

國立交通大學

電信工程研究所

碩士論文

壓縮感測技術應用在循環字首之單載波通訊的稀疏  
通道估測

Compressive Sensing Based Sparse Channel Estimation  
for Cyclic Prefixed Single Carrier Communication

研究生：邱昶溢

指導教授：吳卓諭 博士

中華民國 一百零一年 七月

壓縮感測技術應用在領航循環字首之單載波通訊的稀疏通道估測

Compressive Sensing Based Sparse Channel Estimation for Cyclic  
Prefixed Single Carrier Communication

研究生：邱昶溢

Student : Chang-Yi Chiou

指導教授：吳卓諭

Advisor : Jwo-Yuh Wu

國立交通大學  
電信工程研究所  
碩士論文



A Thesis  
Submitted to Department of Communications Engineering  
College of Electrical and Computer Engineering  
National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of

Master of Science

in

Communications Engineering

July 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年七月

# 壓縮感測技術應用在循環字首之單載波通訊的稀疏通道估測

學生：邱昶溢

指導教授：吳卓諭

國立交通大學電信工程研究所碩士班

## 摘要

在近年來，單載波頻域等化系統在無線通訊研究上被廣泛的探討，使其可作為正交分頻多工系統的替代系統，而對於單載波頻域等化系統的符元判斷效能，則取決於通道估測，傳統上，單載波頻域等化系統其通道估測技術是根據最小平方法的原理，然而，當通道具有稀疏特性存在時，使用此方法將無法根據通道稀疏特性來有效估測通道，在本論文中，我們提出將壓縮感測技術應用於單載波頻域等化系統的通道估測上，在此部分內容關於通道估測的系統矩陣，其為循環矩陣，首先，我們推導出了隨機循環矩陣其滿足限制等距性質的機率，此結果將比目前存在的其它結果更為準確，最後，我們使用壓縮感測技術中的 Dantzig selector 方法來估測稀疏通道，並利用互次不相關性質對系統矩陣做分析，提出了一組關於最佳訓練序列的形式，使壓縮感測技術在復原稀疏資料上更有效率，並以模擬驗證之。

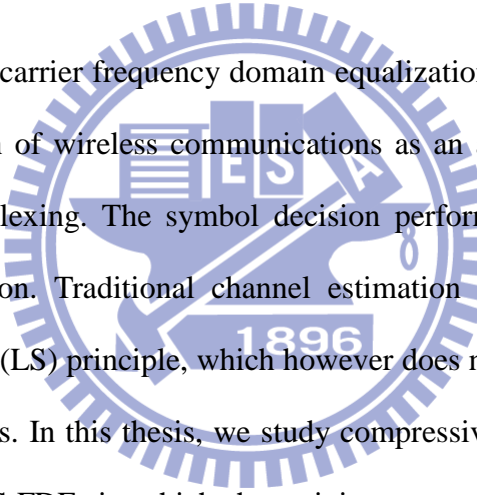
# Compressive Sensing Based Sparse Channel Estimation for Cyclic Prefixed Single Carrier Communication

Student : Chang-Yi Chiou

Adviser : Dr. Jwo-Yuh Wu

Institute of Communications Engineering  
National Chiao Tung University

## Abstract



In recent years, single carrier frequency domain equalization (SC-FDE) has been widely considered in the research of wireless communications as an alternative to the orthogonal frequency division multiplexing. The symbol decision performance of SC-FDE relies on accurate channel estimation. Traditional channel estimation techniques for SC-FDE are based on the least-squares (LS) principle, which however does not take account of the sparse nature of wireless channels. In this thesis, we study compressive-sensing (CS) based sparse channel estimation for SC-FDE, in which the training system is described by a circulant matrix. We first characterize the probability that a random circulant matrix can satisfy the restricted isometry property (RIP). The result is seen to be tighter than existing solutions. By using the Dantzig selector for signal recovery, we propose a new optimal training pattern via minimization of the mutual incoherence (MI). Simulation results are used to illustrate the performance of the proposed scheme.

# 誌謝

能完成碩士學位和論文，最要感謝的是我的指導老師吳卓諭教授，在指導其間，他不僅以作為一名指導教授指導我該如何做研究，也以學長的身分在生活上給了我許多人生意見與關心，在交大的這段時間，其在學業上勉勵我持之以學習，充實自己，在生活有困難時也適時得幫助我和鼓勵我，在我心情難過的時候激勵我不要倒下，勇敢面對，在我犯錯時以嚴正的態度提醒我，老師在我心中不僅是位嚴師，也在我人生當中給了我一盞燈，讓我可以順利完成學業。

另外感謝實驗室的每位同學，一起討論課業，一起討論研究，給了我課業上和研究上許多的幫助，也感謝從大學到研究所六年間，都一起學習的朋友勇先，不管是課業和研究，在生活遇到困難時也幫助了我很多，在個性上也包容了我許多，讓我的學習生活多采多姿。

最後要感謝我的父母，從小一直認真栽培我，並給予我鼓勵和關心，在我人生背後不斷默默支持我，讓我可以順利完成學業。



邱昶溢 謹誌

民國一百零一年七月二十日

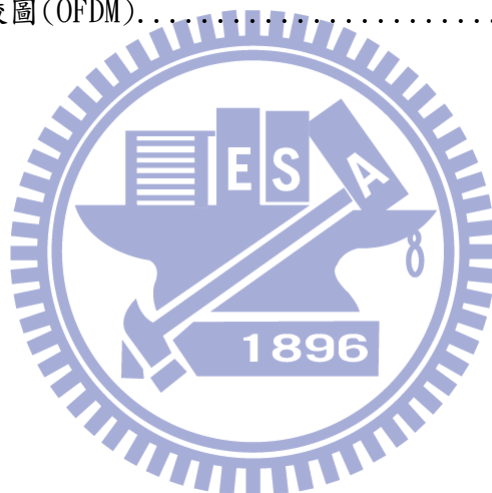
# 目錄

摘要	i
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	v
<b>第一章 緒論</b> .....	1
1.1 概論與研究動機.....	1
1.2 論文貢獻.....	3
1.3 論文組織.....	4
<b>第二章 系統模型與文獻回顧</b> .....	5
2.1 單載波頻域等化系統.....	5
2.1.1 循環字首.....	5
2.1.2 單載波頻域等化系統架構.....	7
2.1.3 單載波頻域等化系統優缺點.....	14
2.1.4 最小平方法.....	15
2.2 壓縮感測技術.....	16
2.2.1 稀疏資料復原.....	16
2.2.2 限制等距性質和互斥不相關性質.....	20
2.2.3 稀疏資料復原誤差分析.....	23
<b>第三章 壓縮感測技術與隨機循環矩陣</b> .....	27
3.1 隨機循環矩陣滿足受限等距性質的機率分析.....	27
3.2 數值分析與比較.....	38
<b>第四章 壓縮感測技術與通道估測</b> .....	39
4.1 系統模型.....	39
4.2 最佳領航序列的設計.....	40
4.3 模擬分析.....	44
<b>第五章 結論</b> .....	60
<b>參考文獻</b> .....	62

# 圖目錄

圖 2-1: 符元干擾和資料區塊干擾.....	6
圖 2-2: 循環字首階數低於通道階數所造成的符元干擾和資料區塊干擾 .....	7
圖 2-3: 資料傳送區塊.....	7
圖 2-4: 傳送端和通道 .....	8
圖 2-5: 接收端.....	12
圖 2-6: 頻域強制歸零等化器架構圖.....	14
圖 2-7: 超平面幾何透視圖 .....	18
圖 2-8: $l_2$ 範數幾何透視圖 .....	19
圖 2-9: $l_1$ 範數幾何透視圖 .....	20
圖 4-1: 通道多重路徑數量 $S = 1$ , 壓縮感測技術和最小平方法之均方誤差比較圖....	45
圖 4-2: 通道多重路徑數量 $S = 2$ , 壓縮感測技術和最小平方法之均方誤差比較圖....	45
圖 4-3: 通道多重路徑數量 $S = 3$ , 壓縮感測技術和最小平方法之均方誤差比較圖....	46
圖 4-4: 通道多重路徑數量 $S = 1$ , 壓縮感測技術和最小平方法之位元錯誤率比較圖..	46
圖 4-5: 通道多重路徑數量 $S = 2$ , 壓縮感測技術和最小平方法之位元錯誤率比較圖..	47
圖 4-6: 通道多重路徑數量 $S = 3$ , 壓縮感測技術和最小平方法之位元錯誤率比較圖..	47
圖 4-7: 通道多重路徑數量 $S = 1$ , 領航序列滿足定理 3 和不滿足定理 3 之均方誤差比較圖.....	48
圖 4-8: 通道多重路徑數量 $S = 2$ , 領航序列滿足定理 3 和不滿足定理 3 之均方誤差比較圖.....	49
圖 4-9: 通道多重路徑數量 $S = 3$ , 領航序列滿足定理 3 和不滿足定理 3 之均方誤差比較圖.....	49
圖 4-10: 通道多重路徑數量 $S = 1$ , 領航序列滿足定理 3 和脈衝序列之均方誤差比較圖..	50
圖 4-11: 通道多重路徑數量 $S = 2$ , 領航序列滿足定理 3 和脈衝序列之均方誤差比較圖..	51
圖 4-12: 通道多重路徑數量 $S = 3$ , 領航序列滿足定理 3 和脈衝序列之均方誤差比較圖..	51
圖 4-13: 通道多重路徑數量 $S = 2$ , 領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列	

的均方誤差比較圖.....	56
圖 4-14：通道多重路徑數量 $S = 2$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的位元錯誤率比較圖.....	56
圖 4-15：通道多重路徑數量 $S = 3$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖.....	57
圖 4-16：通道多重路徑數量 $S = 3$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的位元錯誤率比較圖.....	57
圖 4-17：通道多重路徑數量 $S = 1$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖(OFDM).....	58
圖 4-18：通道多重路徑數量 $S = 3$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖(OFDM).....	59
圖 4-19：通道多重路徑數量 $S = 3$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖(OFDM).....	59





# 第一章 緒論

## 1.1 概論與研究動機

在無線寬頻通訊上，由於多重路徑的影響，使得通道傳播延遲可能變的非常的長，在這樣的通道情況下，使用傳統的單載波時域等化系統(single carrier time domain equalization, SC-TDE)對資料進行等化，其複雜度將會大幅增加，而單載波頻域等化系統(single carrier frequency domain equalization, SC-FDE)，其將資料轉換到頻域上做等化，大幅降低了複雜度，此外單載波頻域等化系統在效能上和正交分頻多工系統(orthogonal frequency division multiplexing, OFDM)相似[1]，且單載波頻域等化系統沒有嚴重的載波頻率偏移(carrier frequency offsets, CFOs)問題和高峰值平均功率比(peak-to-average power ratio, PAPR)問題，基於以上理由，使得單載波頻域等化系統在最近幾年開始受到重視，許多關於單載波頻域等化系統的研究開始被提出，如對於單載波頻域等化系統和多輸入多輸出(multiple input multiple output, MIMO)兩者結合的相關研究[2][3]，或是單載波頻域等化系統在超寬頻(ultra wideband, UWB)上的研究[4]，其在實際應用上，也被考慮應用在未來的第四代行動通訊系統上。

單載波頻域等化系統最先在[5]被提出，在研究文獻上，關於和多載波系統的正交分頻多工系統其效能和複雜度之間的比較，也是重要的研究議題，兩者在系統架構上都使用了一組離散傅立葉轉換(discrete fourier transform, DFT)和反離散傅立葉轉換(inverse discrete fourier transform, IDFT)，不同的是單載波頻域等化系統將離散傅立葉轉換和反離散傅立葉轉換擺置在接收端，做為資料區塊的等化處理，這樣的作法將使的接收端的複雜度較高，而正交分頻多工系統則是在傳送端擺置一組反離散傅立葉轉換，在接收端擺置一組離散傅立葉轉換，其功能做為調變資料之用。在無線通訊中，多重路徑傳播延遲會造成接收端資料區塊間的干擾(interblock interference, IBI)，為了抵抗資料區塊間的干擾，單載波頻域等化系統在資料傳送上使用了保護區間(Guard interval)，保護區間有零填補(zero padding)和循環字首(cyclic prefix, CP)等方式，零填補的作法為在每組資料區塊

前擺置數量大於或等於通道階數的零項，而循環字首的作法為複製資料區塊後半部數量大於或等於通道階數的資料項，將其擺置在資料區塊前，另外單載波頻域等化系統使用保護區間的作法將使的資料在做等化上較為容易，降低了複雜度。在本篇論文中，將研究問題著重在通道環境為快速變化的情況，在這樣的情況下，保護區間採用循環字首的方式，且在論文中我們將利用循環字首來估測通道，在每個資料區塊都重新進行通道估測，以適應通道變化快速的環境。

為了提升單載波頻域等化系統的可靠性，資料等化正確性的核心取決於通道估測的準確性，而在不同的通道環境下，有其相對應適當的通道估測方式，在本篇論文內，將通道環境設定為水面下的通道[6]，在這樣的情況下，通道脈衝響應會有稀疏(sparse)現象發生，因此我們提出使用壓縮感測技術(compressive sensing, CS)來做通道估測。壓縮感測技術是一門對於復原稀疏資料的技術，其可以利用維度相對較小的接收資料來復原維度較大的稀疏資料，此技術被研究應用在壓縮資料上，假設有一組資料向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  和基底矩陣  $\psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_p] \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ，如果資料向量  $\mathbf{x}$  可用基底矩陣  $\psi$  表示

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \beta_i \psi_i \Leftrightarrow \mathbf{x} = \psi \beta \quad (1.1)$$

其中稀疏向量  $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p]^T \in \mathbb{R}^p$  中有  $S$  個元素不為零項，其它  $(p - S)$  個元素為零項，且  $S \ll p$ ，即資料向量  $\mathbf{x}$  可表示為基底矩陣  $\psi$  中  $S$  個行向量的線性組合，我們就稱資料向量  $\mathbf{x}$  是可壓縮的(compressible)，接著考慮一組穩定量測矩陣(stable measurement matrix)  $Q \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ，且  $n < p$ ，利用穩定量測矩陣  $Q$  將資料向量  $\mathbf{x}$  進行資料壓縮，即(1.1) 乘上穩定量測矩陣  $Q$ ，得到量測向量(measurement vector)  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y} = Q\mathbf{x} = \underbrace{Q\psi}_{\Phi} \beta \quad (1.2)$$

在這裡  $\Phi = Q\psi \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ，接下來使用壓縮感測技術的演算法可由量測向量  $y$  來復原稀疏向量  $\beta$ ，再由(1.1)就可以還原資料向量  $x$ 。

而在我們的研究中，將利用壓縮感測技術來估測稀疏通道，以(1.2)來描述，量測向量  $y$  即相當於接收端所收到的資料向量，而  $\Phi$  是由領航資料所組成的系統矩陣， $\beta$  則為稀疏通道，我們將由接收到的資料向量  $y$  和已知領航資料所組成的系統矩陣  $\Phi$ ，配合使用壓縮感測技術來做通道估測，其細節將在之後的章節說明。

## 1.2 論文貢獻

在許多關於壓縮感測技術的文獻中，證明了以高斯隨機分布或是其他特定隨機分布所產生的系統矩陣，使用壓縮感測技術有效復原稀疏資料的機率是非常高的，在系統矩陣的設定上，也包括了將系統矩陣延伸至特定架構，再以特定隨機分布所製造出的系統矩陣，其利用壓縮感測技術在復原稀疏資料的機率分析，如系統矩陣在托波力茲矩陣 (Toeplitz matrix) 架構下，以高斯隨機分布 (Gaussian random distribution) 所產生的系統矩陣其相對應的機率分析，而在本篇論文中，則是將系統矩陣架構延伸至循環矩陣 (circulant matrix)，並探討以隨機分布的方式所產生的系統矩陣，其在使用壓縮感測技術上能夠有效復原稀疏資料相對應的機率分析，將系統矩陣架構鎖定在循環矩陣的架構，在應用上，即可以是無線多重路徑通道估測，而關於壓縮感測技術在通道估測上的實際應用，我們將會證實以壓縮感測技術來復原稀疏資料將比傳統上使用的估測方法-最小平方法要來的準確。另外，許多關於壓縮感測技術的分析，都是以機率的觀點來做探討，以求得如何提升壓縮感測技術在還原稀疏資料上的準確性，而在我們研究的另一部份，則是以代數的觀點來分析壓縮感測技術，使其能夠更有效率復原稀疏資料，在過程中我們將會推導出一組條件式，當系統矩陣滿足此條件式，將可以大大提升壓縮感測技術在復原稀疏資料上的準確性，而在通道估測應用上，則可將此條件式應用在產生領航資料上，以提升壓縮感測技術對於通道估測的效能。

### 1.3 論文組織

本篇論文的組織如下，第二章的內容將分兩部分，第一部分為單載波頻域等化系統的介紹，第二部分則是介紹壓縮感測技術。壓縮感測技術要能有效復原稀疏資料，則和系統矩陣有關，系統矩陣內的元素通常都由高斯隨機分布或有界隨機分布(bounded random distribution)所產生，在第三章內容裡將會去推導此兩種機率分布所產生的系統矩陣對於有效復原稀疏資料的機率。接下來的第四章和第三章的觀點不同，第四章不以機率的觀點來探討系統矩陣對於壓縮感測技術的影響，而是以代數的觀點來探討如何改善系統矩陣，使得壓縮感測技術可以更有效復原稀疏資料。最後將在第五章做一個總結。



## 第二章 系統模型與文獻回顧

這個章節將會對相關的文獻做回顧，在章節的開始會先介紹單載波頻域等化系統，單載波頻域等化系統在通道估測方面，會使用壓縮感測技術做通道估測，將在章節的後半部介紹壓縮感測技術。在 2.1 節單載波頻域等化系統的部分，傳送資料區塊會使用循環字首，循環字首用以抵抗資料區塊間的干擾(inter-block interference, IBI)，而且可以有利於資料在頻域上作等化，在 2.1.1 小節會對循環字首作介紹，2.1.2 小節會描述單載波頻域等化系統的傳送端和接收端系統架構，在 2.1.3 小節會歸納單載波頻域等化系統的優缺點。最後在 2.2 節壓縮感測技術內，會先介紹壓縮感測技術主要被使用在哪種類型問題，接著說明其原理和方法。

### 2.1 單載波頻域等化系統

正交分頻多工系統是近年來作為無線寬頻系統實體層部分的標準選擇之一，但此系統對於載波同步要求高，具有載波頻率偏移的問題，且在傳送端由於反快速傅立葉轉換可能造成傳送訊號部分能量較大，有較高的峰值平均功率比，此時傳送訊號經過傳送端功率放大器時，會超出功率放大器的線性功率放大區域，造成傳送訊號失真。

單載波頻域等化系統不具有以上正交分頻多工系統的缺點，也適合作為無線通訊系統實體層的選擇之一，目前常被用在上傳端系統的設計上。這小節將著重在說明單載波頻域等化系統，並考慮通道環境變化快速，故須要不時重新估測通道，先會介紹循環字首和領航訊號在傳送區塊中的設定，接著再詳細介紹單載波頻域等化系統架構，最後歸納單載波頻域等化系統優缺點。

#### 2.1.1 循環字首

由於多重路徑通道的影響，在傳送端傳送的同一組資料區塊將會在不同時刻被接收端收到，基於這樣的情況，接收端將可能同時收到上個時刻的符元和目前時刻的資料符



元，發生了資料區塊干擾和符元干擾，如下圖 2-1 所表示。

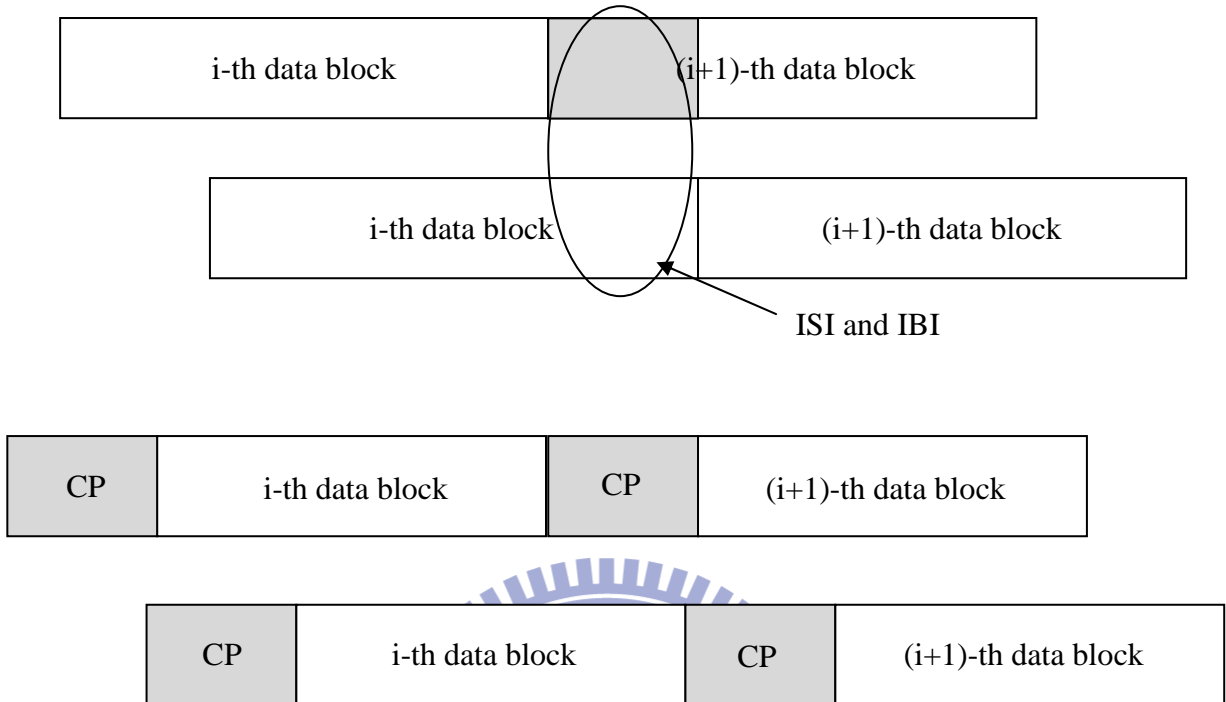


圖 2-1 符元干擾和資料區塊干擾

嚴格來說，符元干擾定義為目前資料區塊的符元受到其他時刻資料區塊符元干擾，換句話說，也意指其它時刻資料區塊的符元損失，而資料區塊干擾則指目前時刻的資料區塊遭到其他時刻資料區塊干擾。為了避免符元干擾，做法為在每個資料區塊前設置保護區間，護衛區間又分為零填補和循環字首，在本論文使用的則是循環字首，循環字首的作法為複製資料區塊後面一部分的資料項加在資料區塊前，而定義上，加在資料區塊前的資料項被稱為循環字首。循環字首對於資料區塊的影響，從圖 2-1 說明，將循環字首加在資料區塊前，將可解決資料區塊干擾和符元干擾的問題。另外循環字首在使用上，須注意其複製的資料項數需大於或等於通道階數，否則資料區塊干擾和符元干擾仍會發生。

使用循環字首雖可消除資料區塊干擾和符元干擾，但對系統而言，其代價是傳送端

需要再從 [ ] 來傳送循環字首，且當多重路徑擴散延遲特別嚴重時，循環字首的階數會變得非常高，將會使的系統在傳送資料上的能量效率降低。

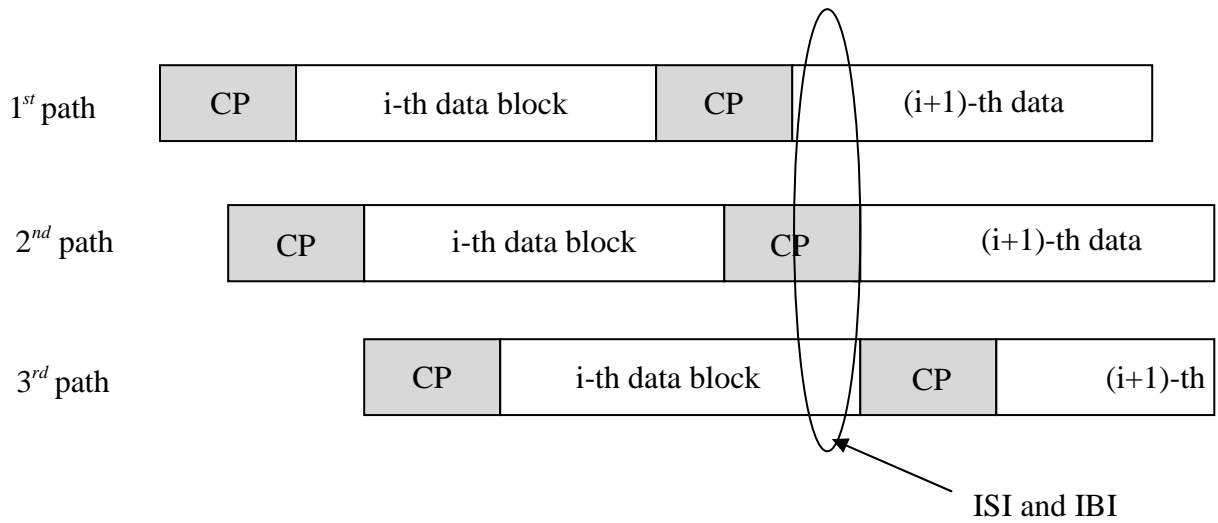


圖 2-2 循環字首階數低於通道階數所造成的符元干擾和資料區塊干擾

## 2.1.2 單載波頻域等化系統架構

這小節會先說明單載波頻域等化系統的傳送端架構，接著是接收端架構，在接收端內容裡會先介紹通道估測，最後是資料頻域等化。

在我們的研究裡，考慮了通道環境變化劇烈的情況，故須不時估測通道，在這樣的通道環境下，傳送端的資料區塊配置參考了[7]，為下圖 2-3

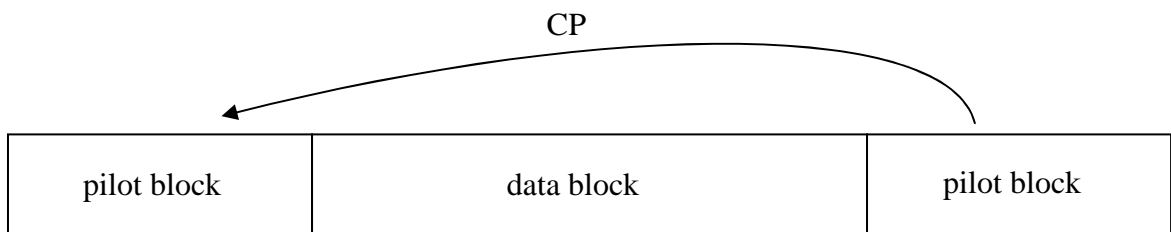


圖 2-3 資料傳送區塊

在每組資料區塊後面都先預置領航資料，並利用循環字首，複製領航資料到資料區塊前

面，這樣的資料配置方式，將可使接收端在接收每組資料區塊時，都可以重新使用循環字首的領航資料來估測通道，有效利用了循環字首，使用循環字首來估測通道，提升了能源使用效率，也消除了符元干擾和資料區塊干擾的問題。

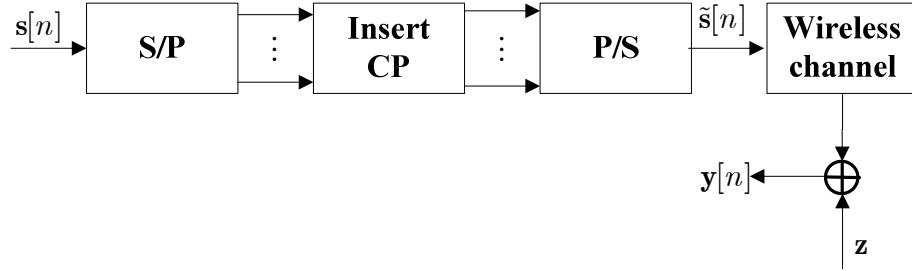


圖 2-4 傳送端和通道

上圖 2-4 為資料經過傳送端處理再經過通道的架構圖， $s[n] \in \mathbb{C}^{N+L}$  為資料源向量，由一般資料向量  $\mathbf{d}[n] \in \mathbb{C}^N$  和領航資料向量  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^L$  組成，定義如下

$$s[n] = \underbrace{[d[nN], d[nN+1], \dots, d[nN+N-1]]}_{\mathbf{d}[n]} \underbrace{[p[0], p[1], \dots, p[L-1]]}_{\mathbf{p}}^T \quad (2.1)$$

$s[n]$  經過串行資料轉換為並行資料，接著配置循環字首後再經過並行資料轉換為串行資料，傳送端傳送資料向量  $\tilde{s}[n] \in \mathbb{C}^{N+2L}$ ，表示為

$$\tilde{s}[n] = [\mathbf{p}, \mathbf{d}[n], \mathbf{p}]^T \quad (2.2)$$

在本論文研究內，假設通道階數  $L$  為已知，且領航資料向量階數和通道階數相同，定義通道向量為  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^L$ ，雜訊向量  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{N+3L}$  為白高斯雜訊向量(white Gaussian noise, WGN)



，且通道系統為線性非時變系統，故接收端接收到的資料為傳送端資料向量  $\tilde{\mathbf{s}}[n]$  和通道向量  $\mathbf{h}$  線性摺積(linear convolution)後加上雜訊向量  $\mathbf{z}$  的結果，以矩陣形式表示傳送資料向量  $\tilde{\mathbf{s}}[n]$  和接收資料向量  $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{C}^{2L+N}$  關係為

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[L-1] \\ y[L] \\ \vdots \\ y[2L+N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}[n]} = \begin{bmatrix} p[0] & \cdots & p[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p[L-1] & \cdots & p[0] \\ d[nN] & \cdots & p[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d[nN+N-1] & \cdots & d[nN+N-L] \\ p[0] & \cdots & d[nN+N-L+1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p[L-1] & \cdots & p[0] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} + \mathbf{z} \quad (2.3)$$

觀察(2.3)式，可看出接收資料  $\mathbf{y}[n]$  內前  $L$  項資料和領航資料向量  $\mathbf{p}$  有關，和一般資料向量  $\mathbf{d}[n]$  無關，將接收資料  $\mathbf{y}[n]$  分離成兩部分，即

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[L-1] \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}[n]} = \underbrace{\begin{bmatrix} p[0] & p[L-1] & \cdots & p[1] \\ p[1] & p[0] & \cdots & p[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p[L-1] & \cdots & \cdots & p[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ \vdots \\ z[L-1] \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

和

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[L] \\ y[L+1] \\ \vdots \\ y[2L+N-1] \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{y}}[n]} = \begin{bmatrix} d[nN] & \cdots & p[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d[nN+N-1] & \cdots & d[nN+N-L] \\ p[0] & \cdots & d[nN+N-L+1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p[L-1] & \cdots & p[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z[L] \\ z[L+1] \\ \vdots \\ z[2L+N-1] \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

其中(2.4)將用於通道估測，(2.5)則用於恢復一般資料序列  $\mathbf{d}[n]$ ，在這裡值得注意的是，由於循環字首的加入，將使的通道向量  $\mathbf{h}$  和傳送端資料向量  $\tilde{\mathbf{s}}[n]$  間線性摺積的關係變成循環摺積(circular convolution)的關係，使的(2.4)的  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{L \times L}$  為循環矩陣，且(2.5)式經過整理後也可以和(2.4)有一樣的循環結構特性，這樣的特性有利於資料使用離散傅立葉轉換(discrete fourier transform, DFT)，轉換資料到頻域上做等化，以降低系統複雜度。

接下來介紹接收端，圖 2-5 為接收端架構圖，當接收端接收到資料向量  $\mathbf{y}[n]$ ，會將資料向量  $\mathbf{y}[n]$  前  $L$  項資料用於通道估測，為了方便在後面章節通道估測內容做敘述，在此令此  $L$  項資料為  $\hat{\mathbf{y}}[n] \in \mathbb{C}^L$ ，而對於資料向量  $\mathbf{y}[n]$  後半部的  $L+N$  筆資料，令為  $\tilde{\mathbf{y}}[n] \in \mathbb{C}^{L+N}$ ， $\tilde{\mathbf{y}}[n]$  將和通道估測的結果作等化處理，以用來還原一般資料向量  $\mathbf{d}[n]$ ，從(2.4)式知道  $\mathbf{y}[n]$  的前  $L$  項資料為領航資料向量內元素的合成加上雜訊所產生，只和領航資料向量  $\mathbf{p}$  有關，領航資料向量為傳送端和接收端已知資料，所以分離  $\mathbf{y}[n]$  內前  $L$  項資料  $\hat{\mathbf{y}}[n] \in \mathbb{C}^L$  用於通道估測，將可以得到估測通道  $\hat{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^L$ 。

接著可利用估測通道  $\hat{\mathbf{h}}$  來恢復一般資料序列  $\mathbf{d}[n]$ ，即頻域等化，在敘述頻域等化之前，先來說明頻域等化的原理，觀察(2.5)可以改寫為

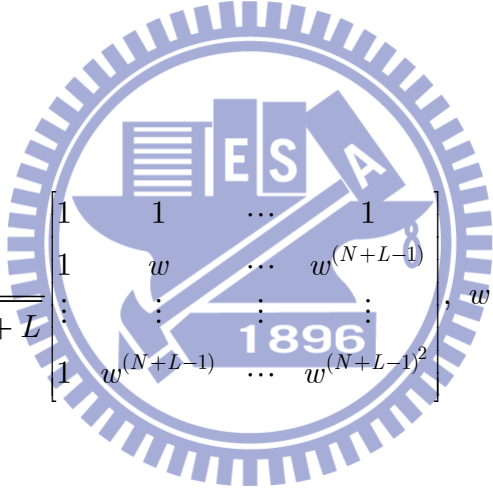
$$\tilde{\mathbf{y}}[n] = \begin{bmatrix} d[nN] & p[L-1] & \cdots & d[nN+1] \\ d[nN+1] & d[nN] & \cdots & d[nN+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p[L-1] & \cdots & \cdots & d[nN] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[L-1] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} z[L] \\ z[L+1] \\ \vdots \\ z[2L+N-1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{z}}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] & 0 & \cdots & h[1] \\ \vdots & h[0] & \cdots & \vdots \\ h[L-1] & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & h[L-1] & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & h[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} d[nN] \\ \vdots \\ d[nN + N - 1] \\ p[0] \\ \vdots \\ p[L-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}[n]} + \bar{\mathbf{z}} \quad (2.6)$$

$\mathbf{H}_0 \in \mathbb{C}^{(L+N) \times (L+N)}$  為循環矩陣，從(2.6)可以知道  $\tilde{\mathbf{y}}[n]$  可表示為  $\mathbf{s}[n]$  和通道  $\mathbf{h}$  填補  $N$  個零項

後做循環摺積後加上雜訊的結果，接下來定義離散傅立葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_{L+N}$  和反離散傅立

葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_{L+N}^{-1}$  為



$$\mathbf{F}_{L+N} = \frac{1}{\sqrt{N+L}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{(N+L-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(N+L-1)} & \cdots & w^{(N+L-1)^2} \end{bmatrix}, w = e^{-j2\pi/(N+L)} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F}_{L+N}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N+L}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{(N+L-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(N+L-1)} & \cdots & w^{(N+L-1)^2} \end{bmatrix}, w = e^{j2\pi/(N+L)} \quad (2.8)$$

圖 2-5 為接收端架構圖，說明如何處理向量  $\tilde{\mathbf{y}}[n]$  來得到等化後的資料，當接收端接收到資料向量  $\mathbf{y}[n]$  後，將先進行移除循環字首的程序，將接收資料向量  $\mathbf{y}[n]$  內前  $L$  項資料，即分離出向量  $\hat{\mathbf{y}}[n]$ ，用來估測通道，剩下的  $L+N$  項資料，即  $\tilde{\mathbf{y}}[n]$  將用來做資料等化。 $\tilde{\mathbf{y}}[n]$  經串並轉換後，再經過離散傅立葉轉換的處理，將  $\tilde{\mathbf{y}}[n]$  轉換到頻域上，這一步驟相

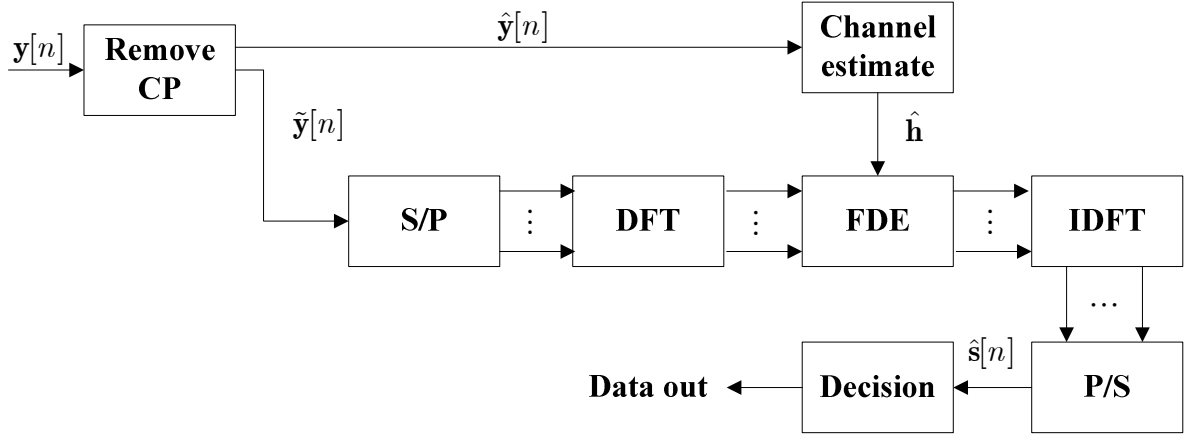


圖 2-5 接收端

當於將離散傅立葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_{L+N}$  乘上(2.6)式，可得到

$$\mathbf{F}_{L+N} \tilde{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{F}_{L+N} \mathbf{H}_0 \mathbf{s}[n] + \mathbf{F}_{L+N} \bar{\mathbf{z}} \quad (2.9)$$

由於  $\mathbf{H}_0$  為循環矩陣，可以被離散傅立葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_{L+N}$  和反離散傅立葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_{L+N}^{-1}$  對角化，經過化簡可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{L+N} \tilde{\mathbf{y}}[n] &= \mathbf{F}_{L+N} \mathbf{H}_0 \mathbf{s}[n] + \mathbf{F}_{L+N} \bar{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{F}_{L+N} \mathbf{H} \mathbf{F}_{L+N}^{-1} \mathbf{F}_{L+N} \mathbf{s}[n] + \mathbf{F}_{L+N} \bar{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{H} \mathbf{S} + \mathbf{F}_{L+N} \bar{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

在這裡

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}_{L+N} \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_{L+N}^{-1} = \begin{bmatrix} H[1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H[w] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H[w^{N+L-1}] \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}_{L+N} \mathbf{s}[n] = \begin{bmatrix} S[0] \\ S[1] \\ \vdots \\ S[L+N-1] \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

且  $H[w^k] = h[0] + h[1]w^{-k} + \cdots + h[L-1]w^{-k(L-1)}$  為填補零項通道向量  $\mathbf{h}_0$  的頻率響應向量

$\mathbf{F}_{L+N}\mathbf{h}_0$  內第  $k+1$  個元素，而  $\mathbf{S}$  則為資料源向量  $s[n]$  的頻率響應向量，接下來將對  $\mathbf{F}_{L+N}\tilde{\mathbf{y}}[n]$  做資料上的等化，等化處理我們採用強制歸零等化器(zero forcing equalization)，首先我們先來說明強制歸零等化器的原理，觀察(2.10)式，假設忽略雜訊項  $\mathbf{F}_{L+N}\bar{\mathbf{z}}$ ， $\mathbf{F}_{L+N}\tilde{\mathbf{y}}[n]$  即為對角矩陣  $\mathbf{H}$  和向量  $\mathbf{S}$  相乘的關係，假設通道估測在沒有誤差發生的情況下，即通道矩陣  $\mathbf{H}$  已知，將可經由簡單計算得到通道矩陣  $\mathbf{H}$  的反矩陣  $\mathbf{H}^{-1}$ ，令強制歸零等化矩陣

$\mathbf{W}_{ZF} \in \mathbb{C}^{N+L}$  為通道反矩陣  $\mathbf{H}^{-1}$

$$\mathbf{W}_{ZF} = \text{diag}\{W[0], \dots, W[N+L-1]\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H[1]} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{H[w]} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{H[w^{N+L-1}]} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

將  $\mathbf{W}_{ZF}$  乘上(2.10)，可得到

$$\mathbf{W}_{ZF}\mathbf{F}_{L+N}\tilde{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{S} + \mathbf{W}_{ZF}\mathbf{F}_{L+N}\bar{\mathbf{z}} \quad (2.14)$$

在考慮雜訊項  $\mathbf{F}_{L+N}\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{0}}$  的情況下，可得

$$\mathbf{W}_{ZF}\mathbf{F}_{L+N}\tilde{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{S} \quad (2.15)$$

即使用強制歸零等化器可完整復原資料  $\mathbf{S}$ 。但當雜訊存在時，將強制歸零等化矩陣  $\mathbf{W}_{ZF}$  乘上雜訊向量  $\mathbf{F}_{L+N}\bar{\mathbf{z}}$ ，可能還會放大雜訊向量  $\mathbf{F}_{L+N}\bar{\mathbf{z}}$ ，從這裡可以知道強制歸零等化器在使用上的複雜度雖低，可是代價卻是可能放大雜訊，使資料在等化上的誤差提高。

接下來需要把頻域上的資料轉回到時域上，將  $\mathbf{W}_{ZF}\mathbf{F}_{L+N}\tilde{\mathbf{y}}[n]$  再乘上反離散傅立葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_{L+N}^{-1}$ ，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{L+N}^{-1} \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{F}_{L+N} \tilde{\mathbf{y}}[n] &= \mathbf{F}_{L+N}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{F}_{L+N}^{-1} \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{F}_{L+N} \bar{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{s}[n] + \mathbf{F}_{L+N}^{-1} \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{F}_{L+N} \bar{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

其中  $\mathbf{F}_{L+N}^{-1} \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{F}_{L+N} \bar{\mathbf{z}}$  為雜訊項，最後再經過檢測程序以求得資料源向量  $\mathbf{s}[n]$ 。

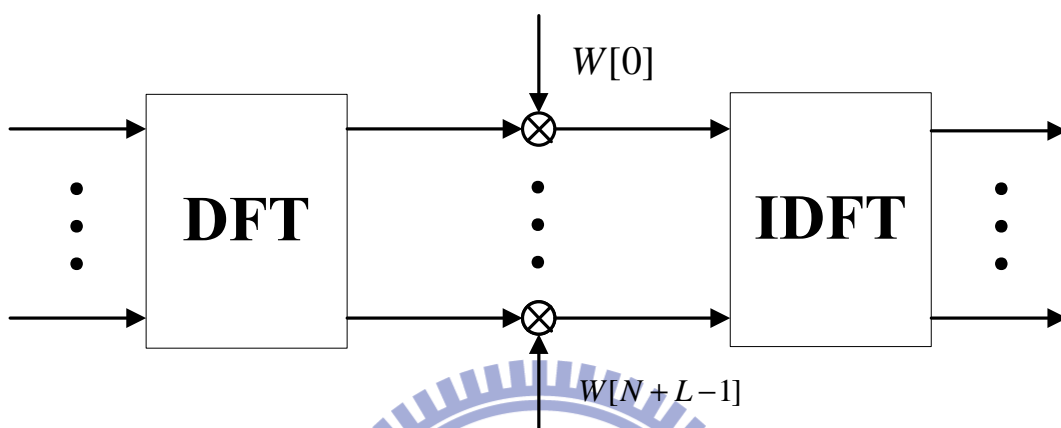


圖 2-6 頻域強制歸零等化器架構圖

### 2.1.3 單載波頻域等化系統優缺點

在這小節歸納單載波頻域等化系統的優缺點，為以下

優點:

- (1) 使用循環字首，解決了對於通道延遲擴散造成的符元干擾問題。
- (2) 在頻域上做資料等化，降低了運算複雜度。
- (3) 和正交分頻多工系統比較，頻率同步的要求較不嚴格。

缺點:

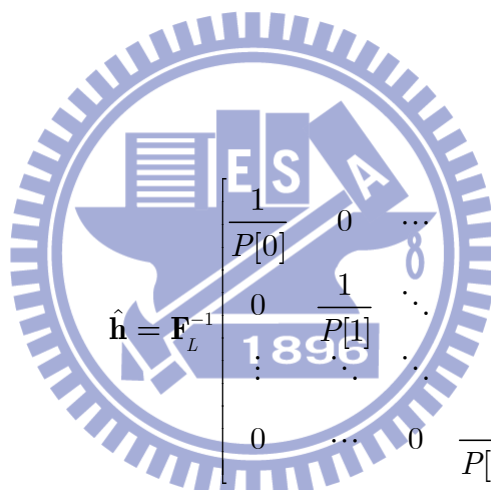
- (1) 在頻寬的管理上，較不具彈性。
- (2) 需要分配一部份能源在循環字首上。

## 2.1.4 最小平方法

這小節要介紹的是用來和本篇論文中的壓縮感測技術在通道估測上做比較的方法，稱為最小平方法，其為線性估測的方式，在許多的文獻及應用上常被使用到，最大優點是其運算複雜度低，但其使用的條件是接收資料維度須大於或等於被估測向量的維度，且系統矩陣須為滿秩(full rank)，在數學上的表示式為

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H \hat{\mathbf{y}}[n] \quad (2.17)$$

其中系統矩陣  $\mathbf{P}$  和向量  $\hat{\mathbf{y}}[n]$  在前面(2.4)中已定義，利用系統矩陣  $\mathbf{P}$  具有循環矩陣的特性，可以將(2.17)化簡為



$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{F}_L^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ P[0] & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{P[1]} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{P[L-1]} \end{bmatrix} \mathbf{F}_L \hat{\mathbf{y}}[n] \quad (2.18)$$

其中

$$\begin{bmatrix} P[0] \\ \vdots \\ P[L-1] \end{bmatrix} = \mathbf{F}_L \begin{bmatrix} p[0] \\ \vdots \\ p[L-1] \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

由(2.17)化簡為(2.18)避免了在最小平方法中需要計算反矩陣，使得運算複雜度可以降低。

## 2.2 壓縮感測技術

### 2.2.1 稀疏資料復原

壓縮感測技術處理的問題著重在欠定系統(underdetermined system)，以較低維度的接收資料來復原高維度的稀疏資料，為了詳細說明，我們考慮以下線性系統模型

$$\mathbf{y} = \Phi\beta + \mathbf{z} \quad (2.20)$$

$\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  為接收資料向量， $\Phi \in \mathbb{C}^{n \times p}$  為系統矩陣( $n \ll p$ )， $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$  為錯誤向量， $\beta \in \mathbb{C}^p$  為稀疏向量， $\beta$  內包含  $S$  個不為零的元素項，其餘元素項皆為零，且不為零的元素項數量  $S$  遠小於維度  $p$ ，在這樣的假設下，壓縮感測技術目的在於利用維度較小的接收資料向量  $\mathbf{y}$ ，來復原高維度稀疏向量  $\beta$ ，考慮錯誤向量  $\mathbf{z}$  為  $\vec{0}$  的簡單例子，由(2.20)式的假設中  $n \ll p$ ，可以知道有無限多組解  $\beta'$  滿足  $\mathbf{y} = \Phi\beta'$ ，這是因為對於系統矩陣  $\Phi$ ，將會存在其相對的零空間  $N(\Phi)$  (null space)，而在零空間  $N(\Phi)$  內的任意向量  $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^p$  將會滿足  $\mathbf{y} = \Phi(\beta + \mathbf{r})$  因此對於復原稀疏資料的演算法，將會相當於在  $p - n$  維度的零空間  $H = N(\Phi) + \beta$  內去搜尋稀疏資料的係數。

接下來探討幾種常用的復原資料方法，我們將會比較這些不同方法是否可以用在復原稀疏資料上，首先我們定義對於向量  $\gamma$ ，其  $\ell_\kappa$  範數為  $(\|\gamma\|_\kappa)^\kappa = \sum_{i=1}^p |\gamma_i|^\kappa$ ，並且假設了雜訊  $\mathbf{z}$  為  $\vec{0}$

#### (a) 最小 $\ell_2$ 範數資料復原方法

傳統上，我們想要在零空間  $H = N(\Phi) + \beta$  內去求解資料，一般來說，幾乎都會使用  $\ell_2$  範數來求解，即經由以下方式



$$\hat{\beta} = \arg \min \|\gamma\|_2 \quad \text{subject to} \quad \Phi\gamma = \mathbf{y} \quad (2.21)$$

對於以上最佳化問題，存在簡單的公式解  $\hat{\beta} = \Phi^H(\Phi\Phi^H)^{-1}\mathbf{y}$ 。可惜的是，使用  $\ell_2$  範數來復原資料，幾乎無法找到  $S$  稀疏向量，其解  $\hat{\beta}$  總是包含許多非零項元素。

### (b) 最小 $\ell_0$ 範數資料復原方法

對於  $\ell_2$  範數的方式，以求得資料向量能量最小作為最佳解，此解將不會是稀疏向量解，轉而尋求另一個方式來求出稀疏解，即使用  $\ell_0$  範數， $\ell_0$  範數使用在向量上，是在計算向量內非零項元素的數量， $\ell_0$  範數使用在  $S$  稀疏向量上則為  $S$ ，以數學形式來估測稀疏向量  $\beta$  表示為

$$\hat{\beta} = \arg \min \|\gamma\|_0 \quad \text{subject to} \quad \Phi\gamma = \mathbf{y} \quad (2.22)$$

以這樣的方法來復原稀疏資料的準確性高[8]，但對於(2.22)式求解的運算過程，其在運算複雜度上是 NP-complete，需要在稀疏向量內所有非零項元素位置的組合數  $\binom{p}{S}$  間進行徹底搜尋，以求出最佳解，使得運算複雜度極高，在實際應用上也將變得不可行。

### (c) 最小 $\ell_1$ 範數資料復原方法

使用  $\ell_1$  範數最佳化方法

$$\hat{\beta} = \arg \min \|\gamma\|_1 \quad \text{subject to} \quad \Phi\gamma = \mathbf{y} \quad (2.23)$$

來復原稀疏資料，在[9]中，提到以獨立相同分布(independent identical distributed, i.i.d.)的高斯隨機分布來製造出的系統矩陣 $\Phi$ ，在復原稀疏資料上，當接收向量 $\mathbf{y}$ 的維度滿足 $n \geq cS \log(p/S)$ 時( $c$ 在這裡為一個非常小且大於零的常數)，會有非常高的機率可準確還原稀疏資料或是近似於稀疏資料。(2.23)在數學上為凸型最佳化(convex optimization)問題，可間接轉換為線性規劃(linear program)問題，其運算複雜度為 $O(p^3)$ ，和擁有高運算複雜度的 $\ell_0$ 範數最佳化方式做比較，其可作為在復原稀疏資料上較為建議的作法。

為了有助於了解為何在復原 $S$ 稀疏資料上，使用 $\ell_2$ 範數無法復原 $S$ 稀疏資料，而使用 $\ell_1$ 範數的作法則可復原 $S$ 稀疏資料，將從幾何的觀點來進行探討。在 $\mathbb{C}^p$ 空間中，所有 $S$ 稀疏向量所構成的子空間是一組非線性空間，其相當於由維度 $S$ 的超平面(hyperplane)所組成，且這每組維度 $S$ 的超平面都包含了一些空間座標軸，如圖 2-7，在前面敘述中提到對於復原稀疏資料，相當於在零空間 $H = N(\Phi) + \beta$ 中去求解，而零空間 $H$ 在維度 $p$ 的空間中，是以稀疏資料 $\beta$ 為中心點向外展開零空間 $N(\Phi)$ 所構成，其在維度 $p$ 空間的角度受系統矩陣 $\Phi$ 所影響，當系統矩陣 $\Phi$ 以隨機變數的方式所產生時，其零空間 $H$ 的角度將為隨機角度，對於在零空間 $H$ 中使用 $\ell_2$ 範數來求得最接近原點的

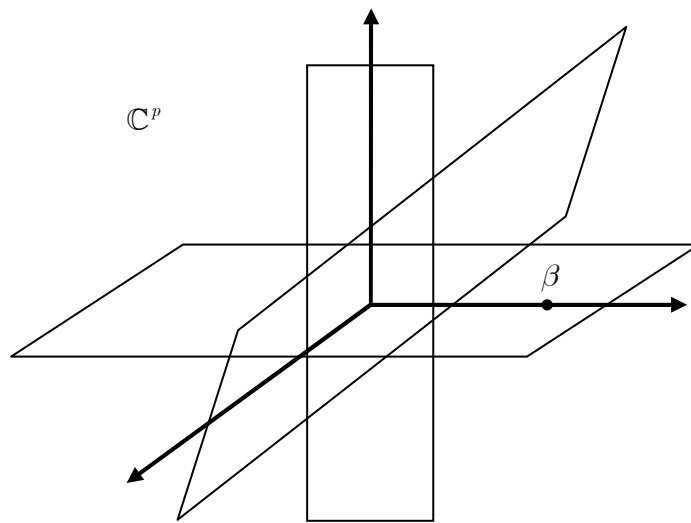


圖 2-7 超平面幾何透視圖

解，將會有很高的機率偏移座標軸(即不在維度  $S$  的超平面上)，使的復原所得到的解不具有稀疏特性，在圖 2-8 中可看到此現象，在零空間  $H$  中求最小  $\ell_2$  範數解即利用超球體，使超球體體積在最小情況下且剛好和零空間  $H$  相交於一點做為最佳解  $\hat{\beta}$ ，這樣的最佳解和實際的稀疏解  $\beta$  有著明顯差距。

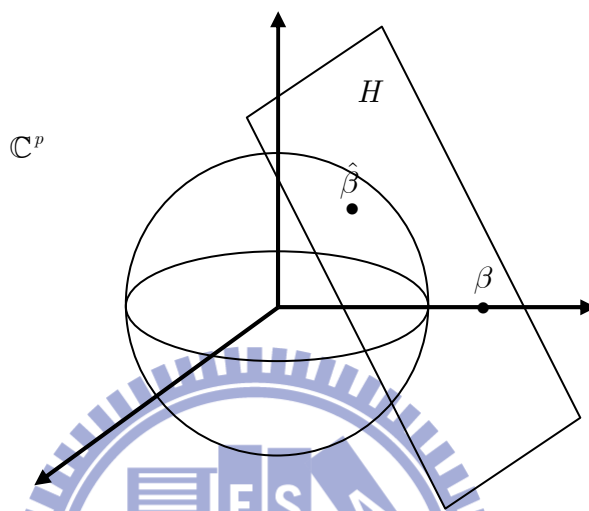


圖 2-8  $\ell_2$  範數幾何透視圖

相反的，從圖 2-9 觀察， $\ell_1$  範數球體其頂點剛好都座落在座標軸上，當  $\ell_1$  範數球體由最小體積開始擴張，直到和零空間  $H$  相交於一點，此交點正好是稀疏向量  $\beta$ ，比較前面使用  $\ell_2$  範數的方式，得到了結論對於使用  $\ell_1$  範數較  $\ell_2$  範數在復原稀疏資料上，其準確性較高的原因。

接下來進一步考慮錯誤向量  $\mathbf{z}$  不為零的情況，當錯誤向量  $\mathbf{z}$  其歐幾里得向量大小不會超過  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  時，我們可以將(2.21)的限制條件進行修改，表示為

$$\hat{\beta} = \min_{\gamma \in \mathbb{R}^p} \|\gamma\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|\Phi\gamma - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.24)$$

實際在應用上，我們可能無法正確得知錯誤向量  $\mathbf{z}$  其最大可能的歐幾里德大小，故  $\varepsilon$  在

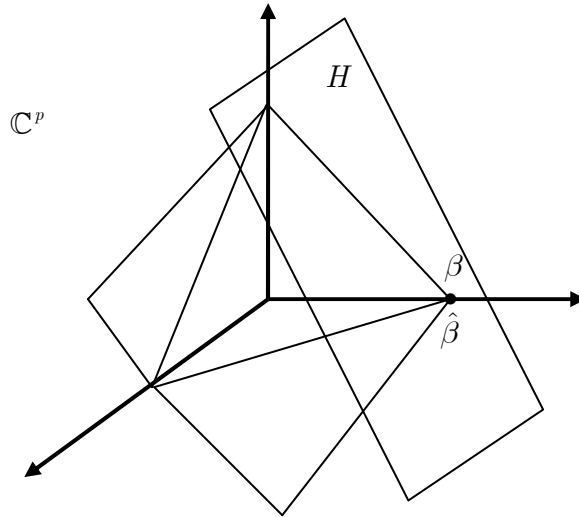


圖 2-9  $\ell_1$  範數幾何透視圖

設定上，應盡可能保守的將  $\varepsilon$  設定的比錯誤向量  $\mathbf{z}$  最大可能的歐幾里德大小還大，即  $\|\mathbf{z}\|_2 \leq \varepsilon$ ，但  $\varepsilon$  如果設定過大也不適宜，將可能導致復原稀疏資料的誤差提高。

在壓縮感測技術中，除了使用(2.24)來復原稀疏向量，另一個常見的方法為 Dantzig selector method (DS)[11]，表示為

$$\hat{\beta} = \min_{\gamma \in \mathbb{R}^p} \|\gamma\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|\Phi^H (\mathbf{y} - \Phi\gamma)\|_\infty \leq \lambda \quad (2.25)$$

Dantzig selector method 由 Candes 和 Tao 提出，考慮限制條件為誤差  $(\mathbf{y} - \Phi\gamma)$  和系統矩陣  $\Phi$  的每一行向量之間作內積，取其絕對值最大值小於  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ，在這樣的條件下，經由  $\ell_1$  範數最小化來復原稀疏向量。

## 2.2.2 限制等距性質和互斥不相關性質

壓縮感測技術使用  $\ell_1$  範數最小化方法來復原稀疏向量，但要有效的復原稀疏向量，系統矩陣  $\Phi$  必須滿足某些條件，這些條件也常被用在分析壓縮感測技術的效能，在後面

的章節也會使用到，以下將介紹這些條件定義式，分別為限制等距性質(restricted isometry property, RIP)和互斥不相關性質(mutual incoherence property, MIP)兩個條件定義式。

**定義 1.** 限制等距性質[12]:

假設任意向量  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^p$  內包含不超過  $S$  個非零值，系統矩陣  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times p}$  內的任意行向量其歐幾里德大小為一，且限制等距常數(restricted isometry constant, RIC)  $\delta_s \in (0, 1)$ ，如果系統矩陣  $\Phi$  滿足

$$(1 - \delta_s) \leq \frac{\|\Phi \mathbf{c}\|_2^2}{\|\mathbf{c}\|_2^2} \leq (1 + \delta_s) \quad (2.26)$$

我們就稱系統矩陣  $\Phi$  滿足  $\text{RIP}(S, \delta_s)$ 。

以幾何的觀點來看此定義，限制等距性質在於描述，對於非零值數量不超過  $S$  的任意稀疏向量  $\mathbf{c}$ ，乘上系統矩陣  $\Phi$  之後所得到的向量，其向量的歐幾里德大小  $\|\Phi \mathbf{c}\|_2^2$  和原本稀疏向量  $\mathbf{c}$  的歐幾里德大小  $\|\mathbf{c}\|_2^2$  相當， $\|\Phi \mathbf{c}\|_2^2$  和  $\|\mathbf{c}\|_2^2$  比例介在  $(1 - \delta_s)$  和  $(1 + \delta_s)$  之間，當  $\delta_s$  值愈小，系統矩陣  $\Phi$  的特性則愈接近正交矩陣。

在限制等距性質中的最重要的參數，限制等距常數，其值大小由系統矩陣  $\Phi$  所決定，限制等距常數的大小將會影響壓縮感測技術復原稀疏向量的準確性，理論上限制等距常數愈小，則壓縮感測技術復原稀疏向量的準確性愈高，故限制等距常數也常被用在分析系統矩陣  $\Phi$  在不同的  $\ell_1$  範數最小化方法下的估測誤差，可見其重要性，以下將介紹關於一些限制等距常數的特性。

**命題 1.** 限制等距常數的特性[13]:

假設系統矩陣  $\Phi \in \mathbb{C}^{n \times p}$  的限制等距常數為  $\delta_s$ ，則

(a) 限制等距常數當稀疏量  $S$  遞增，則限制等距常數也會遞增，即  $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3 \leq \dots$

(b) 限制等距常數  $\delta_s$  可表示為

$$\begin{aligned}\delta_s &= \max_{S \subset [p], |S| \leq s} \|\Phi_S^H \Phi_S - \mathbf{I}\|_2 \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in T_s} \left| \langle (\Phi^H \Phi - \mathbf{I}) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \right|\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\text{這裡 } T_s = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^p, \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \|\mathbf{x}\|_0 \leq s \right\}$$

(c) 令  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^p$ ， $\text{supp } \mathbf{u} \cap \text{supp } \mathbf{v} = \emptyset$ ，且  $s = |\text{supp } \mathbf{u}| + |\text{supp } \mathbf{v}|$ ，則

$$\left| \langle \Phi \mathbf{u}, \Phi \mathbf{v} \rangle \right| \leq \delta_s \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2 \quad (2.28)$$

另外在壓縮感測技術中，也有和(2.26)相似的定義，假設有兩個任意的稀疏向量  $\mathbf{c}$  和  $\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^p$ ，使用  $T = \{t | \mathbf{c}[t] \neq 0\}$  和  $T' = \{t | \mathbf{c}'[t] \neq 0\}$  來表示  $\mathbf{c}$  和  $\mathbf{c}'$  內不為零的元素索引值， $T$  和  $T'$  為互斥集合，滿足  $|T| \leq S$  和  $|T'| \leq S'$ ，且  $S + S' \leq p$ ，在這樣的假設下定義限制正交常數(restricted orthogonality constant)  $\theta_{s,s'}$  為滿足以下條件之最小值

$$\left| \langle \Phi \mathbf{c}, \Phi \mathbf{c}' \rangle \right| \leq \theta_{s,s'} \cdot \|\mathbf{c}\|_2 \|\mathbf{c}'\|_2 \quad (2.29)$$

**定義 2.** 互斥不相關性質[14]:

系統矩陣  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times p}$  內的任意行向量其歐幾里德大小為一，且對系統矩陣  $\Phi$  內所有可能組合的任意兩組行向量作內積，取其內積絕對值之最大值，令為相關性(coherence)常數  $u$ ，

即

$$u = \max_{i \neq j} \left| \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle \right| \quad (2.30)$$

互斥不相關性質以數據化來表達系統矩陣 $\Phi$ 對於滿足正交特性的程度，當相關性常數 $u$ 愈小，則系統矩陣 $\Phi$ 內的行向量之間關係愈接近正交向量(正交向量其內積為零)。另外在一些研究文獻中，對於系統矩陣的行向量的相關性，提出了較為精確的定義，為1-相關性函數(1-coherence function)，表示為

$$u_1(s) = \max_{\ell \in [p]} \max_{\substack{S \subset [N] \setminus \{\ell\} \\ |S| \leq s}} \left| \langle \Phi_\ell, \Phi_S \rangle \right| \leq su \quad (2.31)$$

相關性常數和1-相關性函數，以及限制等距常數在特性上有關連性存在，以下將列舉其關係及特性。

**命題 2.** 相關性常數的特性[13]:

- (a)  $u = \delta_2$
- (b)  $u_1(s) = \max_{S \subset [N], |S| \leq s+1} \left\| \Phi_S^H \Phi_S - I \right\|_1$
- (c)  $\delta_s \leq (s-1)u_1 \leq (s-1)u$

## 2.2.3 稀疏資料復原誤差分析

以壓縮感測技術來復原稀疏資料，其復原的正確性和系統矩陣 $\Phi$ 有很大的關聯性，在分析上，就常利用上一節所介紹的限制等距性質和互斥不相關性質來分析壓縮感測技術的復原資料誤差，而在這一節，將會介紹當系統矩陣 $\Phi$ 在滿足各種不同的條件下，其影響在壓縮感測技術上相對應的資料復原誤差。

**(a) 無錯誤向量干擾的情況**



考慮(2.20)在錯誤向量為零向量的線性系統模型

$$\mathbf{y} = \Phi\beta \quad (2.32)$$

對於(2.32)，在[12]中，提出了當系統矩陣 $\Phi$ 滿足 $\delta_s + \theta_{s,s} + \theta_{s,2s} < 1$ ，利用 $\ell_1$ 範數最佳化(2.23)可以正確無誤復原稀疏資料 $\beta$ ，在[13]則是提出 $\delta_{2s} < \frac{1}{3}$ 下，利用(2.23)可以正確復原稀疏資料 $\beta$ ，除了以上利用限制等距性質來做為準確復原稀疏資料的條件外，也有利用互次不相關性質來做為復原稀疏資料的條件，如在[15]中，提出了當 $S < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} + 1 \right)$ ，則利用(2.23)可以準確復原稀疏資料。

### (b) 存在錯誤向量干擾的情況

在壓縮感測技術中將錯誤向量干擾的情況，即對於(2.20)，分為有界錯誤向量和無界錯誤向量，有界錯誤向量指的是錯誤向量的歐幾里德大小恆不超過某一常數，而無界錯誤向量則指錯誤向量的歐幾里德大小可能會到無限大，如以高斯隨機分布所產生的錯誤向量，就有可能其錯誤向量的歐幾里德大小到達無限大，以下將分別介紹在有界錯誤向量和無界錯誤向量的情況下，壓縮感測技術的復原誤差分析。

#### $\ell_2$ 範數限制:

考慮錯誤向量 $\mathbf{z}$ 滿足 $\|\mathbf{z}\|_2 \leq \varepsilon$ ，在[16]中提出當系統矩陣 $\Phi$ 滿足 $\delta_{3s} + 3\delta_{4s} < 2$ ，使用限制式為 $\ell_2$ 範數限制式的 $\ell_1$ 範數最佳化方式，即(2.24)來復原稀疏資料，其誤差為

$$\|\hat{\beta} - \beta\|_2 \leq C_s \varepsilon \quad (2.33)$$



在這裡  $C_s$  是一個和  $\delta_{4s}$  有關的常數。而在[17]提出當  $\delta_s < 0.307$ ，則使用(2.21)的復原誤差為

$$\|\hat{\beta} - \beta\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{0.307 - \delta_s} \quad (2.34)$$

而使用互次不相關性質來對壓縮感測技術做誤差分析方面，在[15]提出  $S < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} + 1 \right)$  和

$\varepsilon \leq \eta$ ，並將(2.24)的條件限制式改為  $\|\Phi\gamma - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$ ，在這樣的情況下，使用(2.21)復原稀疏資料的誤差為

$$\|\hat{\beta} - \beta\|_2 \leq \frac{\sqrt{3(1+u)}}{1 - (2S-1)u} \cdot (\eta + \varepsilon) \quad (2.35)$$

#### Dantzig selector method:

當錯誤向量的歐幾里德大小可能達到無限大時，如錯誤向量由高斯隨機分布所產生，這也是最常見的情況，此時使用(2.24)來復原稀疏資料較不適用，這時使用 Dantzig selector method，也就是(2.25)較為適當，以下將針對使用(2.25)，介紹其在復原稀疏資料上的誤差。

對於(2.25)，選擇  $\lambda = \sigma\sqrt{2 \log p}$ ，在[11]中，考慮錯誤向量由獨立同分布的高斯隨機分布  $N(0, \sigma^2)$  所產生，提出了當系統矩陣  $\Phi$  滿足  $\delta_{2s} + \theta_{s,2s} < 1$ ，則復原誤差將會有很高的機率滿足

$$\|\hat{\beta} - \beta\|_2^2 \leq C_1^2 \cdot (2 \log p) \cdot S \cdot \sigma^2 \quad (2.36)$$

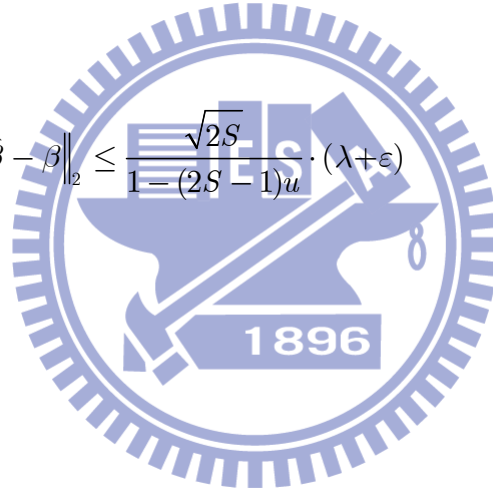
在這裡  $C_1 = 4 / (1 - \delta_{2S} + \theta_{S,2S})$ 。而在[17]中則是提出當錯誤向量  $\mathbf{z}$  滿足  $\|\Phi^H \mathbf{z}\|_\infty \leq \lambda$ ，且系統矩陣  $\Phi$  滿足  $\delta_S < 0.307$ ，則使用(2.25)復原資料的誤差為

$$\|\hat{\beta} - \beta\|_2 \leq \frac{\sqrt{S}}{0.307 - \delta_S} \lambda \quad (2.37)$$

同樣的，Dantzig selector method 在復原誤差分析上，也有利用互次不相關性質來做復原誤差分析，考慮在錯誤向量  $\mathbf{z}$  滿足  $\|\Phi^H \mathbf{z}\|_\infty \leq \varepsilon$  且  $\varepsilon \leq \lambda$ ，在[15]提出了當  $S < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} + 1 \right)$ ，

則復原誤差為

$$\|\hat{\beta} - \beta\|_2 \leq \frac{\sqrt{2S}}{1 - (2S - 1)u} \cdot (\lambda + \varepsilon) \quad (2.38)$$



# 第三章 壓縮感測技術與隨機循環矩陣

## 3.1 隨機循環矩陣滿足受限等距性質的機率分析

在這小節會介紹隨機循環矩陣滿足限制等距性質的機率，在開始之前，先介紹幾個輔助定理，這些輔助定理會被用在主要結果的證明內，以下將先介紹循環矩陣的自相關矩陣特性，接著再介紹本篇論文中，所引用參考文獻上的輔助定理。

**引理 1.** 假設  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{L \times L}$  為循環矩陣，則自相關矩陣  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  為對稱矩陣，即  $(\mathbf{P}^H \mathbf{P})^T = \mathbf{P}^H \mathbf{P}$ 。

Proof:

證明  $(\mathbf{P}^H \mathbf{P})^T$  和  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  相等，相當於證明  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  內的元素  $(\mathbf{P}^H \mathbf{P})_{ij}$  和元素  $(\mathbf{P}^H \mathbf{P})_{ji}$  相等，在此  $1 \leq i, j \leq L$ 。假設  $\mathbf{p}_1$  為循環矩陣  $\mathbf{P}$  的第一個行向量，則循環矩陣  $\mathbf{P}$  的第  $i$  個行向量  $\mathbf{p}_i$  以  $\mathbf{p}_1$  表示為

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{J}^{i-1} \mathbf{p}_1 \quad (3.1)$$

其中  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  為置換矩陣，為

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

接下來經過以下推導

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{P}^H \mathbf{P})_{ij} \\
&= \mathbf{p}_i^H \mathbf{p}_j \\
&= (\mathbf{J}^{i-1} \mathbf{p}_1)^H (\mathbf{J}^{j-1} \mathbf{p}_1) \\
&= \mathbf{p}_1^H \mathbf{J}^{i+j-2} \mathbf{p}_1 \\
&= (\mathbf{J}^{j-1} \mathbf{p}_1)^H (\mathbf{J}^{i-1} \mathbf{p}_1) \\
&= \mathbf{p}_j^H \mathbf{p}_i \\
&= (\mathbf{P}^H \mathbf{P})_{ji}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

得證。

**引理 2.** 假設  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{L \times L}$  為循環矩陣，定義循環矩陣  $\mathbf{P}$  的自相關矩陣為

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}^H \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{G}_{1,2} & \mathbf{G}_{1,3} & \cdots & \mathbf{G}_{1,L-1} & \mathbf{G}_{1,L} \\ \mathbf{G}_{2,1} & \mathbf{G}_{2,2} & \mathbf{G}_{2,3} & \cdots & \mathbf{G}_{2,L-1} & \mathbf{G}_{2,L} \\ \mathbf{G}_{3,1} & \mathbf{G}_{3,2} & \mathbf{G}_{3,3} & \cdots & \mathbf{G}_{3,L-1} & \mathbf{G}_{3,L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{G}_{L-1,1} & \mathbf{G}_{L-1,2} & \mathbf{G}_{L-1,3} & \cdots & \mathbf{G}_{L-1,L-1} & \mathbf{G}_{L-1,L} \\ \mathbf{G}_{L,1} & \mathbf{G}_{L,2} & \mathbf{G}_{L,3} & \cdots & \mathbf{G}_{L,L-1} & \mathbf{G}_{L,L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \circ & \triangle & \square & \cdots & \square & \triangle \\ \triangle & \circ & \triangle & \cdots & \triangle & \square \\ \square & \triangle & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \square & \cdots & \cdots & \triangle & \circ & \triangle \\ \triangle & \square & \cdots & \square & \triangle & \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{L \times L}$$

自相關矩陣  $\mathbf{G}$  有以下特性。

(1) 對角元素相同，即

$$\mathbf{G}_{1,1} = \mathbf{G}_{2,2} = \cdots = \mathbf{G}_{L,L}$$

(2) 非對角元素有下列規律

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{i,i+d} = \mathbf{G}_{j,j+L-d} = \mathbf{G}_{k+d,k} = \mathbf{G}_{l+L-d,l} \\ 1 \leq d \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor, 1 \leq i, k \leq L-d, 1 \leq j, l \leq d \end{cases}$$

綜合以上特性，可得出自相關矩陣  $\mathbf{G}$  內不同元素的最大數量為  $\left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor + 1$ 。

例子：

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{G}_{1,2} & \mathbf{G}_{1,3} & \mathbf{G}_{1,4} & \mathbf{G}_{1,5} \\ \mathbf{G}_{2,1} & \mathbf{G}_{2,2} & \mathbf{G}_{2,3} & \mathbf{G}_{2,4} & \mathbf{G}_{2,5} \\ \mathbf{G}_{3,1} & \mathbf{G}_{3,2} & \mathbf{G}_{3,3} & \mathbf{G}_{3,4} & \mathbf{G}_{3,5} \\ \mathbf{G}_{4,1} & \mathbf{G}_{4,2} & \mathbf{G}_{4,3} & \mathbf{G}_{4,4} & \mathbf{G}_{4,5} \\ \mathbf{G}_{5,1} & \mathbf{G}_{5,2} & \mathbf{G}_{5,3} & \mathbf{G}_{5,4} & \mathbf{G}_{5,5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \circ & \triangle & \square & \square & \triangle \\ \triangle & \circ & \triangle & \square & \square \\ \square & \triangle & \circ & \triangle & \square \\ \square & \square & \triangle & \circ & \triangle \\ \triangle & \square & \square & \triangle & \circ \end{bmatrix}, L=5$$

對於  $d = 1$ ，三角形的元素會相等，即

$$\mathbf{G}_{i,i+1} = \mathbf{G}_{1,5} = \mathbf{G}_{k+1,k} = \mathbf{G}_{5,1}, \begin{cases} 1 \leq i, k \leq 4 \\ 1 \leq j, l \leq 1 \end{cases}$$

對於  $d = 2$ ，正方形的元素會相等，即

$$\mathbf{G}_{i,i+2} = \mathbf{G}_{i,j+3} = \mathbf{G}_{k+2,k} = \mathbf{G}_{l+3,l}, \begin{cases} 1 \leq i, k \leq 3 \\ 1 \leq j, l \leq 2 \end{cases}$$

Proof:

令  $\mathbf{p}_i$  為循環矩陣  $\mathbf{P}$  的第  $i$  個行向量，其中  $1 \leq i \leq L$ ，循環矩陣  $\mathbf{P}$  的自相關矩陣表示為

$$\mathbf{P}^H \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_L \\ \mathbf{p}_2^H \mathbf{p}_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_L^H \mathbf{p}_1 & \cdots & \cdots & \mathbf{p}_L^H \mathbf{p}_L \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

循環矩陣  $\mathbf{P}$  為托波力茲矩陣，故自相關矩陣  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  亦為托波力茲矩陣，要證明自相關矩陣

$\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  具有引理 2 所提出的結構性，相當於證明  $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_L \end{bmatrix}$  具有對稱性。

假設有一序列  $h[n] = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \delta[n - wL]$ ，我們將利用  $h[n]$  來建立週期性序列  $\tilde{\mathbf{p}}_i$ ， $\mathbf{p}_i$  和  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  有下列關係

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}_i = f(\mathbf{p}_i) = h[n] \otimes \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_i = f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_i) \end{cases} \quad (3.5)$$

考慮  $j \geq 2$ ，我們可以推導出

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_j &= f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_1)^H f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_j) \\ &= f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_L)^H f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_{L+j-1}) \\ &= f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_{L+j-1})^H f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_L) \\ &= f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_1)^H f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_{2-j}) \\ &= f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_1)^H f^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}_{L-(j-2)}) \\ &= \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_{L-(j-2)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

第二個等號使用了托波力茲矩陣的特性。

第三個等號則是利用了引理 1。

第四個等號則是對於週期性訊號平移  $2 - L - j$ 。

第五個等號是  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  的週期性為  $L$ 。

因此我們推導出對於  $j \geq 2$ ， $\mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_{L-(j-2)}$ ，即  $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_L \end{bmatrix}$  具有對稱性。

最後我們將計算自相關矩陣  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  內不同元素的最多數量，要計算自相關矩陣  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  不包

含對角元素的不同元素的最多數量，相當於去計算  $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_L \end{bmatrix}$  內不同元素的最多

數量。利用  $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_L \end{bmatrix}$  具有對稱性，可得到自相關矩陣  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  不包含對角元素，不

同元素的最多數量為  $\left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor$ ，即自相關矩陣  $\mathbf{P}^H \mathbf{P}$  不同元素的最多數量為  $\left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor + 1$ 。

**引理 3.[18]** 考慮  $\{p[i]\}_{i=1}^L$  由獨立相同分布的高斯隨機變數  $N(0, \sigma^2)$  所產生，則對於  $p[i]$  的平方加總將會滿足

$$\Pr \left( \sum_{i=1}^L p[i]^2 - k\sigma^2 \geq 2\sigma^2 \sqrt{Lt} + 2\sigma^2 t \right) \leq \exp(-t)$$

和

$$\Pr \left( \sum_{i=1}^L p[i]^2 - k\sigma^2 \leq -2\sigma^2 \sqrt{Lt} \right) \leq \exp(-t)$$

在這裡  $t$  滿足  $0 \leq t \leq 1$ ，且可得到對稱性上界

$$\Pr \left( \left| \sum_{i=1}^L p[i]^2 - k\sigma^2 \right| \geq 4\sigma^2 \sqrt{Lt} \right) \leq 2 \exp(-t)$$

**引理 4.[18]** 考慮  $\{p[i]\}_{i=1}^L$  由獨立相同分布的有界隨機變數所產生，使得  $p[i]$  滿足  $|p[i]| \leq a$ ，

有界隨機變數的變異數為  $E[p[i]^2] = \sigma^2$ ，則

$$\Pr \left( \left| \sum_{i=1}^L p[i]^2 - k\sigma^2 \right| \geq t \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{2t^2}{ka^4} \right)$$

**定理 1.** 領航序列  $\{p[i]\}_{i=1}^L$  由獨立相同分布平均值為零的高斯隨機變數產生，其變異數

為  $E[p[i]^2] = 1/L$ 。如果  $\frac{108S^2}{(3S^2 + 2)\delta_s^2} \leq \frac{L}{\log(4L + 4)}$  成立，則

$$\Pr(\mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \leq 2 \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{36}\right) + 4 \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{54S^2}\right)$$

Proof:

a)

以特徵值的角度來考慮限制等距性質，可得

$$(1 - \delta_s) \leq \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{G} \mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \leq (1 + \delta_s), \mathbf{G} = \mathbf{P}^H \mathbf{P} \Leftrightarrow$$

$$(1 - \delta_s) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{G}_T) \leq \frac{\mathbf{z}_T^H \mathbf{G}_T \mathbf{z}_T}{\|\mathbf{z}_T\|_2^2} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{G}_T) \leq (1 + \delta_s)$$

$$, \mathbf{G}_T = \mathbf{P}_T^H \mathbf{P}_T \text{ and } |T| = S, \forall T$$

(3.7)

在這裡 ( $0 \leq \delta_s \leq 1$ )。



b)

以線性代數中 Gersgorin disks 定理來考慮(3.7)，如果

$$\begin{cases} |\mathbf{G}_{i,i} - 1| \leq \delta_d, \forall i \\ |\mathbf{G}_{i,j}| \leq \frac{\delta_o}{S}, \forall i, j \\ \delta_d + \delta_o = \delta_s, \delta_d \geq 0 \text{ and } \delta_o \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

成立，則(3.7)就會成立，即  $\mathbf{P}$  滿足限制等距性質。

目的為推導出  $\mathbf{P}$  不滿足限制等距性質的機率上界，以 Gersgorin disks 定理來考慮  $\mathbf{P}$  不滿足限制等距性質的機率上界，將會比直接考慮  $\mathbf{P}$  不滿足限制等距性質的機率上界來的大，

即

$$\begin{aligned} & \Pr(\text{upper bound of that } \mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \\ & \leq \Pr(\text{upper bound of that } \mathbf{P} \text{ does not satisfy (3.8)}) \end{aligned}$$

因此可得



$$\begin{aligned} & \Pr(\mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \\ & \leq \Pr(\text{upper bound of that } \mathbf{P} \text{ does not satisfy (3.8)}) \end{aligned}$$

以下將藉由推導  $\mathbf{P}$  不滿足(3.8)的機率上界，來求出  $\mathbf{P}$  不滿足限制等距性質的機率上界。

c)

由引理 3，可得到  $\mathbf{G}$  的對角元素  $\mathbf{G}_{i,i} = \sum_{j=1}^L p[j]^2$  滿足

$$\Pr\left(\left|\sum_{j=1}^L p[j]^2 - 1\right| \geq \frac{4}{L}\sqrt{Lt}\right) \leq 2\exp(-t) \quad (3.9)$$

令  $t = \frac{L\delta_d^2}{16}$ ，可得

$$\Rightarrow \Pr\left(\left|\mathbf{G}_{i,i} - 1\right| \geq \delta_d\right) \leq 2\exp\left(-\frac{L\delta_d^2}{16}\right) \quad (3.10)$$

再由引理 1 可得

$$\Rightarrow \Pr\left(\bigcup_{i=1}^L \left|\mathbf{G}_{i,i} - 1\right| \geq \delta_d\right) = \Pr\left(\left|\mathbf{G}_{i,i} - 1\right| \geq \delta_d\right) \leq 2\exp\left(-\frac{L\delta_d^2}{16}\right) \quad (3.11)$$

d)

接著參考[18]內定理 6 中的推導過程，可得

$$\Pr\left(\left|\mathbf{G}_{i,j}\right| \geq \frac{\delta_o}{S}\right) \leq 4\exp\left(-\frac{L\delta_o^2}{6S^2}\right) \quad (3.12)$$

再由引理 1 可得

$$\Rightarrow \Pr\left(\bigcup_{j=1}^L \bigcup_{i=1, i \neq j}^L \left\{\left|\mathbf{G}_{i,j}\right| \geq \frac{\delta_o}{S}\right\}\right) \leq 4\left|\frac{L-1}{2}\right|\exp\left(-\frac{L\delta_o^2}{6S^2}\right) \quad (3.13)$$

e)

從 c)和 d)，我們可得到

$$\Pr(\mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \leq 2 \exp\left(-\frac{L\delta_d^2}{16}\right) + 4 \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \exp\left(-\frac{L\delta_o^2}{6S^2}\right) \quad (3.14)$$

f)

接下來令  $\delta_d = \frac{2}{3}\delta_s$ 、 $\delta_o = \frac{1}{3}\delta_s$  [18]，代入(3.14)得

$$\Pr(\mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \leq 2 \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{36}\right) + 4 \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{54S^2}\right) \quad (3.15)$$

g)

由於(3.15)為機率上界，最大不超過一，在這個限制下去推導滿足(3.15)的充分條件，令(3.15)必須小於一，得到

$$2 \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{36}\right) + 4 \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{54S^2}\right) \leq 1 \quad (3.16)$$

接下來經過重新整理，可得

$$\Rightarrow 2 \log 2 + \log(L+1) \leq \frac{L\delta_s^2}{36} + \frac{L\delta_s^2}{54S^2} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \frac{108S^2}{(3S^2 + 2)\delta_s^2} \leq \frac{L}{\log(4L + 4)} \quad (3.18)$$

綜合(3.15)和(3.18)完成證明。

接下來考慮以有界隨機變數產生領航序列，有界隨機變數可以是下列幾種機率分布[18]:

$$1. p[i] \sim \text{unif}[-\sqrt{3/L}, \sqrt{3/L}]$$

$$2. p[i] \sim \begin{cases} 1/\sqrt{L} & \text{with prob. } 1/2 \\ -1/\sqrt{L} & \text{w.p. } 1/2 \end{cases}$$

$$3. p[i] \sim \begin{cases} 1/\sqrt{Lq} & \text{w.p. } q/2 \\ 0 & \text{w.p. } 1-q, \quad q \in (0,1) \text{ fixed} \\ -1/\sqrt{Lq} & \text{w.p. } q/2 \end{cases}$$

以下定理將介紹以有界隨機變數產生的循環矩陣  $\mathbf{P}$  不滿足限制等距性質的機率上界。

**定理 2.** 領航序列  $\{p[i]\}_{i=1}^L$  由獨立相同分布和平均值為零的有界隨機變數產生，其變異數為  $E[p[i]^2] = 1/L$ ，且  $p[i]$  滿足  $|p[i]| \leq \sqrt{c/L}$ ，在這裡  $c \geq 1$ 。如果

$$\frac{32c^2S^2}{(16S^2 + 1)\delta_s^2} \leq \frac{L}{\log(2L + 2)} \text{ 成立，則}$$

$$\Pr(\mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \leq 2 \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{2c^2}\right) + 2 \left|\frac{L-1}{2}\right| \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{32c^2S^2}\right)$$

Proof:

a)

以特徵值的角度來考慮限制等距性質，可得

$$(1 - \delta_s) \leq \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{G} \mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \leq (1 + \delta_s) \quad , \mathbf{G} = \mathbf{P}^H \mathbf{P} \quad \Leftrightarrow$$

$$(1 - \delta_s) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{G}_T) \leq \frac{\mathbf{z}_T^H \mathbf{G}_T \mathbf{z}_T}{\|\mathbf{z}_T\|_2^2} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{G}_T) \leq (1 + \delta_s)$$

$$, \mathbf{G}_T = \mathbf{P}_T^H \mathbf{P}_T \text{ and } |T| = S, \quad \forall T \quad (3.19)$$

在這裡  $(0 \leq \delta_s \leq 1)$ 。

b)

以線性代數中 Gersgorin disks 定理來考慮(3.19)，如果

$$\begin{cases} |\mathbf{G}_{i,i} - 1| \leq \delta_d, \forall i \\ |\mathbf{G}_{i,j}| \leq \frac{\delta_o}{S}, \forall i, j \\ \delta_d + \delta_o = \delta_s, \delta_d \geq 0 \text{ and } \delta_o \geq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

成立，則(3.19)成立，即  $\mathbf{P}$  滿足限制等距性質。

目的為推導出  $\mathbf{P}$  不滿足限制等距性質的機率上界，以 Gersgorin disks 定理來考慮  $\mathbf{P}$  不滿足限制等距性質的機率上界，理由和定理 1 的證明 b)部分相同，在這裡不再贅述。

c)

由引理 4，可得到  $\mathbf{G}$  的對角元素  $\mathbf{G}_{i,i} = \sum_{j=1}^L p[j]^2$  滿足

$$\Pr\left(|\mathbf{G}_{i,i} - 1| \geq \delta_d\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2L\delta_d^2}{c^2}\right) \quad (3.21)$$

再由引理 1 可得

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^L |\mathbf{G}_{i,i} - 1| \geq \delta_d\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2L\delta_d^2}{c^2}\right) \quad (3.23)$$

d)

接下來參考[18]中定理 4 的推導過程，可得

$$\Pr\left(|\mathbf{G}_{i,j}| \geq \frac{\delta_o}{S}\right) \leq 4 \exp\left(-\frac{L\delta_o^2}{8c^2S^2}\right) \quad (3.24)$$

再由引理 1 可得

$$\Rightarrow \Pr\left(\bigcup_{i=1}^L \bigcup_{i \neq j, j=1}^L \left\{|\mathbf{G}_{i,j}| \geq \frac{\delta_o}{S}\right\}\right) \leq 4 \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \exp\left(-\frac{L\delta_o^2}{8c^2S^2}\right) \quad (3.25)$$

e)

從 c)和 d)，我們可得到

$$\Pr(\mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \leq 2 \exp\left(-\frac{2L\delta_d^2}{c^2}\right) + 4 \left|\frac{L-1}{2}\right| \exp\left(-\frac{L\delta_o^2}{8c^2S^2}\right) \quad (3.26)$$

f)

接下來令  $\delta_d = \frac{1}{2}\delta_s$ 、 $\delta_o = \frac{1}{2}\delta_s$  [5]，代入(3.26)得

$$\Pr(\mathbf{P} \text{ does not satisfy RIP}) \leq 2 \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{2c^2}\right) + 4 \left|\frac{L-1}{2}\right| \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{32c^2S^2}\right) \quad (3.27)$$

g)

由於(3.27)為機率上界，最大不超過一，在這個限制下去推導滿足(3.27)的充分條件，令(3.27)必須小於一，得到

$$2 \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{2c^2}\right) + 4 \left|\frac{L-1}{2}\right| \exp\left(-\frac{L\delta_s^2}{32c^2S^2}\right) \leq 1 \quad (3.28)$$

接下來經過重新整理，可得

$$\Rightarrow \log 2 + \log(L+1) \leq \frac{L\delta_s^2}{2c^2} + \frac{L\delta_s^2}{32c^2S^2} \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \frac{32c^2S^2}{(16S^2+1)\delta_s^2} \leq \frac{L}{\log(2L+2)} \quad (3.30)$$

綜合(3.27)和(3.30)完成證明。

### 3.2 數值分析與比較

	不滿足 RIP 的機率上界	
	[18] 所提出	本論文中所提出
高斯隨機變數	$2L \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{36}\right) + 2L^2 \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{54S^2}\right)$	$2 \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{36}\right) + 4 \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{54S^2}\right)$
有界隨機變數	$2L \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{2c^2}\right) + 2L^2 \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{32c^2S^2}\right)$	$2 \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{2c^2}\right) + 2 \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \exp\left(-\frac{L\delta_S^2}{32c^2S^2}\right)$

表 3-1 循環矩陣不滿足限制等距性質的機率上界

在[18]中所考慮系統矩陣為托波力茲矩陣，而在我們的研究裡，則將情況延伸至系統矩陣為循環矩陣，對照表 3-1，可以看到不論是高斯隨機變數或是有界隨機變數所產生出的循環矩陣，其不滿足限制等距性質的機率上界，我們的結果都較準確。

## 第四章 壓縮感測技術與通道估測

### 4.1 系統模型

回顧 2.1 節單載波頻域等化系統，(2.4)用於通道估測，在論文中將考慮通道為稀疏通道，重新定義(2.4)為

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[L-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} p[0] & p[L-1] & \cdots & p[1] \\ p[1] & p[0] & \cdots & p[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p[L-1] & \cdots & \cdots & p[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} + \underbrace{\begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ \vdots \\ z[L-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} \quad (4.1)$$

通道  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^L$  有  $S$  個非零的值，其他  $L-S$  個值皆為零， $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^L$  為平均值為零的高斯雜訊向量，共變異數矩陣(covariance matrix)為  $\sigma^2 \mathbf{I}_L$ ， $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^L$  為系統矩陣，由領航資料向量  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^L$  組成，且系統矩陣  $\mathbf{P}$  具有循環矩陣的架構， $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^L$  為接收向量。

## 4.2 最佳領航序列的設計

在這節內容裡，將會從互斥不相關性質的觀點出發，推導如何設計領航序列  $\{p[i]\}_{i=1}^L$ ，使得壓縮感測技術可以更有效的復原稀疏資料，以下先介紹主要結果，接著再進行證明。

**定理 3.** 假設領航序列  $\{p[i]\}_{i=1}^L$  的離散傅立葉轉換為  $\mathbf{v} = \{v[i]\}_{i=1}^L$ ，如果  $\mathbf{v}$  滿足

$|v[1]|^2 = |v[2]|^2 = \dots = |v[L]|^2$ ，則循環矩陣  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^L$  為正交矩陣，且互斥不相關性質參數  $u = 0$ 。

Proof:

令  $\mathbf{p}_i$  為循環矩陣  $\mathbf{P}$  的第  $i$  個行向量，其中  $1 \leq i \leq L$ ，考慮互斥不相關性質參數  $u$ ，將其以  $\mathbf{p}_1$  表示，為以下

$$\begin{aligned} u &= \max_{i \neq j} |\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle| \\ &= \max_{i \neq j} |\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{|i-j|+1} \rangle| \\ &= \max_{i \neq j} |\mathbf{p}_1^H \mathbf{J}^{|i-j|} \mathbf{p}_1| \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中  $\mathbf{J}^{|i-j|}$  為置換矩陣，可以被傅立葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_L$  對角化，在這裡  $\mathbf{F}_L$  定義為

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{(L-1)} & \dots & w^{(L-1)^2} \end{bmatrix}, \quad w = e^{j2\pi/L} \quad (4.3)$$

將  $\mathbf{J}^{|i-j|}$  以傅立葉轉換矩陣  $\mathbf{F}_L$  對角化後，可得

$$\mathbf{F}_L \mathbf{J}^{|i-j|} \mathbf{F}_L^H = \mathbf{D}^{|i-j|} \quad (4.4)$$

其中



$$\mathbf{D}^{|i-j|} = \text{diag} \left\{ 1, e^{-j\frac{2\pi}{L}|i-j|}, e^{-j\frac{2\pi}{L}2|i-j|}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{L}(L-1)|i-j|} \right\} \quad (4.5)$$

將(4.4)改寫為  $\mathbf{J}^{|i-j|} = \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}^{|i-j|} \mathbf{F}_L$ ，代入(4.2)，得到

$$u = \max_{i \neq j} \left| \mathbf{p}_1^H \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}^{|i-j|} \mathbf{F}_L \mathbf{p}_1 \right| \quad (4.6)$$

令  $\mathbf{v} = \mathbf{F}_L \mathbf{p}_1$ ，代入(4.6)得到

$$\begin{aligned} u &= \max_{i \neq j} \left| \mathbf{v}^H \mathbf{D}^{|i-j|} \mathbf{v} \right| \\ &= \max_{i \neq j} \left| |v_1|^2 \lambda_1^{|i-j|} + |v_2|^2 \lambda_2^{|i-j|} + \dots + |v_L|^2 \lambda_L^{|i-j|} \right| \end{aligned} \quad (4.7)$$

接著使用柯西不等式可得到互斥不相關性質參數  $u$  的上界為

$$u \leq \sqrt{L} \sqrt{|v_1|^4 + |v_2|^4 + \dots + |v_L|^4} \quad (4.8)$$

接下來我們想要去最小化互斥不相關性質參數  $u$  的上界，使互斥不相關性質參數  $u$  的上界可以為最小，進一步求得最佳的  $\mathbf{v}$ 。考慮在領航序列的能量為  $W$  的限制下，以最佳化問題表示

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}} & \sqrt{L} \sqrt{|v_1|^4 + |v_2|^4 + \dots + |v_L|^4} \\ \text{subject to} & |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_L|^2 = W \end{aligned} \quad (4.9)$$

接下來經過化簡過後，為

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}} & |v_1|^4 + |v_2|^4 + \dots + |v_L|^4 \\ \text{subject to} & |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_L|^2 = W \end{aligned} \quad (4.10)$$

接著對限制條件做平方後整理，即

$$\begin{aligned} \left( |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_L|^2 \right)^2 &= W^2 \\ \Leftrightarrow |v_1|^4 + |v_2|^4 + \dots + |v_L|^4 &= W^2 - 2 \left( |v_1|^2 |v_2|^2 + |v_1|^2 |v_3|^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

利用(4.11)可將最佳化問題(4.10)改寫為

$$\min_{\mathbf{v}} W^2 - 2 \left( |v_1|^2 |v_2|^2 + |v_1|^2 |v_3|^2 + \dots \right) \quad (4.12)$$

再化簡(4.12)

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v}} W^2 - 2 \left( |v_1|^2 |v_2|^2 + |v_1|^2 |v_3|^2 + \dots \right) \\ & \equiv \max_{\mathbf{v}} \left( |v_1|^2 |v_2|^2 + |v_1|^2 |v_3|^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

接著利用算幾不等式求得(4.13)的最大上界

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{v}} \left( |v_1|^2 |v_2|^2 + |v_1|^2 |v_3|^2 + \dots \right) \\ & \leq \frac{\left( |v_1|^2 + |v_2|^2 \right)^2}{4} + \frac{\left( |v_1|^2 + |v_3|^2 \right)^2}{4} + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

當  $\mathbf{v}$  滿足條件  $|v_1|^2 = |v_2|^2 = \dots = |v_N|^2$ ，則(4.14)的等號成立。

最後將條件  $|v_1|^2 = |v_2|^2 = \dots = |v_N|^2$  代入(4.7)，經過以下計算

$$\begin{aligned} u &= \max_{i \neq j} \left| |v_1|^2 \lambda_1^{|i-j|} + |v_2|^2 \lambda_2^{|i-j|} + \dots + |v_N|^2 \lambda_N^{|i-j|} \right| \\ &= \max_{i \neq j} \left| |v_1|^2 \left( \lambda_1^{|i-j|} + \lambda_2^{|i-j|} + \dots + \lambda_N^{|i-j|} \right) \right| \\ &= |v_1|^2 \max_{i \neq j} \left| \left( \lambda_1^{|i-j|} + \lambda_2^{|i-j|} + \dots + \lambda_N^{|i-j|} \right) \right| \\ &= |v_1|^2 \max_{i \neq j} \left| \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} |i-j| N}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} |i-j|}} \right| \\ &= |v_1|^2 \max_{i \neq j} \left| \frac{1 - e^{-j 2\pi |i-j|}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} |i-j|}} \right| \\ &= |v_1|^2 \max_{i \neq j} \left| \frac{1 - 1}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} |i-j|}} \right| \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

以上證明了當  $\mathbf{v}$  滿足條件  $|v_1|^2 = |v_2|^2 = \dots = |v_N|^2$  時，可得到互斥不相關性質參數  $u$  為 0，  
即循環矩陣  $\mathbf{P}$  為正交矩陣。



### 4.3 模擬分析

在這小節，將提出一些數值模擬，在通道估測上，會比較最小平方估測法和壓縮感測技術，另外還會驗證前面章節所提出改善壓縮感測技術的方法，使其在通道估測上可以有更小的誤差。模擬在設定上，由於錯誤向量是由平均值為零的高斯分布所產生，所以在通道估測方面會使用 Dantzig selector method 來估測稀疏通道。

模擬 1: 比較最小平方方法和壓縮感測技術在通道估測上的均方誤差及資料等化上的位元錯誤率

模擬設定上，蒙地卡羅模擬次數為 2000，使用四相相移鍵控(quadrature phase shift keying, QPSK)調變，通道長度  $L = 16$ ， $\lambda = \sigma \|\mathbf{P}\|_{1,2} \cdot \sqrt{2 \log L}$  [18]，其中  $\|\mathbf{P}\|_{1,2}$  表示為循環矩陣  $\mathbf{P}$  內最大的行向量歐幾里德大小。三角形曲線表示使用壓縮感測技術中的 Dantzig selector method，而星號曲線表示使用最小平方方法，從下圖可以看到最小平方方法的均方誤差不受多重路徑數量的影響，其均方誤差的曲線在各圖皆相同，比較 Dantzig selector method，Dantzig selector method 在估測稀疏通道的均方誤差，整體而言較最小平方方法來的低，但當多重路徑的數量上升時，即通道愈來愈不稀疏的情況下，Dantzig selector method 在均方誤差上變大，有接近最小平方方法的趨勢，綜合上述，可以知道當通道愈稀疏的情況下，使用壓縮感測技術來估測通道其效能較好，另外在資料等化方面，壓縮感測技術在位元錯誤率上也比最小平方方法低。

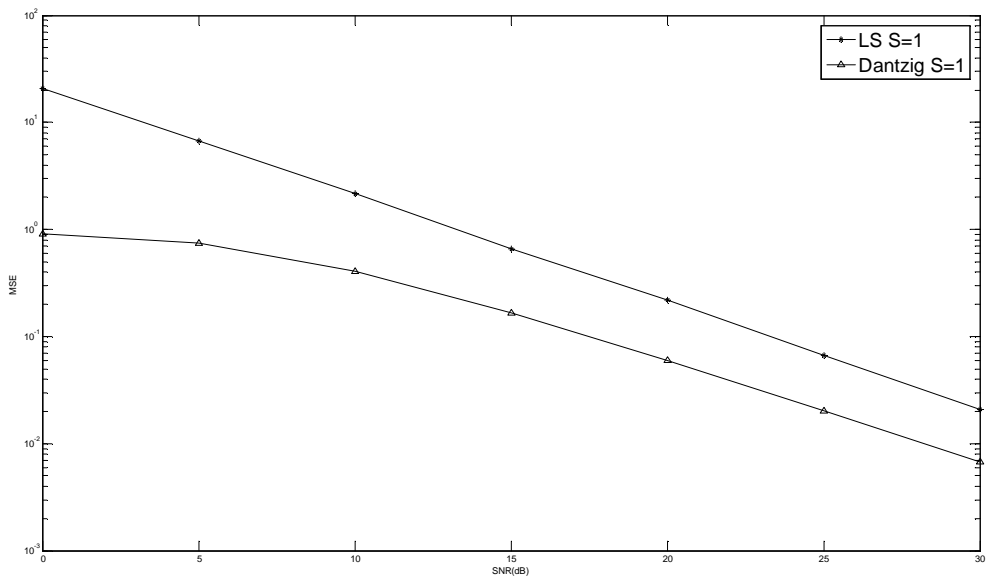


圖 4-1 通道多重路徑數量  $S = 1$ ，壓縮感測技術和最小平方法之均方誤差比較圖

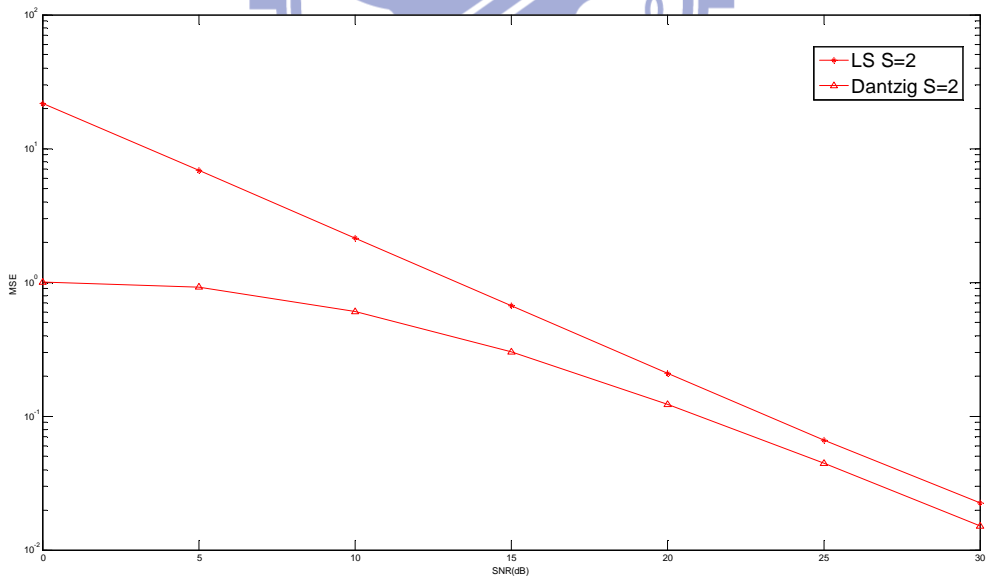


圖 4-2 通道多重路徑數量  $S = 2$ ，壓縮感測技術和最小平方法之均方誤差比較圖

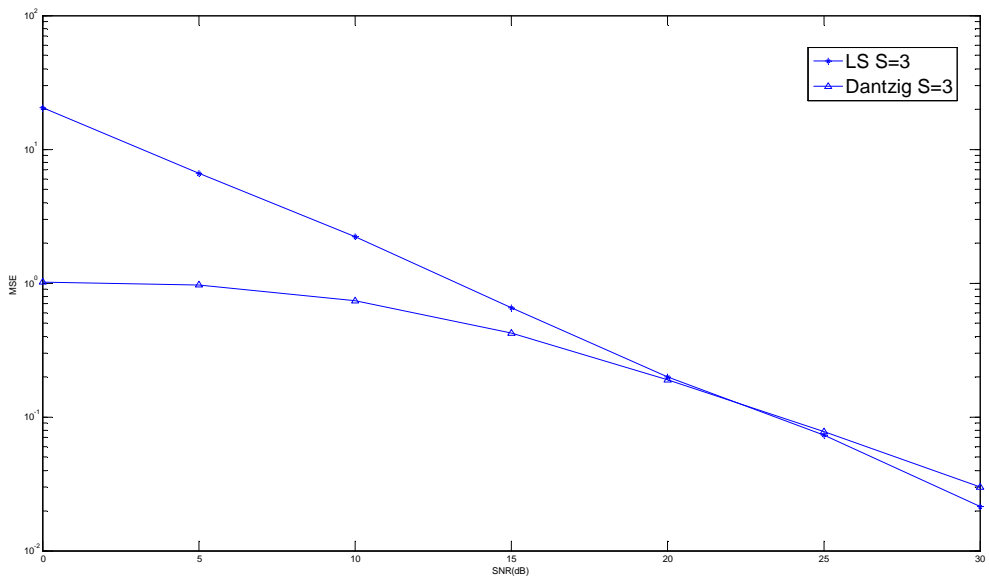


圖 4-3 通道多重路徑數量  $S = 3$ ，壓縮感測技術和最小平方法之均方誤差比較圖

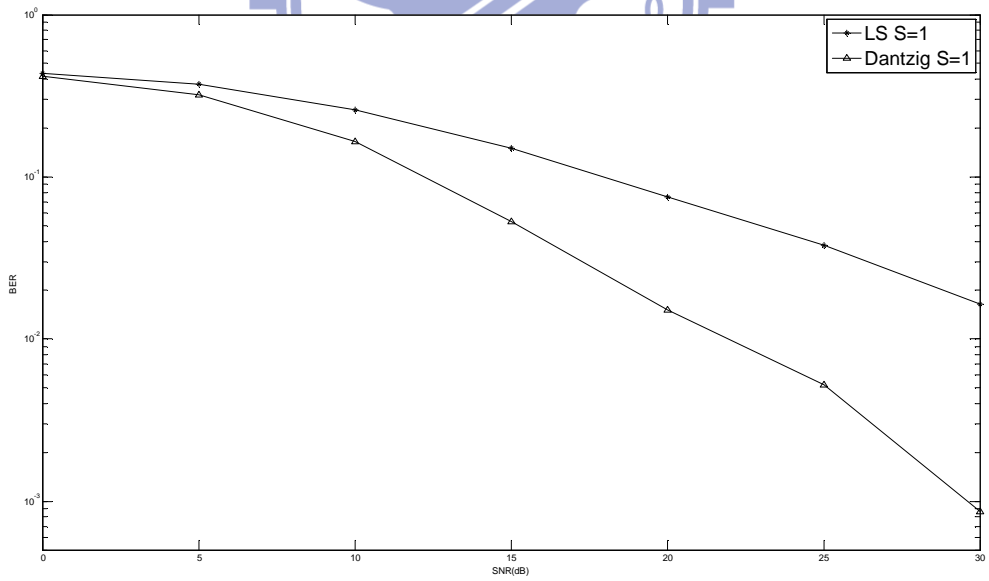


圖 4-4 通道多重路徑數量  $S = 1$ ，壓縮感測技術和最小平方法之位元錯誤率比較圖

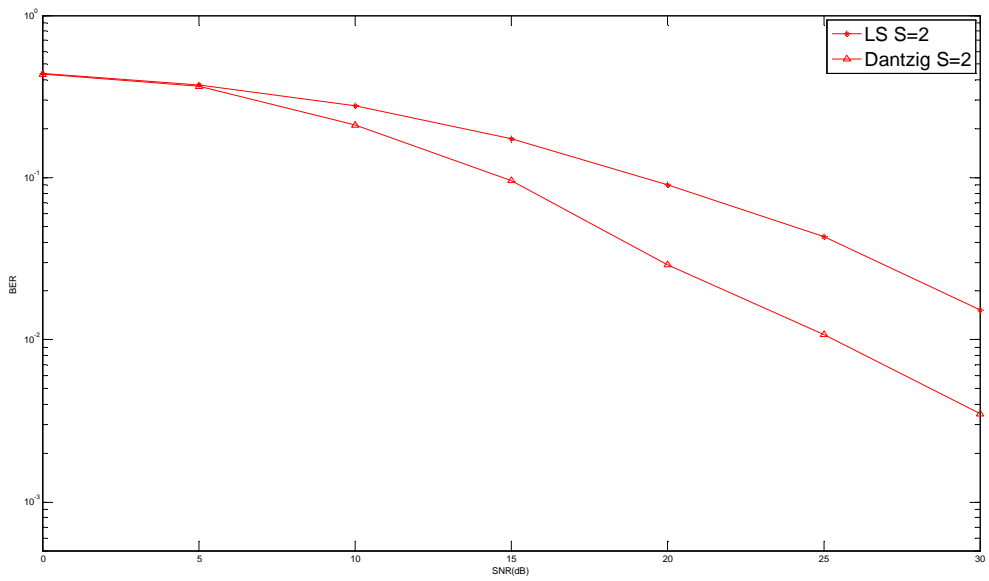


圖 4-5 通道多重路徑數量  $S = 2$ ，壓縮感測技術和最小平方法之位元錯誤率比較圖

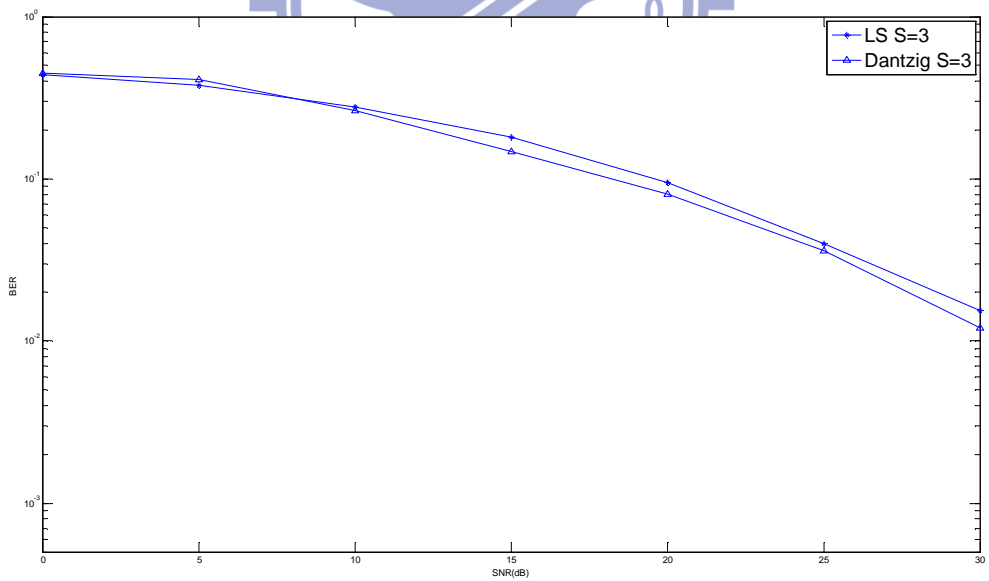


圖 4-6 通道多重路徑數量  $S = 3$ ，壓縮感測技術和最小平方法之位元錯誤率比較圖

模擬 2: 比較當領航序列滿足定理 3 和不滿足定理 3 在通道估測上的均方誤差

在模擬圖中，三角形曲線表示領航序列滿足定理 3，而星號曲線則表示領航序列不滿足定理 3，其他設定和模擬 1 相同，觀察以下模擬圖可以看到，滿足定理 3 的領航序列利用壓縮感測技術在通道估測方面，其均方誤差較不滿足定理 3 的領航序列來的小，且當通道多重路徑的數量增加，即  $S$  變大時，其兩者之間通道估測均方誤差的差距愈顯著，顯示了滿足定理 3 的領航序列確實可以有效改善壓縮感測技術的估測誤差。

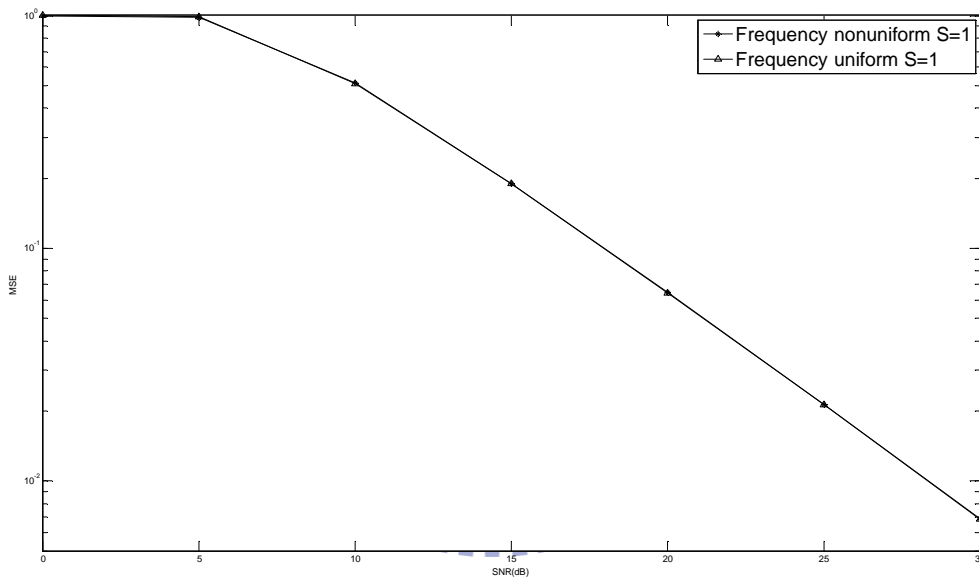


圖 4-7 通道多重路徑數量  $S = 1$ ，領航序列滿足定理 3 和不滿足定理 3 之均方誤差比較

圖



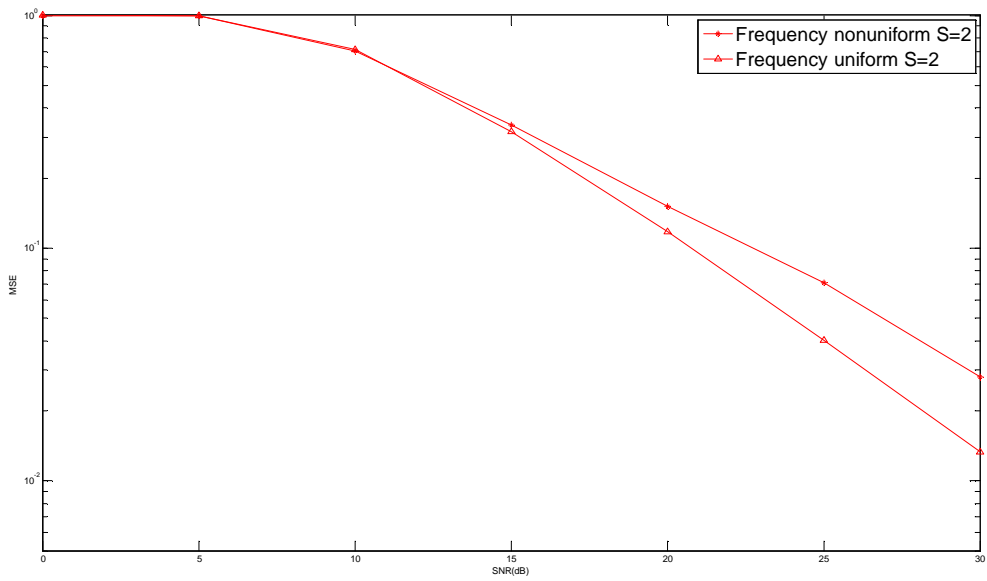


圖 4-8 通道多重路徑數量  $S = 2$ ，領航序列滿足定理 3 和不滿足定理 3 之均方誤差比較

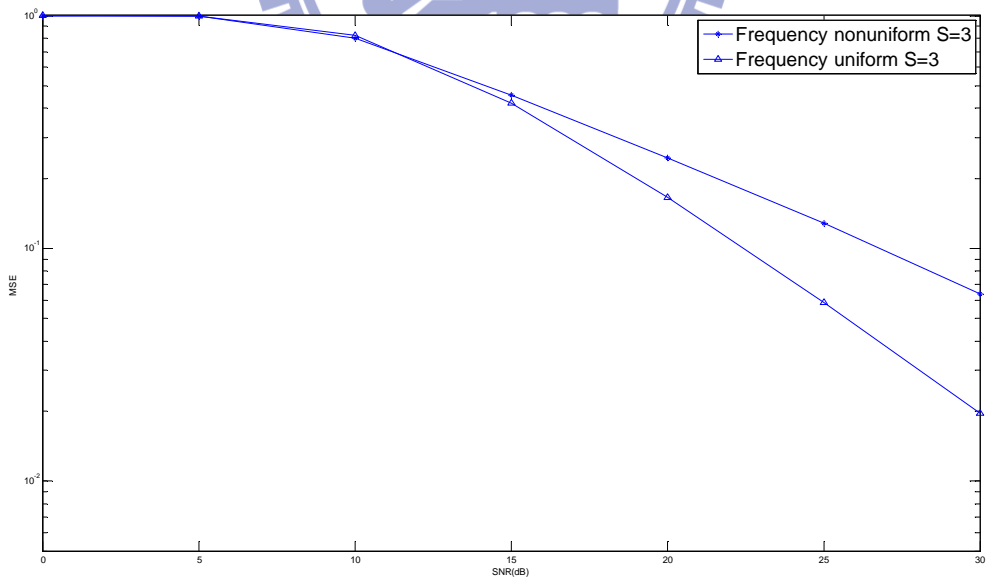


圖 4-9 通道多重路徑數量  $S = 3$ ，領航序列滿足定理 3 和不滿足定理 3 之均方誤差比較

圖

模擬 3: 比較領航序列為脈衝序列和領航序列滿足定理 3 在通道估測上的均方誤差

模擬 3 在設定上，三角形曲線為滿足定理 3 的領航序列，而星號曲線則是使用脈衝序列作為領航序列，其他設定則和模擬 1 相同，比較下列各圖，可以看到在通道估測上，脈衝序列和滿足定理 3 的領航序列其通道估測的均方誤差皆相同，原因是脈衝序列其在頻域上也滿足定理 3，所以其均方誤差和滿足定理 3 的領航序列相同，更加驗證了定理 3 的正確性，另外脈衝序列在產生上較為簡單，以實際應用來看，也較為可行，故特別在此對脈衝序列做了模擬。

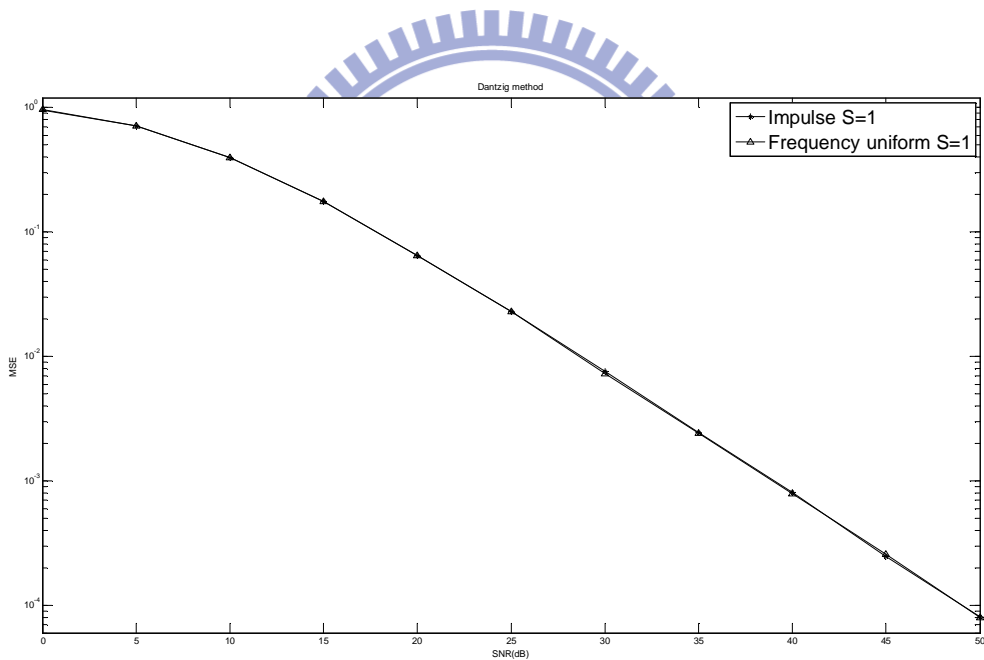


圖 4-10 通道多重路徑數量  $S = 1$ ，領航序列滿足定理 3 和脈衝序列之均方誤差比較圖

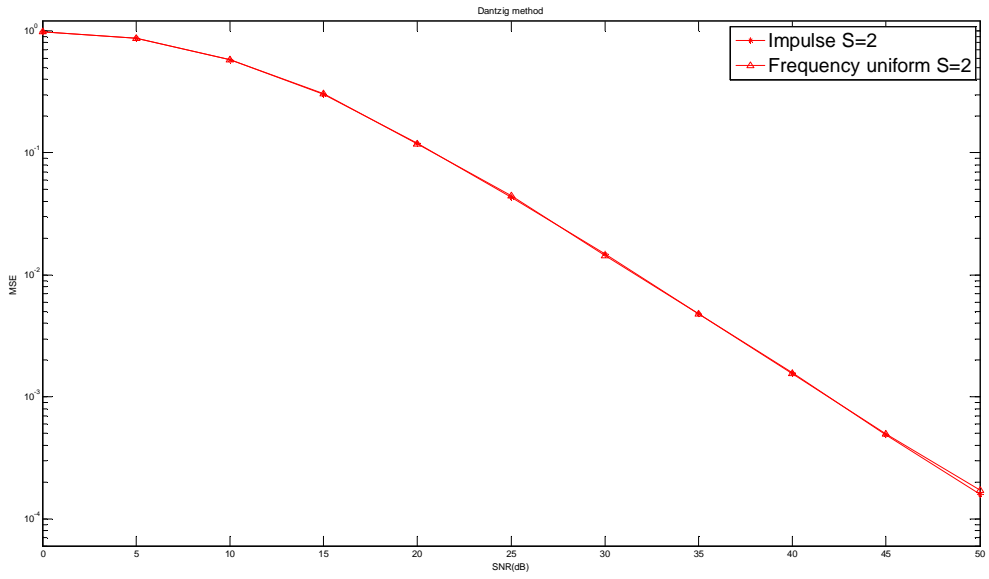


圖 4-11 通道多重路徑數量  $S = 2$ ，領航序列滿足定理 3 和脈衝序列之均方誤差比較圖

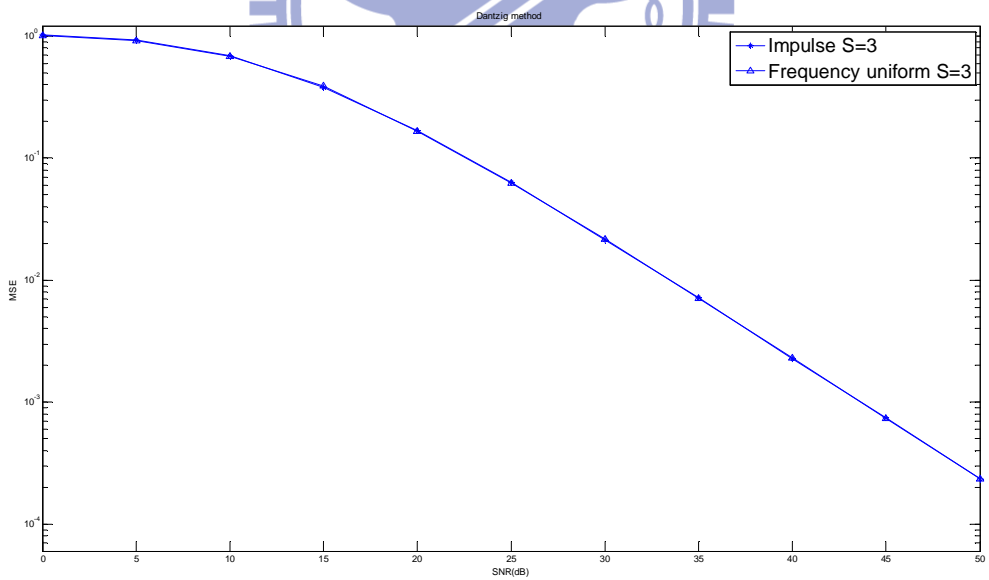


圖 4-12 通道多重路徑數量  $S = 3$ ，領航序列滿足定理 3 和脈衝序列之均方誤差比較圖

模擬 4: 比較領航序列為脈衝序列和領航序列滿足定理 3 在通道估測上的均方誤差

在模擬 4 中，我們將定理 3 和[19]提出的方法做比較，在[19]使用了修改過後的離散隨機最佳化方法(discrete stochastic optimization, DSO)，其目的為當給定一組領航序列，使用修正後的離散隨機最佳化方法在頻域上找到適合傳送此組領航序列的頻率，在此簡單說明其演算法，[19]演算法中定義了位置向量，其以隨機的方式產生，用來決定領航序列可使用哪些頻率，而位置向量的效能在這個演算法裡，由正規化均方誤差和權重向量所決定，此演算法為了彌補正規化均方誤差在測量位置向量效能上的準確性，所以另外使用權重向量來對正規化均方誤差作修正，演算法過程是以隨機方式產生一組位置向量，並計算其正規化均方誤差，接著再和其他位置向量的正規劃均分誤差作比較，正規劃均方誤差較低的位置向量，其在權重向量中相對應的權重將會被提高，如此反覆執行迴圈運算，最後再由權重向量來決定最好的位置向量，以下將介紹[19]的演算法。

在說明演算法前先定義一些符號參數：

(a) 正規化均方誤差定義為

$$g(\mathbf{p}, a \lg) = E_{\mathbf{h}} \left\{ \frac{E \left\{ \left\| \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}} \right\|_2^2 \right\}}{\left\| \mathbf{h} \right\|_2^2} \right\}$$

在這裡通道估測的方法使用 Dantzig selector method，我們將在  $L$  個頻率內選取  $N_p$  個頻率來傳送領航序列在頻率上的資料，而  $\mathbf{p} = \{k_1, k_2, \dots, k_{N_p}\}$  用來存取被選取頻率的索引值。

(b)  $\mathbf{p}_m$ 、 $\hat{\mathbf{p}}_m$  和  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  表示在第  $m$  個迴圈的位置向量，並假設所有組合位置向量的數量為  $N_x$ ，定義輔助矩陣  $\mathbf{P}$ ，其每一列

$$\mathbf{P}[i] = \{k_1, k_2, \dots, k_{N_p}\}, i \in \{1, 2, \dots, N_x\}$$

用來存取不同的位置向量。

(c) 第  $m$  個迴圈的權重向量為

$$\pi[m] = \left\{ [\pi[m,1], \pi[m,2], \dots, \pi[m, N_x]]^T \in \mathbb{R}^{N_x} \mid \sum_i \pi[m,i] = 1, \pi[m,i] \in [0,1], i \in \{1,2,\dots,N_x\} \right\}$$

[19]演算法:

步驟 0: 初始設定

隨機產生位置向量  $\mathbf{p}_0$  ;

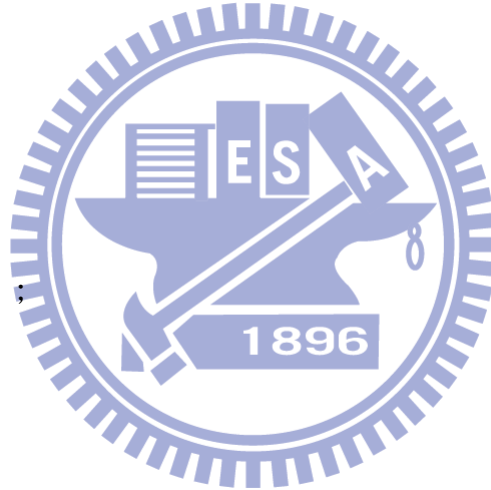
令  $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_0$  和  $\hat{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_0$  ;

令  $\mathbf{P} = \mathbf{0}_{N_x \times N_p}$  ;

令  $\mathbf{P}[1] = \mathbf{p}_0$  ;

令  $\pi[m] = \mathbf{0}_{N_x}$  且  $\pi[0,1] = 1$  ;

令  $u = 1$  和  $v = 1$  ;



FOR  $n = 0, 1, \dots, M - 1$

FOR  $k = 0, 1, \dots, N_p - 1$

步驟 1:

$m = n * N_p + k$  ;

計算  $g(\mathbf{p}_m)$  , 接著產生  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  , 其第  $k$  個元素從所有頻率索引值扣除  $\mathbf{p}_m$  剩下的索引值中 , 以

均勻機率分布隨機選取 ,  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  其他的元素則和  $\mathbf{p}_m$  相同 , 再計算  $g(\tilde{\mathbf{p}}_m)$

步驟 2(比較  $\mathbf{p}_m$  和  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  的正規化均方誤差):

if  $g(\tilde{\mathbf{p}}_m) < g(\mathbf{p}_m)$

$\mathbf{p}_{m+1} = \tilde{\mathbf{p}}_m$ ;

$u = m + 1$ ;

else

$\mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{p}_m$ ;

End if

步驟 3(更新權重向量):

搜尋  $\mathbf{p}_{m+1}$  是否存在於  $\mathbf{P}$

if 找到

將在  $\mathbf{P}$  中找到的列索引值存取於  $q_m$ ;

else

$q_m = m + 1$ ;

並存取  $\mathbf{p}_{m+1}$  於  $\mathbf{P}[m + 1]$ ;

end if

$\pi[m + 1] = \pi[m] + (\mathbf{r}[q_m] - \pi[m]) / (m + 1)$ ;

其中  $\mathbf{r}[q_m] \in \mathbb{R}^{N_x}$  的第  $q_m$  個元素為 1，其他元素皆為 0

步驟 4(決定最好的位置向量):

if  $\pi[m + 1, u] > \pi[m + 1, v]$



```

 $\hat{\mathbf{p}}_{m+1} = \mathbf{p}_{m+1};$ 

 $v = u;$ 

else

 $\hat{\mathbf{p}}_{m+1} = \hat{\mathbf{p}}_m;$ 

end if

end for( $k$ )

end for( $n$ )

```

對於使用[19]的方法，在計算正規化均方誤差所用到的通道數量為 50，估測稀疏通道的方法為 Dantzig selector method，子載波數量為 16，其中領航序列所使用到的子載波數量為 10，其他相關設定則和前面模擬 1 設定相同。以下模擬圖星號曲線表示領航序列滿足定理 3，而星號曲線表示在使用[19]的方法下，領航序列在頻段上只占有部分頻率，剩下頻率則不傳送任何資料，我們可以觀察出當通道稀疏量愈大時，其對於通道估測的均方誤差，只使用部分頻率的領航序列在通道估測上的表現愈來愈不理想，而滿足定理 3 的領航序列其表現較佳。

模擬 4: 比較領航序列為脈衝序列和領航序列由離散隨機最佳化方法所產生，在通道估測上的均方誤差及資料等化上的位元錯誤率

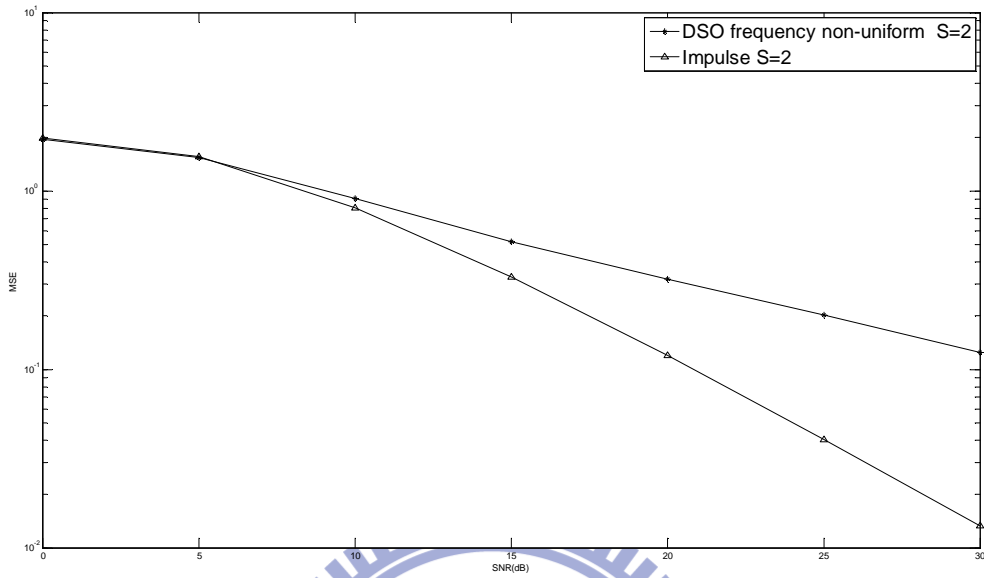


圖 4-13 通道多重路徑數量  $S = 2$ ，領航序列為脈衝序列和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖

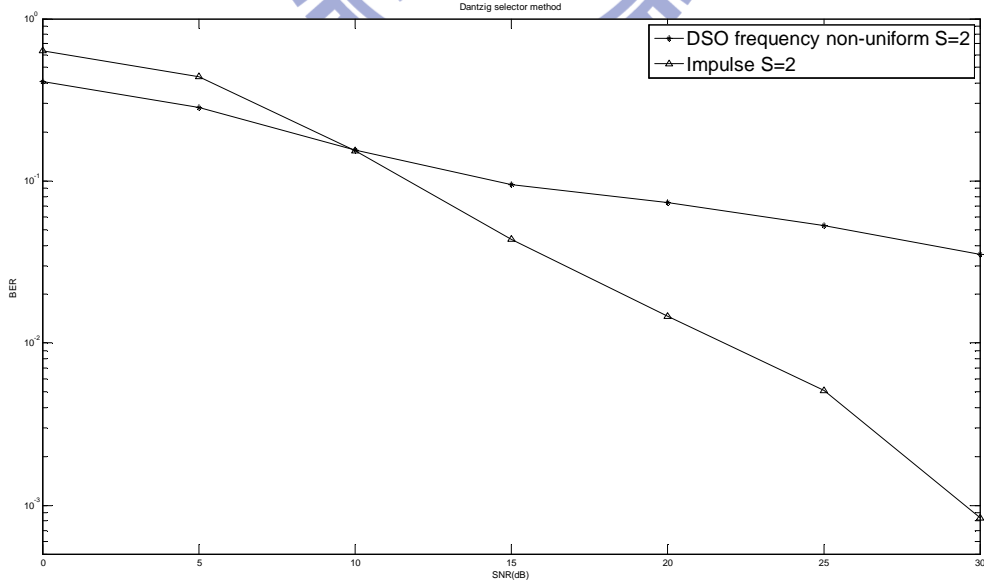


圖 4-14 通道多重路徑數量  $S = 2$ ，領航序列為脈衝序列和只使用部分頻率之領航序列的位元錯誤率比較圖



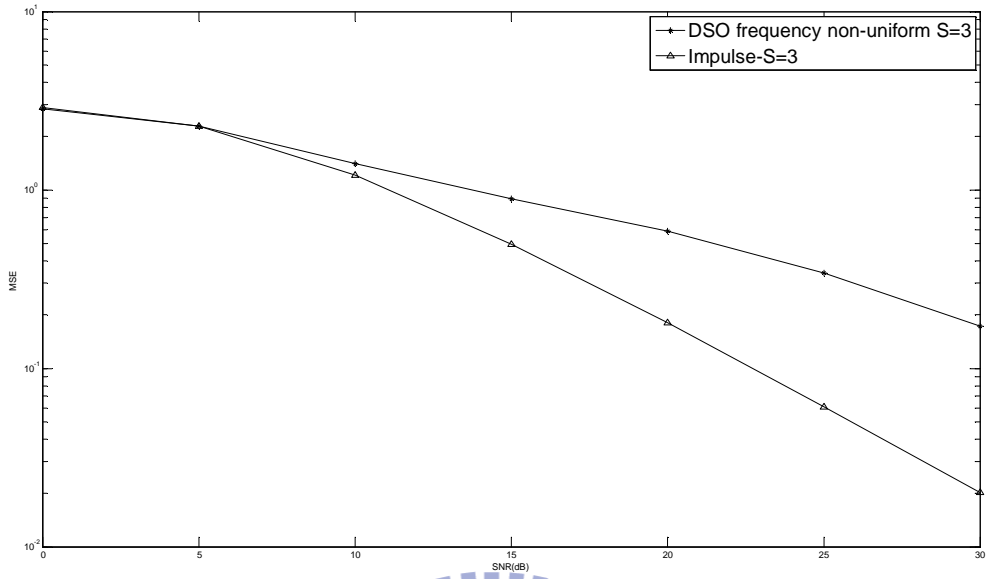


圖 4-15 通道多重路徑數量  $S = 3$ ，領航序列為脈衝序列和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖

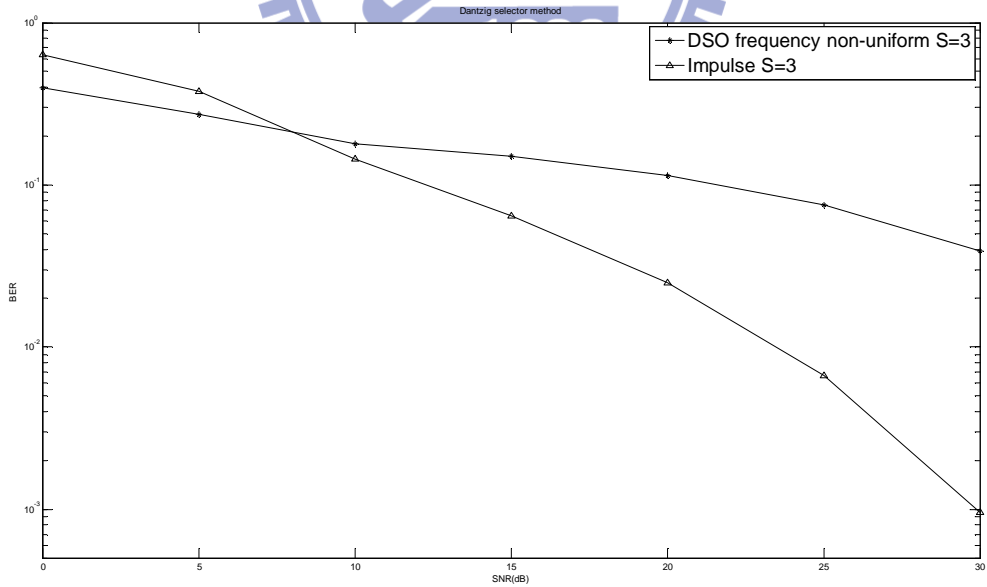


圖 4-16 通道多重路徑數量  $S = 3$ ，領航序列為脈衝序列和只使用部分頻率之領航序列的位元錯誤率比較圖

模擬 5: 在正交分頻多工系統架構下，比較領航序列為脈衝序列和領航序列由離散隨機最佳化方法所產生，在通道估測上的均方誤差

另外，將定理 3 應用在正交分頻多工下，使用 Dantzig selector method 來估測稀疏通道，調變上使用四相相移鍵控，符合定理 3 的領航序列其均方誤差較低。

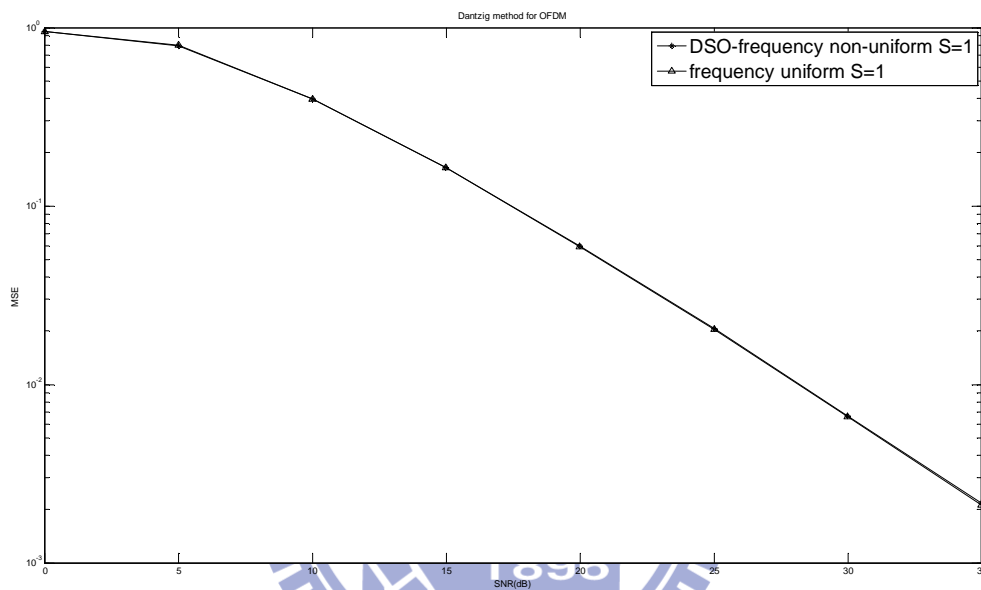


圖 4-17 通道多重路徑數量  $S = 1$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖(OFDM)

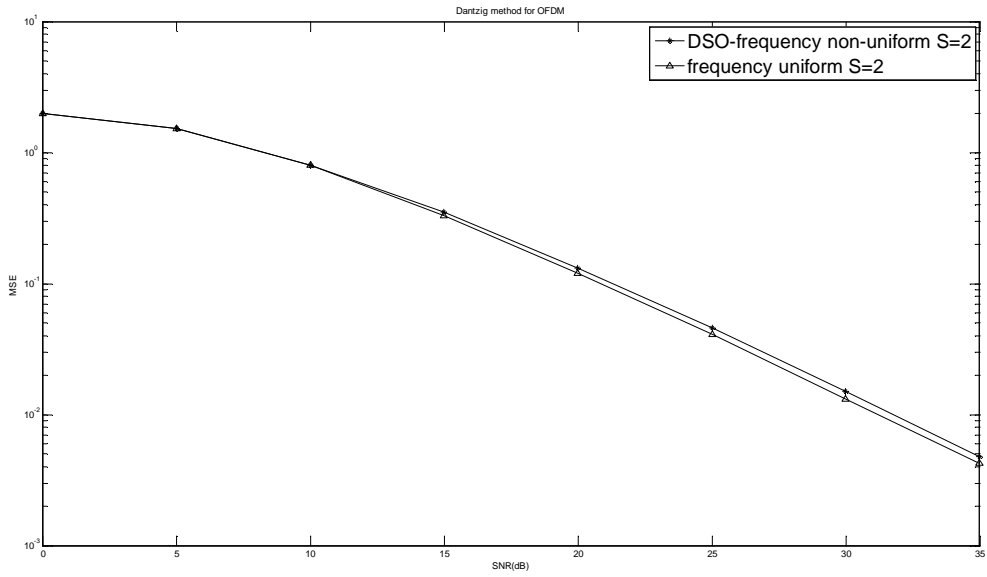


圖 4-18 通道多重路徑數量  $S = 2$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖(OFDM)

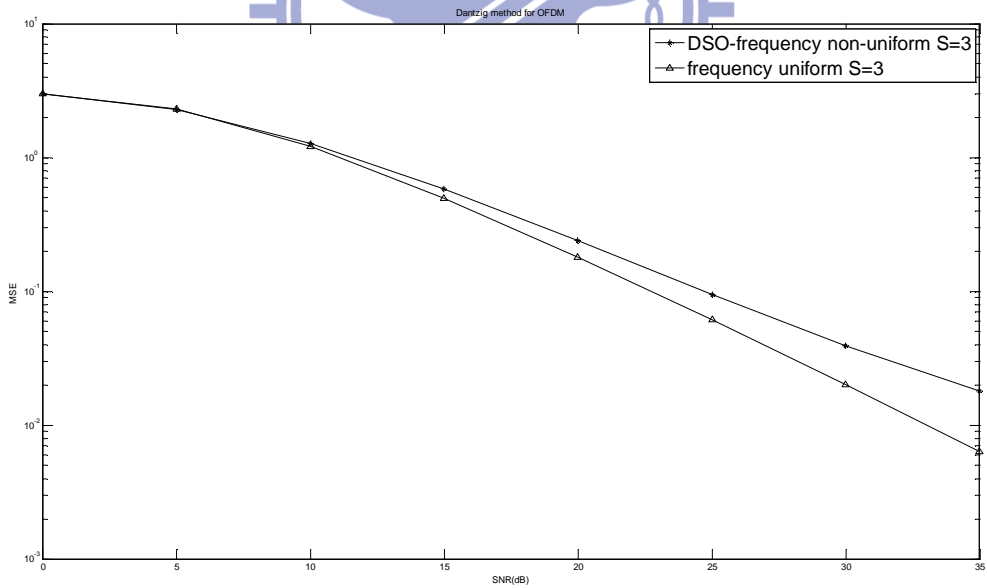


圖 4-19 通道多重路徑數量  $S = 3$ ，領航序列滿足定理 3 和只使用部分頻率之領航序列的均方誤差比較圖(OFDM)

## 第五章 結論

在本論文中，考慮通訊系統為單載波頻域等化系統，且通道環境為水面下的環境，其通道脈衝響應會有稀疏現象發生，為了有效增加單載波頻域等化系統的可靠性，其在通道估測上的改善，將可降低傳送資料的位元錯誤率，因此，我們提出將壓縮感測技術應用在單載波頻域等化系統的通道估測上，並和常見的通道估測方法，最小平方法做比較，在 4.3 節的模擬，驗證了在通道估測的平均誤差上，使用壓縮感測技術較最小平方法來的低。

在壓縮感測技術中，系統矩陣在設定上將會影響復原稀疏向量的準確性，為了瞭解系統矩陣影響壓縮感測技術復原稀疏向量的程度，使用了限制等距性質來量化系統矩陣對於壓縮感測技術上的復原稀疏向量的準確性，限制等距性質在其概念上，是取得系統矩陣內和稀疏量相同數量的行向量，並將這些行向量做內積，以得到系統矩陣行向量之間的相關性，而相關性愈低則壓縮感測技術在復原稀疏向量的誤差將愈低，另外，系統矩陣在壓縮感測技術中，常以特定的機率分布來產生，例如高斯分布或均勻分布，對於以機率分布的方式所產生的系統矩陣，在分析上，許多的研究都直接引用限制等距性質來直接對系統矩陣做分析，而在[18]中，則提出了將 Gersgorin's 定理應用在限制等距性質上，以特徵值的角度，來探討當系統矩陣以特定機率分布產生時，其滿足限制等距性質的機率，而在我們的研究中，單載波頻域等化系統的循環字首部分，參考了[7]的傳送資料架構，考慮在這樣的傳送資料架構下，通道估測部分的系統矩陣將具有循環矩陣的架構，在此我們針對擁有循環矩陣架構的系統矩陣，和[18]相同，採取將 Gersgorin's 定理應用在限制等距性質上，並以此來分析使用特定機率分布的方式來產生的系統矩陣，其不滿足限制等距性質的機率上界，在此，由於循環矩陣特殊的結構，使其在其他運算上將可能具有特殊結構，而我們在前面章節所提出的輔助定理 2，即我們針對循環矩陣所觀察出的特性，利用這樣的特性，在系統矩陣不滿足限制等距性質的證明上，將可得到比[18]更為準確的機率上界。

另外，我們除了以機率觀點來分析系統矩陣外，也提出了直接使用代數觀點來探討在何種條件下所產生的系統矩陣，其可使壓縮感測技術復原稀疏向量的正確性提升，在此我們不以限制等距性質來針對系統矩陣做分析，而是以互次不相關性質來分析系統矩陣，其在分析上，互次不相關性質在運算上的複雜性較限制等距性質來的容易，在使用互次不相關性質來分析系統矩陣的過程中，我們將領航序列所組成的系統矩陣，從時域上轉換到頻域上做分析，得到了定理 3 的結果，即領航序列其在頻域上的序列元素大小如果皆相同，將可有效降低壓縮感測技術對於通道估測的錯誤率，以提升單載波頻域等化系統的可靠性，在 4.3 節的模擬中也驗證了此結果。



## 參考文獻

- [1] A. Czylik, "Comparison between adaptive OFDM and single carrier modulation with frequency domain equalization," *IEEE Vehicular Technology Conference*, vol. 2, pp. 865-869, May 1997
- [2] Y. Zhu and K. B. Lataief, "Single-carrier frequency-domain equalization with noise prediction for MIMO systems," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 55, no. 5, pp. 1063-1076, May 2007
- [3] Y. S. Chen, "Semiblind channel estimation for MIMO single carrier with frequency-domain equalization systems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 59, no. 1, pp. 53-62, Jan. 2010
- [4] Yue Wang, Xiaodai Dong, "Frequency-Domain Channel Estimation for SC-FDE in UWB Communications," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 12, pp. 2155-2163, Dec. 2006
- [5] T. Walzmann and M. Schwartz, "Automatic equalization using the discrete frequency domain," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 19, no. 1, pp. 59-68, Jan. 1973
- [6] C. R. Berger, S. Zhou, J. C. Preisig and P. Willett, "Sparse channel estimation for multicarrier underwater acoustic communication: From subspace methods to compressed sensing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 3, pp. 1708-1721, Mar. 2010
- [7] Y. H. Zeng and T. S. Ng, "Pilot cyclic prefixed single-carrier communication: Channel estimation and equalization," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 1, pp. 56-59, Jan. 2005
- [8] D. Baron, M.B. Wakin, M. Duarte, S. Sarvotham, and R.G. Baraniuk, "Distributed compressed sensing," 2005 [online]. Available: <http://dsp.rice.edu/cs/DCS112005.pdf>
- [9] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principle: Exact signal

- reconstruction from highly incomplete frequency information,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006
- [10] R.G. Baraniuk, “Compressive Sensing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 4, pp. 118-121, Jul. 2007
- [11] E. J. Candes and T. Tao, “The Dantzig selector: Statistical estimation when  $p$  is much than  $n$ ,” *Ann. Statist.*, vol. 35, no. 6, pp. 2313-2351, 2007
- [12] E. J. Candes and T. Tao, “Decoding by linear programming,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203-4215, Dec. 2005
- [13] Holger Rauhut, “Compressive Sensing and Structured Random Matrices,” May 2010 [online]. Available: <http://rauhut.ins.uni-bonn.de/LinzRauhut.pdf>
- [14] T. Cai , L. Wang and G. Xu, ” Stable recovery of sparse signals and an oracle inequality,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 7, pp. 3516-3522, Jul. 2010
- [15] D.L. Donoho and X. Huo, “Uncertainty principles and ideal atomic decomposition,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 7, pp. 2845-2862, Nov. 2001
- [16] E. J. Candes , J. Romberg and T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 8, pp. 1207-1223, Aug. 2006
- [17] T.T. Cai, L. Wang and G. Xu, “New bounds for restricted isometry constants”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 9, pp.4388-4394, Sep. 2010
- [18] J. Haupt , W. U. Bajwa , G. Raz and R. Nowak, “Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 11, pp. 5862-5875, Nov. 2010
- [19] Chenhao Qi, Lenan Wu, “Optimized Pilot Placement for Sparse Channel Estimation in OFDM Systems,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 18, no. 12, pp. 56-59, Dec. 2011