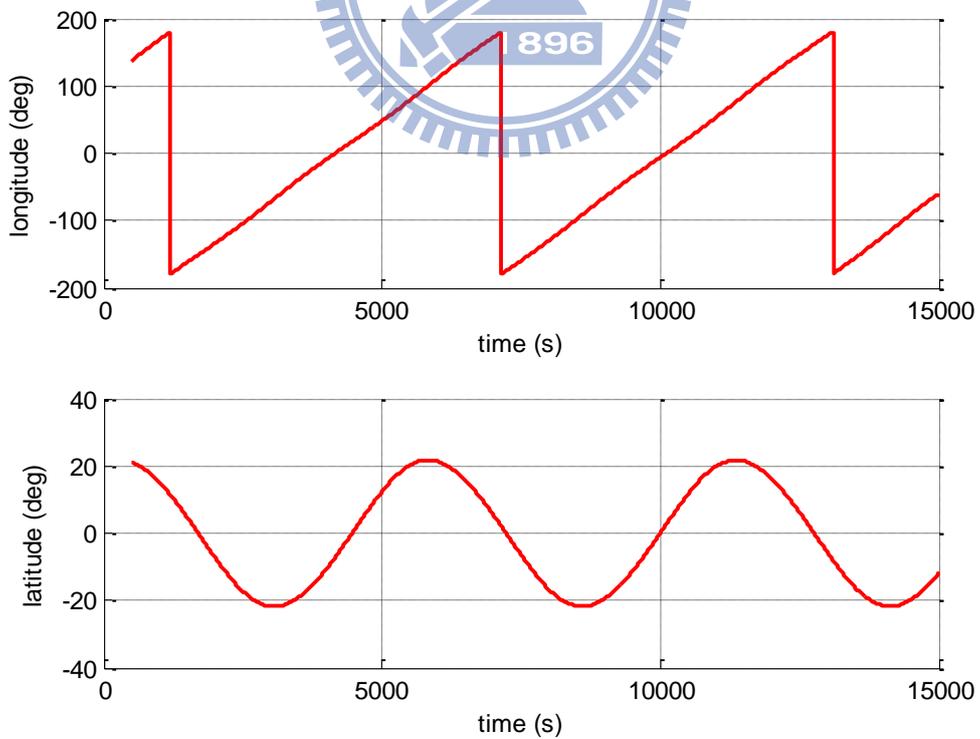


圖 5.7 入軌後的飛行情形(經度、緯度)

由圖 5.6 可以看出最大高度為 403.8 km，最小高度為 398.2km，最大高度誤差為 3.8 km；最大速度為 7681 m/s，最小速度為 7675 m/s，最大速度誤差為 6 m/s；最大飛行路徑角為 0.024 度，最小飛行路徑角為-0.028 度，最大角度誤差為 0.028 度，誤差均不大，所以可以使火箭穩定在 400km 左右高空飛行。由圖 5.7 可以看出火箭大約 6 千秒繞地球一圈。

5.1.2 角度誤差

本節探討 θ_f 對火箭的影響。在第二階段導引律中，將 θ_f 加入 $\pm 1^\circ$ 的角度誤差之後，模擬火箭飛行情形如下：

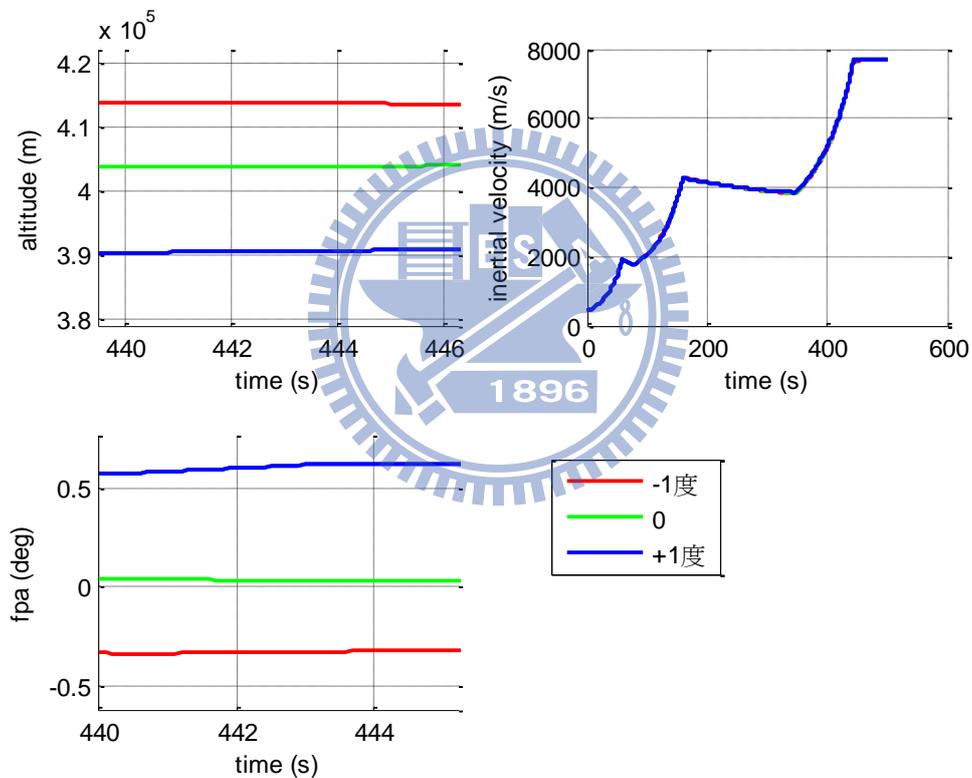


圖 5.8 角度誤差圖

由圖 5.8 可以看出當第二階段轉向的角度越小則高度越高，高度誤差可達約 10km 之多，飛行路徑角的角度也會增大，導致入軌後的高度誤差會增大，所以 θ_f 的影響很大。

5.1.3 時間誤差

本節探討 θ_f 對火箭的影響。在第二階段導引律中，將 t_e 加入 $\pm 1s$ 的誤差之後，

模擬火箭飛行情形如下：

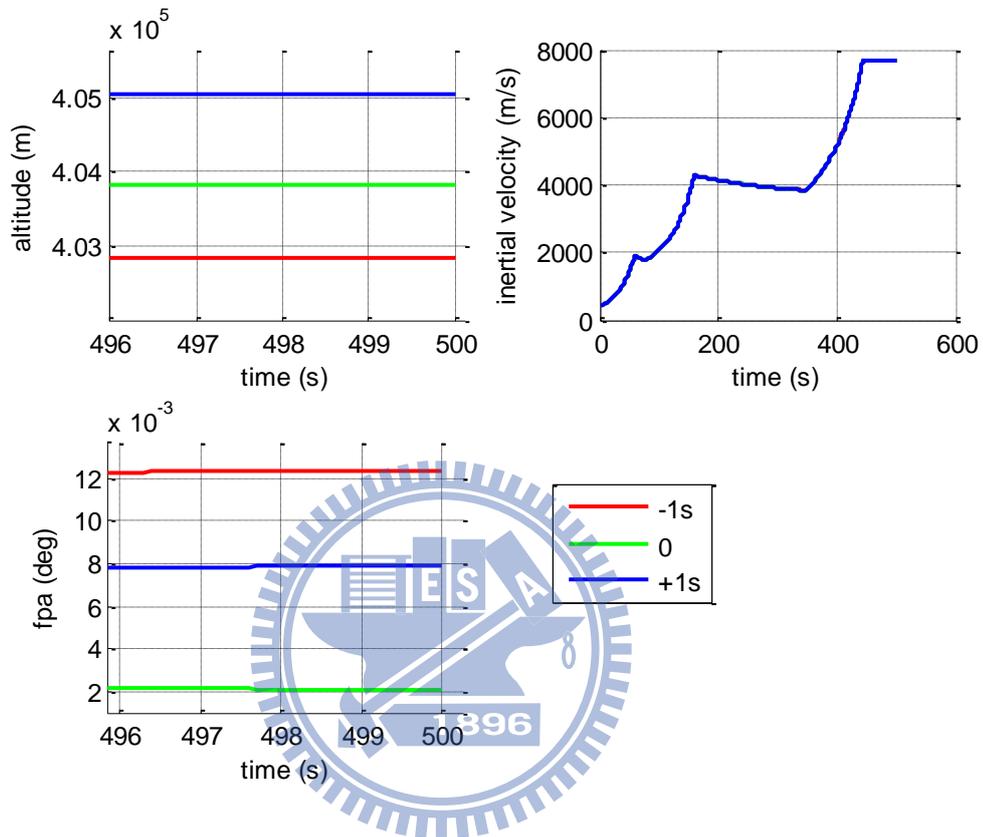


圖 5.9 時間誤差圖

t_e 的長短控制火箭最後的高度、速度及飛行路徑角，但是由圖 5.9 可以看出高度相差不到 1km，且飛行路徑角都保持在很小的角度，所以 t_e 的影響並不大，主要的控制參數為 θ_f 。

5.2 不同高度入軌

為了驗證控制器可以在不同的高度入軌。利用表 5.1 的火箭參數在本節討論將酬載送到 300km 軌道的飛行情形，火箭發射角度為-2 度， θ_f 則透過第四章的計算可以得到 $\theta_f = -82^\circ$ ，模擬結果如下：

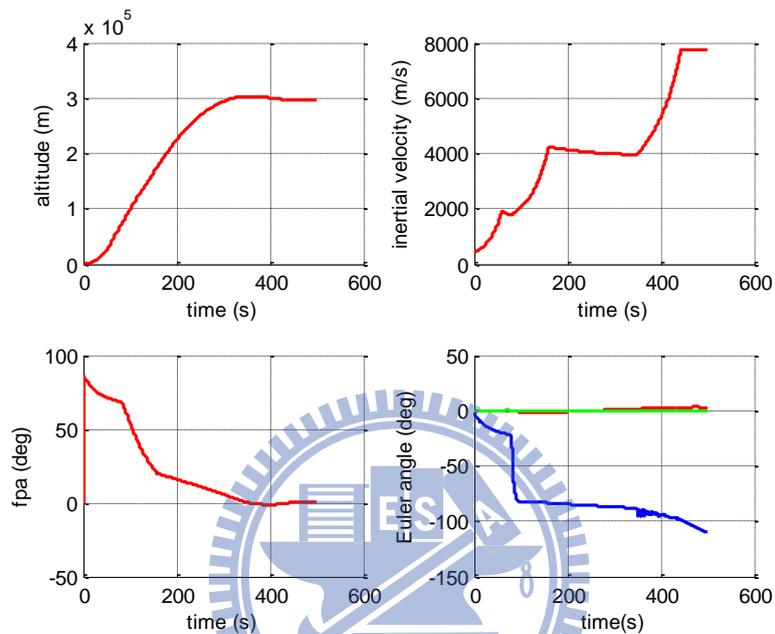


圖 5.10 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角)

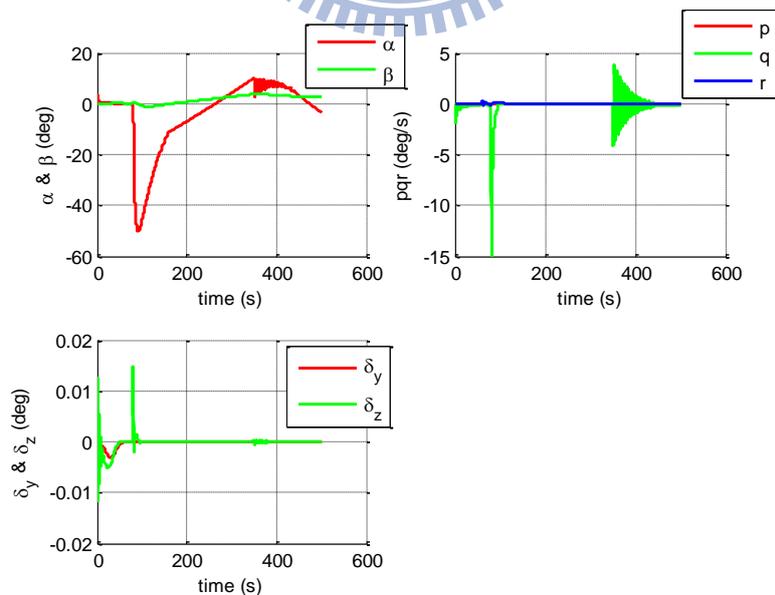


圖 5.11 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角)

由圖 5.10 可以看出當 $t = 442.7$ 秒時，火箭速度滿足(4.29)式，此時 γ 為 0.006 度，高度為 297.2km 左右。由尤拉角圖可以知道火箭是呈現穩定的狀態。由圖 5.11 可以看出火箭在第三階段飛行的時候攻角、角速度 q 、推力角 δ_z 有較大的變化，而這個狀況也會反應在尤拉角上面。入軌後火箭的飛行情形如下：

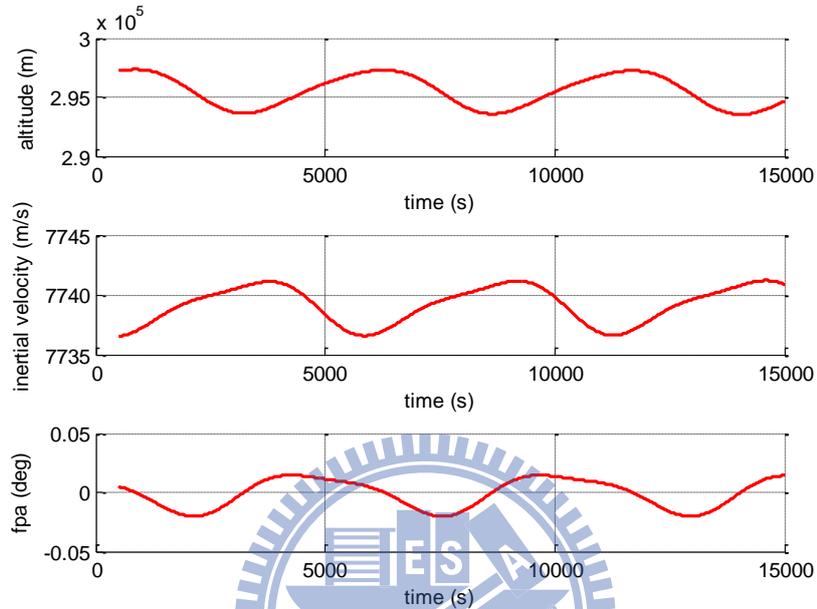


圖 5.12 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角)

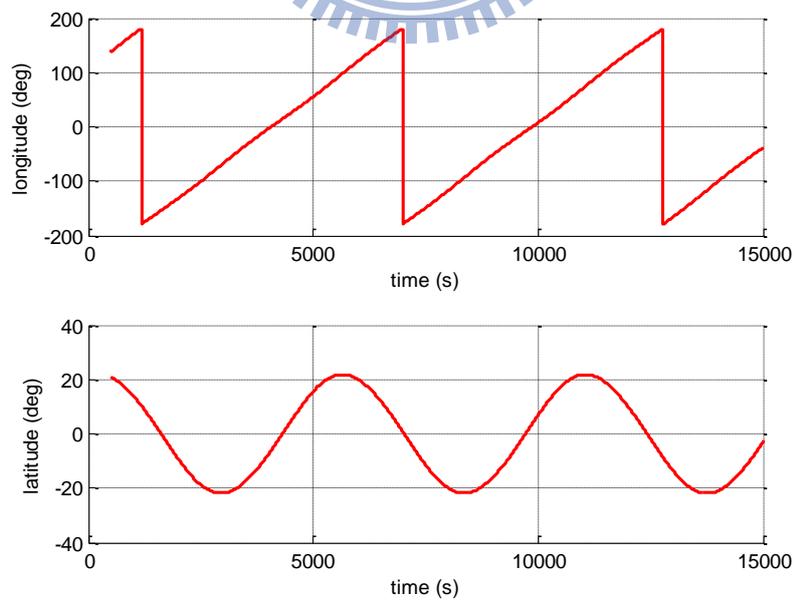


圖 5.13 入軌後的飛行情形(經度、緯度)

由圖 5.12 可以看出最大高度為 297.3 km，最小高度為 293.6 km，最大高度誤差為 6.4 km；最大速度為 7741 m/s，最小速度為 7737 m/s，最大速度誤差為 9m/s；最大飛行路徑角為 0.0146 度，最小飛行路徑角為-0.02 度，最大角度誤差為 0.02 度，誤差均不大，所以可以使火箭穩定在 300km 左右高空飛行。由圖 5.13 可以看出火箭大約 5800 秒繞地球一圈。

5.3 不同發射仰角入軌

改變發射仰角驗證導引控制可以在不同發射仰角完成入軌需求，在 5.1 節及 5.2 節發射仰角皆為-2 度，5.3 節將發射仰角改為-4 度， θ_f 則透過第四章的計算

可以得到 $\theta_f = -78^\circ$ ，軌道高度為 300 km，模擬火箭發射情形：

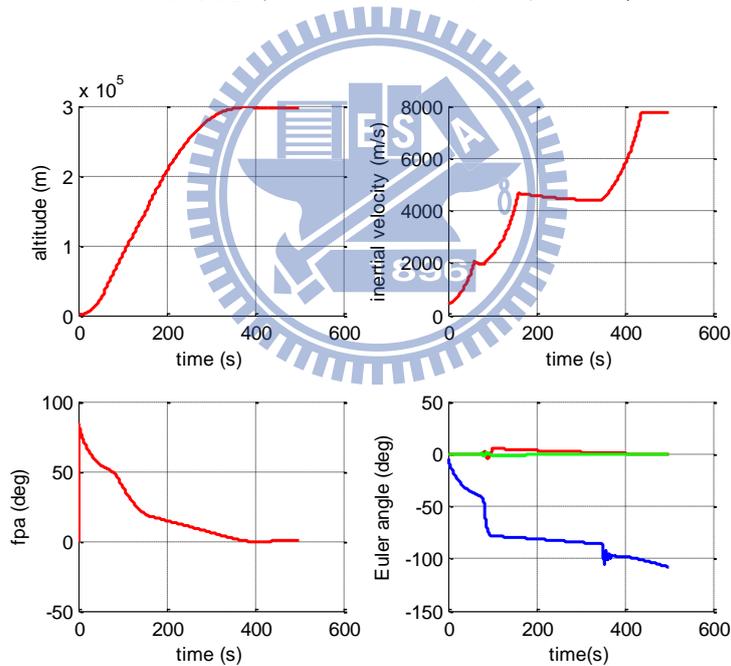


圖 5.14 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角)

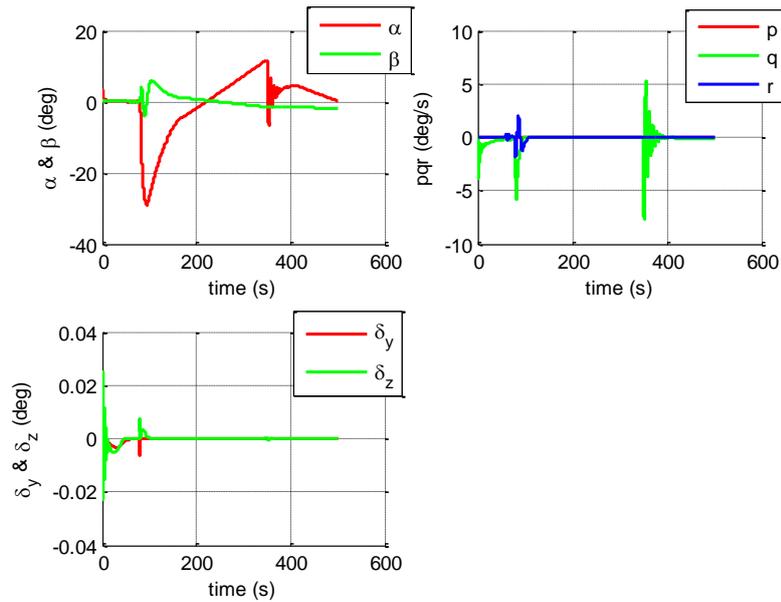


圖 5.15 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角)

由圖 5.14 可以看出雖然 ψ 角在第二階段的大幅度轉向時有較大的角度，但是會慢慢趨近於 0 度。當 $t = 437.8$ 秒時，火箭滿足(4.29)式，此時 γ 為 0.003 度，高度為 296.3km。由尤拉角圖可以知道火箭是呈現穩定的狀態。特別注意的是當在第二節啟動的時候，發射仰角為-2 度的 θ 為約-20 度左右，而發射仰角為-4 度的 θ 已經下降到約-40 度左右，已經是非常小的角度，如果再以更低的發射仰角發射火箭可能會導致火箭無法達到入軌要求。由圖 5.15 可以看出雖然側滑角在第二階段的大幅度轉向時有較大的角度，但是會慢慢趨近於 0 度，側滑角 β 與 ψ 角是相對的角度。入軌後火箭的飛行情形如下：

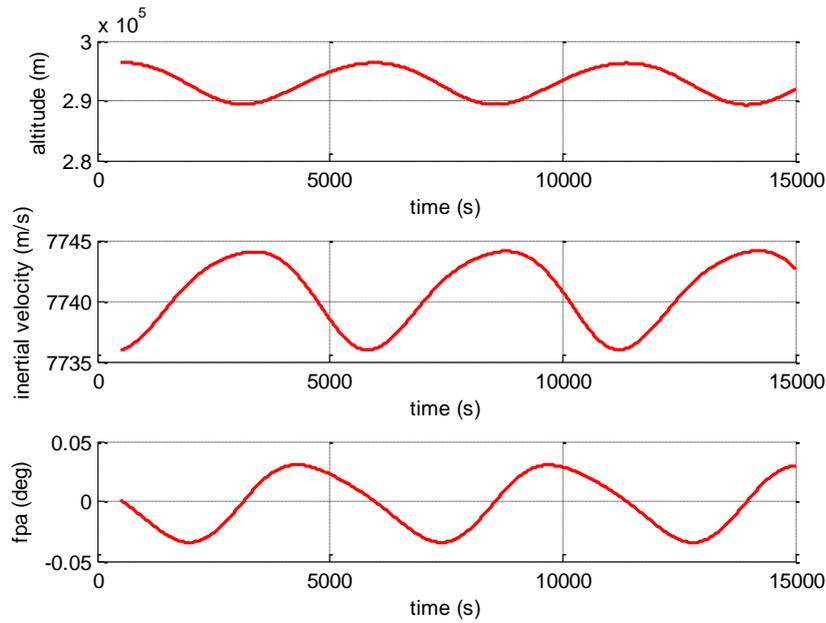


圖 5.16 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角)

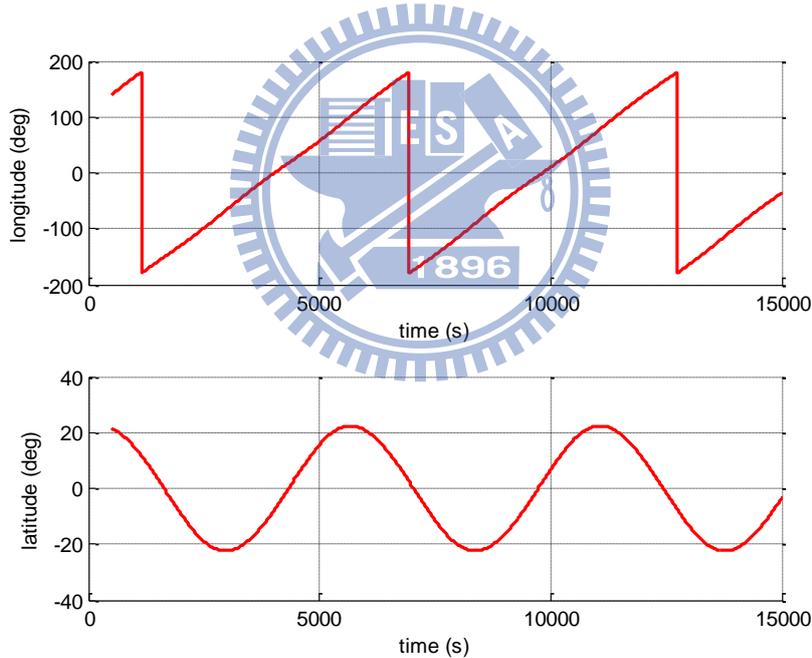


圖 5.17 入軌後的飛行情形(經度、緯度)

由圖 5.16 可以看出最大高度為 296.3 km，最小高度為 289.4 km，最大高度誤差為 10.6 km；最大速度為 7744 m/s，最小速度為 7736 m/s，最大速度誤差為 12 m/s；最大飛行路徑角為 0.0305 度，最小飛行路徑角為 -0.0343 度，最大角度誤差為 0.0343 度，誤差均不大，所以可以使火箭穩定在 300km 左右高空飛行。由圖 5.17 可以看出火箭大約 5800 秒繞地球一圈。

5.4 各節質量分配的影響

為了驗證第三章所探討的最佳質量分配是否可以影響火箭入軌情況，首先利用表 5.1 的火箭參數模擬火箭飛行情形，軌道高度為 600 km：

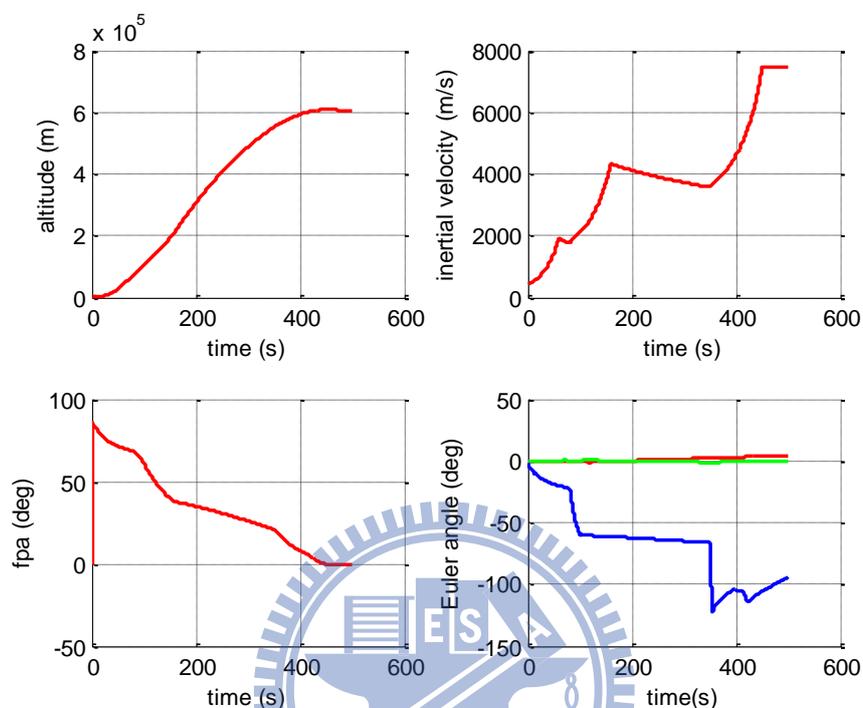


圖 5.18 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角)

由圖 5.18 可以看出火箭最高速度為 7433 m/s，而 600 km 的入軌速度必須達到約 7560 m/s，不能滿足(4.29)式，入軌失敗。

利用第三章所探討的各節最佳質量分配($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.126$)，重新設計火箭參數為表 5.2：

	Stage1	Stage2	Stage3(含酬載)
Total mass(kg)	15000	1890	238
Propellant mass (kg)	11144	1404	176
Payload ratio(λ)	0.126	0.126	0.126
Structure ratio(σ)	0.15	0.15	0.15
I_{sp} (s)	250	250	250

Burn time(s)	t=60	t=80	t=100
Ignition time(s)	t=0	t=80	t=350

表 5.2 新的火箭參數

利用表 5.2 模擬火箭的飛行情形如下：

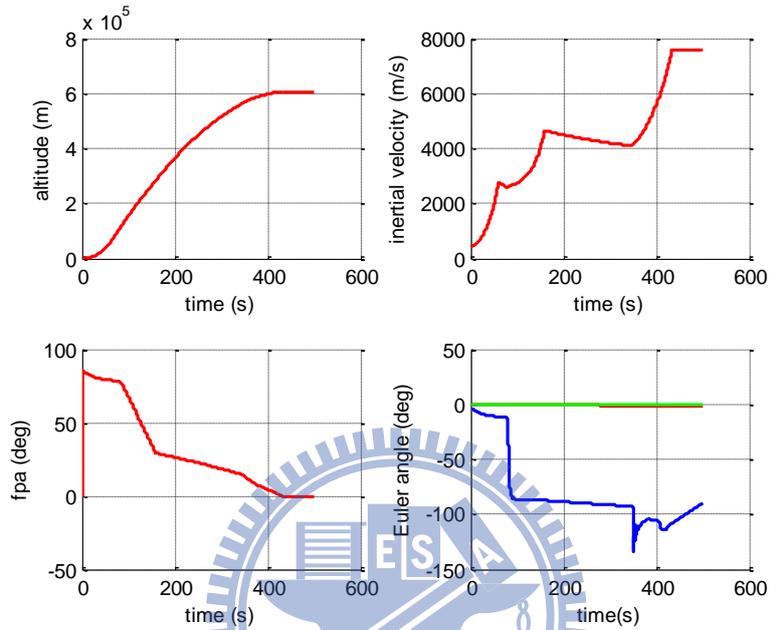


圖 5.19 火箭飛行過程圖(高度、速度、飛行路徑角、尤拉角)

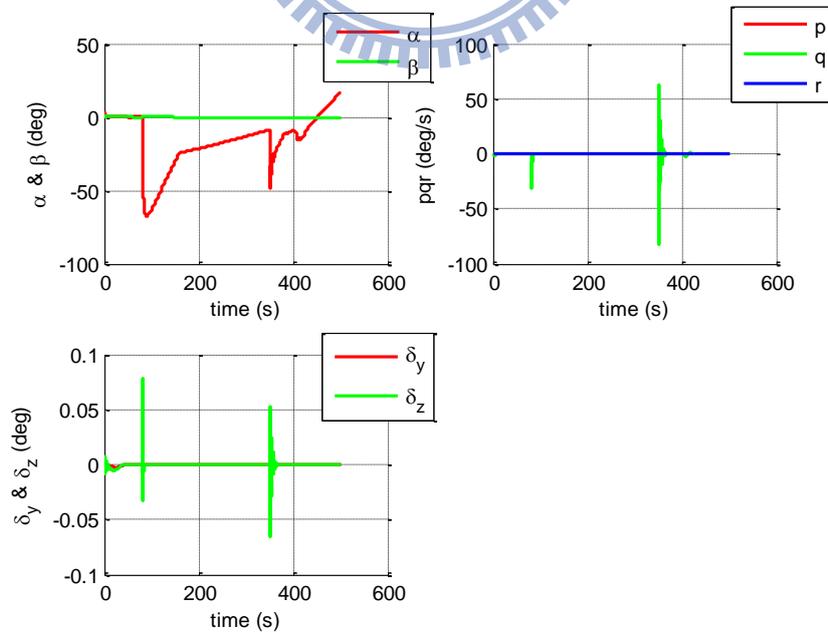


圖 5.20 火箭飛行過程圖(攻角、側滑角、角速度、推力角)

由圖 5.19 可以看出當 $t = 433.7$ 秒時，火箭滿足(4.29)式，此時 γ 為 -0.03 度，高度為 610.2 km 左右。雖然尤拉角在第三階段有較大幅度的變化，但是最後尤拉角慢慢穩定，所以可以知道火箭是呈現穩定的狀態。由圖 5.20 可以看出攻角在第三階段有較大幅度的變化，是由於尤拉角的關係產生這樣的變化。入軌後火箭的飛行情形如下：

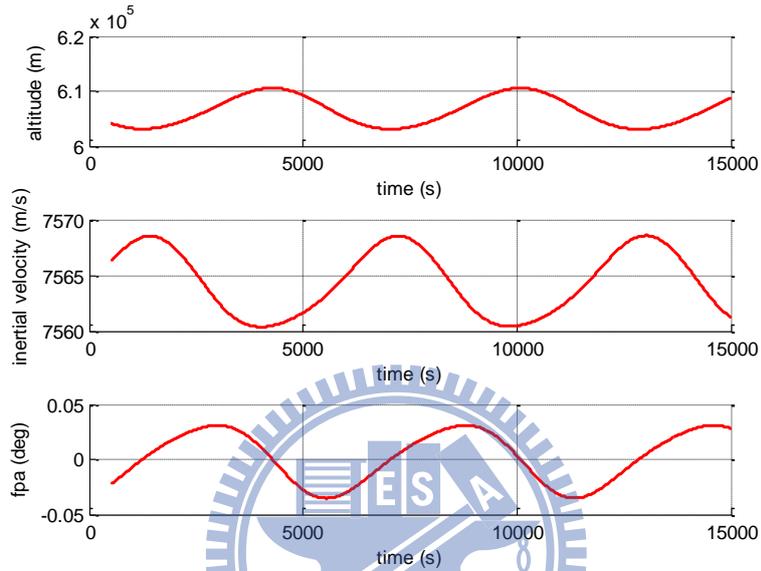


圖 5.21 入軌後的飛行情形(高度、速度、飛行路徑角)

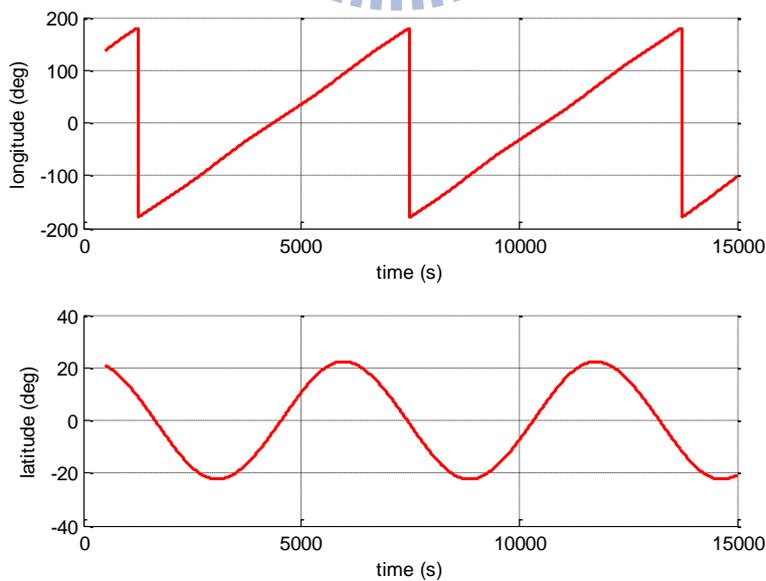


圖 5.22 入軌後的飛行情形(經度、緯度)

由圖 5.21 可以看出最大高度為 610.6 km，最小高度為 603.1km，最大高度誤差為 10.6 km；最大速度為 7569 m/s，最小速度為 7560 m/s，最大速度誤差為 5 m/s；最大飛行路徑角為 0.03 度，最小飛行路徑角為-0.035 度，最大角度誤差為 0.035 度，誤差均不大，所以可以使火箭穩定在 600 km 左右高空飛行。由圖 5.22 可以看出火箭大約 6250 秒繞地球一圈。

5.5 討論

透過模擬的結果顯示，由第四章所設計的導引律可以適用在不同的軌道高度 (300 公里、400 公里)。在 5.3 節中改變發射仰角也可以達成目標，需要特別注意的是當在第二節啟動的時候，發射仰角為-2 度的 θ 為約-20 度左右，而發射仰角為-4 度的 θ 角已經下降到約-40 度左右，已經是非常小的角度，如果再以更低的發射仰角發射火箭可能會導致火箭無法達到入軌要求。在 5.4 節中討論最佳化及未最佳化的質量分配，由模擬結果得知，未最佳化的質量分配在入軌高度為 600 公里時，速度無法達到入軌要求，但是最佳化的質量分配可以使速度達到入軌要求，符合第三章所探討的最佳質量分配的結果。

第六章 結論

運送衛星入軌的載具通常為三節火箭加酬載的結構。各節火箭依序點火燃畢拋離，最後將衛星送入選定的軌道。各節火箭的質量燃料分配的最佳設計已於第三章討論，大致上三節火箭的結構為最常見的選擇，而理論上(忽略重力及氣動力的影響)也有簡單的公式來決定各節質量最佳分配。前面的探討利用最佳化的方法計算質量最佳分配發現即使在重力及氣動力的影響之下，所得的最佳分配與純理論分析所得相差不遠。

透過模擬的結果顯示，火箭在第一階段時採用重力轉彎，使得攻角有效的控制在零度的地方，降低氣動力對火箭的影響。第二階段採用線性正切導引律，使得火箭有大幅度的轉向，俯仰角及飛行路徑角有較大幅度的變化。在第二階段結束後，火箭為無推力飛行，火箭會慢慢平飛於地球表面。在第三階段啟動前，高度已經接近預設目標。第三階段同時採用角度控制及高度回授，有效的讓火箭平飛，並控制火箭飛行在期望高度，最後當火箭速度達到入軌要求時，則火箭脫離將衛星送入軌道中。入軌後的高度誤差在可允許範圍，設計的導引律也可以適用在不同的軌道高度及發射仰角。同時將最佳化及未最佳化的火箭參數做比較：在軌道高度為 600 公里時，未最佳化的火箭因為速度不夠的關係，無法達到入軌條件，但是最佳化的火箭速度可以達到入軌要求，因為最佳質量分配後的火箭有較大的能量，也就表示火箭有更多的能量來滿足入軌需求，符合第三章所探討的最佳質量分配的結果。

本文著重在探討火箭的質量配置及導引律。數值的結果驗證最佳質量分配符合預期，設計的導引律能成功將衛星送入軌道運行。關於火箭的設計及導引律還有許多可以思考的問題，希望本文能夠對發射載具的相關研究有些許的貢獻並有其參考價值。

參考文獻

- [1] J. L. T. Martin (2009). *Rocket and Spacecraft Propulsion*. Berlin Heidelberg: Springer.
- [2] A. Tewari (2007). *Atmospheric and Space Flight Dynamics Modeling and Simulation with Matlab and Simulink*. Boston: Birkhauser.
- [3] J. S. Marcel (2000). *Spacecraft dynamics and control : a practical engineering approach*. New York: Cambridge University Press.
- [4] A. V. David (2007). *Fundamentals of astrodynamics and applications*. New York: Springer.
- [5] J. H. Francis (1994). *Introduction to Space Flight*. New Jersey: Prentice Hall.
- [6] 楊憲東(2002)。自動飛行控制：原理與實務。台北：全華科技圖書。
- [7] 張碩(2001)。自動控制系統。台北：鼎茂圖書。
- [8] C. A. Lin, “Six Degree-of-Freedom Simulation of Launch Vehicle Dynamics A Preliminary Report,” Jan. 2007.
- [9] M. Mahamadd, and M. Mohammad, “A Guidance Algorithm for Launch to Equatorial Orbit,” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 81, pp.137-148, Jan. 2009.
- [10] M.H. Gräßlin, J. Telaar, U.M. Schöttle, “Ascent and reentry guidance concept based on NLP-methods,” *Acta Astronautica*, pp.461 – 471. Jun. 2004.
- [11] Naro-1, <http://en.wikipedia.org/wiki/Naro-1>.
- [12] International_Space_Station, http://en.wikipedia.org/wiki/International_Space_Station.