

# 國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

具加速度時間延遲之飛彈的強健導引律設計

Robust Missile Guidance Law Design with Time Delay  
in Acceleration

研究生：馮仰靚

指導教授：梁耀文 博士

中華民國一百零一年七月

具加速度時間延遲之飛彈的強健導引律設計  
**Robust Missile Guidance Law Design with Time  
Delay in Acceleration**

研究生：馮仰靚

Student : Yang-Ching Feng

指導教授：梁耀文 博士

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

國立交通大學電控工程研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Electrical Control Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master

In

Electrical and Control Engineering

July 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年七月

# 具加速度時間延遲之飛彈的強健導引律設計

學生：馮仰靚

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電控工程研究所



本論文探討結合積分型順滑模(integral type sliding mode)技術與傳統順滑模(sliding mode)技術於飛彈強健導引律設計之議題。本論文考量之不確定性干擾因素的來源包括有，目標估測誤差及因經過飛行控制系統而造成的加速度時間延遲。利用所設計之強健導引律可使閉迴路系統對目標估測誤差以及加速度時間延遲具有良好的補償效果。此外所提出之強健導引律可允許工程師針系統之性能要求設計無干擾系統(nominal system)的(最佳)導引律，使得包含時間延遲與估測誤差的系統(uncertain system)閉迴路狀態響應與無干擾系統閉迴路響應近似。最後經由模擬驗證證明此導引律可以達到期望的效能。

# Robust Missile Guidance Law Design with Time Delay in Acceleration

Student : Yang-Ching Feng

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Institute of Electrical and Control Engineering  
National Chiao Tung University



This paper studies the design of missile guidance law using the combination of SMC and ISMC technologies. The presented guidance law is shown to be able to compensate for the presence of uncertainty, including target estimation error, and time lag in acceleration caused by the flight control system. Besides, the presented scheme possesses a remarkable flexibility of allowing the engineer to select a desired guidance law for the nominal system (i.e., system without uncertainty and time delay) so that the state response of the overall uncertain time delay guidance system is close to that of the selected nominal closed-loop guidance system. Simulation results demonstrate the benefits of the presented scheme.

## 誌謝

在書寫期間，由衷感謝每位幫助我的人。

首先要感謝的是我的指導教授梁耀文博士，還記得剛進實驗室時，對於理論上有許多不解的問題，在老師循序漸進的引導之下，讓我充實的學習，不僅如此，更教我們做人處事的道理，以及面對困難時，如何解決應對。接著感謝參與計畫且當任口試委員的廖德誠博士、陳科祥博士、鄭治中博士，陳俊宏博士感謝他們給予的寶貴建議，以及提供解決的思考方向，使得本論文更加嚴謹。

接著感謝實驗室的同學們，首先要感謝的是徐勝均博士，林立岡學長、陳智強學長、魏源廷學長及鄭旭智學長，感謝他們在我研究上或學業上有問題時，可以即刻的幫助我，或是提供我意見。接著感謝同窗的實驗是同學呂鈞鈞與陳弘儒，感謝他們在一起修課時互相幫忙，以即互相鼓勵督促。感謝學弟康詠鈞、陳俊宇、陳逸庭、王國欽，在我需要幫忙時，適時的給予幫助。感謝我的好友姚宇廷在人生不如意時聽述說痛苦。感謝我的女友，在我忙碌時默默的在背後支持我幫助我。若無他們的幫助，我無法完成今天的碩論。

最後感謝我的家人，感謝他們在背後全力支持我，如果沒有他們，就沒有今天的我，也就無法完成今天的論文。

馮仰靚 于新竹交大

101年7月

# 目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目 錄.....	iv
圖 目 錄.....	vi
第 1 章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 論文架構.....	5
第 2 章 預備知識.....	6
2.1 順滑模控制技術介紹.....	6
2.2 積分型順滑模控制技術介紹.....	11
2.3 飛彈與目標相對運動模型介紹.....	16
2.3.1 基礎動力學.....	17
2.3.2 飛彈座標系.....	20
2.3.3 飛彈與目標相對運動模型.....	21
2.4 比例導引律介紹.....	23
第 3 章 積分型順滑模控制技術應用於導引律設計.....	27
3.1 問題描述.....	27
3.2 導引律設計.....	28
3.3 模擬驗證.....	32
第 4 章 順滑模控制技術應用於具加速度延遲之導引律設計.....	35
4.1 問題描述.....	35
4.2 導引律設計.....	36

4.3 模擬驗證.....	38
第 5 章 結合 ISMC 與 SMC 技術應用於飛彈導引律設計 .....	49
5.1 問題描述.....	49
5.2 導引律設計.....	50
5.3 模擬驗證.....	53
第 6 章 結論與未來方向.....	60
參考文獻.....	62



# 圖目錄

圖 2.1	$\ s(x(t))\ _2$ 沿著閉迴路系統的軌跡對時間的響應.....	11
圖 2.2	鋼體旋轉運動示意圖.....	17
圖 2.3	固定座標與旋轉座標示意圖.....	18
圖 2.4	三維飛彈與目標相對運動示意圖.....	21
圖 2.5	比例導引示意圖.....	23
圖 2.6	二維交戰示意圖.....	25
圖 3.1	具干擾之導引律的六個狀態比較圖.....	33
圖 3.2	具干擾之加速度控制力道比較圖(a) $y$ 方向(b) $z$ 方向.....	34
圖 3.3	ISMC 導引律之 $\ (GB)^T s\ $ 大小圖.....	34
圖 4.1	飛彈迴路示意圖.....	35
圖 4.2	simulink 方塊示意圖.....	39
圖 4.3	具時間延遲 $T = 0.3$ 時導引律六個狀態比較圖.....	42
圖 4.4	具時間延遲 $T = 0.3$ 的 $a_{my}$ 方向(a)實際加速度(b)加速度命令.....	43
圖 4.5	具時間延遲 $T = 0.3$ 時(a) $a_{my}$ 方向之順滑變數(b)順滑變數之放大圖.....	43
圖 4.6	具時間延遲 $T = 0.3$ 時 $a_{mz}$ 方向比較圖(a)實際加速度(b)加速度命令.....	44
圖 4.7	具時間延遲 $T = 0.3$ (a) $a_{mz}$ 方向之順滑變數(b)順滑變數之放大.....	44
圖 4.8	具時間延遲 $T = 1$ 時六個狀態比較圖.....	45
圖 4.9	具時間延遲 $T = 1$ 時 $a_{my}$ 方向比較圖(a)實際加速度(b)加速度命令.....	46
圖 4.10	具時間延遲 $T = 1$ (a) $a_{my}$ 方向順滑變數(b)順滑變數之放大圖.....	46
圖 4.11	具時間延遲 $T = 1$ 時 $a_{mz}$ 方向比較圖(a)實際加速度(b)加速度命令.....	47
圖 4.12	具時間延遲 $T = 1$ (a) $a_{mz}$ 方向順滑變數(b)順滑變數之放大圖.....	47
圖 5.1	具時間延遲與估測誤差之系統六個狀態比較圖.....	57
圖 5.2	具時間延遲與估測誤差之 $a_{my}$ 方向比較圖(a)實際加速度(b)加速度命令.....	58

圖 5.3 具時間延遲與估測誤差  $a_{mz}$  方向比較圖(a)實際加速度(b)加速度命令.....58

圖 5.4 具時間延遲與估測誤差(a) $s_{11}$  順滑變數(b) $s_{12}$  順滑.....59

圖 5.5 具時間延遲與估測誤差  $\phi_1 - \phi_0$  (a) $y$  方向(b) $z$  方向.....59



# 第 1 章

## 緒論

### 1.1 研究背景與動機

從遠古的戰爭，經歷了徒手戰爭，兵器戰爭，機械化戰爭，一直到現代戰爭，現代戰爭不僅僅是部隊上的進攻占領，在部隊進攻時，即可能以大量的飛彈進行攻擊，最後才是部隊的進駐，也因此部隊進駐之前，往往皆已決定了勝負。

1990年的波灣戰爭，以美國為首和伊拉克之間的戰爭，在戰爭中，美國首次將大量的高科技武器投入戰場，而首先發動攻擊的就是空戰，盟軍首先將摧毀伊拉克的防空武器為首要任務，由此可看出如果有好的防禦設施，則可以讓想入侵者退縮。因911攻擊事件，在2001年以美國為首展開的反恐行動，首波攻擊也是利用空軍作戰。而2003年的伊拉克戰爭，也使用了大規模的現代武器，因伊拉克軍隊在波灣戰爭中，軍事力量已被削弱，因此防空能力大大降低，美國因此可以藉由空降部隊，深入伊拉克。由以上戰爭知道，戰爭中，佔有空中的優勢是很重要的，幾乎誰掌控了空中作戰的權力，就掌控了局勢。

因空戰是雙方交戰時，誰佔有主導權，就佔有優勢，因此為了防禦敵人的入侵，如果有好的防空武器，那麼即可防衛好國家的空中領域，其中包括了戰機，飛彈，衛星等等。飛彈的佈署，往往會造成敵國飛機不敢入侵，因此會先使用長程導彈，將防空設施一一擊毀，這時攔截長程導彈的防禦設備，顯得格外的重要。而導引律是成功攔截飛彈與否的關鍵之一，現今已經有許多的導引律被提出或應

用，每種導引律有其自己的優點，但未有一種導引律可以針對全部飛彈的攔截，都可以有最好的攔截能力，因此導引律仍然繼續發展，以對付更聰明的飛彈。如果能夠提升攔截飛彈的成功，那麼國家將更安全，人民的性命也會受到保障，甚至有警示敵人的作用，讓外敵不敢侵犯。

在飛彈導引律中，比例導引(proportional navigation, PN)律是較多人知道並且被廣泛的應用。通常比例導引律以控制飛彈的加速度方向分成兩種類型，一種是以飛彈速度方向為基準(pure PN, PPN[1])；另一種是以飛彈的視線(line-of-sight)為基準(true PN, TPN[2])。因為簡單且容易使用，因此比例導引已經被廣泛的使用[1]-[4]。但隨著科技的發展，現在具有機動性的目標已經越來越多，如果只用傳統的比例導引律，可能會無法達到攔截機動性目標的目的。為了達到攔截機動性的目標，因此改良了比例導引為增強比例導引(augmented PN, APN)律[4]，也發展出許多新的導引方法，像是最佳導引律(optimal guidance law)[5]-[8]，模糊導引律(fuzzy guidance law)[9][10]，微分對策導引律(differential game guidance law)[11][12]。

接下來將簡單介紹上面所敘述的導引律。首先看最佳導引律，此方法被提出的原因為，當目標出現機動性時，會使得攔截目標成功率降低，而最佳導引律是採用線性飛彈與目標(missile-target)相對運動模型，在近碰撞的時候假設為同一水平面上，因此視線角度很小，並將非線性的動態線性化來研究。最佳導引律還需考慮飛行時間 (time-to-go,  $t_{go}$ )估測，若估測的好將會使零控脫靶量(zero-effort-miss, ZEM)變低，若估測不好則反之。而最佳導引律通常以飛彈最終位置與能量的消耗當作線性二次(linear-quadratic)的性能指標。

對局論(game theory)此方法已被應用在飛彈與目標相對運動模型，稱此方法為微分對策導引律[11]。在水平攔截情況下，微分對策導引律對目標加速度的估計誤差較不敏感，原因是微分對策導引律藉由擷取目標影像，進而預測目標機動性能。但若目標沒有機動性，則會讓微分導引律的誤差上升[12]。但因微分導引

律也存在著要求兩邊邊界值的問題，加上求解困難，所以並未被廣泛的使用。

設計最佳導引律時，是考慮在同一水平面上然後進一步做線性化，但實際情況中不一定在同一水平面上，因此導引律的飛彈與目標相對運動模型並不一定能做線性化，因此在實際應用上最佳導引律可能會無法保證系統結果是最佳的。因而有學者提出了模糊導引律來作為解決的方法，但傳統的模糊導引律存在著計算歸屬函數(membership functions)時間需較長的問題，因此文獻[10]裡以共同的李雅普諾夫(Lyapunov)函數建構模糊規則(fuzzy rule)，使飛彈與目標相對運動模型滿足李雅普諾夫(Lyapunov sense)穩定條件，並透過模擬驗證攔截目標的目的。

因未來的目標可能具有高機動性，並需要考慮環境限制因素等等，因而可能會使得目標難以正確估測，但經典的比例導引以及最佳導引需獲取精確的目標估測值，因此在無法準確估測機動性目標加速度時，則使用比例導引及最佳導引較難得到理想的結果。因此現在在發展新的導引律時，將考慮導引律的強健性，像是微分幾何與PPN結合的導引律[13]，其與傳統的PPN相比較，在視角(LOS)的轉動上更有效率，而且不用計算time-to-go的訊息。或是基於Sontag's規則[14]的導引律，在裝載導引頭(seeker)和慣性測量單元(inertial measurement unit)的情況下(傳統的增強比例導引律也有同樣的裝置)，具有比傳統增強比例導引律更大的攔截範圍。文獻[15]將 $H_\infty$ 的理論應用在導引律研究，將目標機動視為干擾輸入，將導彈的問題改用非線性干擾衰減來控制問題，透過求解Hamilton-Jacobi偏微分不等式，可得到三種 $H_\infty$ 導引律，但因解Hamilton-Jacobi偏微分不等式很難解，因此在文獻[16]中提出利用Takagi-Sugeno模糊系統修改飛彈與目標相對運動模型，接著將修改過的模型使用 $H_\infty$ 控制。也有文獻使用順滑模控制(sliding mode control)技術在導引律上[18][19][20]，利用順滑模控制較好的強健性(robustness)以及容易實現的優點。

事實上大部分的導引律應用在飛行控制系統(flight-control system)未加入時間延遲下的飛彈與目標相對運動模型時，通常都可以有效的命中目標，但實際上

在攔截過程中，飛行控制系統存在時間延遲的問題以及量測即獲取訊號時產生的雜訊[21]，這些問題都可能造成飛彈誤失距離(miss distance)過大導致攔截目標失敗。本碩論首先將利用積分型順滑模控制 (integral-type sliding mode control, ISMC) 技術，設計積分型順滑模導引律，其優點之一為在設計時可依工程師所希望的效能表現選取適當的導引律做為無干擾系統時的加速度命令，再利用積分型順滑模的強健特性，用來對付目標加速度或量測訊號之雜訊。接著考慮因經過飛行控制系統造成的時間延遲問題，並藉由順滑模控制技術設計適當的順滑模導引律來解決此問題，而本論文所提出的順滑模導引律與前敘所提到的順滑模導引律[18]不相同，雖然兩者皆利用順滑模控制技巧，但與[18]的差異在於本論文是針對有加入時間延遲的飛彈與目標相對運動模型所設計的順滑模導引律。本研究提出的順滑模導引律設計可分成兩步驟：1) 考慮無時間延遲及雜訊干擾之飛彈與目標相對運動系統並選取適當的導引律，使得閉迴路系統滿足預期的性能指標(performance index)；2) 考慮時間延遲之飛彈與目標相對運動系統，根據步驟 1) 之導引律設計適當的順滑面並組織順滑模導引律，使得當閉迴路導引系統軌跡保持在順滑面(sliding manifold)上時，其系統響應等同於無延遲導引系統之表現。本論文所提出之順滑模導引律設計技術不僅能有效的改善導引律因時間延遲而造成飛彈與目標相對運動模型產生誤失距離，並且提供了控制工程師一個額外的設計自由度，亦即透過此設計方式，工程師可根據其對於無延遲系統之性能表現要求，來設計相對應的順滑面及順滑模控制律。最後將積分型順滑模導引律與順滑模導引律結合成新的導引律。

## 1.2 論文架構

本論文的第二章中，首先會介紹順滑模控制理論與積分型順滑模控制技術，並且建立三維空間內的目標與飛彈相對運動模型，及介紹現有的比例導引律。在第三章中，首先會先設計積分型順滑模導引律，用來補償估測誤差，並模擬驗證，證明有干擾之閉迴路系統狀態響應與無受干擾之閉迴路狀態響應相近。接著在第四章敘述如何在飛彈與目標相對運動模型中加入時間延遲項，並用順滑模控制技巧，對三維空間內的飛彈與目標相對運動模型設計其適當的控制律，解決因時間延遲造成的誤失距離，最後進行模擬驗證，此時以誤失距離當作導引律優劣的指標，將可以看出本研究所設計的順滑模導引律其優點及特色。第五章則是將第三章與第四章兩種導引律進行結合，用來對抗具有估測誤差和時間延遲的飛彈與目標相對運動模型，最後加上模擬驗證。本論文的第六章將提出結論與未來研究方向。



## 第2章

### 預備知識

#### 2.1 順滑模控制技術介紹

順滑模控制(sliding mode control, SMC)技術的特色為其利用不連續的控制輸入,使得閉迴路系統軌跡最後會被限制在一個設計者預先設計好的順滑面(sliding surface)上,而閉迴路系統的動態行為可經由順滑面來規範。一般來說,順滑模控制技術擁有以下優點:(i)響應速度快;(ii)對模型不確定性(model uncertainties)或外在干擾(external disturbances)具有強健性;(iii)容易實現的優點[22]。順滑模控制技術的設計方式對於不同型式下的非線性系統,會有不同的設計方式[23][24]。因此在本研究中選擇非線性系統標準型(regular form)的順滑模控制設計做討論[24]。

首先我們考慮非線性系統[24]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}]\end{aligned}\quad (2.1)$$

其中  $\mathbf{f}_a(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}_b(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$  即為其平衡點(equilibrium point),  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  為系統狀態,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  為控制輸入,  $\mathbf{f}_a(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}_b(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  與  $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  皆為平滑函數,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$  代表匹配型(matched type)系統之不確定性(uncertainties)或外在干擾(external disturbances)。根據[24]可知,設計非線性系統的順滑模控制器可分成兩個程序,程序一為設計順滑面,使得當閉迴路系統軌跡被限制在順滑面上時會滿足閉迴路系統為漸進穩定

的要求；程序二為設計順滑模控制律(sliding mode control law)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，使得閉迴路系統軌跡在有限時間內到達設計者預先設計的順滑面並且維持在順滑面上。

**假設 2.1：**

對任何的狀態  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ ，系統(2.1)的矩陣  $G(\mathbf{x})$  為列滿秩(full row rank)。

**假設 2.2：**

$\|G(\mathbf{x})\mathbf{d}\|_2 \leq \kappa(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}$ ，其中  $\|\cdot\|_2$  代表  $\mathbb{R}^{2n}$  空間向量中的  $l_2$  範數( $l_2$ -norm)[25]， $\kappa: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為一連續的非負函數(nonnegative function)。

• 程序一：設計順滑面  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

考慮標準型式下的非線性系統如(2.1)式，其前  $n$  階子系統(subsystem)為

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.2)$$

透過步階迴歸(backstepping)的設計方式可知，可以將  $\mathbf{x}_2$  視為(2.2)式的控制輸入，並且經由非線性控制的設計方法來設計一控制器(stabilizer)  $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)$ ，且設計的控制器  $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)$  可使得(2.2)式漸進穩定，其中函數  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  滿足  $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，最後我們只需要再設計原非線性系統(2.1)式的控制輸入  $\mathbf{u}$ ，使得  $\mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$  成立，便可透過控制輸入  $\mathbf{u}$  讓整體閉迴路系統為漸進穩定。根據以上所述，我們可令順滑面如下所示

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

其中  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ ，函數  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  滿足  $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，而在設計函數  $\phi(\mathbf{x}_1)$  時需考慮(2.2)式前  $n$  階子系統並透過控制器  $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)$  使其為漸進穩定。當閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上，亦即  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ，可得  $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)$ ，則(2.2)式的前  $n$  階子系統(subsystem)可寫成下式(2.4)

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \phi(\mathbf{x}_1)) \quad (2.4)$$

為漸進穩定(asymptotically stable)，亦即當  $t \rightarrow \infty$  時  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 。緊接著發現因順滑面為零，亦即  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ ， $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，當  $t \rightarrow \infty$  時  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ ，因此可得當  $t \rightarrow \infty$  時  $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{0}$ ，亦即閉迴路系統為漸進穩定。

• 程序二：設計控制律

設計控制律之前，必須先設計好順滑面，在此假設已設計好順滑面如下式

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

根據[24]可知，設計控制律，又可分為兩小步驟，步驟一為設計  $\mathbf{u}_0$ ，步驟二為設計  $\mathbf{u}_1$ ，而最後的順滑模控制律(sliding mode control law)形式為  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 。

• 步驟一： $\mathbf{u}_0$  設計

$\mathbf{u}_0$  設計時必須存在一項條件，即當不考慮匹配型系統之不確定性或外在干擾時，必須使得順滑面  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  對於閉迴路系統為不變集合(invariant set)[24]，亦即  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 。此外，將(2.5)式中的順滑變數(sliding variable)  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$  對時間  $t$  取導函數(derivative)，並將(2.1)式代入取導函數後的順滑變數，可得動態系統(sliding variable dynamic)如下(2.6)式

$$\dot{\mathbf{s}} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}] \quad (2.6)$$

此時必須考慮到的控制器  $\mathbf{u}$ ，在尚未加入  $\mathbf{u}_1$  時，亦即  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ ，作回授控制且不考慮雜訊項  $\mathbf{d}$ ，可以使動態系統(2.6)式擁有原點  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  為其平衡點

接著設計  $\mathbf{u}_0$ ，此刻還不考慮(2.6)式中未知其切確形式的雜訊項  $\mathbf{d}$ ，此刻  $\mathbf{u}_0$  項的功能是將(2.6)式中已知其切確形式的項刪除，設計  $\mathbf{u}_0$  如下(2.7)式

$$\mathbf{u}_0 = -G^+(\mathbf{x}) \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right] \quad (2.7)$$

其中  $G^+(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  為  $G(\mathbf{x})$  的廣義反矩陣(pseudo-inverse matrix)。此時將設計完

成的(2.7)式帶入(2.6)式中可得

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})[\mathbf{u}_1 + \mathbf{d}] \quad (2.8)$$

觀察(2.8)式可發現，在不考慮雜訊項 $\mathbf{d}$ 的情況下，僅使用 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ 作為回授控制，亦即 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ ，則(2.8)式擁有 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 為其平衡點。

• 步驟二： $\mathbf{u}_1$ 設計

在步驟一已經設計完成 $\mathbf{u}_0$ ，亦即(2.7)式，現在考慮(2.8)式並假設 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) \neq \mathbf{0}$ 而進行 $\mathbf{u}_1$ 之設計，而 $\mathbf{u}_1$ 的功能為讓順滑變數 $\mathbf{s}$ 在有限時間內趨近於 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ，亦即閉迴路系統軌跡將會在有限時間內到達到順滑面。由假設 2.2 可以知道

$\|G(\mathbf{x})\mathbf{d}\|_2 \leq \kappa(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}$ ，因此可設計 $\mathbf{u}_1$ 為(2.9)式

$$\mathbf{u}_1 = -G^+(\mathbf{x})[\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta] \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) \quad (2.9)$$

其中 $\mathbf{sgn}(\mathbf{s}) = [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2), \dots, \text{sgn}(s_p)]^T$ ， $\eta > 0 \in \mathbb{R}$ 為待設計的常數，因此將(2.9)式代入(2.8)式可得順滑變數 $\mathbf{s}$ 所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -[\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta] \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) + G(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (2.10)$$

為了證明 $\mathbf{u}_1$ 設計成(2.9)之可行性，透過李雅普諾夫理論，令(2.10)式的可能的李雅普諾夫函數(Lyapunov function candidate)為 $V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{s}$ ，將 $V$ 對時間 $t$ 取導函數如下(2.11)式

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{s}} \quad (2.11)$$

此時將(2.10)式代入(2.11)式後可得

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{s}} = -[\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta] \mathbf{s}^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T G(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (2.12)$$

利用假設 2.2 與關係式 $\mathbf{s}^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) = s_1 \text{sgn}(s_1) + \dots + s_n \text{sgn}(s_n) = |s_1| + \dots + |s_n| = \|\mathbf{s}\|_1$ ，以及向量範數(norm)不等式 $\|\mathbf{s}\|_1 \geq \|\mathbf{s}\|_2$ ，可將(2.12)式整理成下(2.13)式

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{s}} = -[\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta] \mathbf{s}^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T G(\mathbf{x})\mathbf{d} \\ &\leq -[\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta] \|\mathbf{s}\|_2 + \mathbf{s}^T G(\mathbf{x})\mathbf{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq - [\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta] \|\mathbf{s}\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \|G(\mathbf{x})\mathbf{d}\|_2 \\
&\leq - [\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta] \|\mathbf{s}\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \kappa(\mathbf{x}, t) \\
&= -\eta \|\mathbf{s}\|_2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中在(2.13)式中為了讓 $\mathbf{s}^T G(\mathbf{x})\mathbf{d} \leq \|\mathbf{s}\|_2 \|G(\mathbf{x})\mathbf{d}\|_2$ 條件成立，因此利用了柯西-史瓦茲不等式(Cauchy-Schwarz inequality)。藉由(2.13)式以及李雅普諾夫理論知道 $V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{s}$ 為(2.10)式的一個可用的李雅普諾夫函數，因此經過上面連續的推導，可以知道閉迴路系統(2.10)式為漸進穩定(asymptotically stable)，亦即當 $t \rightarrow \infty$ 時 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，或可解釋成針對(2.8)式來看，每當順滑變數 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ， $\mathbf{u}_1$ 會使得 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ 。事實上， $V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{s}$ 與 $V$ 對時間 $t$ 的導函數可分別表示成(2.14)式及(2.15)式

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{s} = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\|_2^2 \tag{2.14}$$

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\|\mathbf{s}\|_2^2) = \|\mathbf{s}\|_2 \frac{d}{dt}(\|\mathbf{s}\|_2) \tag{2.15}$$

由(2.13)式，(2.14)式與(2.15)式與可知

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \|\mathbf{s}\|_2 \frac{d}{dt}(\|\mathbf{s}\|_2) \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2 \tag{2.16}$$

也就是說

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{s}\|_2) \leq -\eta \tag{2.17}$$

亦即 $\|\mathbf{s}\|_2$ 沿著閉迴路系統軌跡對時間的變化率小於等於 $-\eta$ ，進一步將(2.17)式整理可得

$$\int_{\|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2}^{\|\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\|_2} d\|\mathbf{s}\|_2 = \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\|_2 - \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2 \leq \int_0^t -\eta dt = -\eta t \tag{2.18}$$

故

$$0 \leq \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\|_2 \leq \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2 - \eta t \tag{2.19}$$

意思為當 $t = \frac{\|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2}{\eta}$ 時 $0 \leq \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\|_2 \leq \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2 - \eta t$ ，亦即 $\|\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\|_2$ 必在有限時間 $t = \frac{\|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2}{\eta}$ 之內收斂至零，如圖 2.1  $\|\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\|_2$ 沿著閉迴路系統的軌

跡對時間的響應所示，這也代表著閉迴路系統軌跡必在有限時間  $t = \frac{\|s(\mathbf{x}(0))\|_2}{\eta}$  內到達順滑面上並保持在順滑面上。

根據上列步驟一與步驟二，以及相關證明可知，最後的順滑模控制律為下列(2.20)式

$$\mathbf{u} = -G^+(\mathbf{x}) \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + (\kappa(\mathbf{x}) + \eta) \right] \text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (2.20)$$

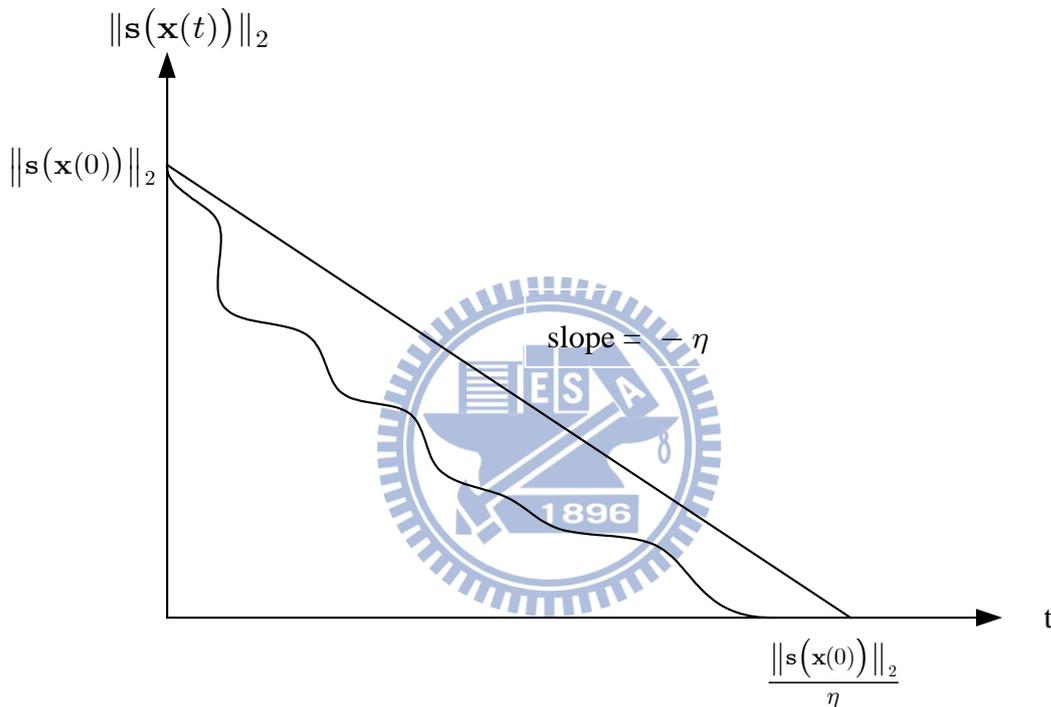


圖 2.1  $\|s(\mathbf{x}(t))\|_2$  沿著閉迴路系統的軌跡對時間的響應

## 2.2 積分型順滑模控制技術介紹

積分型順滑模控制(integral-type sliding mode control, ISMC)的設計概念與順滑模控制類似，兩者之間的差別在於順滑面的型式，積分型順滑模控制的順滑面型式，可看成是閉迴路系統的軌跡與閉迴路未受干擾系統(nominal system)軌跡之間的差，投影到某個選定的矩陣的值域空間(range space)[26]。雖然順滑模控制擁有其優點，但文獻上指出，在閉迴路系統軌跡向順滑面趨近但尚未接觸到順滑面

的迫近階段(reaching phase)時，其對於模型不確定性或外在干擾可能存在敏感的現象[26]，因此，可能會造成閉迴路系統不穩定之現象，而積分型順滑模控制因其特殊的順滑面選取方式，使得閉迴路系統軌跡一開始就落於順滑面上，減少了順滑模控制存在迫近階段的問題[27]。此外，積分型順滑模控制仍然保有順滑模控制所擁有的響應速度快、容易實現，以及對於模型不確定性及或外在干擾具有強健性等的優點外，並且額外擁有如下優點：(i)有報告指出利用順滑模控制技術設計時，系統狀態在上順滑平面之前，對於模型不確定性或外在干擾可能會有敏感(sensitive)的現象進而可能造成系統的不穩定性，而利用積分型順滑模控制設計技術時，系統之狀態一開始就在順滑平面上，而且會一直維持在順滑平面上[26]，因此積分型順滑模控制能有效的增強控制任務之強健性(robustness)；(ii) 順滑模控制所需之最大控制力道(maximum control magnitude)通常發生在迫近階段的初期，因此積分型順滑模控制所需之最大控制力道通常小於順滑模控制，這使得積分型順滑模控制更容易滿足物理上對最大控制力道要求的限制；(iii)當系統存在不匹配型(unmatched)模型不確定性或外在干擾時，透過選擇適當的順滑平面參數，可讓不匹配的模型不確定性或外在干擾影響最小[26]；(iv)當系統只存在匹配型(matched-type)模型不確定性或外在干擾時且當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其動態行為等同於未受干擾的系統響應，因此擁有一個額外的控制器設計自由度，此自由度允許工程師根據系統需求針對無干擾系統進行最佳化設計，使受干擾系統(uncertain system)與無干擾系統之狀態響應相同[27]。最後一項優點使得工程師可以透過對於無干擾系統的設計及其性能，事先地討論干擾系統的性能表現使受干擾系統擁有工程師所預期的性能表現。

接下來我們討論積分型順滑模控制的設計，考慮非線性系統[27]

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}] \quad (2.21)$$

其中  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  為其平衡點(equilibrium point)， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  為系統狀態， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  為控制輸

入， $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ 與 $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 皆為平滑函數， $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ 代表匹配型的系統之不確定性或外在干擾。根據論文[27]可知，設計非線性系統的積分型順滑模控制器可分為兩個程序，程序一為設計順滑面，當閉迴路系統軌跡被限制在順滑面上時其動態響應會等同於閉迴路無干擾系統(nominal system)之響應，並藉無干擾控制律(nominal controller) $\mathbf{u}_0$ 可使得閉迴路系統達到漸進穩定；程序二為設計積分型順滑模控制律(integral-type sliding mode control law)， $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 使得閉迴路系統軌會一直被保持在順滑面上。為了讓積分型順滑模控制技術可以實現，因此加入下列假設。

**假設 2.3：**

$\|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho_m(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$ ，其中 $\rho_m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續的非負函數。

**假設 2.4：**

當 $m \leq n$ 時，存在 $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 矩陣 $DG(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 為可逆(invertible)，當 $m > n$ 時，存在 $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 矩陣 $DG(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 為列滿秩(full row rank) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 。

**假設 2.5：**

存在一個無干擾控制律(nominal controller) $\mathbf{u}_0$ 使得 (2.21)式的無干擾系統(nominal system)  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}_0$ ，原點為漸進穩定(asymptotically stable)。

• 程序一：設計順滑面 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

考慮 (2.21)式，順滑面被設計成[27]

$$\mathbf{s} = D\{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [f(\mathbf{x}(\tau)) + G(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_0]d\tau\} = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

其中 $D$ 必須滿足假設 2.4。觀察當 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ 時，則閉迴路系統軌跡一開始就會

落在順滑面上。

• 程序二：設計控制律  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$

已設計好順滑面如(2.22)式，在設計控制律時，又可分為兩個步驟，步驟一為設計  $\mathbf{u}_0$ ，步驟二為設計  $\mathbf{u}_1$ ，而最後的積分型順滑模控制律  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，在此將分別討論。

• 步驟一：設計  $\mathbf{u}_0$

設計  $\mathbf{u}_0$  時可針對(2.21)式的無干擾系統  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}$  進行設計，且  $\mathbf{u}_0$  必須要滿足假設 2.5，那麼  $\mathbf{u}_0$  則擁有額外的設計自由度[27]。另外不考慮匹配型的系統之不確定性或外在干擾時， $\mathbf{u}_0$  可使得順滑面  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  對於閉迴路系統為不變集合(invariant set)的功能，即  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 。將(2.22)式中的順滑變數對時間  $t$  取導函數並將(2.21)式代入，再假設  $\mathbf{u}_0$  已經設計完成代入(2.21)式了，則可得順滑變數  $\mathbf{s}$  所對應的動態系統為

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= Df(\mathbf{x}) + DG(\mathbf{x})\mathbf{u} + DG(\mathbf{x})\mathbf{d} - Df(\mathbf{x}) - DG(\mathbf{x})\mathbf{u}_0 \\ &= DG(\mathbf{x})(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) + DG(\mathbf{x})\mathbf{d} - DG(\mathbf{x})\mathbf{u}_0 \\ &= DG(\mathbf{x})\mathbf{u}_1 + DG(\mathbf{x})\mathbf{d}\end{aligned}\quad (2.23)$$

觀察(2.23)式我們可發現，在不考慮  $\mathbf{d}$  時，使用  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  作為回授控制，則(2.23)式擁有  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  為平衡點(equilibrium point)。

• 步驟二：設計  $\mathbf{u}_1$

在已經完成  $\mathbf{u}_0$  的設計，接下來考慮(2.23)式，進行  $\mathbf{u}_1$  之設計。因為閉迴路系軌跡一開始就落在順滑面上，因此  $\mathbf{u}_1$  的功能為每當順滑變數  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  時，會立即趨近順滑面。由假設 2.2 可知  $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho_m(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$ ，可設計  $\mathbf{u}_1$  為

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} & , \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.24)$$

其中  $\rho(\mathbf{x}, t) > \rho_m(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$ 。為了證明  $\mathbf{u}_1$  設計成(2.24)式之可行性，令在某個時間瞬間(time instant)  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ ，並將(2.24)式代入(2.23)式可得順滑變數  $\mathbf{s}$  所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}} = -\rho(\mathbf{x}, t) DG(\mathbf{x}) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + DG(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (2.25)$$

透過李雅普諾夫理論，令(2.25)式的可能李雅普諾夫函數為  $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，則  $V$  對時間  $t$  的導函數為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \quad (2.26)$$

將(2.25)式代入(2.26)式可得

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T DG(\mathbf{x}) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + \mathbf{s}^T DG(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (2.27)$$

利用假設 2.3 可將(2.27)式整理成如下

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2^2}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + \mathbf{s}^T DG(\mathbf{x}) \mathbf{d} \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 + \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \|\mathbf{d}\|_2 \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 + \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \|\rho_m(\mathbf{x}, t)\| \\ &= \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 [-\rho(\mathbf{x}, t) + \rho_m(\mathbf{x}, t)] < 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

其中利用了柯西-史瓦茲不等式來使得  $\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \mathbf{d} \leq \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \|\mathbf{d}\|_2$ 。推導至此，由(2.28)式與李雅普諾夫理論可知， $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$  為(2.25)式的一個李雅普諾夫函數，且(2.23)式在控制律(2.24)式的控制下，其閉迴路系統(2.25)式為漸進穩定，也就是說，針對(2.23)式來說每當順滑變數  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  時，會立即趨近順滑面。因為順滑面的設計型式所致，僅會得到  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$  之值，故對(2.23)式使用(2.24)式控制後的順滑變數  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  所對應的閉迴路動態系統(2.25)式來說必成立  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 。

由以上步驟一與步驟二，以及相關證明可知，最後的積分型順滑模控制律為  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 。

接下來證明當系統僅存在匹配型模型不確定性或干擾，閉迴路系統軌跡保持在順滑面上時，其動態行為會等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統之響應。先假設閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$  時，閉迴路系統  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}$  的軌跡為  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t)$ ，而

$$\dot{\mathbf{s}} = DG(\mathbf{x}_d)[\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{u}_0] = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

其中  $DG(\mathbf{x}_d)$  為可逆或列滿秩，故必存在一解

$$\mathbf{u}_{eq} = -\mathbf{d} + \mathbf{u}_0 \quad (2.30)$$

滿足(2.29)式，而  $\mathbf{u}_{eq}$  稱為等效控制(equivalent control)，其為閉迴路系統軌跡被保持在順滑面時所對應的等效控制律。接著把(2.30)式代入原始動態系統(2.21)式後可得

$$\dot{\mathbf{x}}_d = f(\mathbf{x}_d) + G(\mathbf{x}_d)\mathbf{u}_0 \quad (2.31)$$

觀察(2.31)式，可發現其動態系統即為原始動態系統(2.21)使用  $\mathbf{u}_0$  控制後的閉迴路無干擾系統，因此，當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其動態行為確實等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統之響應。

## 2.3 飛彈與目標相對運動模型介紹

飛彈為了達到攔截目標的目的，需要導引律來導引飛彈，在攔截過程期間，一般可分為初段、中段、末段三個時期。在初中段期間，主要是由地面雷達提供目標位置，而在末端則使用飛彈本身的雷達，因此要考慮飛彈在攔截末段時如何藉由適當的導引律控制飛彈，達到成功命中目標。為了設計導引律，在本節將飛彈與目標視為質點，建立飛彈與目標相對運動模型，以供設計導引律時使用。

### 2.3.1 基礎動力學

為了推導三維空間中的飛彈與目標相對運動模型，首先必須了解應用力學中的剛體運動[28]。參考圖 2.2 鋼體旋轉運動示意圖考慮一個對固定軸 $Z$ 旋轉的鋼體，令 $P$ 為物體上的一點，且 $l$ 為固定座標軸中的向量，座標原點為 $O$ ， $A$ 為 $P$ 投影在 $Z$ 軸上的點， $P$ 與 $A$ 之間維持一個固定距離，故 $P$ 會以 $A$ 為中心旋轉，半徑為也就是 $\overline{AP}$ 線，其中 $\lambda$ 為 $l$ 與 $Z$ 軸之間的夾角。而 $\overline{AP}$ 線與 $ZX$ 平面的夾角為 $\theta$ ，故 $P$ 點的位置可以由 $\overline{AP}$ 線與 $\lambda$ 來決定，這裡以逆時鐘方向旋轉的角座標為正值，當 $P$ 在旋轉時會產生一切線速度 $\mathbf{v} = \frac{dl}{dt}$ ，而在這假設 $P$ 點旋轉移動一小距離為 $P'$ ，故 $\overline{PP'}$ 為弧長，此弧長所轉動的角度為 $\Delta\theta$ ，因此可由下式(2.32)描述。

$$\overline{PP'} = l \sin(\lambda) \Delta\theta \quad (2.32)$$

兩邊同除 $\Delta t$ ，當 $\Delta t$ 趨近於零時，取極值可得 $r \sin(\lambda) \dot{\theta}$ 。如果沿 $Z$ 軸方向取一向量 $\omega$ ，可以整理出下式

$$\mathbf{v} = \frac{dl}{dt} = \omega \times \mathbf{l} \quad (2.33)$$

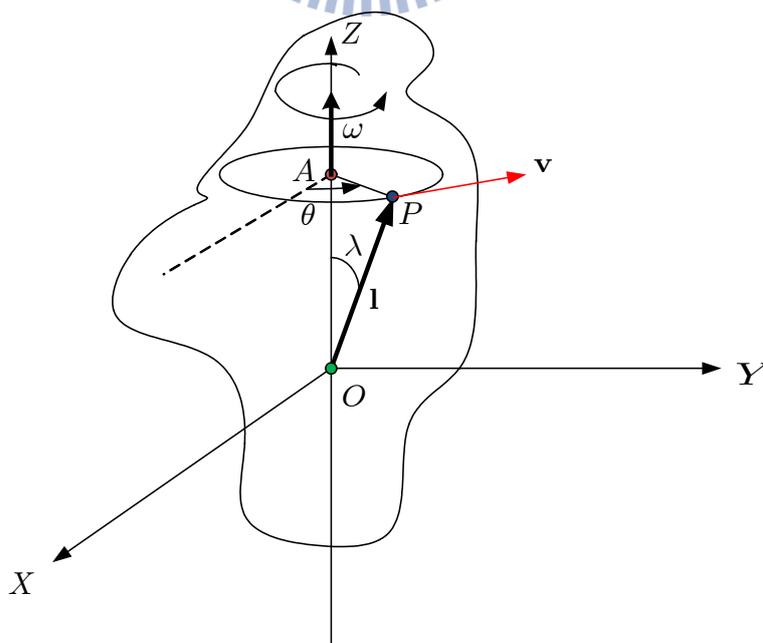


圖 2.2 鋼體旋轉運動示意圖

為了求點  $P$  的加速度  $\mathbf{a}$ ，對(2.33)式微分，因此可寫成下式(2.34)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}) \\
 &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{l} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt} \\
 &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{l} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l})
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

其中  $\boldsymbol{\alpha}$  代表角加速度。因此可知道加速度  $\mathbf{a}$  可分為切線加速度  $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{l}$ ，和法線加速度  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l})$ 。由此可知角速度與速度之間的關係以及角加速度與加速度之間的關係。

接著考慮如下圖 2.3，此將說明一向量變化率在固定座標系下和旋轉座標系下的關係，首先由圖 2.3 固定座標與旋轉座標示意圖中可以觀察到有兩個均以  $O$  為中心的參考座標軸，一個是固定座標系  $OXYZ$ ，一個是旋轉座標系  $Oxyz$ ，可以知道當向量  $\mathbf{P}$  改變時，在不同座標系下所觀察到的變化率是不同的。而  $\boldsymbol{\Omega}$  代表向量  $\mathbf{P}$  在旋轉座標系  $Oxyz$  時的瞬間角速度。

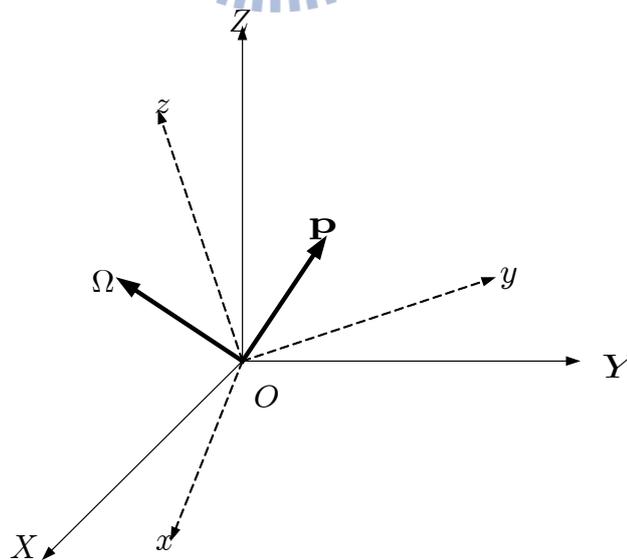


圖 2.3 固定座標與旋轉座標示意圖

此處將以  $(\dot{\mathbf{p}})_{OXYZ}$  代表向量  $\mathbf{p}$  在固定座標系  $OXYZ$  下的變化率，而  $(\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz}$  代表向量  $\mathbf{p}$  在旋轉座標系  $Oxyz$  下的變化率。這裡將拆成兩層來考慮，第一層為暫時不考慮固定座標系  $OXYZ$ ，只考慮向量  $\mathbf{p}$  在動座標系  $Oxyz$  下的變化率，而第二層為將向量  $\mathbf{p}$  分成三個向量投影在旋轉座標系  $Oxyz$  上，亦即只考慮旋轉座標  $Oxyz$  各軸如何轉動，最後描述固定座標系  $OXYZ$  下觀察向量  $\mathbf{p}$  如何轉動。

• 第一層

現在將向量  $\mathbf{p}$  分解成沿著旋轉座標  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的分量，分別以  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  代表其單位向量，則可得向量  $\mathbf{p}$  在旋轉座標系下的表示式(2.35)

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (2.35)$$

將(2.35)式對時間微分，並且將向量  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  視為固定，則可得到  $\mathbf{p}$  相對於旋轉座標  $Oxyz$  的變化率(2.36)

$$(\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz} = \dot{p}_x \mathbf{i} + \dot{p}_y \mathbf{j} + \dot{p}_z \mathbf{k} \quad (2.36)$$

• 第二層

為了求得  $\mathbf{p}$  在固定座標系  $OXYZ$  的變化率，先將向量  $\mathbf{p}$  看成投影在旋轉座標系  $Oxyz$  上的三個向量  $\dot{p}_x \mathbf{i}$ 、 $\dot{p}_y \mathbf{j}$ 、 $\dot{p}_z \mathbf{k}$ ，但在固定座標系上觀察此三個向量，必須考慮向量  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  為變數，亦即  $\mathbf{i}(t)$ 、 $\mathbf{j}(t)$ 、 $\mathbf{k}(t)$ ，因此對式子(2.35)微分後可得下式(2.37)

$$(\dot{\mathbf{p}})_{OXYZ} = \dot{p}_x \mathbf{i}(t) + \dot{p}_y \mathbf{j}(t) + \dot{p}_z \mathbf{k}(t) + p_x \frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} + p_y \frac{d\mathbf{j}(t)}{dt} + p_z \frac{d\mathbf{k}(t)}{dt} \quad (2.37)$$

此(2.37)式即為分為兩層來觀察向量  $\mathbf{p}$  在固定座標系  $OXYZ$  上的變化率，由(2.37)式可知，可將等號後前面三項看成向量  $\mathbf{p}$  在旋轉座標上的變化率，若將旋轉座標固定不動，則  $\dot{p}_x \mathbf{i}(t) + \dot{p}_y \mathbf{j}(t) + \dot{p}_z \mathbf{k}(t)$  為零，只剩後面三項，則可以代表此時質點的速度。若現在將旋轉座標考慮進來，則因旋轉座標  $Oxyz$  座標在此瞬間

對固定座標  $OXYZ$  具有角速度  $\Omega$ ，由式子(2.33)因此可寫成

$$p_x \frac{di}{dt} + p_y \frac{dj}{dt} + p_z \frac{dk}{dt} = \Omega \times \mathbf{p} \quad (2.38)$$

將(2.36)(2.38)代入(2.37)可以得到基本關係式

$$(\dot{\mathbf{p}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz} + \Omega \times \mathbf{p} \quad (2.39)$$

為了求得加速度  $\ddot{\mathbf{p}}$  在固定座標系  $OXYZ$  與旋轉座標系  $Oxyz$  之間的關係，將(2.39)式微分可得下式(2.40)，其中微分都是對  $OXYZ$  定義

$$(\ddot{\mathbf{p}})_{OXYZ} = \dot{\Omega} \times \mathbf{p} + \Omega \times (\dot{\mathbf{p}})_{OXYZ} + \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz} \quad (2.40)$$

首先看(2.40)中最右那項，參考(2.39)可將其表示如下(2.41)。意思即為看成有一向量為  $(\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz} = \mathbf{r}$ ，仿照如何推導到(2.39)式

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz} = (\ddot{\mathbf{p}})_{Oxyz} + \Omega \times (\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz} \quad (2.41)$$

將式子(2.39)及(2.41)帶入(2.40)可得下式(2.42)

$$(\ddot{\mathbf{p}})_{OXYZ} = \dot{\Omega} \times \mathbf{p} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{p}) + 2\Omega \times (\dot{\mathbf{p}})_{Oxyz} + (\ddot{\mathbf{p}})_{Oxyz} \quad (2.42)$$

此即為加速度在固定座標系  $OXYZ$  與旋轉座標系  $Oxyz$  之間的關係。

## 2.3.2 飛彈座標系

為了來定義飛彈與目標相對運動模型中的座標系，其一為地面發射座標系  $(O_g X_g Y_g Z_g)$ ，另一個為視線座標系  $(o_L x_L y_L z_L)$ 。

### (1) 地面發射座標系

地面發射座標系的原點  $O_g$  為取飛彈的發射點， $O_g X_g$  軸為發射時指向目標方向， $O_g Z_g$  軸為垂直地面指向地心， $O_g Y_g$  軸與  $O_g X_g$  和  $O_g Z_g$  構成右手係。

### (2) 視線座標系

此座標的原點在飛彈的質心 $O_L$ ，而其 $o_Lx_L$ 軸為指向目標方向，會隨目標改變而改變，而其他軸為由地面發射座標系依序旋轉方位角 $q_\beta$ ，再旋轉俯仰角 $q_\epsilon$ 讓地面發射座標系中的 $O_gX_g$ 軸與 $o_Lx_L$ 軸重疊時，可得其 $o_Ly_L$ 與 $o_Lz_L$ 。

### 2.3.3 飛彈與目標相對運動模型

現在進行三維度飛彈與目標相對運動的推導，參考下圖 2.3。從圖中可以發現有兩個座標系統，分別為在飛彈座標系中的地面發射座標系與視線座標系。其中 $\mathbf{r}$ 為視線即為相對距離， $q_\beta$ 為方位角， $q_\epsilon$ 為高低角。

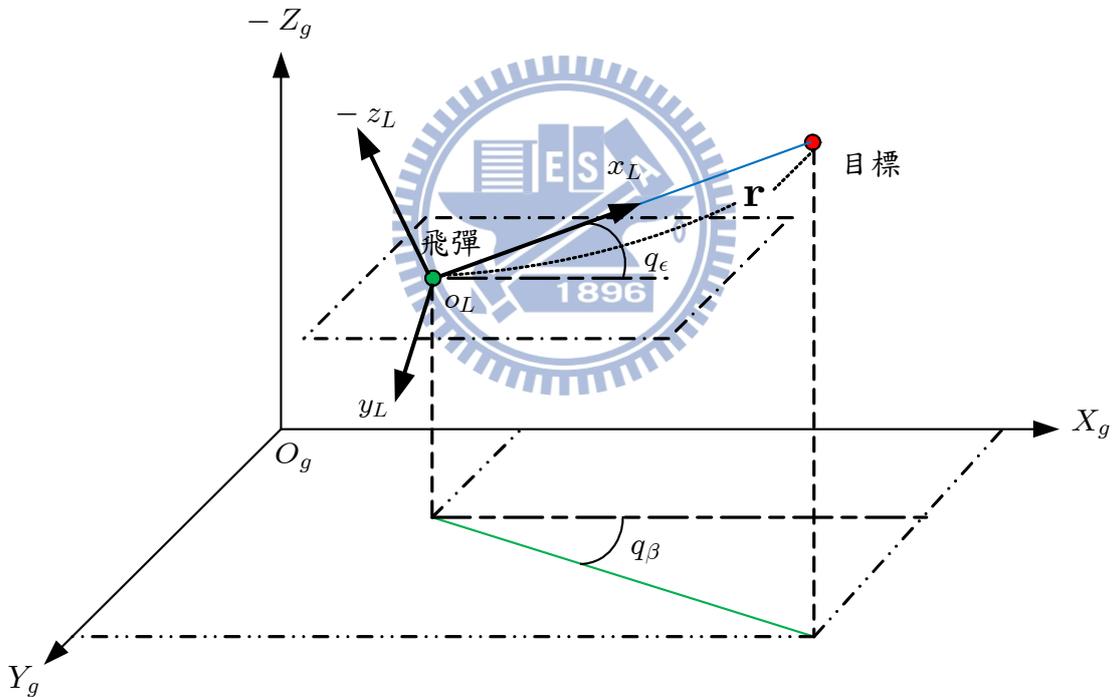


圖 2.4 三維飛彈與目標相對運動示意圖

首先推導出在地面發射座標系下去觀察視線座標系下的角速度 $\omega_r$ ，由前面座標系的說明可以知道視線座標系是由旋轉地面發射座標系得來，第一次轉動方位角 $q_\beta$ ，此時在地面發射座標系下去觀察會產生一個角速度為 $[0 \ 0 \ \dot{q}_\beta]^T$ ，滿足右手

定則。第二次轉動高低角  $q_\epsilon$ ，此時在地面發射座標系下去觀察會產生一角速度  $[0 \ \dot{q}_\epsilon \ 0]^T$ ，但因轉第二次時，第一次轉動產生的角速度必須要乘上一個轉換矩陣轉換成地面發射座標系下的位置，可由下式(2.43)表示整個角速度  $\omega_r$

$$\begin{aligned}\omega_r &= \begin{bmatrix} \cos q_\epsilon & 0 & -\sin q_\epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_\epsilon & 0 & \cos q_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_\epsilon \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_\beta \sin q_\epsilon \\ \dot{q}_\epsilon \\ \dot{q}_\beta \cos q_\epsilon \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.43)$$

接下來可以將地面發射座標系看成在基本動力學內提到的固定座標，以及將視線座標系看成在基本動力學的旋轉座標系，再將原本在視線座標系中的相對距離向量  $\mathbf{r} = [r \ 0 \ 0]^T$  以及其相對速度  $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{r} \ 0 \ 0]^T$  轉成地面發射座標系下的表示方式，因此可以利用式子(2.39)可以得到下式(2.44)

$$\begin{aligned}\frac{d(\mathbf{r})_{O_g X_g Y_g Z_g}}{dt} &= \frac{d(\mathbf{r})_{O_L^x L^y L^z L}}{dt} + \omega_r \times \mathbf{r} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r \dot{q}_\beta \cos q_\epsilon \\ -r \dot{q}_\epsilon \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.44)$$

為了求得其在地面座標系下的相對加速度  $\frac{d(\dot{\mathbf{r}})_{O_g X_g Y_g Z_g}}{dt} = \mathbf{a}_t - \mathbf{a}_m$ ，其中  $\mathbf{a}_t = [a_{tx} \ a_{ty} \ a_{tz}]^T$ 、 $\mathbf{a}_m = [a_{mx} \ a_{my} \ a_{mz}]^T$  皆為在地面發射座標系下觀察的向量，此時應用基礎動力學中的(2.42)式，可得下式(2.45)

$$\begin{aligned}(\ddot{\mathbf{r}})_{O_g X_g Y_g Z_g} &= \dot{\omega}_r \times \mathbf{r} + \omega_r \times (\omega_r \times \mathbf{r}) + 2\omega_r \times (\dot{\mathbf{r}})_{O_L^x L^y L^z L} + (\ddot{\mathbf{r}})_{O_L^x L^y L^z L} \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{q}_\epsilon^2 - r\dot{q}_\beta^2 \cos^2 q_\epsilon \\ 2\dot{r}\dot{q}_\beta \cos q_\epsilon - r\dot{q}_\epsilon \dot{q}_\beta \sin q_\epsilon + r(\ddot{q}_\beta \cos q_\epsilon - \dot{q}_\beta \dot{q}_\epsilon \sin q_\epsilon) \\ - 2\dot{r}\dot{q}_\epsilon - r\dot{q}_\beta^2 \cos q_\epsilon \sin q_\epsilon - r\ddot{q}_\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{tx} - a_{mx} \\ a_{ty} - a_{my} \\ a_{tz} - a_{mz} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.45)$$

整理(2.45)可得下式(2.46)-(2.48)

$$\ddot{r} = r\dot{q}_\epsilon^2 + r\dot{q}_\beta^2 \cos^2 q_\epsilon + a_{tx} - a_{mx}\quad (2.46)$$

$$\ddot{q}_\beta = \frac{1}{r \cos q_\epsilon} (-2\dot{r}\dot{q}_\beta \cos q_\epsilon + 2r\dot{q}_\beta \dot{q}_\epsilon \sin q_\epsilon + a_{ty} - a_{my}) \quad (2.47)$$

$$\ddot{q}_\epsilon = \frac{1}{r} (-2\dot{r}\dot{q}_\epsilon - r\dot{q}_\beta^2 \cos q_\epsilon \sin q_\epsilon + a_{mz} - a_{tz}) \quad (2.48)$$

此即為三維飛彈與目標相對運動模型[29]，其中  $r$  為視線， $q_\epsilon$  為高低角， $q_\beta$  為方位角， $a_{tx}$  為目標視線方向加速度， $a_{ty}$  為目標在視線座標系  $y$  軸方向的加速度， $a_{tz}$  為目標在視線座標系  $z$  軸方向的加速度， $a_{mx}$  為飛彈在視線方向加速度， $a_{my}$  為飛彈在視線座標系  $y$  軸方向的加速度， $a_{mz}$  為飛彈在視線座標系  $z$  軸方向的加速度。

## 2.4 比例導引律介紹

在自動尋的飛彈中，比例導引是一種較常被使用的導引律，因其在實際應用上較容易實現[30]。典型的比例導引是機於以下事情的認可：如果存在兩個逐漸靠近的物體，若兩者之間的視線相對於慣性空間不發旋轉，則最終兩者會交會，確切的說，比例導引律透過其控制命令，使得視線角速率為零，用來對付非機動的目標，如圖 2.5 比例導引示意圖所示，意思為當角度  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$  時，即可達到攔截目標的目的。

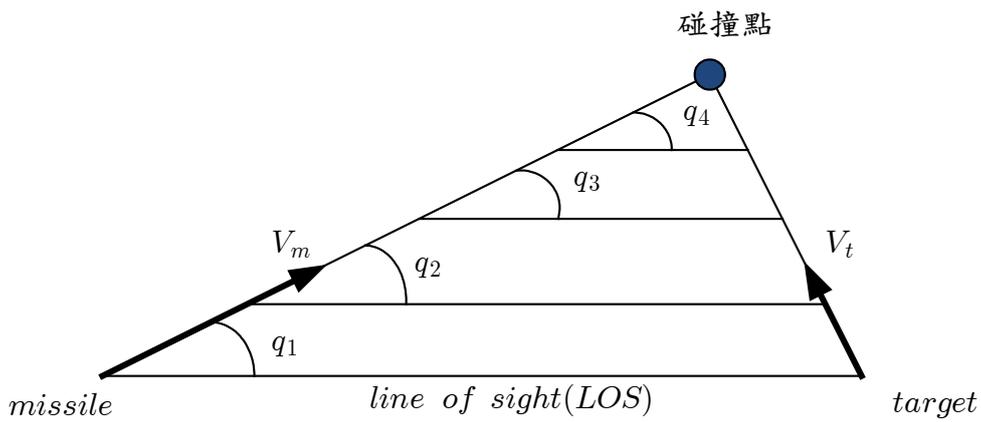


圖 2.5 比例導引示意圖

而為了對付機動的目標，進而發展出了不同型態的比例導引律。在目標無機動的

情況下，比例導引律為了消除可能出現的視線角速率，因此有以下關係式(2.49)[31]

$$\mathbf{a}_m = C\dot{\mathbf{q}} \quad (2.49)$$

其中  $\mathbf{a}_m$  代表加速度指令、 $C$  代表比例因子 (proportionality factor)、 $\dot{\mathbf{q}}$  代表視線變化率，此即為比例導引律的典型式。而其中的比例因子  $C$  因應各種改良的比例導引，舉例說明，如果在真實比例導引(TPN)中則可以寫成  $C = NV_c$ ，因此加速度指令則為  $\mathbf{a}_m = NV_c \times \dot{\mathbf{q}}$  這當中的  $N$  代表比例導引常數，通常選 3~5 之間的整數[21]，而  $V_c$  代表相近速度。其基本上皆為(2.49)式的變形，形式如下

- (1) 純比例導引(PPN)：其施加指令垂直於飛彈的速度方向，且其大小為飛彈速度且與角速度成比例，其形式可寫成  $C = NV_m$ ，其中  $V_m$  為飛彈速度， $N$  為比例導引常數，故指令為  $\mathbf{a}_m = NV_m \times \dot{\mathbf{q}}$ 。
- (2) 真比例導引(TPN)：其施加指令垂直於視線方向，且其大小為初始飛彈目標相對速度且與角速度成比例，其形式可寫為  $C = NV_c$ ，其中  $V_c$  為飛彈目標相對速度， $N$  為比例導引常數，故指令為  $\mathbf{a}_m = NV_c \times \dot{\mathbf{q}}$ 。
- (3) 改進的真比例導引(RTPN)：與真比例導引律不同於其飛彈與目標相對速度會隨時間改變，其  $C = NV_c(t)\mathbf{i}$ ，其中  $\mathbf{i}$  為視線方向的單位向量，故指令為  $\mathbf{a}_m = NV_c(t)\mathbf{i} \times \dot{\mathbf{q}}$
- (3) 增廣比例導引(APN)：此導引律在其導引指令內加入了目標加速度，其加速度指令表示為  $\mathbf{a}_m = C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_t$ ，其中  $\mathbf{a}_t$  為目標加速度指令，故使用增廣比例導引必須對目標做估測。
- (4) 廣義比例導引(generalized PN,GPN)：加速度指令大小與某一向量  $\mathbf{L}$  成一比例且垂直於向量  $\mathbf{L}$ ，其加速度指令為  $\mathbf{a}_m = N\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{q}}$ 。[32]
- (5) 理想比例導引(ideal PN,IPN)：其與廣義比例導引相似，關係類似 RTPN 與 TPN 之間的關係。

以上為各種 PN 的簡介，基本上只有在特別限制條件下，才有可能得到精確的解析解，因此在此舉比例導引方法來解析，其推導過程如下

首先我們要了解零勞誤失(zero-effort miss, ZEM)，定義為當飛彈及目標此時各有一速度，維持此速度且不做任何改變的情況下，一直飛行到最接近的距離時，此距離稱為零勞誤失[21]。參考圖 2.6，假設在目標無機動情況下，飛彈與目標距離碰撞估計時間為 $t_f$ ，此刻飛行時間為 $t$ ，那麼令 $t_{go} = t_f - t$ ，且相對速率為一定要小於零，那麼可以知道 $r(t) \simeq -\dot{r}(t)t_{go}$ 。令 $y(t) = y_t(t) - y_m(t)$ ，其中 $y_t(t)$ 為目標在 $z$ 方向的位置， $y_m(t)$ 為飛彈在 $z$ 方向的位置，因此可知零勞誤失如下式

$$ZEM = y(t_f) = y(t) + \dot{y}(t)t_{go} \quad (2.50)$$

只取 $z$ 軸方向原因是，若能使得一開始 $y = 0$ ，且一直保持零，則必保證會碰撞。

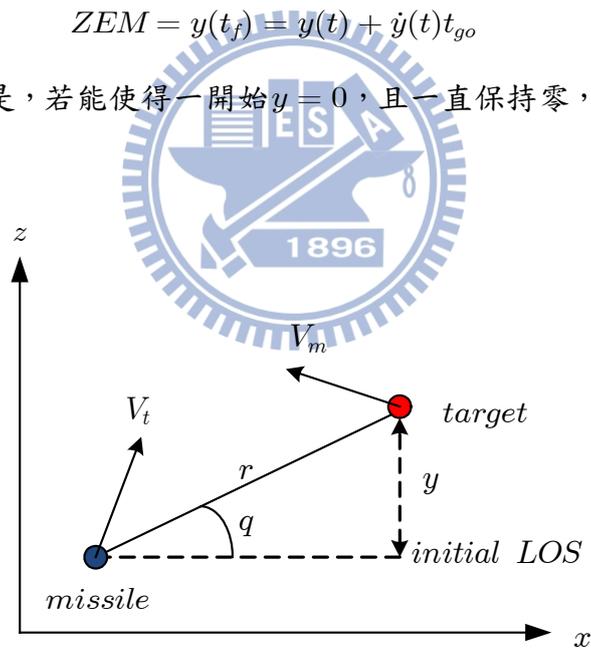


圖 2.6 二維交戰示意圖

而 $y(t)$ 又可表示為 $y(t) = r(t)\sin(q(t))$ ，假若 $q$ 很小，則 $y(t) \simeq r(t)q(t)$ 。接著微分可得下式

$$\dot{y} = \dot{r}q + r\dot{q} \quad (2.51)$$

因此

$$\begin{aligned}
ZEM &= y(t) + [\dot{r}(t)q(t) + r(t)\dot{q}(t)]t_{go} \\
&= rt_{go}\dot{q} \\
&= -\dot{r}t_{go}^2\dot{q}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

現在將透過李雅普諾夫理論，來求證當使用比例導引律時，可以使得零勞誤失會漸進穩定，當 $t \rightarrow \infty$ ，亦即會命中目標。首先令 $V(y, \dot{y}) = y(t_f)^2 > 0$ ，則其 $V$ 對時間微分後為

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2y(t_f)\dot{y}(t_f) \\
&= 2y(t_f)t_{go}\ddot{y}(t)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

其中 $\ddot{y} = \ddot{y}_t - \ddot{y}_m = a_t - a_m$ ，分別為飛彈加速度與目標加速度，因此(2.53)可變為

$$\dot{V} = 2y(t_f)t_{go}(a_t - a_m) \tag{2.54}$$

此時代入比例導引律(2.49)可得下式

$$\dot{V} = 2rt_{go}^2\dot{q}(a_t - C\dot{q}) \tag{2.55}$$

若要滿足 $\dot{V} < 0$ ，在目標無加速度的情況下，必須 $\dot{q}(a_t - C\dot{q}) < 0$ 。因此可知比例導引律可以使得零勞誤失當 $t \rightarrow \infty$ 時收斂到零。而目標有加速度的情況下則不一定。

## 第 3 章

# 積分型順滑模控制技術應用於導引律設計

### 3.1 問題描述

積分型順滑模技術中的  $u_0$  擁有設計自由度，讓設計者可選取在無干擾系統時設計的導引律作為  $u_0$ ，但實際情況中，目標可能會出現加速度，因此將目標加速度加入考慮，考慮情況1)有目標估測則可將目標加速度看成估測加速度以及估測誤差，此時會將估測值加在  $u_0$  內，估測誤差當成干擾，考慮情況2)當無目標估測時則將目標加速度都當成干擾，針對前述兩種情況皆可利用積分型順滑模技術的控制器  $u_1$  來抵抗干擾，使得受干擾系統之閉迴路狀態響應與無干擾系統之閉迴路狀態響應相近，其中主要目的為讓相對距離為零。首先先假設在以下條件情況中：

- (1) 飛彈在攔截末端，無視線方向加速度，後方推進器已燃燒完畢
- (2) 目標無視線方向加速度

其中假設(2)是為了後續推導方便假設的，目標也可有視線方向加速度，只是在此假設此方向無加速度。

因此將三維飛彈與目標相對運動模型(2.46)-(2.48)式改寫如下

$$\ddot{r} = r\dot{q}_\epsilon^2 + r\dot{q}_\beta^2 \cos^2 q_\epsilon \quad (3.1)$$

$$\ddot{q}_\beta = \frac{1}{r \cos q_\epsilon} (-2\dot{r}\dot{q}_\beta \cos q_\epsilon + 2r\dot{q}_\beta \dot{q}_\epsilon \sin q_\epsilon + a_{ty} - a_{my}) \quad (3.2)$$

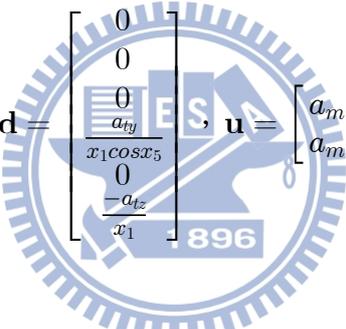
$$\ddot{q}_\epsilon = \frac{1}{r} (-2\dot{r}\dot{q}_\epsilon - r\dot{q}_\beta^2 \cos q_\epsilon \sin q_\epsilon + a_{mz} - a_{tz}) \quad (3.3)$$

其中  $r$  為視線， $q_\epsilon$  為高低角， $q_\beta$  為方位角， $a_{ty}$  為目標在視線座標系  $y$  軸方向的加速度， $a_{tz}$  為目標在視線座標系  $z$  軸方向的加速度， $a_{my}$  為飛彈在視線座標系  $y$  軸方向的加速度， $a_{mz}$  為飛彈在視線座標系  $z$  軸方向的加速度。為了方便計算，現在令式(3.1)-(3.3)用  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6] = [r \ \dot{r} \ q_\beta \ \dot{q}_\beta \ q_\epsilon \ \dot{q}_\epsilon]$  取代可得下式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \quad (3.4)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_6^2 + x_1 x_4^2 \cos^2 x_5 \\ x_4 \\ -\frac{2}{x_1} x_2 x_4 + 2x_4 x_6 \tan x_5 \\ x_6 \\ -\frac{2}{x_1} x_2 x_6 - x_4^2 \sin x_5 \cos x_5 \end{bmatrix}, \quad G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{x_1 \cos x_5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix}$$



$$G(\mathbf{x})\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_{ty}}{x_1 \cos x_5} \\ 0 \\ \frac{-a_{tz}}{x_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_{my} \\ a_{mz} \end{bmatrix}$$

若無加入目標加速度估測，則可將目標加速度當為  $\mathbf{d}$ ，若有加入目標加速度估測則可將  $\mathbf{d}$  設計成  $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{d}} + \Delta\mathbf{d}$ ，其中  $\hat{\mathbf{d}}$  為估計值， $\Delta\mathbf{d}$  為誤差值，後續推導會採用  $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{d}} + \Delta\mathbf{d}$  的型式。

## 3.2 導引律設計

由第二章可以知道，在設計非線性系統的積分型順滑模控制器可分為兩個程序，程序一為設計適當的順滑面，程序二為設計適當積分型順滑模控制律  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，首先討論  $\mathbf{u}_0$ ，在第二章中有提到，在設計  $\mathbf{u}_0$  時，會假設  $\mathbf{u}_0$  是為了讓無干擾系統之閉迴路狀態響應為漸近穩定，但本章節中所選取的  $\mathbf{u}_0$  並無讓閉迴

路系統狀態響應為漸進穩定的要求，而只需滿足導引律在無干擾系統中的限制條件，且在限制條件下能讓無干擾系統系之閉迴路狀態響應為穩定且能讓相對距離  $r$  為零，因此在積分型順滑模導引律設計中不加入此假設條件。而  $\mathbf{u}_1$  則用來對付模型不確定性或外在干擾使受干擾系統與未受干擾之系統的性能表現一樣。首先針對式子(3.4)加入如下一個假設：

**假設 3.1：**

存在  $\rho(\mathbf{x}, t)$  使得  $\|\Delta \mathbf{d}\|_2 \leq \rho(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6, \forall t \in \mathbb{R}$ ，其中  $\rho: \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為一連續的非負函數。此假設意即可知目標加速度最大值為何。

**假設 3.2：**

存在  $D \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$  使得對任何的非零狀態  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ ， $DG(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  為可逆矩陣 (nonsingular matrix)。觀察  $G$  可知其  $x_1$  為零時即代表擊中目標，且假設  $x_3$  不會發生 90 度的情況，則滿足此假設條件。

• 程序一：設計順滑面

根據積分型順滑模控制設計程序，首先選取積分順滑面如下式(3.5)：

$$\mathbf{s} = D\{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + G(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_0] d\tau\} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

其中  $D$  滿足假設 3.2，在此選取形式如下(3.6)式

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

• 程序二：設計控制律

如同第二章所述，可分成兩個步驟

• 步驟一： $\mathbf{u}_0$ 設計

在設計 $\mathbf{u}_0$ 時，可依工程師所希望的效能選擇其適當的導引律，但為了說明積分型順滑模技術，在本研究中將先選用真比例導引當作 $\mathbf{u}_0$ ，原因為真比例導引律其控制命令方向洽與視線方向垂直，也與前述所提的式子(3.4)中所假設的 $\mathbf{d}$ 互相呼應，即皆無視線方向的飛彈加速度。

現在將順滑面(3.5)式對時間取導函數，且將 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 代入可得下式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= D[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \mathbf{d}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})\mathbf{u}_0] \\ &= DG(\mathbf{x})(\mathbf{u}_1 + \mathbf{d})\end{aligned}\quad (3.7)$$

由(3.7)式可知，若考慮目標有加速度機動，且存在估測誤差 $\Delta\mathbf{d}$ ，那麼在控制律 $\mathbf{u}_0$ 須再加上目標加速度估測 $\hat{\mathbf{d}}$ 。

• 步驟二： $\mathbf{u}_1$ 設計

觀察(3.7)式，若此時目標有加速度，而飛彈對目標進行估測，因此可得估測值與誤差值，與前述相同可寫成 $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{d}} + \Delta\mathbf{d}$ 。為了使系統維持在順滑面上，亦即使閉迴路系統用真比例導引律做控制，因此設計 $\mathbf{u}_1$ 如下形式：

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} & , \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases}\quad (3.8)$$

其中 $\rho(\mathbf{x}, t) > \rho_m(\mathbf{x}, t)$ ，為了證明 $\mathbf{u}_1$ 設計成(3.8)式的可行性，因此令在某個時間瞬間 $\dot{\mathbf{s}}_1 \neq \mathbf{0}$ ，並將式子(3.8)代入(3.7)式可得下式

$$\dot{\mathbf{s}} = DG(\mathbf{x}) \left( -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + \Delta\mathbf{d} \right)\quad (3.9)$$

透過李雅普諾夫理論，令(3.7)可能的李雅普諾夫函數為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，則 $V$ 對時間 $t$ 的導函數為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}\quad (3.10)$$

將(3.9)式代入(3.10)式可得下式(3.11)

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T DG(\mathbf{x}) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + \mathbf{s}^T DG(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{d} \quad (3.11)$$

利用假設 3.2 可將(3.11)式整理成如下

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2^2}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + \mathbf{s}^T DG(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{d} \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 + \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \|\Delta \mathbf{d}\|_2 \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 + \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \|\rho_m(\mathbf{x}, t)\| \\ &= \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 [-\rho(\mathbf{x}, t) + \rho_m(\mathbf{x}, t)] < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

由李雅普諾夫理論可知，每當閉迴路系統軌跡偏離順滑面後，會立即趨近順滑面，亦即若使用導引律  $\mathbf{u}_0$  時，此時目標產生機動加速度，則  $\mathbf{u}_1$  會加入控制抵抗目標產生的機動加速度，使得系統狀態仍然與目標無加速度時相近。因為順滑面的設計型式，僅會得到  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$  之值，故對(3.7)式使用(3.8)式控制後的順滑變數  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  所對應的閉迴路動態系統(3.9)式來說必成立  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 。

由以上步驟一與步驟二，最後的積分型順滑模控制導引律為  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 。

接著要證明閉迴路系統軌跡一直保持在順滑面上時其對應的順滑動態 (sliding dynamics) 之穩定度；先假設閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$  時，閉迴路系統  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}$  的軌跡為  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t)$ ，而此時的

$$\dot{\mathbf{s}} = DG(\mathbf{x}_d)[\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{u}_0] = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

其中  $DG(\mathbf{x}_d)$  為可逆或列滿秩，求解(3.13)式，故可得當系統軌跡保持在順滑面上時的等效控制律

$$\mathbf{u}_{eq} = -\mathbf{d} + \mathbf{u}_0 \quad (3.14)$$

接著把(3.14)式代入原始動態系統(3.4)式後可得

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) + G(\mathbf{x}_d)\mathbf{u}_0 \quad (3.15)$$

觀察(3.15)式，可發現其動態系統即為原始動態系統(3.4)使用  $\mathbf{u}_0$  控制後的閉迴路

無干擾系統，因此，當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其動態行為確實等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統之響應。

### 3.3 模擬驗證

考慮三維飛彈與目標相對運動模型，初始距離 14142(公尺)、初始相對速率 -3550(公尺/秒)、初始方位角-0.7854(弧度)、初始方位角速率 0.0294(弧度/秒)、初始高低角 0(弧度)、初始高低角速率-0.0222(弧度/秒)。為了驗證積分型順滑模導引律，因此將 $\mathbf{u}_0$ 選用真比例導引律並加入估測值寫成下式(3.16)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m &= NV_c(t)\mathbf{i} \times \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{d}} \\ &= \begin{bmatrix} -Nx_2x_4\cos x_5 \\ Nx_2x_6 \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $N=4$ 為比例導引常數、 $V_c$ 為相對速度、 $\mathbf{i}$ 為視線方向的單位向量、 $\dot{\mathbf{q}}$ 為角速度即(2.43)式。為了避免切跳現象，將式子(3.8)改為下式(3.17)

$$\mathbf{u}_1 = -\rho \frac{(DG(\mathbf{x}_1))^T \mathbf{s}_1}{\|(DG(\mathbf{x}_1))^T \mathbf{s}_1\|_2 + \epsilon_1} \quad (3.17)$$

$D$ 的選取如(3.6)式， $\rho = 100$ 、 $\epsilon_1 = 10^{-6}$ 。其中 $\rho$ 的選取原因為下面的目標加速度最大值為 $10g$ ，其中 $g = 9.8 (m/s^2)$ 。

**情況：**目標加速度之估測存在有估測誤差。目標加速度在 $y$ 與 $z$ 方向皆為 $10g \times \sin(10t)$ ，假設估測誤差為大小 $5g$ 的隨機訊號，可得到圖 3.1 到圖 3.3，圖 3.1 與圖 3.2 分別有三種情景(i)使用真比例導引律在目標無估測誤差時，使用代號為 $RTPN$ ，顏色為藍色(ii)使用真比例導引律在目標有估測誤差時，使用代號為 $aRTPN$ ，顏色為黑色(iii)使用積分型順滑模導引律在目標有估測誤差時，代號為 $aISMC$ ，顏色為紅色。當距離小於 0.1 公尺時會停止模擬。

由圖 3.1 可知使用 ISMC 控制在目標有估測誤差時的狀態與 RTPN 控制在目

標無估測誤差時的狀態相近，與前面所推的理論相符合。圖 3.2 可以發現控制力道在 3.5 秒左右出現抖動的情形，原因是因為相對距離在分母且大小變小，使得原本的  $u_1$  影響變大。圖 3.3 可知在 3.8 秒內都滿足在  $\epsilon_1$  的範圍內，但超過 3.8 秒時則會突然超過，原因也是因為相對距離變小。

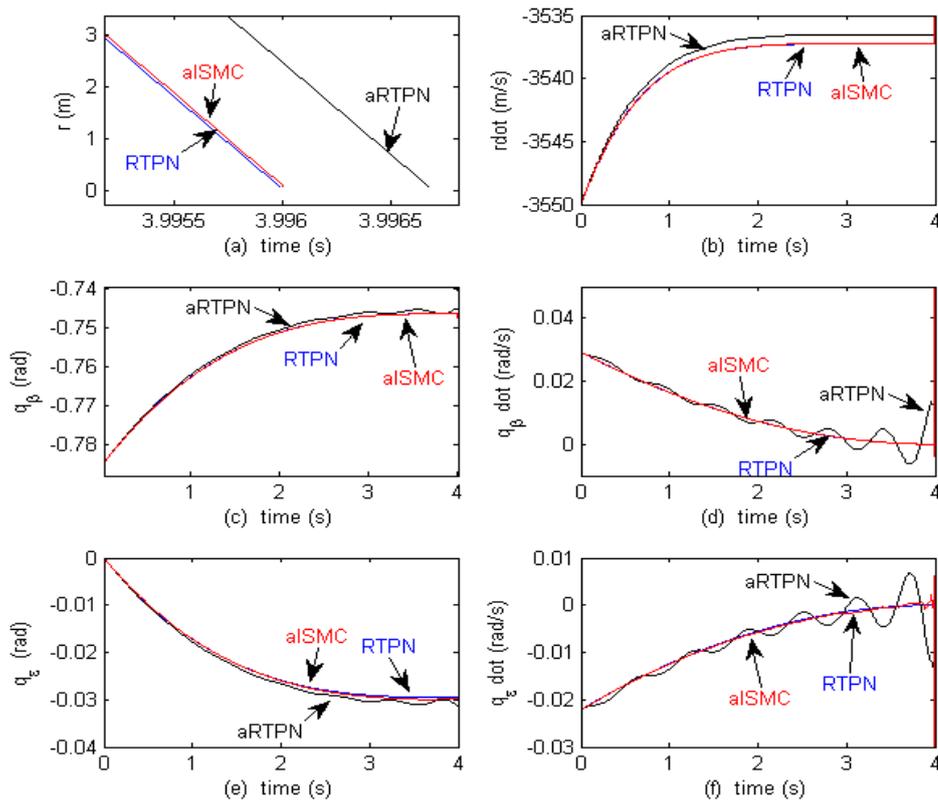


圖 3.1 具干擾之導引律的六個狀態比較圖

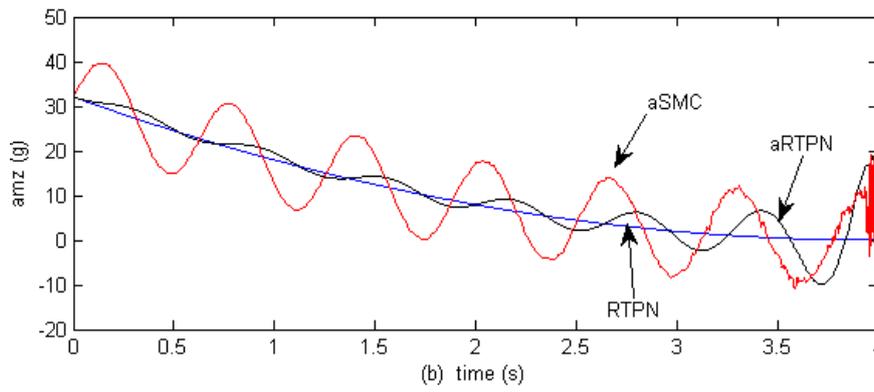
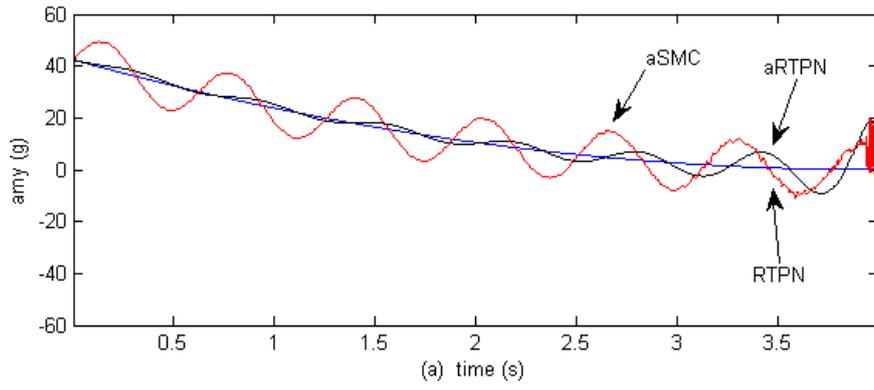


圖 3.2 具干擾之加速度控制力道比較圖(a) $y$ 方向(b) $z$ 方向

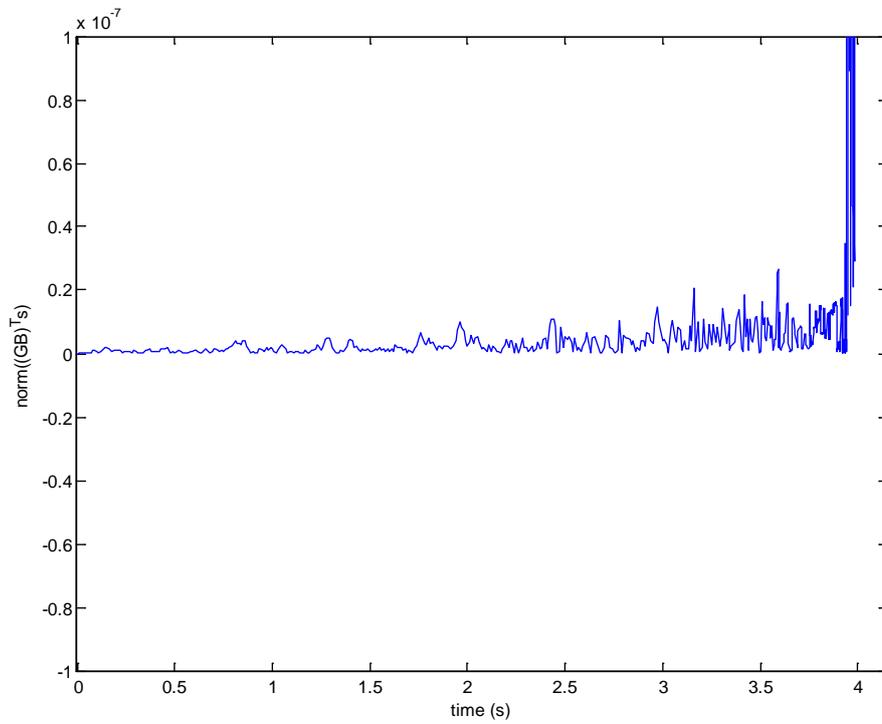


圖 3.3 ISMC 導引律之 $\|(GB)^Ts\|$ 大小圖

## 第4章

# 順滑模控制技術應用於具加速度延遲之導引律設計

### 4.1 問題描述

在真實的飛彈系統中，下達加速度指令會經過飛行控制系統 (flight control system)，因此會造成時間延遲的現象，此現象可能會造成飛彈攔截目標失敗[21]，因此如果能在設計導引律時，將時間延遲的問題一起考慮，那麼將會提高飛彈成功攔截的機率。飛彈迴路如圖 4.1 飛彈迴路示意圖

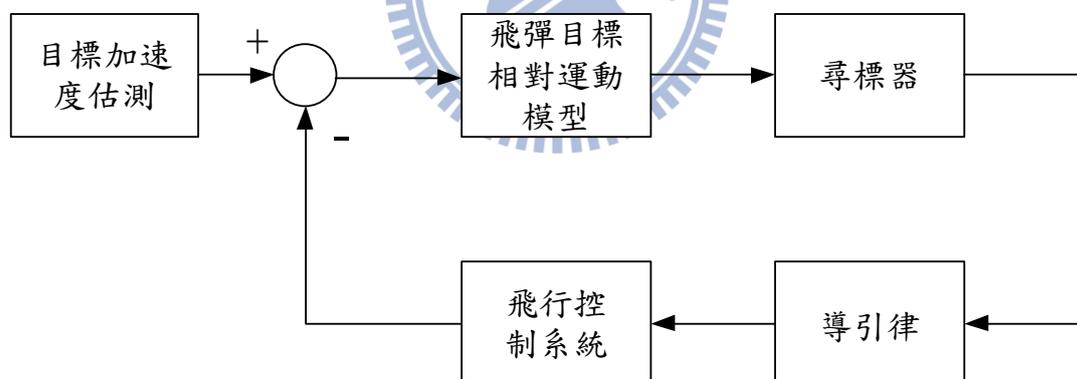


圖 4.1 飛彈迴路示意圖

在飛行控制系統這方塊中，會有一時間延遲產生，為了將飛彈加速度時間延遲加入到飛彈與目標相對運動模型(3.1)-(3.3)中，首先將時間延遲關係表示如下

$$\dot{a}_{my} = \frac{1}{T_a}(a_{myc} - a_{my}) \quad (4.1)$$

$$\dot{a}_{mz} = \frac{1}{T_b}(a_{mzc} - a_{mz}) \quad (4.2)$$

其中  $a_{myc}$  為  $y$  方向控制命令， $a_{mzc}$  為  $z$  方向控制命令， $T_a$  為  $y$  方向控制命令到達實際控制力道時的時間延遲常數， $T_b$  為  $z$  方向控制命令到達實際控制力道時的時間延遲常數。在此將式子 (4.1)(4.2) 與 (3.1)-(3.3) 式結合，並令  $\mathbf{x}_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6] = [r \ \dot{r} \ q_\beta \ \dot{q}_\beta \ q_\epsilon \ \dot{q}_\epsilon]$ ， $\mathbf{x}_2 = [x_7 \ x_8]^T = [a_{my} \ a_{mz}]^T$ ， $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^T$ ，因此改寫成下列形式(4.3)(4.4)

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + G(\mathbf{x}_1)\mathbf{d} \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + T\mathbf{u}_c \quad (4.4)$$

其中

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_6^2 + x_1 x_4^2 \cos^2 x_5 \\ -\frac{2}{x_1} x_2 x_4 + 2x_4 x_6 \tan x_5 - \frac{x_7}{x_1 \cos x_5} \\ -\frac{2}{x_1} x_2 x_6 - x_4^2 \sin x_5 \cos x_5 + \frac{x_8}{x_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} -x_7 \\ T_a \\ -x_8 \\ T_b \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{x}_1)\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_{ty}}{x_1 \cos x_5} \\ 0 \\ -\frac{a_{tz}}{x_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} a_{myc} \\ a_{mzc} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_b} \end{bmatrix}$$

若考慮估測則  $a_{ty} = \hat{a}_{ty} + d_y$ 、 $a_{tz} = \hat{a}_{tz} + d_z$ 、其中  $\hat{a}_{ty}$ 、 $\hat{a}_{tz}$  為估測值， $d_y$ 、 $d_z$  為誤差值。式子(4.3)(4.4)即為加入時間延遲的飛彈與目標相對運動模型。接下來將利用滑模控制技術解決時間延遲的問題。

## 4.2 導引律設計

本小節將討論飛彈與目標相對運動模型的順滑模導引律設計，利用上敘述式子(4.3)(4.4)，再透過 2.1 節所談論的順滑模控制技術來設計導引律。在此先加入

假設

**假設 4.1 :**

$\|G(\mathbf{x}_1)\mathbf{d}\|_2 \leq \kappa(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}$ 。此假設代表已知目標加速度最大值。

首先設計一順滑面，在此順滑面選取如下式(4.5)

$$\mathbf{s} = \phi(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_2 \quad (4.5)$$

其中順滑面中的 $\phi(\mathbf{x}_1)$ 可選擇針對無干擾系統設計的導引律，而 $\mathbf{x}_2$ 則為前面敘述的 $[a_{my} \ a_{mz}]^T$ ，若當順滑面為零時，代表閉迴路系統用一控制命令 $\mathbf{u}_c$ ，使得系統中的狀態 $[a_{my} \ a_{mz}]^T$ 與 $\phi(\mathbf{x}_1)$ 相同，即等同於當控制命令經過飛行控制系統後的指令為 $\phi(\mathbf{x}_1)$ ，在本研究中模擬時將先使用真比例導引律作為 $\phi(\mathbf{x}_1)$ 。接下來設計控制律，由前面 2.1 節可知有兩步驟，第一步驟為設計 $\mathbf{u}_0$ ，步驟二為設計 $\mathbf{u}_1$ ，因此令順滑模控制律形式為 $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_{c0} + \mathbf{u}_{c1}$ 。其中 $\mathbf{u}_{c0} = [a_{myc0} \ a_{mzc0}]^T$ 、 $\mathbf{u}_{c1} = [a_{myc1} \ a_{mzc1}]^T$ 。

步驟一：設計 $\mathbf{u}_{c0}$

現在將順滑面取導函數，亦即對(4.5)取導函數可得下式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 \\ &= \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + G(\mathbf{x}_1)\mathbf{d}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - T\mathbf{u}_c \end{aligned} \quad (4.6)$$

此時先不考慮 $\mathbf{u}_{c1}$ ，亦即 $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_{c0}$ 時。設計 $\mathbf{u}_{c0}$ 是為了將已知其確切形式項刪除，因此可設計如下式

$$\mathbf{u}_{c0} = T^{-1} \left[ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right] \quad (4.7)$$

將(4.7)代入 $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_{c0} + \mathbf{u}_{c1}$ 後，再代入(4.6)可得下式

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} G(\mathbf{x}_1) \mathbf{d} - T \mathbf{u}_{c1} \quad (4.8)$$

步驟二：設計  $\mathbf{u}_{c1}$

假設此時  $\dot{\mathbf{s}} \neq 0$ ，那麼可設計  $\mathbf{u}_{c1}$  如下式

$$\mathbf{u}_{c1} = T^{-1} (\eta + \kappa(\mathbf{x}, t) \|\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}\|) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) \quad (4.9)$$

其中要滿足假設 4.1、而  $\eta$  為一待設計常數。將(4.9)代入(4.8)可得下式

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} G(\mathbf{x}_1) \mathbf{d} - (\eta + \kappa(\mathbf{x}, t) \|\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}\|) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) \quad (4.10)$$

為了證明式子(4.9)的可行性，將使用李雅普諾夫理論，首先令李雅普諾夫函數

$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，將  $V$  對時間取導函數並利用假設 3.1 及柯西-史瓦茲不等式可推導如下

式(4.11)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \left[ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} G(\mathbf{x}_1) \mathbf{d} - (\eta + \kappa(\mathbf{x}, t) \|\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}\|) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) \right] \\ &\leq \mathbf{s}^T \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} G(\mathbf{x}_1) \mathbf{d} - (\eta + \kappa(\mathbf{x}, t) \|\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}\|) \|\mathbf{s}\|_2 \\ &\leq \|\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}\|_2 \|G(\mathbf{x}_1) \mathbf{d}\|_2 \|\mathbf{s}\|_2 - (\eta + \kappa(\mathbf{x}, t) \|\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}\|) \|\mathbf{s}\|_2 \\ &\leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

由(4.11)式可知，若順滑面不為零，則可經由  $\mathbf{u}_{c1}$  的控制，使閉迴路系統  $\mathbf{s}$  趨近於零。

### 4.3 模擬驗證

建立 simulink 目的是為了模擬飛彈運行的方式，還可以清楚了解飛彈與目標相對運動模型與導引律及時間延遲的關係，可以參考圖 4.2

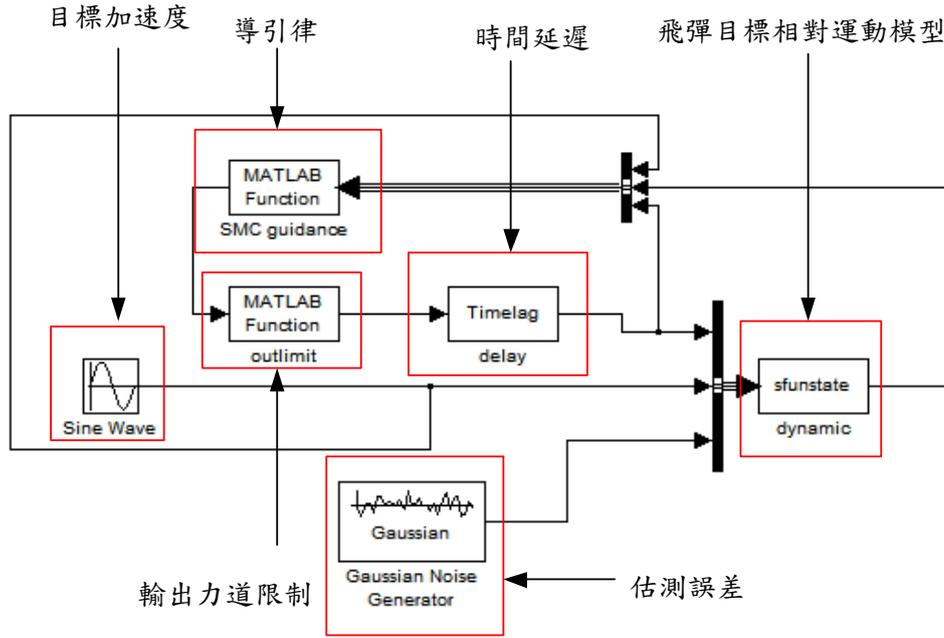


圖 4.2 simulink 方塊示意圖

考慮飛彈與目標相對運動模型，初始距離 14142(公尺)、初始相對速率 -3550(公尺/秒)、初始方位角-0.7854(弧度)、初始方位角速率 0.0294(弧度/秒)、初始高低角 0(弧度)、初始高低角速率-0.0222(弧度/秒)。順滑模導引率控制參數選取如下：

首先選取真比例導引律做為模擬的  $\phi(\mathbf{x}_1)$ ，由式子(4.7)與(4.9)可得下式

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_{c0} + \mathbf{u}_{c1} \quad (4.12)$$

其中

$$\mathbf{u}_{c0} = T^{-1} \begin{bmatrix} -Nx_2x_4x_6^2\cos x_5 - Nx_1x_4^3(\cos x_5)^3 + \frac{2N}{x_1}(x_2^2x_4\cos x_5) \\ Nx_1x_6^3 + Nx_1x_4^2(\cos x_5)^2x_6 - \frac{2N}{x_1}(x_2^2x_6) - Nx_2x_4^2\sin x_5\cos x_5 \\ - 2Nx_2x_4x_6\sin x_5 - \frac{Nx_2}{x_1}(a_{ty} - x_7) + Nx_2x_4x_6\sin x_5 + \frac{1}{T}x_7 \\ - \frac{Nx_2}{x_1}(a_{tz} - x_8) + \frac{1}{T}x_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{c1} = T^{-1} \left( \eta + \kappa \left\| \frac{Nx_2}{x_1} \right\|_2 \right) \begin{bmatrix} \text{sgn}(s_{21}) \\ \text{sgn}(s_{22}) \end{bmatrix}, \mathbf{s}_2 = [s_{21} \ s_{22}]^T, N = 4$$

為了避免切跳現象，將式子(4.12)中的  $\mathbf{u}_{c1}$  改為下式(4.13)

$$\mathbf{u}_{c1} = T \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{ll} (1 + 80 \frac{|x_2|}{x_1})^{\frac{s_{21}}{\epsilon_y}} & \text{if } s_{21} < \epsilon_y \\ (5000 + 80 \frac{|x_2|}{x_1}) \text{sgn}(s_{21}) & \text{else} \end{array} \right. & \\ \left\{ \begin{array}{ll} (1 + 80 \frac{|x_2|}{x_1})^{\frac{s_{22}}{\epsilon_z}} & \text{if } s_{22} < \epsilon_z \\ (1000 + 80 \frac{|x_2|}{x_1}) \text{sgn}(s_{22}) & \text{else} \end{array} \right. & \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

其中  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$ 。  $\eta$  在  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$  內時，因所需力道較小， $\eta$  選為 1。而在尚未進入  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$  時  $\eta$  一個選 5000 一個選 1000 是因為不同順滑面，使其上到順滑面速度不同，故選取大小不同。而與在  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$  內所選取的  $\eta = 1$  比較，可知在  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$  外較大是為了使其較快上到順滑面上。

目標與相對運動模型模擬情況：

**情況 1：**在此考慮目標有加速度  $a_y = a_z = 14g \times \sin(t)$  當時間延遲  $T = 0.3$  並加入估測誤差  $d_y = d_z = 1g$  大小的隨機訊號，其中  $g = 9.8(m/s^2)$ 。模擬結果歸納於圖 4.3 到圖 4.7 模擬中考慮三種情景：(i) 使用 RTPN 導引律於無時間延遲知飛彈與目標相對運動模型（在模擬圖中以 nolagRTPN 標示，顏色為藍色），(ii) 使用 RTPN 導引律於加入時間延遲知飛彈與目標相對運動模型（在模擬圖中以 lagRTPN 標示，顏色為黑色），(iii) 使用本論文所設計的導引律應用在有時間延遲知飛彈與目標相對運動模型中（在模擬圖中以 lagSMC 標示，顏色為紅色）。模擬時設定當距離小於 0.1 公尺時停止，且有設控制加速度大小限制為 60g。

模擬結果為模擬圖 4.3 到圖 4.7，由圖 4.3(a) 可以知道使用 RTPN 導引律在三維飛彈與目標相對運動模型中，其最小相對距離，亦即誤失距離，可以看見在 4.0085 秒時大概為 1.8 公尺，而使用 SMC 導引律則仍然與使用 RTPN 在無時間延遲的飛彈與目標相對運動模型相似，只是時間較晚，原因為時間延遲的關係。接下來圖 4.3(b)-(f) 可知使用 SMC 導引律其狀態曲線與使用 RTPN 導引律在無時間延遲飛彈與目標相對運動模型時相近。而圖 4.4 到圖 4.7 可發現有一轉折點出現在 0.4 秒左右，其原因是當順滑變數已經小於  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$ ，其控制命令所使用的  $\eta$  變成了 1。觀察圖 4.4 與圖 4.6 可發現加速度指令末段有抖動現象，其造成原

因為模擬時控制命令使用飽和型函數取代，而此時相對距離變小，造成雜訊影響變大，故產生此抖動現象。圖 4.5 與圖 4.7 的抖動現象是由假設的估測誤差所造成的。

**情況 2:** 在此考慮目標有加速度  $a_y = a_z = 14g \times \sin(t)$  且時間延遲  $T = 1$  且有估測誤差  $d_y = d_z = 1g$  大小的隨機訊號。模擬結果歸納於圖 4.8 到圖 4.12 模擬中考慮三種情景：(i) 使用 RTPN 導引律於無時間延遲知飛彈與目標相對運動模型（在模擬圖中以 nolagRTPN 標示，顏色為藍色），(ii) 使用 RTPN 導引律於加入時間延遲知飛彈與目標相對運動模型（在模擬圖中以 lagRTPN 標示，顏色為黑色），(iii) 使用本論文所設計的導引律應用在有時間延遲知飛彈與目標相對運動模型中（在模擬圖中以 lagSMC 標示，顏色為紅色）。模擬時設定當距離小於 0.1 公尺時停止，且有設控制加速度大小限制為 60g。

情況 2 的模擬結果可由圖 4.8 到圖 4.12 表示，這與情況 1 的情形只差在時間延遲從 0.3 秒變成 1 秒。首先看到圖 4.8，可發現相對距離要為零的目的在僅使用 RTPN 是無法辦到的，而使用本研究所設計的 SMC 導引律，可發現達到命中目標的目的，因此可知 SMC 導引律在有時間延遲的情況下優於 RTPN 導引律。接著看到圖 4.9 與圖 4.10，發現圖中在 1.55 秒左右時有一轉折點，原因是因為順滑變數已經進入  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$ ，其控制命令  $\mathbf{u}_1$  所使用的  $\eta$  從 5000 變成了 1。圖 4.11 與圖 4.12 具時間延遲  $T = 1$  (a)  $a_{mz}$  方向順滑變數 (b) 順滑變數之放大圖中的出現轉折點原因也相同。可由圖 4.9 與圖 4.11 發現加速度命令在時間 3.8 秒時有抖動的情形，原因是控制命令  $\mathbf{u}_1$  用飽和型函數取代，當系統雜訊分母的相對距離隨著時間變小，其影響力漸漸變大。圖 4.10 與圖 4.12 可知其順滑變數在進入  $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$  的範圍內後，皆在範圍內直到最後一刻才會超出。

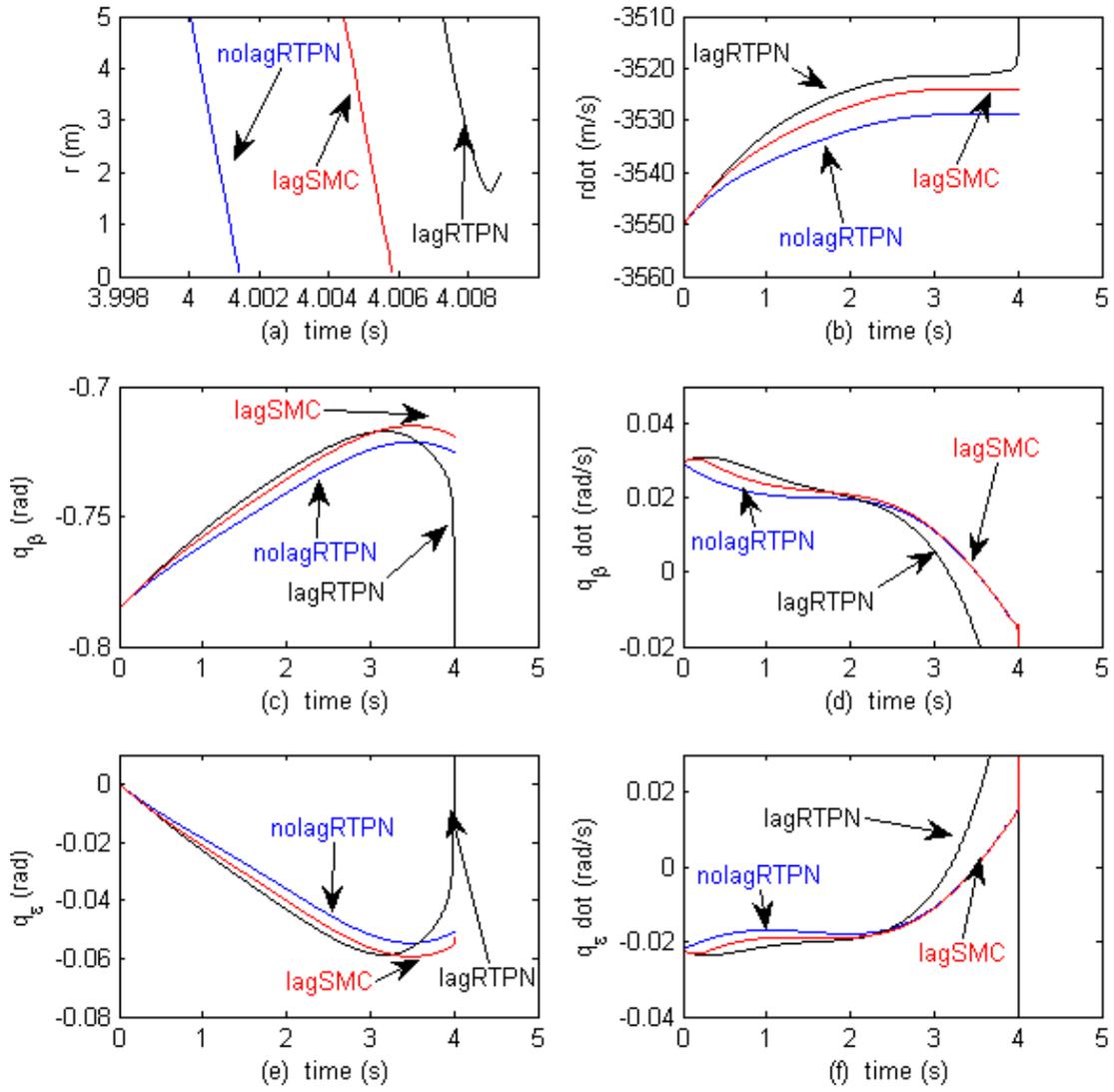


圖 4.3 具時間延遲  $T = 0.3$  時導引律六個狀態比較圖

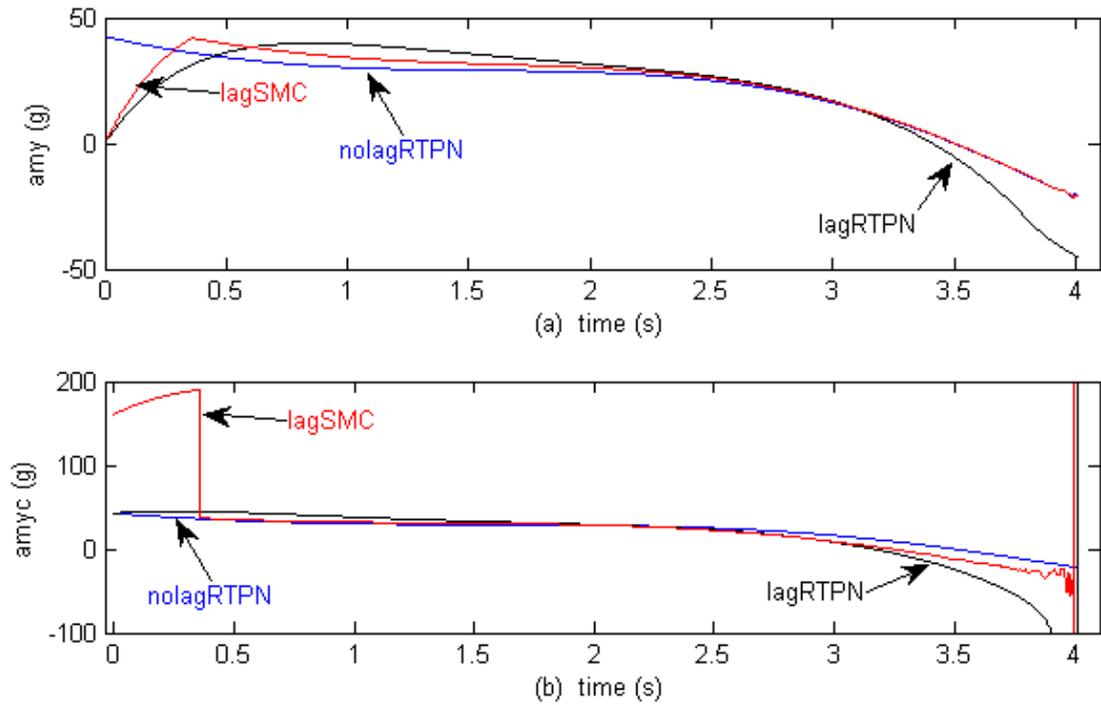


圖 4.4 具時間延遲  $T=0.3$  的  $a_{my}$  方向 (a) 實際加速度 (b) 加速度命令

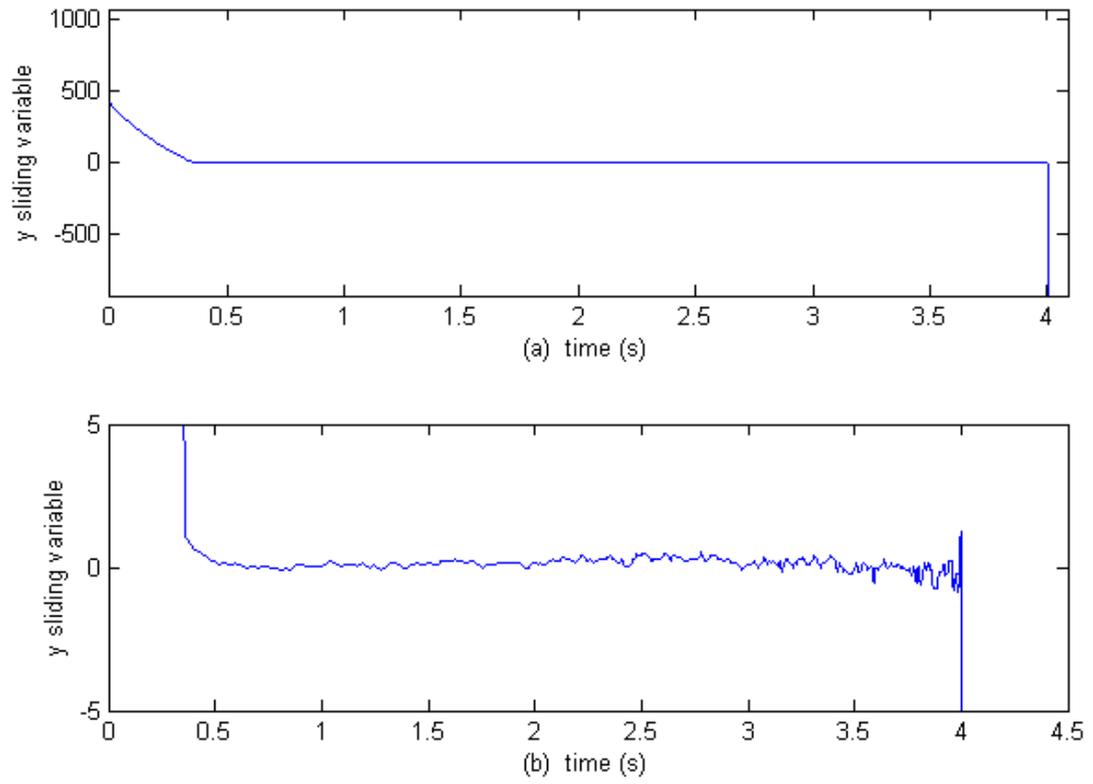


圖 4.5 具時間延遲  $T=0.3$  時 (a)  $a_{my}$  方向之順滑變數 (b) 順滑變數之放大圖

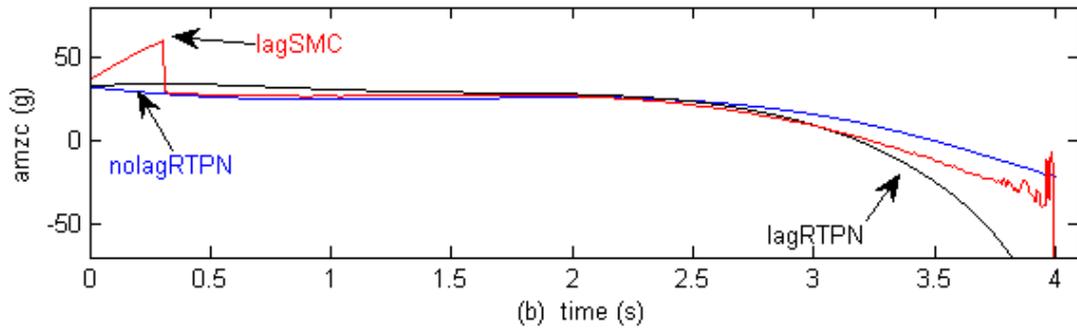
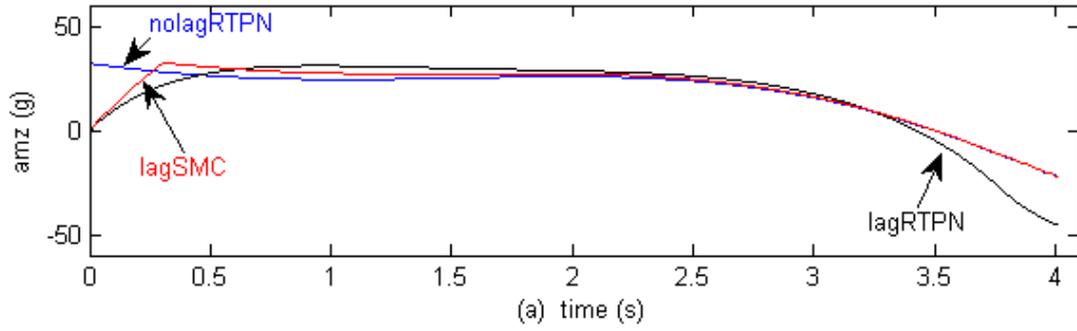


圖 4.6 具時間延遲  $T = 0.3$  時  $a_{mz}$  方向比較圖 (a) 實際加速度 (b) 加速度命令

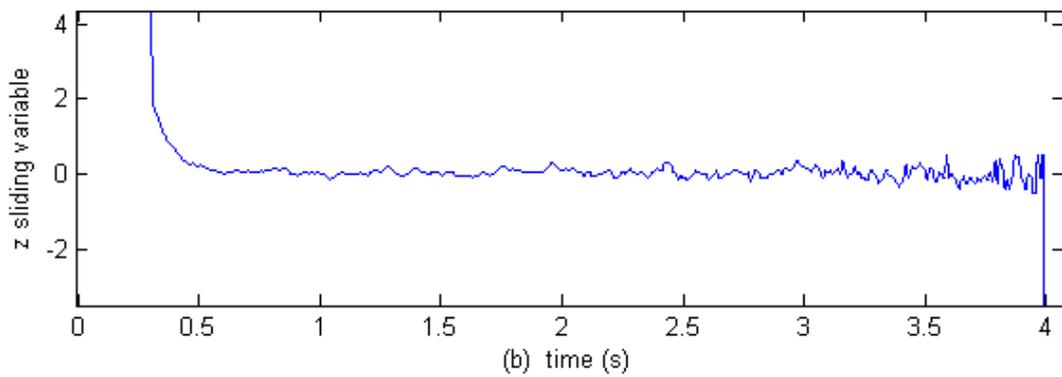
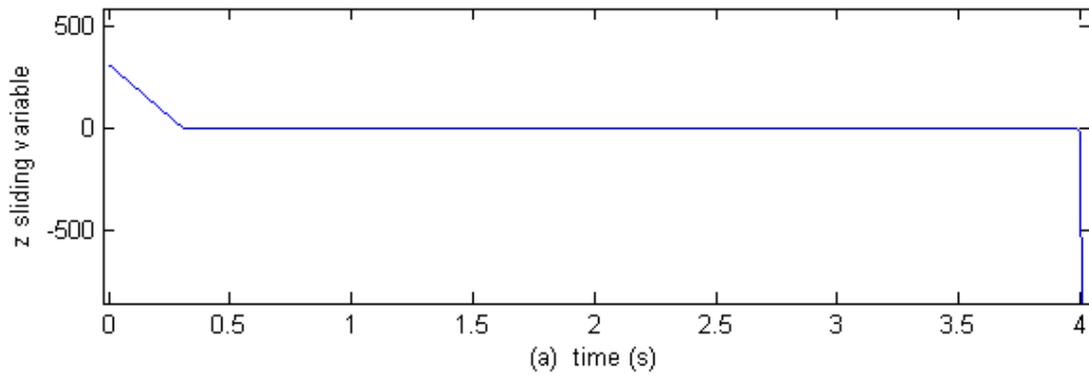


圖 4.7 具時間延遲  $T = 0.3$  (a)  $a_{mz}$  方向之順滑變數 (b) 順滑變數之放大圖

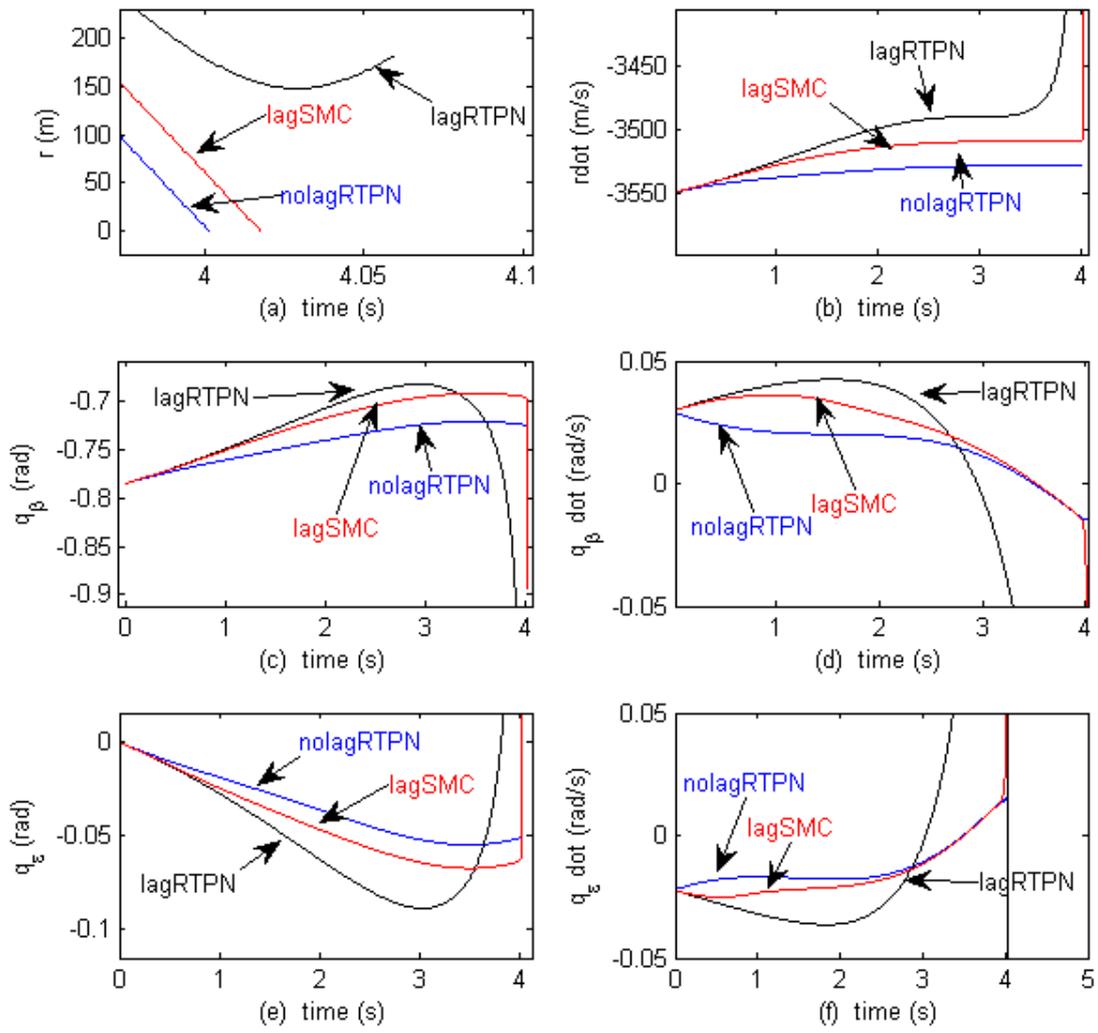


圖 4.8 具時間延遲  $T=1$  時六個狀態比較圖

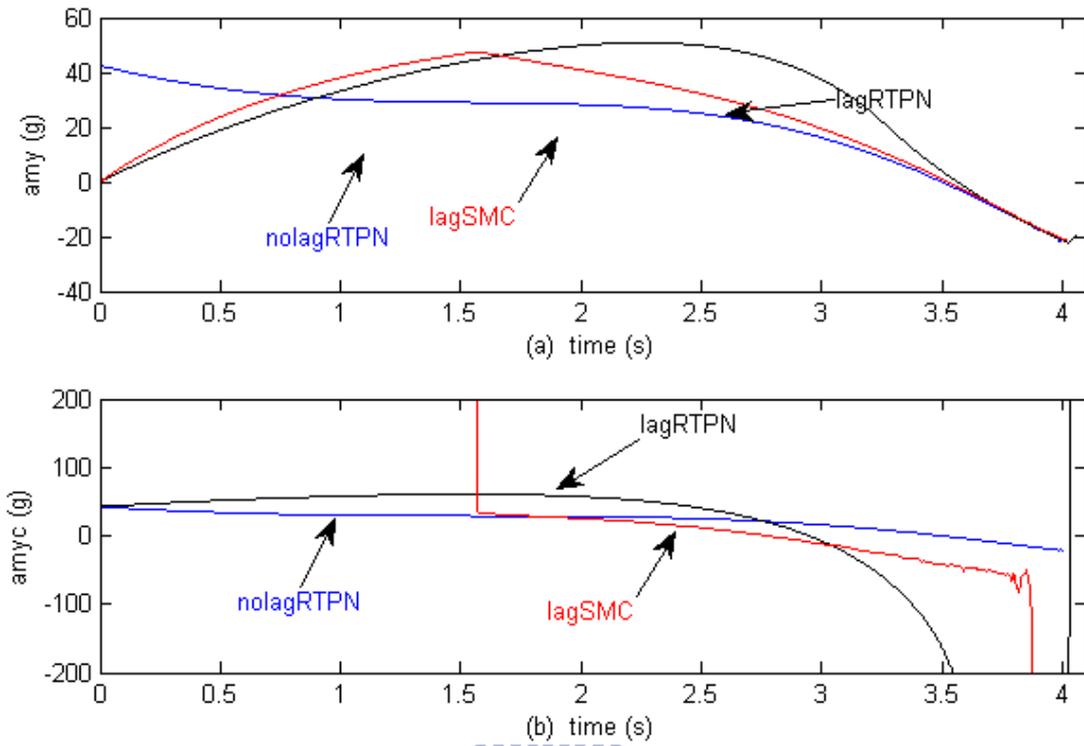


圖 4.9 具時間延遲  $T = 1$  時  $a_{my}$  方向比較圖 (a) 實際加速度 (b) 加速度命令

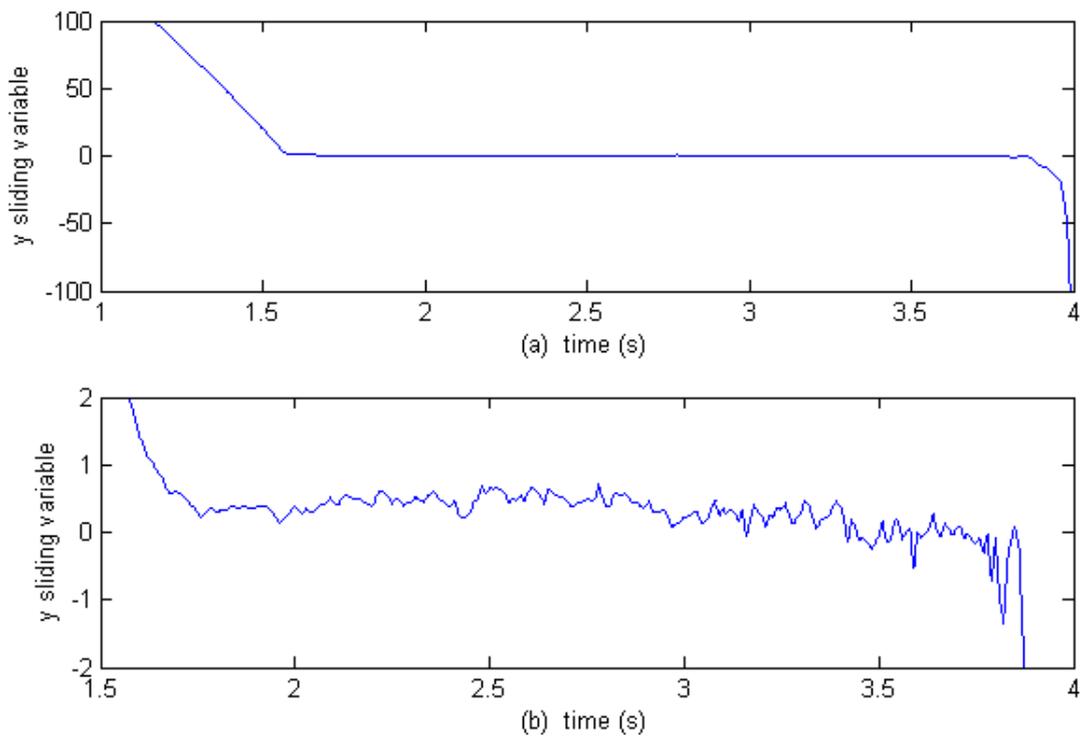


圖 4.10 具時間延遲  $T = 1$  (a)  $a_{my}$  方向順滑變數 (b) 順滑變數之放大圖

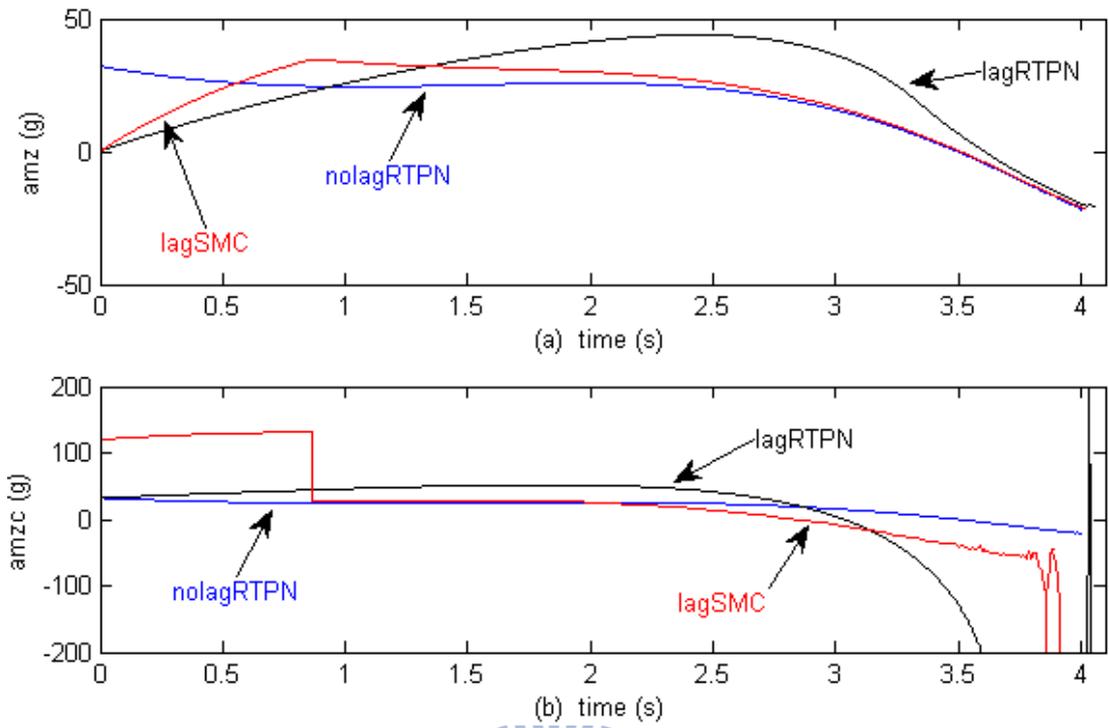


圖 4.11 具時間延遲  $T=1$  時  $a_{mz}$  方向比較圖 (a) 實際加速度 (b) 加速度命令

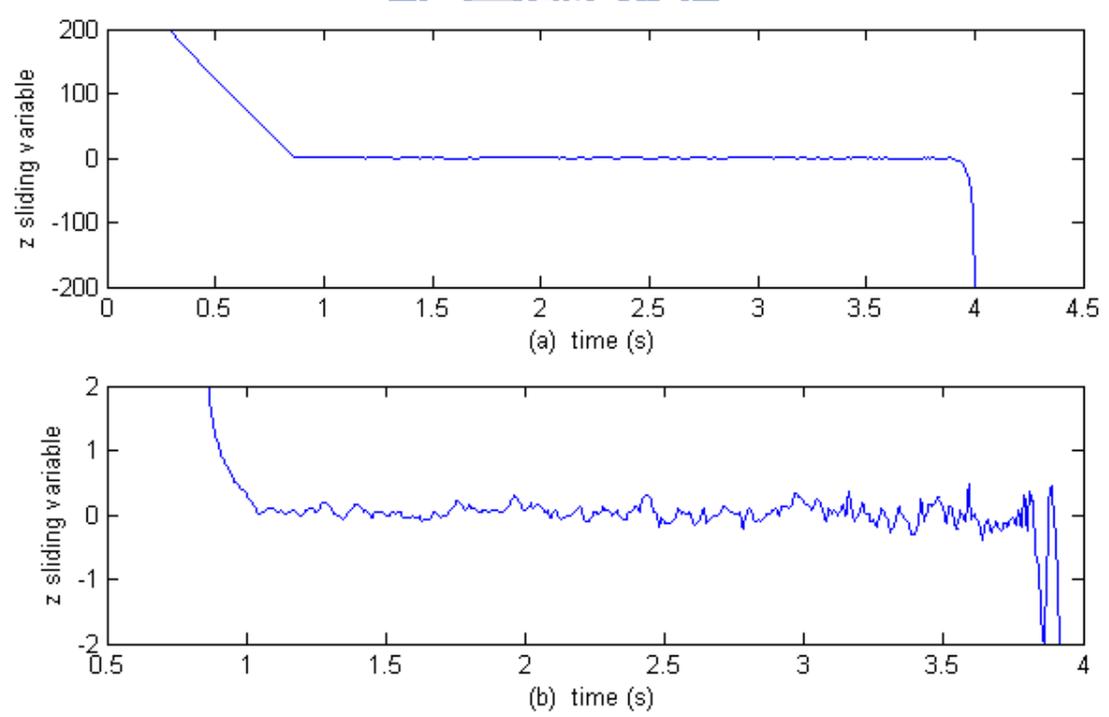


圖 4.12 具時間延遲  $T=1$  (a)  $a_{mz}$  方向順滑變數 (b) 順滑變數之放大圖

由以上模擬可知本碩論所設計的順滑模導引律，與傳統真比例導引律相比，在對於時間延遲以及估測誤差的干擾有較好的抵抗能力。雖然時間延遲是飛行控制系

統所造成的，若能提升飛控制系統的能力，即可大大降低因時間延遲造成的問題，但若能在導引律控制命令中，即先進行對時間延遲的補償，那麼將會使飛彈誤失距離比原本來的低。



## 第5章

# 結合ISMC與SMC技術應用於飛彈導引律設計

### 5.1 問題描述

在第二章比例導引律介紹中提到比例導引律其目的為讓視線角速率及方位角速率為零，用來對付無機動性目標，那麼考慮若使用第三章所介紹的積分型順滑模導引律，因其對付機動性目標時，狀態仍與比例導引律相近，意即代表視線角速率與方位角速率為零。但此時若考慮飛行控制系統的時間延遲，積分型順滑模導引律仍然無法解決時間延遲的問題，因此希望將順滑模導引律與積分型順滑模導引律結合，利用順滑模導引律解決時間延遲的問題，保留積分型順滑模的優點，並稱利用這兩種技術所設計的導引律在本碩論中稱強健導引律。首先回顧第三章(3.1)-(3.3)與(4.1)(4.2)式，在此章節為了計算方便將先令  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^T$ 、 $\mathbf{x}_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [r \ q_\beta \ q_\epsilon]^T$ 、 $\mathbf{x}_2 = [x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [\dot{r} \ \dot{q}_\beta \ \dot{q}_\epsilon]^T$ 、 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{a}}_T - \mathbf{a}_M = [0 \ \hat{a}_{ty} - a_{my} \ -\hat{a}_{tz} + a_{mz}]^T$ ， $\mathbf{d} = \Delta \mathbf{a}_T = [0 \ \Delta a_{ty} \ -\Delta a_{tz}]^T$  因此可改寫為(5.1)-(5.3)式。

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (5.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + B(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \quad (5.2)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = -T\mathbf{u} + T\mathbf{u}_c \quad (5.3)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 x_6^2 + x_1 x_5^2 \cos^2 x_3 \\ -\frac{2}{x_1} x_4 x_5 + 2x_5 x_6 \tan x_3 \\ -\frac{2}{x_1} x_4 x_6 - x_5^2 \sin x_3 \cos x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Delta a_{ty} \\ -\Delta a_{tz} \end{bmatrix}$$

$$B(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{x_1 \cos x_5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} u_{cy} \\ u_{cz} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_b} \end{bmatrix}$$

稍後將稱(5.1)(5.2)且無 $\mathbf{d}$ 時稱為無干擾系統。

## 5.2 導引律設計

針對上式(5.1)-(5.3)進行設計，首先為了消除時間延遲的影響，可由第三章中順滑模導引律設計可知，需選取一順滑面如下(5.4)

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{u} - \phi_1(\mathbf{x}) = [s_{11} \ s_{12}]^T \quad (5.4)$$

其中 $\phi_1(\mathbf{x})$ 代表一代選取的導引律，在此選積分型順滑模導引律。此積分型順滑模導引律第三章設計方式相同，將會在稍後討論，在順滑模推導中先當為已知。

接下來對(5.4)微分，並代入式子(5.1)-(5.3)因此將式子寫成如(5.5)式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_1 &= \dot{\mathbf{u}} - \dot{\phi}_1(\mathbf{x}) \\ &= -T\mathbf{u} + T\mathbf{u}_c - \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_2 - \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}]\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

為了解決 $\mathbf{d}$ ，在此引進假設

### 假設 5.1

存在一非負函數 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 可使得 $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho_m(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6, \forall t \in \mathbb{R}$

根據順滑模導引律的設計方式，可知其控制命令如下式

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u} + T^{-1} \left\{ \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_2 + \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{u}] \right\}$$

$$-T^{-1} \left( \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 + \eta \right) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_1) \quad (5.6)$$

其中 $\eta$ 為大於零的常數。將式子(5.6)代入(5.5)可得下式

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = - \left( \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 + \eta \right) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_1) - \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (5.7)$$

為了證明式子(5.6)的可行性，將使用李雅普諾夫理論，首先令李雅普諾夫函數

$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1$ ，將 $V$ 對時間取導函數並利用假設 5.1 及柯西-史瓦茲不等式可推導如下

式(5.8)(4.11)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}_1^T \left\{ - \left( \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 + \eta \right) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_1) - \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \mathbf{d} \right\} \\ &\leq \mathbf{s}_1^T \left\{ - \left( \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 + \eta \right) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_1) + \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \mathbf{d} \right\} \\ &\leq - \left( \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 + \eta \right) \|\mathbf{s}_1\|_2 + \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 \|\mathbf{d}\|_2 \|\mathbf{s}_1\|_2 \\ &\leq - \left( \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 + \eta \right) \|\mathbf{s}_1\|_2 + \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 \|\mathbf{s}_1\|_2 \\ &\leq - \eta \|\mathbf{s}_1\|_2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

可知若順滑面不為零，則可經由 $\mathbf{u}_c$ 的控制，使閉迴路系統 $\mathbf{s}_1$ 趨近於零。

接下來討論 $\phi_1(\mathbf{x})$ 的設計，如同上述 $\phi_1(\mathbf{x})$ 為積分型順滑模導引律， $\phi_1$ 是針對(5.1)

和(5.2)式進行設計的積分型順滑模導引律。為了順利使用積分型順滑模導引律，

因此加入假設 5.2

### 假設 5.2

存在矩陣 $D \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ 使得對任何狀態的矩陣 $DB(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 為可逆矩陣。觀察 $B$ 可知其 $x_1$ 為零時即代表擊中目標，且假設 $x_3$ 不會發生 90 度的情況，則滿足此假設條件

首先選取一順滑面如下式

$$\mathbf{s}_2 = D\{\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_2(t_0) - \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + B(\mathbf{x}(\tau))\phi_0]d\tau\} = [s_{21} \ s_{22}]^T \quad (5.9)$$

其中 $D$ 滿足假設 5.2， $\phi_0(\mathbf{x})$ 為在無干擾系統中所設計的導引律，即式子(5.1)和不包含 $\mathbf{d}$ 的(5.2)式。現在將(5.9)對時間做導數可得下式

$$\dot{\mathbf{s}}_2 = DB(\mathbf{x})[\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{d} - \phi_0(\mathbf{x})] \quad (5.10)$$

根據積分型順滑模設計方式可知控制指令在此表示如下式(5.11)

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB)^T \mathbf{s}_2}{\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2} \quad (5.11)$$

將(5.11)代入(5.10)可得下式

$$\dot{\mathbf{s}}_2 = DB(\mathbf{x})[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB)^T \mathbf{s}_2}{\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2} + \mathbf{d}] \quad (5.12)$$

為了證明式子(5.11)的可行性，將透過李雅普諾夫理論來證明。令李雅普諾夫函數 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_2$ ，將 $V$ 對時間取導函數並利用假設 5.2 及柯西-史瓦茲不等式可推導如下式(4.11)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}_2^T DB(\mathbf{x})[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB)^T \mathbf{s}_2}{\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2} + \mathbf{d}] \\ &\leq \mathbf{s}_2^T DB(\mathbf{x})[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB)^T \mathbf{s}_2}{\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2} + \|\mathbf{d}\|_2] \\ &\leq \mathbf{s}_2^T [-\rho(\mathbf{x}, t) \|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 \|\mathbf{d}\|_2] \\ &\leq \mathbf{s}_2^T [-\rho(\mathbf{x}, t) \|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \rho_m(\mathbf{x}, t) \|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2] \\ &\leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.13)$$

其中 $\rho(\mathbf{x}, t) > \rho_m(\mathbf{x}, t)$ 。因(5.9)式一開始 $\mathbf{s}_2 = \mathbf{0}$ 因此可知 $\mathbf{s}_2$ 所對應的閉迴路動態系統會從一開始就一直維持在零。在本碩論稱兩者結合的導引律為強健導引律。

接著要證明閉迴路系統軌跡一直保持在順滑面上時其對應的順滑動態(sliding dynamics)之穩定度；先假設閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即 $\mathbf{s}_2(\mathbf{x}_2(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}_2(\mathbf{x}_2(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 時，閉迴路系統 $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{u}$ 的軌跡

為  $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_d(t)$ ，而此時的

$$\dot{\mathbf{s}}_2 = DB(\mathbf{x}_d)[\mathbf{u} + \mathbf{d} - \phi_0] = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

其中  $DB(\mathbf{x}_d)$  為可逆或列滿秩，求解(5.14)式，故可得當系統軌跡保持在順滑面上時的等效控制律

$$\mathbf{u}_{eq} = -\mathbf{d} + \phi_0 \quad (5.15)$$

接著把(5.15)式代入原始動態系統(5.2)式後可得

$$\dot{\mathbf{x}}_d = f(\mathbf{x}_d) + B(\mathbf{x}_d)\phi_0 \quad (5.16)$$

觀察(5.16)式，可發現其動態系統即為原始動態系統(5.2)使用  $\phi_0$  控制後的閉迴路無干擾系統，因此，當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其動態行為確實等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統之響應。

### 5.3 模擬驗證

考慮三維飛彈與目標相對運動模型，初始距離 14142(公尺)、初始相對速率 -3550(公尺/秒)、初始方位角 -0.7854(弧度)、方位角速率 0.0294(弧度/秒)、初始高低角 0(弧度)、初始高低角速率 -0.0222(弧度/秒)。接下來參數選取時要考慮積分型順滑模導引律的控制命令(5.11)式，為了減少切跳現象，因此改寫成如下飽和型函數

$$\phi_1 = \phi_0 - \rho \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}_2}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon} \quad (5.17)$$

其中  $\rho = 50(m/s^2)$ 、 $\epsilon = 10^{-7}$ 、 $\phi_0$  如下式

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} -Nx_4x_5 \cos x_3 \\ Nx_4x_6 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

其中  $N=4$ 。需注意到，當函數改為飽和型函數則積分行順滑模只能保證順滑變數會收斂到  $\epsilon$  大小的區間內。接下來考慮順滑模導引律的參數選取，為了方便計算將(5.5)式中的  $\dot{\phi}_1$  拆解成如下形式(5.19)

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{dt} &= \frac{d\phi_0}{dt} - \rho \left[ \frac{d}{dt} \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}_2}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon} \right] \\
&= \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_2 + \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{x}_2} (\mathbf{f} + B(\mathbf{u} + \mathbf{d})) - \rho \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{(DB)^T \mathbf{s}_2}{\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

其中

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} Nx_3 x_4 x_5 \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{x}_2} &= \begin{bmatrix} -Nx_5 \cos x_3 & -Nx_4 \cos x_3 & 0 \\ -Nx_6 & 0 & -Nx_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

在看到式子(5.19)最右邊那項，對此項用微分公式來計算如下式(5.21)

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{(DB)^T \mathbf{s}_2}{\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon} \right) \right] &= \left[ \frac{d(DB)^T}{dt} \right] \mathbf{s}_2 (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} \\
&\quad + ((DB)^T) \dot{\mathbf{s}}_2 (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} \\
&\quad + ((DB)^T \mathbf{s}_2) \left[ \frac{d}{dt} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} \right]
\end{aligned} \tag{5.21}$$

將(5.21)一項一項拆開來看，等號右邊中間項參數已全部知道故不再分析，只對等號右邊兩項未知值分析，因此可得下式(5.22)-(5.23)

$$\left[ \frac{d(DB)^T}{dt} \right] = \begin{bmatrix} \frac{x_4}{x_1^2 \cos x_3} & \frac{x_6 \cos x_3 \sin x_3}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_4}{x_1^2} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{d}{dt} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} \right] &= \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} \right] \mathbf{x}_2 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} [\mathbf{f} + B(\mathbf{u} + \mathbf{d})]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

式子(5.22)計算至此也以無未知項，接下來對式子(5.23)繼續分析，只將未知的值提出來討論，可得下式(5.24)(5.25)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} = - (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-1} = - (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2 + \epsilon)^{-2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \tag{5.25}$$

因仍然出現未知項，因此繼續將(5.24)(5.25)未知的值繼續計算如下式

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} (\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \end{bmatrix}^T \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_4}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_5}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_6}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) \end{bmatrix}^T \quad (5.27)$$

針對(5.26)(5.27)中的未知項，繼續計算如下，並先定義 $\frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_{x_1}$ 依此類推

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = \frac{x_1(s_{21}(\partial_{x_1}s_{21})+s_{22}(\partial_{x_1}s_{22})\cos^2x_3)-(s_{21}^2+s_{22}^2\cos^2x_3)}{x_1^2\cos x_3\sqrt{s_{21}^2+s_{22}^2\cos^2x_3}} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = \frac{(s_{21}(\partial_{x_3}s_{21})+s_{22}(\partial_{x_3}s_{22})\cos^2x_3-s_{22}^2\sin x_3\cos x_3)+\sin x_3(s_{21}^2+s_{22}^2\cos^2x_3)}{x_1^2\cos x_3\sqrt{s_{21}^2+s_{22}^2\cos^2x_3}} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = \frac{(s_{21}(\partial_{x_4}s_{21})+s_{22}(\partial_{x_4}s_{22})\cos^2x_3)}{x_1\cos x_3\sqrt{s_{21}^2+s_{22}^2\cos^2x_3}} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_5}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = \frac{(s_{21}(\partial_{x_5}s_{21})+s_{22}(\partial_{x_5}s_{22})\cos^2x_3)}{x_1\cos x_3\sqrt{s_{21}^2+s_{22}^2\cos^2x_3}} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_6}(\|(DB)^T \mathbf{s}_2\|_2) = \frac{(s_{21}(\partial_{x_6}s_{21})+s_{22}(\partial_{x_6}s_{22})\cos^2x_3)}{x_1\cos x_3\sqrt{s_{21}^2+s_{22}^2\cos^2x_3}} \quad (5.33)$$

其中 $\mathbf{s}_2 = [s_{21} \ s_{22}]^T$ 。計算至此仍有未知項，但須注意到式子(5.28)-(5.33)中的分母項，可發現若一開始 $\sqrt{s_{21}^2 + s_{22}^2 \cos^2 x_3}$ 為零，則會有問題，因此在此加入 $\epsilon_1 = 10^{-5}$ 使得分母不會為零。因此對未知項繼續分析如下

$$\partial_{x_1}s_{21} = \int_{t_0}^t \frac{(N-2)x_4x_5}{x_1^2} d\tau \quad (5.34)$$

$$\partial_{x_1}s_{22} = \int_{t_0}^t \frac{(N-2)x_4x_6}{x_1^2} d\tau \quad (5.35)$$

$$\partial_{x_3}s_{21} = - \int_{t_0}^t 2x_5x_6 \sec^2 x_3 d\tau \quad (5.36)$$

$$\partial_{x_3}s_{22} = \int_{t_0}^t x_5^2(\cos^2 x_3 - \sin^2 x_3) d\tau \quad (5.37)$$

$$\partial_{x_4}s_{21} = \int_{t_0}^t \frac{(2-N)x_5}{x_1} d\tau \quad (5.38)$$

$$\partial_{x_4}s_{22} = \int_{t_0}^t \frac{(2-N)x_6}{x_1} d\tau \quad (5.39)$$

$$\partial_{x_5}s_{21} = 1 - \int_{t_0}^t \frac{(N-2)x_4}{x_1} + 2x_6 \tan x_3 d\tau \quad (5.40)$$

$$\partial_{x_5}s_{22} = \int_{t_0}^t 2x_5 \sin x_3 \cos x_3 d\tau \quad (5.41)$$

$$\partial_{x_6} s_{21} = - \int_{t_0}^t 2x_5 \tan x_3 d\tau \quad (5.42)$$

$$\partial_{x_6} s_{22} = 1 - \int_{t_0}^t \frac{(2-N)x_4}{x_1} d\tau \quad (5.43)$$

計算到此結束，所有未知項皆已變已知項，以上(5.34)-(5.43)式為積分型式可藉由程式計算獲得。其中參數 $N = 4$ 。而(5.6)式中最後一項也改成飽和型函數如下

(5.44)所示

$$T^{-1} \left( \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 + \eta \right) \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_1) \\ = T^{-1} \begin{cases} \left( 1 + \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 \right) \frac{s_{11}}{\epsilon_y} & \text{if } s_{11} < \epsilon_y \\ (5000 + \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2) \mathbf{sgn}(s_{11}) & \text{else} \\ \left( 1 + \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2 \right) \frac{s_{12}}{\epsilon_z} & \text{if } s_{12} < \epsilon_z \\ (5000 + \rho_m(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2) \mathbf{sgn}(s_{12}) & \text{else} \end{cases} \quad (5.44)$$

中

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.5} \end{bmatrix}, \rho_m = 50 \sqrt{2} (m/s^2), \epsilon_y = \epsilon_z = 1$$

需將  $\left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2$  拆解如下式方便分析

$$\frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) + \frac{(DB)^2}{\|(DB)^T s_2\|_2 + \epsilon} + (DB)^T s_2 \frac{\partial(\|(DB)^T s_2\|_2 + \epsilon)^{-1}}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \quad (5.45)$$

式子(5.45)中每項的值皆已知，因此再取 2-norm 即可獲得  $\left\| \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2} B(\mathbf{x}) \right\|_2$ 。

接下來進行模擬驗證，考慮一情況如下所敘述

**情況：**目標加速度之估測存在有估測誤差。目標加速度在 $y$ 與 $z$ 方向皆為  $10g \times \sin(t)$ ，假設估測誤差為大小  $5g \times \sin(t)$ ，可得到圖 5.1 到圖 5.4，圖 5.1 到圖 5.3 分別有三種情景(i)使用真比例導引律在目標無估測誤差時且無加速度估測，使用代號為 *nolagRTPN*，顏色為藍色(ii)使用真比例導引律在目標有估測誤差與目標加速度估測時，使用代號為 *lagRTPN*，顏色為黑色(iii)使用強健性導引律在目標有估測誤差和加速度估測時，代號為 *lagISMC + SMC*，顏色為紅色。

當距離小於 0.1 公尺時會停止模擬。

模擬結果如圖 5.1 到圖 5.5 所示，首先觀察圖 5.1(a)，可發現相對距離只有 *lagRTPN* 沒有趨近於 0.1 公尺，而使用本碩論設計的強健導引律可以達到誤失距離小於 0.1 公尺。接著觀察圖 5.1 的(b)-(f)，可發現 *lagISMC + SMC* 的狀態與 *nolagRTPN* 的狀態相近，這也與前面理論所敘述的結果相同。接下來看見圖 5.2 到圖 5.4 中，在大約 2.5 秒左右時，出現一個震盪現象，此現象是由於  $\phi_1 - \phi_0$  造成的影響，由圖 5.5 可看到在此瞬間從正值變成負值，觀察(5.6)式則可知此變化會有造成控制命令的變動。

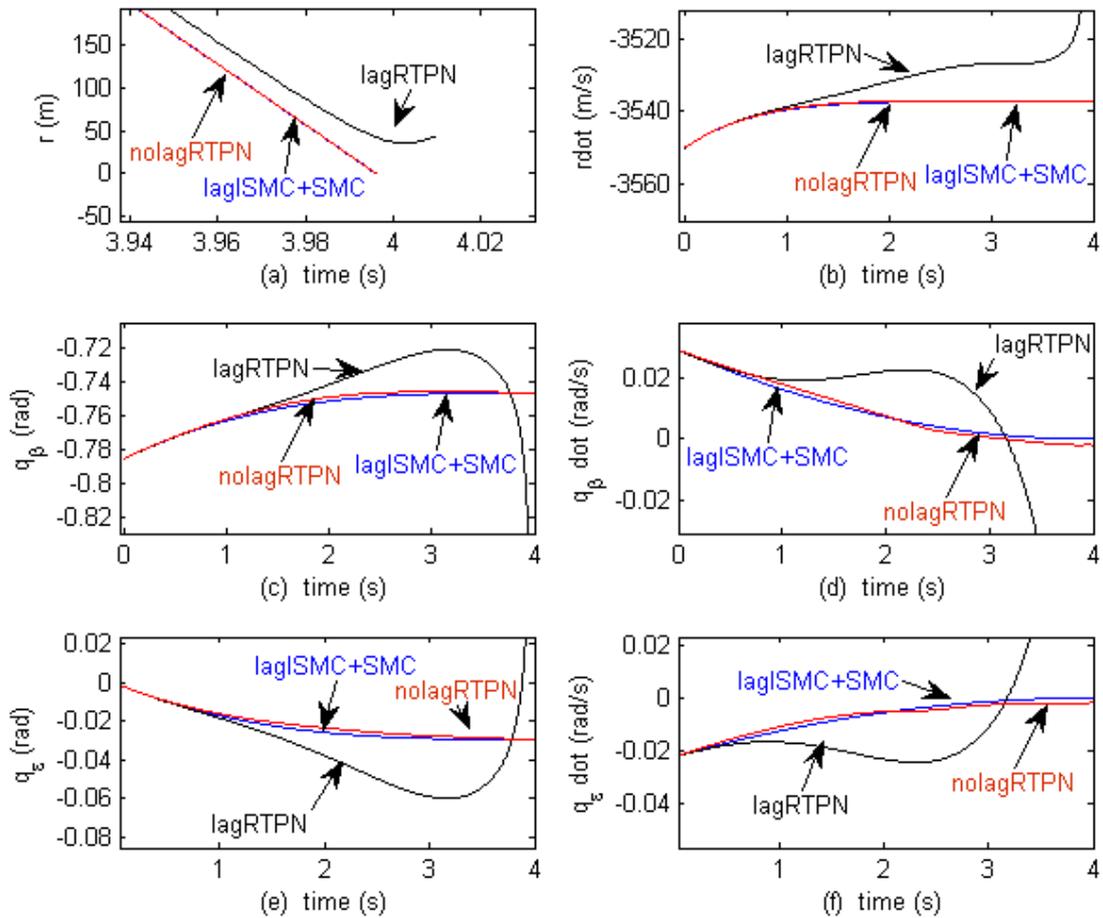


圖 5.1 具時間延遲與估測誤差之系統六個狀態比較圖

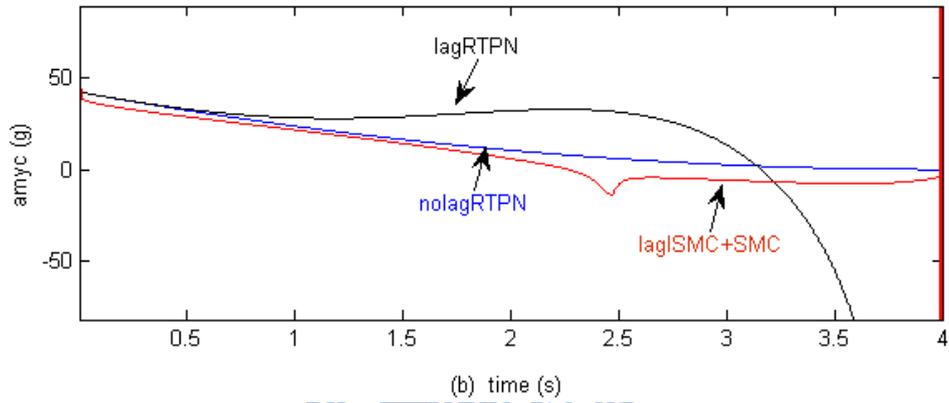
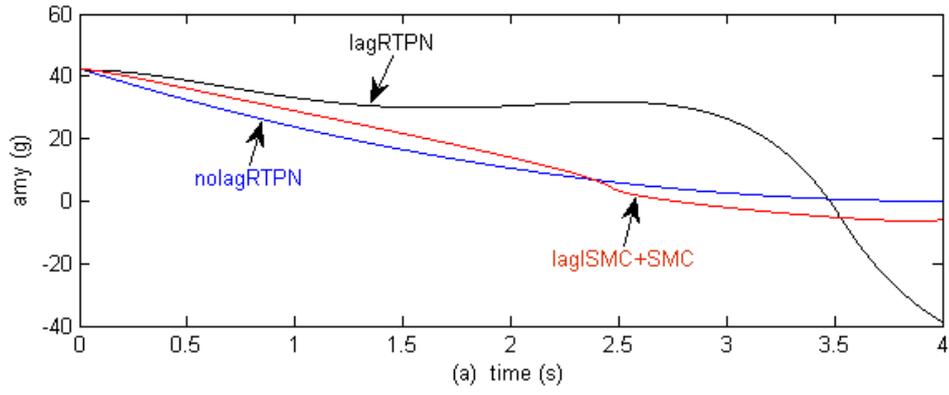


圖 5.2 具時間延遲與估測誤差之  $a_{my}$  方向比較圖(a)實際加速度(b)加速度命令

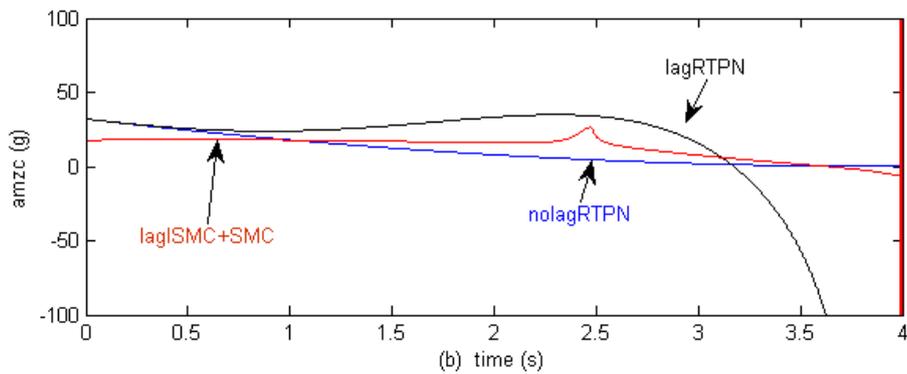
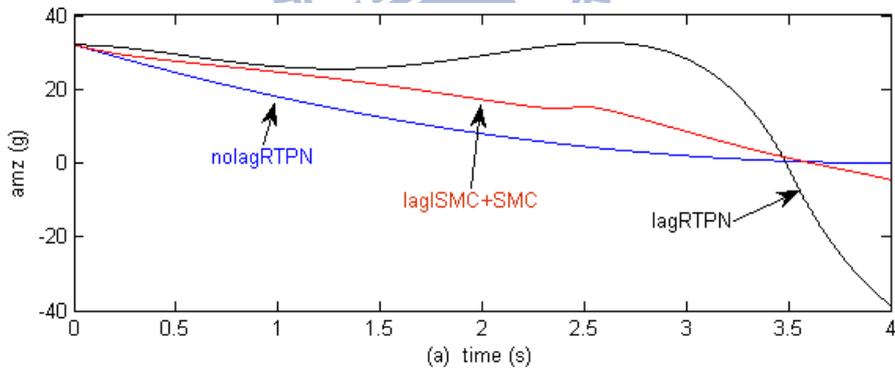


圖 5.3 具時間延遲與估測誤差  $a_{mz}$  方向比較圖(a)實際加速度(b)加速度命令

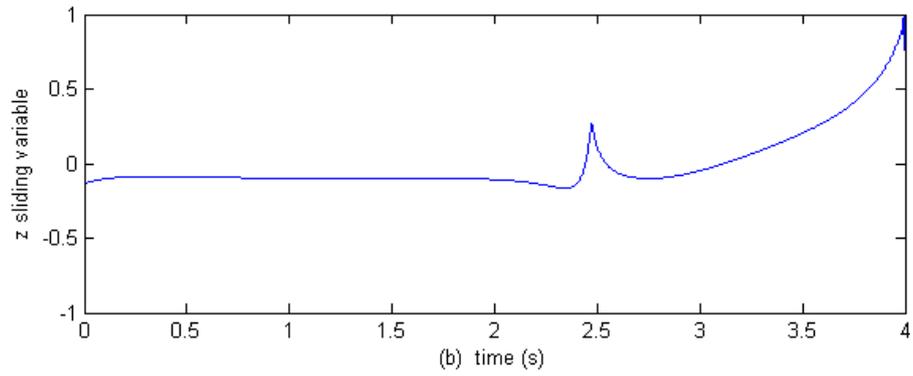
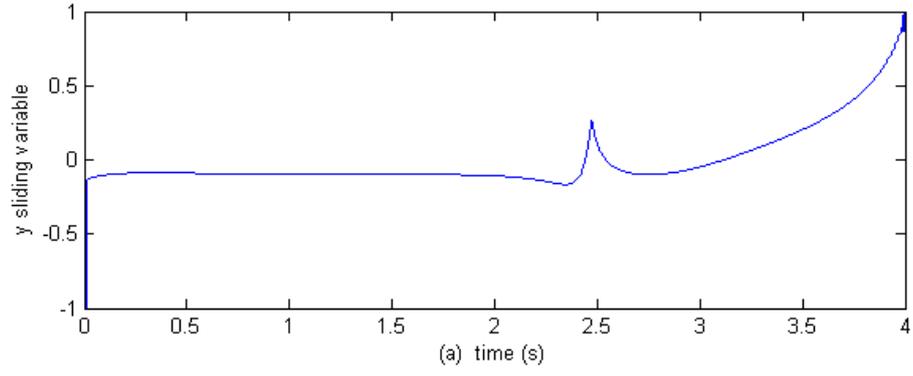


圖 5.4 具時間延遲與估測誤差 (a)  $s_{11}$  順滑變數 (b)  $s_{12}$  順滑變數

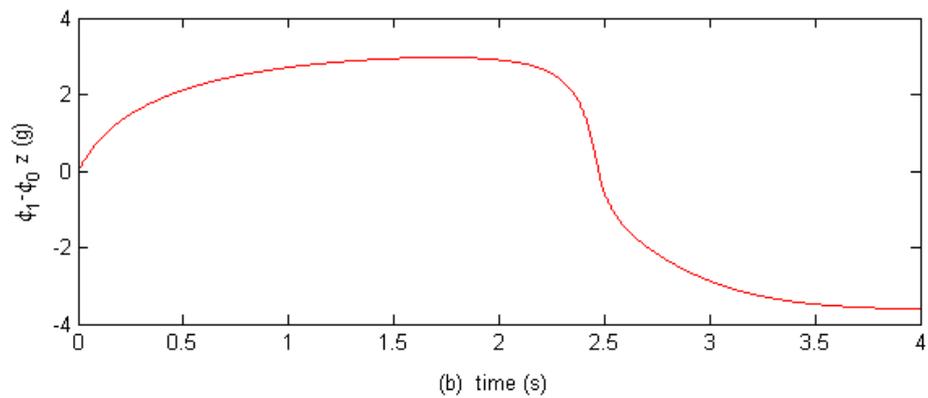
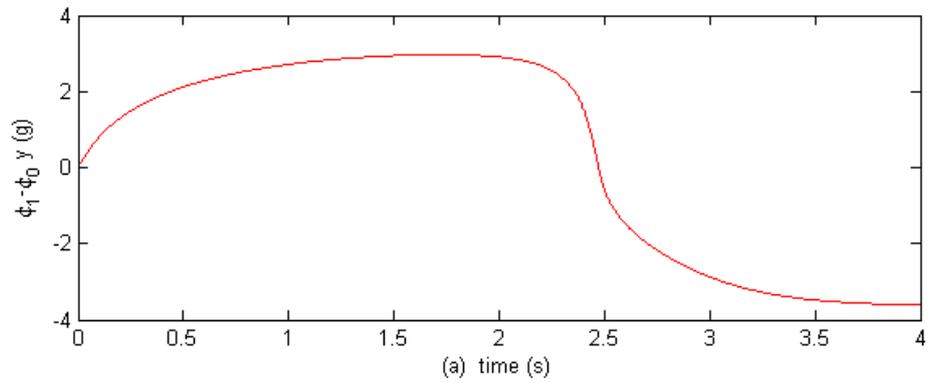


圖 5.5 具時間延遲與估測誤差  $\phi_1 - \phi_0$  (a)  $y$  方向 (b)  $z$  方向

## 第6章 結論與未來方向

本碩論在第3章首先討論積分型順滑模控制技術應用在導引律上，因其可允許工程師對於無干擾系統(nominal system)的性能要求事先設計導引律，使得包含估測誤差的受干擾系統(uncertain system)的閉迴路狀態響應與無干擾系統閉迴路響應近似，因此可以增加系統的強健性，在本碩論選擇的無干擾系統的導引律為真比例導引律，因真比例導引律的設計目的即為在攔截無機動性目標時，為了讓角速率大小趨近於零，而使用積分型順滑模導引律則可想像成即使目標出現角速率也可使得角速率大小趨近於零，因其設計目的即為讓受干擾系統的閉迴路響應與無干擾系統的閉迴路響應相近。在第4章更進一步的討論因加速度控制命令經過飛行控制系統時產生的時間延遲效應，此效應可能會造成飛彈攔截目標失敗，所以加入順滑模控制技術來消除加速度時間延遲的問題，可由模擬結果得知，當時間延遲常數為1時，僅使用真比例導引做控制時，其產生的誤失距離遠大於使用順滑模導引律控制的時候。最後在第5章將兩者結合，並稱此技術為強健導引律，因結合了前兩者的優點，那麼即可預期當時間延遲與目標加速度的估測誤差同時存在時，仍然可以辦到與無干擾系統的閉迴路響應狀態相近。此也代表使用強健導引律可以藉由無干擾系統來預測其效能，最後模擬結果可證明此導引律的優點。

導引律只是飛彈系統中的一小部分，若要完成一顆飛彈的設計，仍然需考慮整個飛彈系統，但若能在設計導引律的同時，將整個飛彈系統可能產生的效應或是雜訊等等，當作是飛彈與目標相對運動模型的雜訊來源，在設計導引律時想辦法將此雜訊消除或是降到最低，那麼則可以增加飛彈攔截成功的機率，其中之一可知的雜訊來源為尋標器所產生的寄生效應或是聲噪[21]，此效應若以導引律來看則代表當導引律要獲得角速率的資訊時，會伴隨著雜訊進入，因此獲得的訊

號及不正確，因此訊號實際值可分為估測值與為誤差值，那麼則可能藉由強健導引律的強健性將此效應一併考慮進來解決。



## 參考文獻

- [1] Becker, K., "Closed-form Solution of Pure Proportional Navigation," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 26, no.3, pp. 526-532, 1990.
- [2] Yuan, P. J. and Chern, J. S., "Solutions of True Proportional Navigation for Maneuvering and Nonmaneuvering Targets," *J. Guid. Control Dyn.*, vol.15, pp. 268-271, 1992.
- [3] M. Guelman, "A qualitative study of proportional navigation," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol.AES-7, no.4, pp. 637-643, 1971.
- [4] Siouris, G. M. *Missile Guidance and Control Systems*. New York: Springer, 2004.
- [5] Ryoo, C. K., Cho, H. J., and Tahk, M. J. "Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol.28, pp.724-732, 2005.
- [6] Lee, J. I., Jeon, I. S., and Tahk, M. J. "Guidance law to control impact time and angle," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol.43, no.1, pp.301-310, 2007.
- [7] Siouris, G. M. and Leros, A. P. "Minimum-time intercept guidance for tactical missiles," *Control-Theory and Advance Technology*, vol.4 pp.251-263, 1988.
- [8] M. Guelman and J. Shinar, "Optimal guidance law in the plane," *AIAA J. Guid. Control Dynam.*, vol. 7, pp. 471-476, 1984.
- [9] Medeiros, J.A. and Crames, T.L: "Fuzzy logic approach to head-on missile intercepts," *Proc. SPIE- Int. Soc. Opt. Eng.*, pp. 319-324, 1992.
- [10] Shieh, C. S. "Nonlinear rule-based controller for missile terminal guidance," *IEEE Proceedings on Control Theory and Applications*, vol.150, no.1, pp.45-48, 2003.
- [11] Oshman, Y. and Arad, D. "Differential-game-based guidance law using target orientation observations," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic*

*Systems*, vol.42, no.1, pp.316-326, 2006.

- [12] Anderson G M. “Comparison of optimal control and differential game intercept missile guidance law,” *Journal of Guidance and Control*, vol.4, pp.109-115, 1981.
- [13] Chaoyong LI, Wuxing Jing, Hui Wang, and Zhiguo QI. “Gain-Varying Guidance Algorithm using Differential Geometric Guidance Command,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol.46, no.2, pp.725-736, 2010.
- [14] Chang-Kyung Ryoo, Yoon-Hwan Kim, Min-Jea Tahk, and Keeyoung Choi. “A Missile Guidance Law Based on Sontag’s Formula to Intercept Maneuvering Targets,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 5, pp. 397-409, 2007.
- [15] Yang C D. and Chen H Y. “Nonlinear  $H_\infty$  robust guidance law for homing missile,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol.21, pp.882-890, 1998.
- [16] Chen, B.S., Chen, Y.Y., and Lin, C.L.: “Nonlinear fuzzy  $H_\infty$  guidance law with saturation of actuators against manoeuvring targets,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol.10, no.6, pp.769-779, 2002.
- [17] C.-S. Shieh. “Design of three-dimensional missile guidance law via tunable nonlinear  $H_\infty$  control with saturation constraint,” *IET Control Theory* vol.1, pp.756-763, 2007.
- [18] Zhou, D., Mu, C., and Xu, W., “Adaptive Sliding-Mode Guidance of a Homing Missile,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol.22, pp.589–594, 1999.
- [19] Levant, A. “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control,” *International Journal of Control*, vol.76, pp.924-941, 2003.
- [20] Levant, A. “Homogeneity approach to high-order sliding mode design,” *Automatica*, vol.41, 823-830, 2005.
- [21] Paul Zarchan. *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 5<sup>nd</sup> Ed., 2007.
- [22] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, “Variable structure control of

- nonlinear multivariable systems: a tutorial,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no.3, pp. 212-232, 1988.
- [23] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, “Variable structure control: a survey,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no.1, pp. 2-22, 1993
- [24] H. K. Khalil, *Nonlinear System*, 2<sup>nd</sup>, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [25] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2009.
- [26] F. Castanos and L. Fridman, “Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no.5, pp. 853-858, 2006.
- [27] W.-J. Cao and J.-X. Xu, “Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no.8, pp.1355-1360, 2004.
- [28] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, and Jr. William E. Clausen, *Vector mechanics for engineers*, 2008.
- [29] Ciann-Dong Yang, “Analytical solution of 3D true proportional navigation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol.32, no.4 pp.1509-1522, 1996.
- [30] George M. Siouris, *Missile guidance and control system*, 2004.
- [31] A. Dhar, D. Ghose, “Capture Region for Realistic TPN guidance law,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no.3, pp.995-1003, 1993.
- [32] Pin-Jar Yuan, “Solutions of generalized proportional navigation with maneuvering and nonmaneuvering targets,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 31, no.1, pp.469-474, 1995