

國立交通大學
電信工程研究所
碩士論文

考慮 LTE-A 上鏈傳輸於通道估計誤差下之低複雜度最
佳通道預測器設計

**Optimal Channel Prediction for Training Overhead
Reduction in LTE-A Uplink under Channel Estimation
Errors**

研究生：李文洺

指導教授：吳卓諭 博士

中華民國一百零一年七月

考慮 LTE-A 上鏈傳輸於通道估計誤差下之低複雜度最佳通道預測器設計

Optimal Channel Prediction for Training Overhead Reduction in LTE-A
Uplink under Channel Estimation Errors

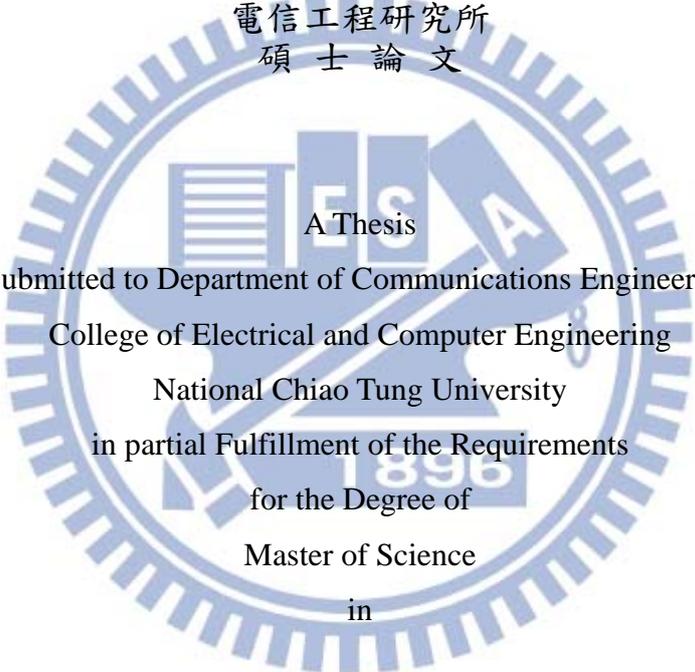
研究生：李文洺

Student : Wen-Ming Li

指導教授：吳卓諭

Advisor : Jwo-Yuh Wu

國立交通大學
電信工程研究所
碩士論文



A Thesis
Submitted to Department of Communications Engineering
College of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Communications Engineering

July 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年七月

考慮 LTE-A 上鏈傳輸於通道估計誤差下之低複雜度最佳通道 預測器設計

學生：李文洺
博士

指導教授：吳卓諭

國立交通大學電信工程研究所碩士班

摘要

本論文提出一個經由通道預測機制以降低獲取通道狀態資訊時之通訊冗餘的方法。由於真實世界的無線通道環境可看作是隨著時間而改變的連續函數，LTE 上鏈傳輸中，傳送端連續發送數次時槽的訓練符號後，便停止發送，而接收端在估計了數次的通道狀態資訊後，便利用通道在時間上的相關性預測最新的通道狀態資訊。在本篇論文中，我們一併考慮通道估計誤差的影響，設計出一個最佳的通道預測機制，同時可降低傳送端及接收端的訓練冗餘，並且能夠提供和通道估計機制相近的效能。在設計出最佳預測機制後，我們亦著手分析此預測器的效能，推導出均方誤差和訊雜比的數學明確表示式。在模擬結果中可看出相較於傳統預測器，本論文所設計的最佳預測器效能更好、更接近通道估計機制效能，並且計算上比通道估計機制更為簡單。此外，模擬結果證實模擬值與本論文所推導的理論值相當吻合。

關鍵詞：長程演進、單載波分頻多工、訓練冗餘、訓練符號、通道狀態資訊、通道估計、通道預測

Optimal Channel Prediction for Training Overhead Reduction in LTE-A Uplink under Channel Estimation

Student: Wen-Ming Li

Advisor:

Jwo-Yu Wu

Institute of Communication Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

Energy efficiency is a critical demand in the design of next generation wireless communication systems such as Long Term Evolution (LTE). In this thesis, we study the problem of training overhead reduction for LTE uplink transmission, in which the Single-Carrier Frequency Division Multiple Access (SC-FDMA) modulation is adopted. Motivated by the fact that samples of real-world wireless channels are typically correlated in time, we propose to exploit such temporal correlation to develop a new channel prediction scheme for training overhead reduction. More specifically, assuming that the receiver has acquired a set of channel estimates, based on the linear minimum mean square error (LMMSE) rule, during a few training phases, we develop a LMMSE based channel prediction scheme which explicitly takes account of the effect of channel estimation errors. A closed-form formula for the optimal channel predictor is derived, and the achievable MSE performance is analytically characterized. The achievable post-detection SNR performance when the predicted channels are employed in the LMMSE equalizer design is also studied. Computer simulations are used to illustrate the performances of the proposed scheme.

Index Terms: Long Term Evolution (LTE), Single-Carrier Frequency Division Multiple Access (SC-FDMA), Channel State Information (CSI), pilots, Linear Minimum Mean Square Error (LMMSE) estimation, channel prediction

誌謝

兩年的時間說長不長，說短不短。在這段時間裡面，生命裡出現許多人事物，為研究生活增添幾分樂趣。能夠順利完成碩士學業，首先要感謝我的指導教授吳卓諭，相較於其他教授，我不僅從他身上學到嚴謹的治學態度，此外又時常跟他切磋羽球，讓人比較沒有距離感。我也要感謝我的實驗室學長、同學以及學弟妹，讓我這兩年的實驗室生活充滿歡笑。

最要感謝我父母的栽培，提供我最強力的後援，使我得以進入交大深造。還有絕不能忘的是，感謝我女朋友曾子容的陪伴與照顧，使我在低潮的時刻仍能夠發自內心微笑，使我知道自己不是在孤軍奮戰。

在交大這一段時間，感謝羽球場上的球友們，使我在研究與課業之外能夠調劑身心，不致成為一個只會讀書的兩腳書櫥。

謹以此篇論文獻給我最親愛的家人、女友、同學、朋友們，是你們大家讓我得以順利完成碩士學業，在此獻上最誠摯的感謝。



李汶洺 謹誌

民國一百零一年七月

目錄

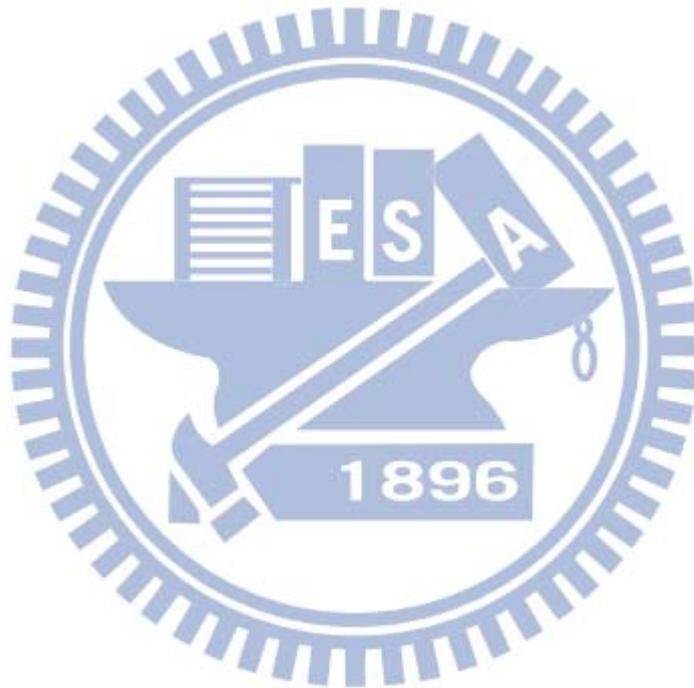
摘要	i
Abstract	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章 緒論	1
第二章 文獻回顧與系統模型	4
2.1 單載波頻域等化系統模型	5
2.1.1 保護區間與循環字首	6
2.1.2 頻域等化機制	7
2.2 單載波分頻多工系統模型	8
2.2.1 單載波分頻多工系統傳送端	8
2.2.2 單載波分頻多工系統接收端	9
2.2.3 單載波分頻多工系統的優缺點	9
2.3 基本假設	11
2.4 LTE 上鏈傳輸單載波分頻多工系統訊號模型	12
2.4.1 LTE 系統上鏈傳輸訊框架構	12
2.4.2 單載波分頻多工系統通道估計機制	13
2.4.3 時域線性最小均方誤差估計法則	17
第三章 通道預測機制	19
3.1 演算法設計	20
3.2 均方誤差分析	23
3.3 複雜度分析	24
3.3.1 通道估計機制的複雜度	24
3.3.2 最佳通道預測機制的複雜度	25
3.3.3 傳統通道預測機制的複雜度	27

3.4 模擬結果.....	29
第四章 輸出訊雜比分析.....	35
4.1 $SNR[K + n]$ 推導.....	36
第五章 結論.....	40
參考文獻.....	41
附錄一 定理 3.1 的證明.....	43
附錄二 定理 3.2 的證明.....	45
附錄三 (4.3)的證明.....	48
附錄四 引理 4.1 的證明.....	49
附錄五 (4.11)及(4.12)的證明.....	50
附錄六 (4.16)的證明.....	51
附錄七 引理 4.2 的證明.....	53
附錄八 定理 4.3 的證明.....	54



表目錄

表 1 通道估計機制與通道預測機制複雜度比較.....	28
表 2 模擬參數設定.....	29



圖目錄

圖 1 時域通道等化及頻域通道等化示意圖	5
圖 2 單載波頻域等化及正交載波多工的比較圖	6
圖 3 循環字首	7
圖 4 單載波分頻多工系統傳送端方塊圖	8
圖 5 單載波分頻多工系統接收端方塊圖	9
圖 6 LTE 系統上鏈傳輸訊框架構	12
圖 7 通道估計機制與通道預測機制比較圖	19
圖 8 通道預測機制示意圖	29
圖 9 嶄新通道預測機制與傳統估計機制均方誤差比較圖	30
圖 10 嶄新通道預測機制與傳統估計機制均方誤差比較圖	31
圖 11 嶄新通道預測機制與傳統估計機制均方誤差比較圖	32
圖 12 通道估計機制、嶄新通道預測機制與傳統估計機制位元錯誤率比較圖	33
圖 13 通道估計機制、嶄新通道預測機制與傳統估計機制位元錯誤率比較圖	34

第一章 緒論

在下世代無線通訊系統的設計重點當中，減少能量損耗的機制是一個相當重要的研究課題。為了提升能源使用效率，眾多學者提出許多不同的方式以改善這個問題，例如：低複雜度的實體層(Physical Layer)訊號處理演算法設計、智慧型網路資源分配技術以改善媒體存取控制(Medium Access Control, MAC)機制、適應環境改變的感知無線電技術等等。從實體層的角度來看，用來提升能源效率的傳統途徑包含了設計低複雜度的訊號處理演算法以及降低訓練(Training)通道的通訊冗餘(Overhead)等[1-2]。

長程演進(Long Term Evolution, LTE)已被選為第四代(4G)行動通訊系統標準[3]。隨著網路日益普及，普羅大眾對於傳輸速度的需求越來越高。為了應付高傳輸速率的要求，LTE 下鏈傳輸(Downlink)使用正交載波多工系統(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)，能滿足 4G 通訊系統對於下鏈傳輸速率 100Mbps 的要求。而上鏈傳輸(Uplink)所採用的則是單載波分頻多工系統(Single Carrier Frequency Division Multiple Access, SC-FDMA)，此系統能達到上鏈傳輸速率 50Mbps 的要求，且具有較低的峰值對平均功率比(Peak to Average Power Ratio, PAPR)，能夠有效降低無線行動裝置(Wireless Mobile)的傳輸功率。近年來，如何提升 LTE 整體系統的能源使用效率十分受到重視。尤其是在 LTE 上鏈傳輸，其傳送端(Transmitter)無線行動裝置如手機、筆記型電腦、平板電腦等裝置，往往受限於有限的電池容量，因此設計低複雜度的訊號處理演算法以提升能源使用效率進而延長使用時間是非常重要的。

單載波分頻多工系統的訊號傳輸模型係首先在時域(Time Domain)上產生 M - 點經過正交振幅調變(Quadrature Amplitude Modulation, QAM)的串行(Serial)資料[2]，接著將之轉為序列(Parallel)訊號後再使用快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform, FFT)把並行訊號轉換到頻域(Frequency Domain)上，再來，每一使用者皆被分配到基地台(Base Station, BS)所指定的子載波(Sub-Carrier)上以同時支援多個使用者的通訊需求。為了在接收端補償訊號所受到的通道失真，基地台會週期性地估計(Estimate)通道，係首先傳送端會週期性地在頻域上產生訓練符號(Training Symbol, or Pilot)，接著將之映射(Mapping)到所規定的資源單位(Resource Element)上。然後轉回時域準備傳送。再者，由於 SC-FDMA 使用了區塊傳送(Block

Transmission) 的方式傳送訊號，在連續區塊間會有區塊間干擾(Inter-Block-Interference, IBI)，為了消除區塊間的干擾，每區塊皆會插入一段不小於通道階數(Channel Tap)的保護區間(Guard Interval)，LTE 使用了循環字首(Cyclic Prefix)作為保護區間之用。循環字首複製了每區塊最後數個數目不小於通道階數的符元到此區塊的開頭，並在接收端將之移除。接收端接收到訊號後，首先將這些循環字首移除掉，接著將之轉換到頻域上，此機制會在第二章有詳盡的說明，在此恕不贅述。為了能夠補償傳送資料所受到的通道干擾，則接收端必須利用傳送端先前所傳送的訓練符號估計通道。在獲取了最新的通道狀態資訊後，接著基地台便使用等化器(Equalizer)來補償訊號所遭受的通道失真。最後訊號被轉回時域後會經過一個檢測器(Detector)來還原傳送訊號。

本篇論文從訊號處理的觀點切入，提出一個嶄新的通道狀態資訊獲取機制，從兩個面向上改善 LTE 上鏈傳輸的訓練冗餘。其一，減少傳送端花費於訓練通道所傳送的訓練符元次數，可節省傳送端耗能。其二，若能降低基地台估計通道(Channel Estimation)的複雜度，則必能使整體通訊系統都達到節能的優點。最常見的通道估計方式如最小平方誤差(Least Square Error, LS)估計法則及線性最小均方誤差(Linear Minimum Mean Square Error, LMMSE)估計法則等[4]，前者複雜度低，但效能低落，而後者雖效果良好，但複雜度過高。在這篇論文中，我們設計出一個嶄新的通道預測機制，用遠低於線性最小均方誤差估計法則的複雜度便可提供與之可比擬的系統效能。從這個想法出發，本論文的貢獻總結如下。

1. 事實上，在真實世界當中，連續時間的無線通道往往具有某種程度的相關性，一旦基地台連續估計了數次的通道狀態資訊後，便能夠利用通道在時間上的相關性來預測最新的通道狀態資訊。如此一來，傳送端便毋須持續耗費能量以傳送訓練符元，另一方面，若能適當設計基地台獲取通道狀態資訊的演算法，則同可同時降低基地台的耗能。我們給出了 LMMSE 通道估計法則、傳統通道預測器以及本篇論文所提出的通道預測器這三種方法的複雜度，可相互比較。
2. 假設基地台已經使用線性最小均方誤差估計法則獲取先前 K 個時刻的通道狀態資訊，接著對每位使用者，分別使用一個 K 階線性有限脈衝響應(Finite Impulse Response, FIR)濾波器來預測最新的通道狀態資訊。本篇論文乃基於最

小化預測通道以及實際通道間的均方誤差(Mean Square Error, MSE)來設計預測係數。在本篇論文中，我們提出了預測機制演算法的實現方式。在此同時，我們亦推導出此預測機制所能達成最小均方誤差的明確數學表示式。

3. 若基地台所獲取的通道估計值皆完美無誤，那麼本篇論文所提出的通道預測器將變為傳統上廣受大家所見的通道預測器[5]。我們亦推導出在通道估計存在誤差的情況下，此傳統通道預測器所能達到的均方誤差。兩種預測機制的均方誤差相互比較後，便可簡單看出相較於傳統通道預測器，本篇論文所提出的最佳通道預測器可達成更低的均方誤差。
4. 為了能正確解回原始傳送訊號，基地台首先根據本篇論文所設計的通道預測機制獲取最新的通道狀態資訊，接著使用常見的頻域最小均方誤差等化器(Equalizer)來補償訊號所遭受的失真[6]。最後，我們更進一步推導出等化器輸出端訊雜比(Signal to Noise Ratio, SNR)的明確數學表示式。

本篇論文的組織如下，第二章為單載波分頻多工系統的回顧與系統模型，並且介紹了與本篇論文做比較的方法，稱為最小均方誤差估計法則。第三章會說明如何根據通道估計誤差設計一個最佳的通道預測機制，接著推導出最佳通道預測器以及傳統通道預測器所能達成的最小均方誤差，最後算出其複雜度後並附上模擬結果。第四章會根據最佳的通道預測機制設計等化器，並推導出其等化器輸出端的訊雜比，並附上模擬結果與理論結果相對照。第五章會總結整篇論文。

第二章 文獻回顧與系統模型

本篇論文考慮的環境是多用戶 (Multi-User, MU) 單輸入單輸出 (Single Input Single Output, SISO) LTE 上鏈傳輸單載波分頻多工系統。本章節將介紹單載波分頻多工系統的運作方式，由於單載波分頻多工系統乃是由單載波頻域等化系統演變而來，因此會先在 2.1 節概述單載波頻域等化系統 (Single Carrier Frequency Division Equalization, SC-FDE)，包含傳送端以及接收端的運作模式、快速傅立葉轉換與反快速傅立葉轉換 (Inverse Fast Fourier Transform, IFFT) 的使用、保護區間以及頻域等化 (Equalization) 的含意與方式。接著在 2.2 節介紹單載波分頻多工系統，包含調變方式、同時服務多用戶的實現方式、子載波分配機制等等。2.3 節會給出本篇論文所做的基本假設。在說明了整體系統模型並給出基本假設後，我們在 2.4 節說明 LTE 系統上鏈傳輸訊號運作的數學模型，首先從 LTE 訊框架構、通道估計的意義講起，接著闡述數位實現的方式，並針對每一區塊做討論，從傳送端發送訊號的流程到接收端接收訊號以及估計通道的方式皆有詳細說明。



2.1 單載波頻域等化系統模型

單載波分頻多工系統係由單載波頻域等化系統演變而來，因此本節會簡單介紹單載波頻域等化系統。傳統上，通訊系統最早是在時域上等化通道失真，但是對寬帶(Broadband)通道而言，通常時域通道脈衝響應(Channel Impulse Response)非常長，使得傳統時域等化機制根本難以實現。後人發現對某些通道來說，如寬帶通道，在頻域上作等化要容易的多。從時域上來看，通道對訊號的影響可以看成是對訊號做摺積(Convolution)，若要消除通道的影響的話，則必須將等化器設計成通道脈衝響應的反函數，而這導致區間過長。若是能先將接收訊號轉換到頻域上，那就能夠逐點(Point-by-Point)等化通道干擾。圖 1 說明了時域等化以及頻域等化兩種不同機制。

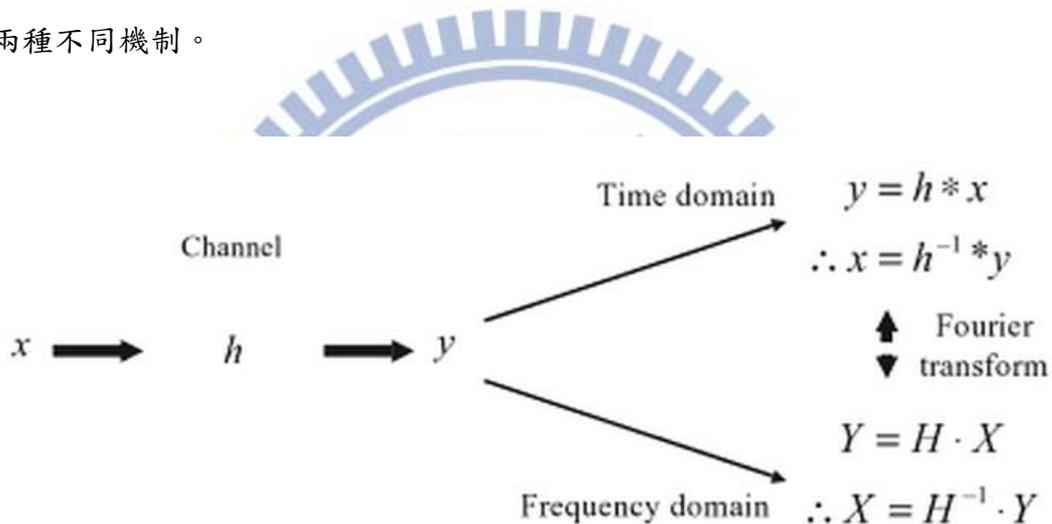


圖 1 時域通道等化及頻域通道等化示意圖

資料來源：[2]

具體而言，使用離散傅立葉轉換(Discrete Fourier Transform, DFT)便能夠以簡單的現代數位信號處理(Digital Signal Processing)機制實現頻域等化機制，這是因為離散傅立葉轉換的尺寸並不會隨著時域通道脈衝響應的長短而改變，使得頻域等化器的複雜度要比時域等化器低上許多。

SC/FDE

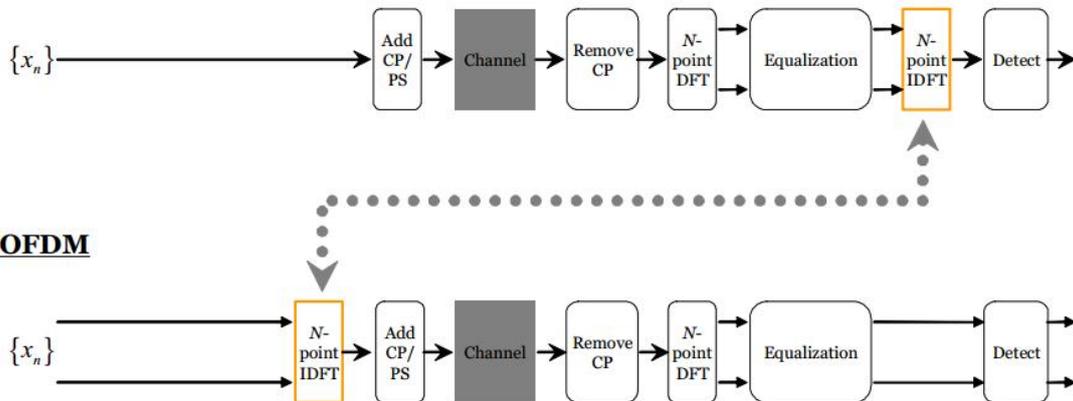


圖 2 單載波頻域等化及正交載波多工的比較圖

資料來源：[2]

單載波頻域等化的複雜度和正交分頻多工相差無幾，且效能相近。圖 2 為單載波頻域等化以及正交分頻多工兩種系統的比較圖，可看出來兩種系統的方塊幾近相同，唯一的不同在於反離散傅立葉轉換方塊擺放的位置。正交載波多工系統的反傅立葉轉換方塊位於傳送端，而單載波頻域多工系統的反傅立葉轉換方塊則位於接收端。

2.1.1 保護區間與循環字首

從時域的觀點來看，如同正交載波多工系統，在多重路徑通道的影響之下，單載波頻域等化系統的傳送符號會發生延遲。如此一來，傳送符號到達接收端的時間不一，比較晚到達接收端的符號便對下一時刻準時到達的符號產生干擾，稱為符號間干擾(Inter-Symbol-Interference, ISI)。由於單載波頻域等化系統使用區塊(Block)傳送的機制，亦即系統會將序列符號分成一個個的區塊，因此符號間干擾亦可視同區塊間干擾(Inter-Block-Interference, IBI)。為了解決此一問題，單載波頻域等化系統會在相鄰區塊之間插入一段保護區間(Guard Interval)。只要保護區間大於通道的延遲時間，那麼區塊間就不會互相干擾。循環字首(Cyclic Prefix, CP)常常被用來當作保護區間，如圖 3 所示，所謂循環字首就是將區塊最後的部分複製到區塊的前端，藉此消除區塊間干擾。

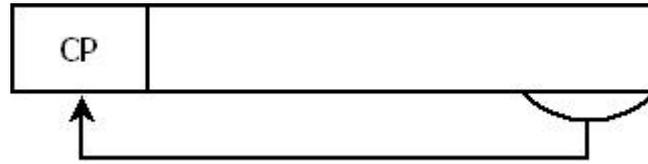


圖 3 循環字首

2.1.2 頻域等化機制

當訊號傳送到通道之中，訊號被多重路徑通道影響的結果就等同訊號和通道脈衝響應做線性摺積。到達接收端後，等化器的作用就是要把接收訊號所受之通道脈衝響應的影響消除，亦即和接收訊號做摺積後以求得原始訊號。從數位訊號處理的角度來看，循環字首的一個重要功能即是將傳送訊號和通道的線性摺積轉變為循環(Circular)摺積。透過在傳送端將傳送訊號加上循環字首，以及在接收端去除循環字首的處理，傳送訊號看起來就像是和通道脈衝響應做了循環摺積，只要再利用離散傅立葉轉換將接收訊號轉換到頻域後，便可簡單地使用逐點等化器補償通道失真。一些常見的通道等化機制，如強制歸零(Zero-Forcing)等化器、最小均方誤差(Minimum Mean-Square Error, MMSE)等化器、判決反饋等化器(Decision Feedback Equalizer)、渦輪(Turbo)等化器[7]-[12]等等皆可被應用在頻域等化機制。

如圖 2 所示，訊號經過頻域等化之後，單載波頻域等化系統再利用反離散傅立葉轉換(Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)將之轉換回時域上，最後再使用檢測器(Detector)便可還原原始訊號。

2.2 單載波分頻多工系統模型

在這一節裡，我們將正式介紹單載波分頻多工系統。單載波頻域等化系統一次只能傳輸單一用戶的訊號，為了能夠同時支援多用戶同時傳送訊號，分頻這個概念被引進到單載波頻域等化系統裡。如同正交載波多工系統，單載波分頻多工系統使用互為正交的子載波傳送訊號。單載波分頻多工系統將寬帶傳輸通道環境切割成一段段的子頻帶，每段頻帶所遭受的衰減程度不一，使用分頻技術能針對個別用戶的通道狀態適當分配傳輸頻帶，以達到多用戶多樣性(Diversity)的好處。如同單載波頻域等化系統，引入分頻技術的單載波分頻多工系統亦具有低峰值對平均功率比的特性，可增加傳送端的能源效率。

2.2.1 單載波分頻多工系統傳送端

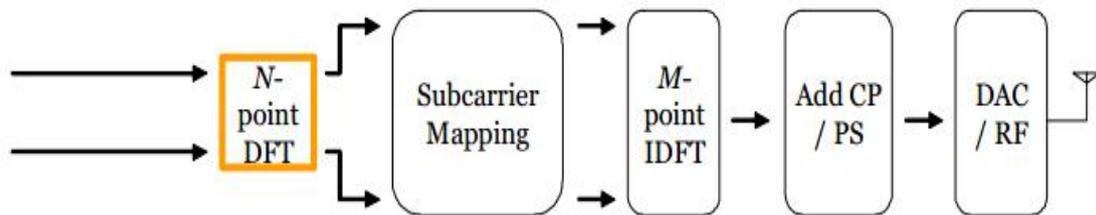


圖 4 單載波分頻多工系統傳送端方塊圖

資料來源：[2]

如圖 4 所示，單載波分頻多工系統首先傳送端在時域產生正交調幅調變串行資料訊號，使用一個序列轉並列單位將序列訊號轉換為並列訊號，然後再利用一個 M 點離散傅立葉轉換方塊將此時域並列訊號轉換到頻域。緊接著，根據個別用戶的通道狀態選擇適當的頻帶傳輸，將頻域並列訊號映射到被分配的子載波上，以達到用戶多樣性的好處，其中子載波分配機制共有區域式(Localized)、分散式(Distributed)及交錯式(Interleaved)等方式。假設系統共有 N 條子載波可供傳輸的話，系統把當中 M 條子載波分配給單一使用者傳輸訊號。分配完頻帶以後，系統利用一個 N 點反快速傅立葉轉換將頻域並列訊號轉換成並列時域訊號，然後用一個並串轉換器將時域並列訊號轉換為序列訊號。接著，如同 2.1.1 節所介紹，單載

波分頻多工系統亦在每區塊的前面插入一段循環字首以抵抗區塊間干擾，接著便把數位訊號轉換為類比訊號傳送出去。

2.2.2 單載波分頻多工系統接收端

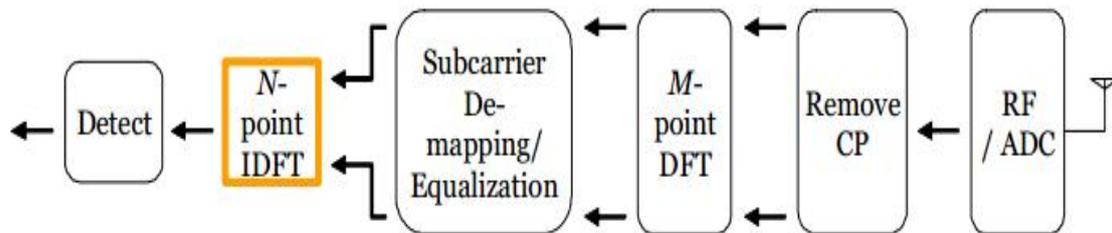


圖 5 單載波分頻多工系統接收端方塊圖

資料來源：[2]

如圖 5 所示，傳送訊號經過無線通道到達接收端後，接收端首先將此類比訊號轉換為數位訊號，接著將循環字首去除，這時的接收訊號看起來就像和通道脈衝響應做了循環摺積。再來利用快速傅立葉轉換將此訊號轉換到頻域上之後，在整個頻帶之中，此用戶所占用的子載波僅占其中一部分，這時再使用子載波反射(De-mapping)單位取出此用戶所被分配到子載波上的訊號後，便可簡單的使用逐點通道等化器補償訊號所受到的多重路徑干擾。經過等化器後，此頻域並列訊號先是經過一個反離散傅立葉轉換轉回時域並列訊號，接著再利用並串轉換器將並列訊號轉換為串列的符號，最後利用檢測器判決此串列符號的原始符號為何。

2.2.3 單載波分頻多工系統的優缺點

本小節會對單載波分頻多工系統的優缺點做個簡單的總結，首先此系統之優點如下，

- (1) 如同單載波頻域系統，對單一用戶而言，單載波分頻多工系統僅使用單一載波傳輸訊號，因此具有較低的峰值對平均功率比(Peak to Average Power Ratio, PAPR)，可以節省傳送端耗能，亦即能夠延長無線裝置的電池使用時間。

- (2) 使用循環字首機制可有效對抗多重路徑干擾的影響，避免不同的區塊相互干擾。
- (3) 接收端在時域做符號檢測，若某個子載波發生零點(null)，則檢測不受影響。

而單載波分頻多工系統的缺點有，

- (1) 同步(Synchronization)的問題，相較於正交分頻多工系統用很多條子載波同時發送序列訊號，單載波頻域等化系統則是在時域上產生一個個的串列訊號，若要達到跟正交分頻多工系統一樣快的傳輸速率，則傳送端必須將符號區間切割得很小，因此在接收端會有很重要的時間同步問題。接收端必須要能準確的分隔每個符號，才能夠解回正確的資料。



2.3 基本假設

在本節會給定本篇論文所做的的基本假設如下

- (1) 來源(Source)訊號序列 $\mathbf{s}[k]$ 是獨立且同分布(Independent Identical Distributed, i.i.d.)，其中括幅內的 k 為時槽指標，其平均值為零(Zero Mean)且滿足克羅內克函數(Kronecker Delta Function)如下 $E\{s_i(k)s_j^*(k)\} = E_S \cdot \delta(i-j)$ ， E_S 為平均符號能量， $\delta(\cdot)$ 為克羅內克函數。
- (2) 對第 k 個時槽，本篇論文所考慮的無線通道共有條 L 路徑，每一路徑的通道增益(Gain) $h_i(k)$ 互為獨立且同分布的複數循環高斯(Complex Circularly Gaussian)變數，且平均值為零而變異數(Variance)，亦即功率，為 $\sigma_{h,i}^2$ ，其分佈為 $h_i(k) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_{h,i}^2)$ ， $0 \leq i \leq L-1$ 。並且所有通道路徑的功率總合為 1，亦即 $\sum_{i=0}^{L-1} \sigma_{h,i}^2 = 1$ 。
- (3) 對第 i 條路徑而言，不同時間點之間通道增益的相關性遵照傑克斯模型(Jake's Model) 的假設，且其時間相關性的定義為 $E\{h_i(k)h_i^*(m)\} = \sigma_{h,i}^2 J_0(2\pi f_d(k-m))$ ，其中 $J_0(\cdot)$ 為第零階貝索(Bessel)函數，而 f_d 則為都普勒頻率(Doppler Frequency)，頻率為赫茲(Hertz)。並且固定第 i 條路徑，相同時槽的相關性假設為 1，亦即 $E\{h_i(k)h_i^*(k)\} = 1$ 。
- (4) 通道環境為擬似穩態(Quasi Static)衰減，亦即在同一資源區塊(Resource Block, RB)中，通道維持穩定，但在不同的資源區塊裡則會發生變動。
- (5) 通道雜訊是平均值為零而變異數為 σ_w^2 的複數循環白高斯雜訊(Complex Circularly Gaussian Noise)，其實部(Real Part)和虛部(Imaginary Part)互為獨立且同分布，並且與傳送訊號以及通道增益互為獨立。
- (6) 在不失一般性的前提下，我們假設訓練符號不會隨著不同的時槽而改變。

2.4 LTE 上鏈傳輸單載波分頻多工系統訊號模型

在 2.2 節已經介紹了單載波分頻多工系統的基本工作原理，其中等化器的效能，取決於接收端的通道狀態資訊的精確度。根據 LTE 制定的標準[13]，為了準確獲取通道狀態資訊，在每個時槽傳送端會在頻域產生定義好的訓練符號，並把他映射到被分配的子載波及符號位置上。之後經歷如同 2.2 節的傳送流程，到達接收端。接收端便利用這些已經定義好的訓練符號，估計每個子載波通道增益。常見的通道估計法則如最小平方誤差(Least Square Estimation, LSE)法則及線性最小均方誤差(Linear Minimum Mean Square Estimation, LMMSE)法則等等。有了準確的通道估計值以後，才能夠適當設計等化器，以便解回原始訊號。

2.4.1 LTE 系統上鏈傳輸訊框架構

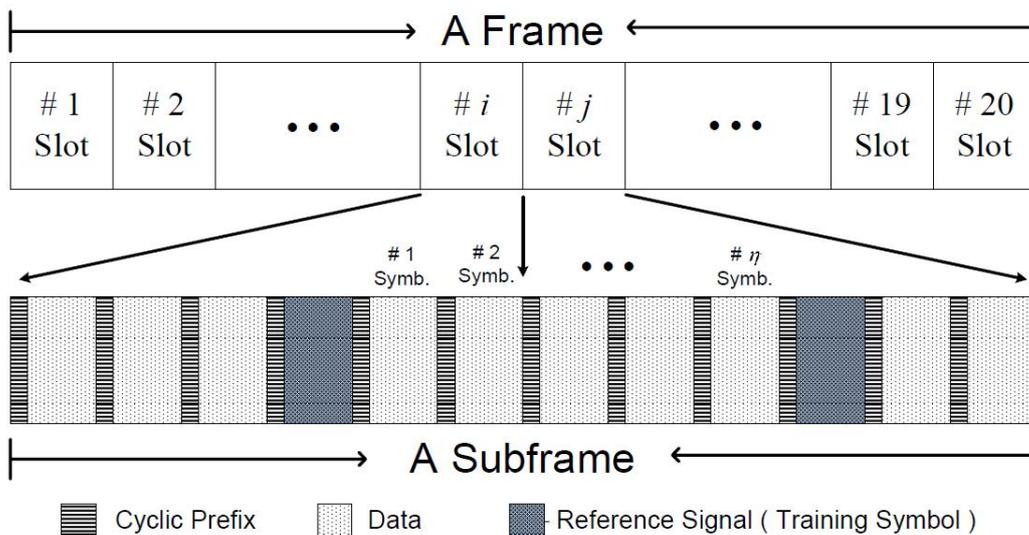


圖 6 LTE 系統上鏈傳輸訊框架構

圖 6 所示為 LTE 系統上鏈傳輸訊框架構(Frame Structure)[13]。此訊框架構不論是在分頻多工(Frequency Division Duplex, FDD)或是分時多工(Time Division Duplex, TDD)LTE[2]系統皆能使用。單一訊框長度為 $T_f = 10 \text{ ms}$ ，包含 20 個長度為 $T_f = 0.5 \text{ ms}$ 的時槽。一個次訊框(Sub-frame)定義為由兩個連續時槽組成。依據

循環字首的長度，每個時槽包含 6 或 7 個正交載波多工符號，依其使用標準前置循環字首(normal CP)或者擴充前置循環字首(extended CP)而定。本篇論文所考慮之系統皆使用標準前置循環字首，因此每個時槽皆包含 7 個正交載波多工符號，並且訓練符號位於每個時槽的第四個正交載波多工符號。

2.4.2 單載波分頻多工系統通道估計機制

令 $\mathbf{p}[k] = [p(kM) \cdots p(kM + M - 1)]^T \in \mathbb{C}^M$ 為第 k 個時槽內，傳送端在頻域產生的訓練符號，若整個頻帶共有 N 條子載波，他會被映射到被分配的 M 條子載波上如下，

$$\tilde{\mathbf{p}}[k] = \mathbf{A}\mathbf{p}[k] \in \mathbb{C}^N, \quad (2.1)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\mu \times M} \\ \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{(N-M-\mu) \times M} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times M}, \quad 0 \leq \mu \leq N - M, \quad N > M, \quad (2.2)$$

為區域式子載波映射矩陣， N 為基地台總載波數。由(2.2)可看出子載波映射矩陣 \mathbf{A} 由一個大小與被分配子載波數相同的單位矩陣與兩個零矩陣所組成。值得注意的是，子載波映射矩陣具有 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_M$ 這一特性。經過映射的訓練符號在傳送之前， $\tilde{\mathbf{p}}[k]$ 會再經過反快速傅立葉轉換，再加上循環字首以及並串轉換。經過反快速傅立葉轉換的訊號可表示如下，

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{F}_N^H \tilde{\mathbf{p}}[k] \quad (2.3)$$

其中 $(\cdot)^H$ 為共軛轉置 (Conjugate Transpose, or Hermitian) 而 $\mathbf{F}_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 為一個 $N \times N$ 點的快速傅立葉轉換矩陣，定義如下，

$$\mathbf{F}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}, \quad w = \exp\{-j2\pi / M\} \quad (2.4)$$

而反快速傅立葉轉換矩陣的定義如下，

$$\mathbf{F}_N^H = \mathbf{F}_N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w^{-1} & \cdots & w^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1)} & \cdots & w^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

在傳送訊號之前，如同 2.1.1 節所述，假設循環字首的長度為 L_{CP} ，為了抵抗符號間的干擾，系統會把 $\mathbf{x}[k]$ 的最後 L_{CP} 個值複製到其向量的最上方，再傳送出去。假設 $L_{CP} \geq L$ ，加上循環字首這個處理的數學形式可描述如下，

$$\mathbf{s}[k] = \mathbf{G}\mathbf{x}[k] \in \mathbb{C}^{N+L_{CP}} \quad (2.6)$$

其中 \mathbf{G} 為一個循環字首插入矩陣，可描述如下，

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L_{CP} \times (N-L_{CP})} & \mathbf{I}_{L_{CP}} \\ & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+L_{CP}) \times N} \quad (2.7)$$

$\mathbf{s}[k]$ 經過並串轉換以後，便會被傳送到通道之中。為了分析方便，我們將此通道等效成一個有限脈衝響應(Finite Impulse Response)通道，並且令

$$\mathbf{h}[k] \triangleq [h_0(k) \ h_1(k) \ \cdots \ h_{L-1}(k)]^T \in \mathbb{C}^L \quad (2.8)$$

為第 k 個時槽內的通道脈衝響應，而整個 N 條子載波的頻域脈衝響應可表示如下

$$\tilde{\mathbf{h}}[k] \triangleq \mathbf{F}_N \mathbf{g}[k] \in \mathbb{C}^N, \text{ 其中 } \mathbf{g}[k] \triangleq [\mathbf{h}[k]^T \ \mathbf{0}_{1 \times (N-L)}]^T \quad (2.9)$$

訊號與通道脈衝響應反應後，輸入輸出關係如下，

$$u(kN + p) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l(k) s(kN + p - l), \quad 1 \leq p \leq P - 1 \quad (2.10)$$

其中 L 為總路徑數且 $P \triangleq L + L_{CP}$ 。再本篇論文當中，我們作了以下定義，

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x(kN) \\ \vdots \\ x(kN + P - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^P, \quad \mathbf{u}[k] = \begin{bmatrix} u(kN) \\ \vdots \\ u(kN + P - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^P \quad (2.11)$$

(2.10) 經由直接矩陣計算後，可證明(2.11)的 $\mathbf{x}[k]$ 和 $\mathbf{u}[k]$ 具有以下的關係，

$$\mathbf{u}[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} h_0(k) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ h_{L-1}(k) & h_0(k) & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{L-1}(k) & \cdots & h_0(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_0[k]} \mathbf{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h_{L-1}(k) & \cdots & h_1(k) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & h_{L-1}(k) \\ \vdots & & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1[k]} \mathbf{x}[k-1] \quad (2.12)$$

其中 $\mathbf{H}_0[k] \in \mathbb{C}^{P \times P}$ 是一個以 $[h_0(k) \cdots h_{L-1}(k) 0 \cdots 0]^T \in \mathbb{C}^P$ 為第一行的下三角 Toeplitz 矩陣。而 $\mathbf{H}_1[k] \in \mathbb{C}^{P \times P}$ 則為一個以 $[0 \cdots 0 h_{L-1}(k) \cdots h_1(k)] \in \mathbb{C}^{1 \times P}$ 為第一列的上三角 Toeplitz 矩陣。接下來，訊號通過無線通道到達接收端以後，由於受到雜訊的干擾，會加上平均值是零而變異數為 σ_w^2 的可加性白色高斯雜訊，此外系統會移除區塊最上方的循環字首如下，

$$\tilde{\mathbf{y}}[k] = \mathbf{G}_{inv} \tilde{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{w}[k] \quad (2.13)$$

其中

$$\mathbf{G}_{inv} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times LCP} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (N+LCP)} \quad (2.14)$$

為循環字首移除矩陣。因此訓練符號 $\mathbf{p}[k] = [p(kM) \cdots p(kM + M - 1)]^T \in \mathbb{C}^M$ 在經過子載波映射、反快速傅立葉轉換、並串轉換、加上循環字首傳送出去，經過通道並且在接收端移除其循環字首後，接收訊號的數學模型可表示如下

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}[k] &= \mathbf{G}_{inv} \tilde{\mathbf{x}}[k] + \tilde{\mathbf{w}}[k] \\ &= \mathbf{G}_{inv} \mathbf{H}_0[k] \mathbf{x}[k] + \mathbf{G}_{inv} \mathbf{H}_1[k] \mathbf{x}[k-1] + \tilde{\mathbf{w}}[k] \\ &= \mathbf{G}_{inv} \mathbf{H}_0[k] \mathbf{G} \mathbf{F}_N^H \mathbf{A} \mathbf{p}[k] + \mathbf{0}_{N \times 1} + \tilde{\mathbf{w}}[k] \\ &= \mathbf{H}[k] \mathbf{F}_N^H \mathbf{A} \mathbf{p}[k] + \tilde{\mathbf{w}}[k] \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中

$$\mathbf{H}[k] = \mathbf{G}_{mv} \mathbf{H}_0[k] \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_0(k) & 0 & \cdots & 0 & h_{L-1}(k) & \cdots & h_1(k) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & h_{L-1}(k) \\ h_{L-1}(k) & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{L-1}(k) & \cdots & \cdots & h_0(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N} \quad (2.16)$$

矩陣 $\mathbf{H}[k] \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 具有一種特殊循環矩陣(Circular Matrix)結構，以

$$[h_0(k) \cdots h_{L-1}(k) 0 \cdots 0]^T \in \mathbb{C}^N \quad (2.17)$$

為第一行。

引理 2.1：所有 $N \times N$ 點的循環矩陣皆可藉由快速傅立葉轉換矩陣 $\mathbf{F}_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 對角化，其中 $[\mathbf{F}_N]_{m,n} = w^{(m-1)(n-1)}$, $w = \exp(-j2\pi/N)$ ，這是因為所有 $N \times N$ 點循環矩陣經過對角化後，其正規化(Orthonormalization)後的特徵向量實際上就和 \mathbf{F}_N 的行一模一樣，並且又因為 \mathbf{F}_N 為么正(Unitary)矩陣，亦即 $\mathbf{F}_N^H \mathbf{F}_N = \mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^H = \mathbf{I}_N$ 。具體而言，令循環矩陣 $\mathbf{H}[k] \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 定義如(2.14)，則會具有以下數學關係，

$$\mathbf{F}_N \mathbf{H}[k] \mathbf{F}_N^H = \text{Diag}\{\tilde{\mathbf{h}}[k]\}, \quad (2.18)$$

其中 $\tilde{\mathbf{h}}[k]$ 定義如(2.9)式。

□

根據引理(2.1)，接收訊號移除掉循環字首並且用快速傅立葉轉換矩陣 \mathbf{F}_N 轉換到以後，在更進一步取出被分配的子載波上的訊號，則接收訊號可表示如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[k] &= \mathbf{A}^T \mathbf{F}_N \tilde{\mathbf{x}}[k] \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{F}_N \mathbf{H}[k] \mathbf{F}_N^H \mathbf{A} \mathbf{p}[k] + \mathbf{A}^T \mathbf{F}_N \tilde{\mathbf{w}}[k] \\ &\triangleq \tilde{\mathbf{H}}[k] \mathbf{p}[k] + \mathbf{w}[k] \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $\tilde{\mathbf{H}}[k] \triangleq \text{Diag}\{\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{h}}[k]\} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ 為一個對角矩陣，並且其對角項即為被分配到子載波上的頻域通道響應，而 $\mathbf{w}[k] \triangleq \mathbf{A}^T \mathbf{F}_N \tilde{\mathbf{w}}[k] \in \mathbb{C}^M$ 為子載波所受到的雜訊向量。值得注意的是， $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 為一個正規化矩陣，亦即 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_M$ ；並且因為 \mathbf{F}_N 為一個么正矩陣，使得可加性白高斯雜訊的分布為 $\mathbf{w}[k] \sim CN(\mathbf{0}, \sigma_w^2 \mathbf{I}_M)$ 。為了簡化通道估計的分析，讓我們把(2.19)式改寫如下，

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{P}[k] \cdot (\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{h}}[k]) + \mathbf{w}[k] \quad (2.20)$$

其中

$$\mathbf{P}[k] = \text{diag}\{\mathbf{p}[k]\} \in \mathbb{C}^{M \times M} \quad (2.21)$$

為一對角矩陣，其對角項即為各個子載波上的訓練符號。接著我們將(2.9)所定義的 $\tilde{\mathbf{h}}[k]$ 代入(2.20)，可得到以下結果，

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[k] &= \mathbf{P}[k] \cdot (\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{h}}[k]) + \mathbf{w}[k] \\ &= \mathbf{P}[k] \mathbf{A}^T \mathbf{F}_N \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \\ \mathbf{0}_{(N-L) \times L} \end{bmatrix} \mathbf{h}[k] + \mathbf{w}[k] \\ &\triangleq \mathbf{P}[k] \tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{h}[k] + \mathbf{w}[k] \end{aligned} \quad (2.22)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{F}}_N \triangleq \mathbf{A}^T \mathbf{F}_N \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \\ \mathbf{0}_{(N-L) \times L} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times L} \quad (2.23)$$

為從 \mathbf{F}_N 取出的子矩陣(Sub-Matrix)，此子矩陣對應到 M 條子載波的列以及對應到前 L 條路徑的行。

2.4.3 時域線性最小均方誤差估計法則

在 2.4 節一開始，我們已經介紹了通道估計的原因及幾種常用的方法。根據(2.22)，此節將會介紹如何依據最小均方誤差估計法則來估計時域通道脈衝響應 $\mathbf{h}[k]$ 。藉由以下的標準程序[14]，通道估計可表示如下

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{h}}[k] &= [\hat{h}_0(k) \ \hat{h}_1(k) \cdots \hat{h}_{L-1}(k)]^T \\
&= \sigma_w^{-2} [\mathbf{R}_h^{-1} + \sigma_w^{-2} \tilde{\mathbf{F}}_N \tilde{\mathbf{F}}_N^H]^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{y}[k] \\
&= [\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N]^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{y}[k]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

其中

$$\mathbf{R}_h \triangleq \text{diag}\{\sigma_{h,0}^2 \ \sigma_{h,1}^2 \cdots \sigma_{h,L-1}^2\} \tag{2.25}$$

假設接收端已經根據(2.24)連續估計了 K 個時槽的通道向量 $\hat{\mathbf{h}}[1], \dots, \hat{\mathbf{h}}[K]$ ，接著便使用通道預測機制預測最新的通道向量 $\hat{\mathbf{h}}_p[K+n]$ ， $n \geq 1$ 。在不失一般性的前提下，我們假設訓練符號不會隨著不同的時槽而改變，亦即

$$\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}, \quad \forall k \tag{2.26}$$

本篇論文提出一個嶄新的通道預測機制，可一併考慮通道估計誤差的影響，並且在後續的章節會深入分析此預測器的效能。



第三章 通道預測機制

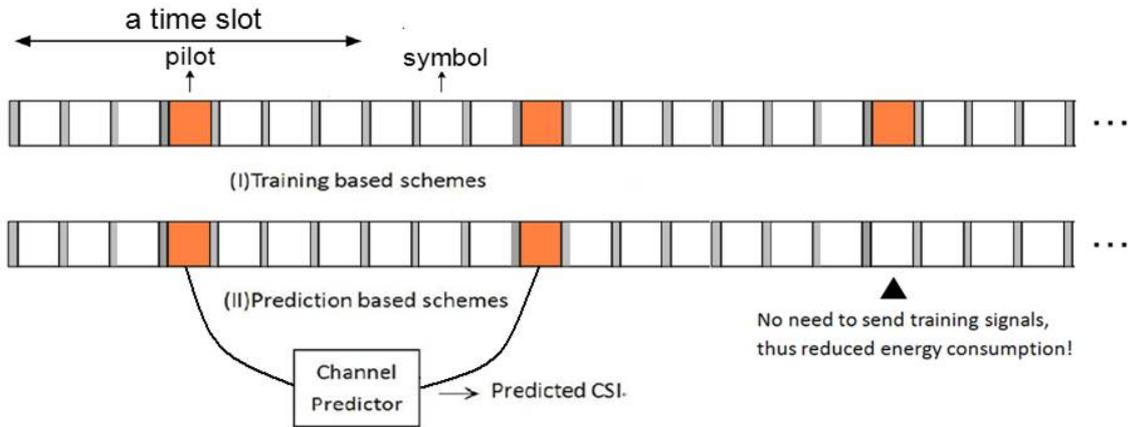


圖 7 通道估計機制與通道預測機制比較圖

圖 7 所示為通道估計機制與通道預測機制比較圖，其中橘色部分表示訓練符號，每個時槽包含七個正交分頻多工符號，而訓練符號位於其中第四個。在傳統通道估計機制當中，傳送端會週期性地發送訓練符號到接收端，發送訊號的過程中勢必定期耗費能量。訓練符號傳送到接收端後，接收端會利用各種不同的通道估計法則獲取通道狀態資訊。我們從兩個面向思考如何提升整體系統的能源使用效率，因而提出在接收端使用通道預測機制來獲取最新的通道狀態資訊。其一，我們設計傳送端連續發送了數次的訓練符號後，便停止發送訓練符號，因此毋須持續耗能以發送訓練符號，因而減輕傳送耗能。值得一提的是，因為單載波分頻多工系統的傳送端多為無線裝置，因此能源效率益發重要。其二，如果能夠在維持一定效能的前提下，降低接收端獲取通道狀態資訊的複雜度，那麼整體系統的節能效率必能有所提升。

這一章節會介紹本篇論文所設計的最佳通道預測機制。其中 3.1 節將推導出一個考慮進通道估計誤差的最佳預測器，3.2 節將分析此預測器所能達到的效能，預測器的複雜度則會在 3.3 節中介紹，並且最後在 3.4 節為模擬結果。

3.1 演算法設計

假設接收端已經根據(2.24)的線性最小均方誤差通道估計法則連續估計了 K 個時槽的通道向量 $\hat{\mathbf{h}}[1], \dots, \hat{\mathbf{h}}[K]$ 。根據這 K 個估計到的通道向量，接下來接收端使用通道預測機制來預測最新的通道向量 $\hat{\mathbf{h}}_{\mathcal{P}}[K+n] = [\hat{h}_{0,\mathcal{P}}(K+n) \hat{h}_{1,\mathcal{P}}(K+n) \dots \hat{h}_{L-1,\mathcal{P}}(K+n)]^T$, $n \geq 1$ 。通道預測的方式可以一次預測整個通道向量，但為了簡化運算複雜度，本篇論文所考慮的通道預測器會分別預測每個路徑上的通道增益。因此，對第 i 條路徑而言， $0 \leq i \leq L-1$ ，通道預測機制的數學表示式如下，

$$\hat{h}_{i,\mathcal{P}}(K+n) = \sum_{k=1}^K a_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k), \quad n \geq 1 \quad (3.1)$$

其中 $a_{i,k}^{(n)}$ 即為待設計的通道預測係數。本篇論文藉由最小化均方誤差的法則來設計通道預測係數 $a_{i,k}^{(n)}$ ，並且定義第 i 條路徑的均方誤差如下，

$$MSE_i[n] \triangleq E \left\{ \left| \hat{h}_{i,\mathcal{P}}(K+n) - h_i(K+n) \right|^2 \right\}, \quad (3.2)$$

其中期望值 $E\{\cdot\}$ 是針對通道以及雜訊的統計特性來做計算。我們將(3.1)代入(3.2)並展開如下，

$$\begin{aligned} MSE_i[n] &\triangleq E \left\{ \left| \hat{h}_{i,\mathcal{P}}(K+n) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left| \sum_{k=1}^K a_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K a_{i,k}^{(n)} E \left\{ \hat{h}_i(K+1-k) \hat{h}_i^*(K+1-k) \right\} a_{i,j}^{(n)} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \text{Re} \left\{ a_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k) h_i^*(K+n) \right\} + E \left\{ \left| h_i(K+n) \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$MSE_i[n]$ 可看作是通道預測係數 $a_{i,k}^{(n)}$, $1 \leq k \leq K$ 的函數。在這裡設計的目標，即是適當設計 $a_{i,k}^{(n)}$ 使得 $MSE_i[n]$ 為最小，如此一來，預測的通道向量和真實的通道向量之間的誤差便能盡可能的縮小。在 $MSE_i[n]$ 發生最小值的地方，其斜率必為零，也就是對 $a_{i,k}^{(n)}$ 微分為零的地方，因此令

$$\frac{\partial MSE_i[n]}{\partial a_{i,k}^{(n)}} = 0, \quad 1 \leq k \leq K \quad (3.4)$$

可得到

$$E \left\{ \left[h_i(K+n) - \sum_{k=1}^K a_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k) \right] \hat{h}_i^*(K+1-j) \right\} = 0, \quad 1 \leq j \leq K \quad (3.5)$$

若從幾何的觀點來解釋，以上結果亦可稱作正交定理(Orthogonal Principle)，亦即通道預測值即是把先前所估得的通道估計值做線性組合(Linear Combination)來求得最新的通道狀態資訊，其中最佳的通道預測值，他和真實通道值之間的誤差必定會和先前所估得的通道估計值互為正交，因此稱為正交定理。若用數學模型來表示，即為(3.5)式。(3.5)亦可表示如下，

$$\sum_{k=1}^K a_{i,k}^{(n)} E \left\{ \hat{h}_i(K+1-k) \hat{h}_i^*(K+1-j) \right\} = E \{ h_i(K+n) \hat{h}_i^*(K+1-j) \}, \quad 1 \leq j \leq K \quad (3.6)$$

(3.6)定義了 K 個以 $a_{i,k}^{(n)}$ ， $1 \leq k \leq K$ ，為未知數的線性等式。根據(3.6)以及在 2.3 節對通道和雜訊之統計特性所做的基本假設，最佳通道預測係數可由以下定理獲得。

定理 3.1： 定義

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(K-1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(K-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(K-1) & r(K-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

以及

$$\mathbf{r}_K^{(n)} = [r(n) \quad r(n+1) \quad \cdots \quad r(K+n-1)]^T, \quad (3.8)$$

其中 $r(k-m) \triangleq J_0(2\pi f_d(k-m))$ 。那麼最佳通道預測器 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} \triangleq [\bar{a}_{i,1}^{(n)} \quad \bar{a}_{i,2}^{(n)} \quad \cdots \quad \bar{a}_{i,K}^{(n)}]^T \in \mathbb{C}^K$ 如以下所示，

$$\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} = \alpha_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)}, \quad (3.9)$$

其中

$$\mathbf{R}_i \triangleq \beta_i \cdot \mathbf{R} + \gamma_i \cdot \mathbf{I}_K, \quad (3.10)$$

而

$$\alpha_i \triangleq \sigma_{h,i}^2 \cdot \mathbf{e}_i^T \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i, \quad (3.11)$$

$$\beta_i \triangleq \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i, \quad (3.12)$$

$$\gamma_i \triangleq \sigma_w^2 \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i, \quad (3.13)$$

[證明]：見附錄一。

□

當我們藉由(3.9)求得最佳的通道預測器後，預測的通道向量可表示如下，

$$\hat{h}_{i,\mathcal{P}}(K+n) = \sum_{k=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k), \quad n \geq 1 \quad (3.14)$$

值得注意的是，如果先前的通道估計值皆完美無誤，亦即 $\sigma_w^2 = 0$ ，那麼很簡單的可以看出 $\alpha_i = \beta_i = \sigma_{h,i}^2$ 以及 $\gamma_i = 0$ ；因此，(3.9)的通道預測器 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ 將會簡化為著名的通道預測器[5]如下，後續論文將之稱為傳統預測器，

$$\tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} = [\tilde{a}_{i,1}^{(n)} \tilde{a}_{i,2}^{(n)} \cdots \tilde{a}_{i,K}^{(n)}]^T \triangleq \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)} \quad (3.15)$$

此外，從(3.9)可看出本篇論文所設計的通道預測器會分別針對每條路徑的狀況做設計，然而(3.14)的傳統通道預測器則是在每條路徑都採取相同的預測機制。若使用(3.15)傳統通道預測器預測通道，則其通道預測值可表示如下，

$$\hat{h}'_{i,\mathcal{P}}(K+n) = \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k), \quad n \geq 1 \quad (3.16)$$

3.2 均方誤差分析

在此節我們會進一步分析(3.9)與(3.15)兩種不同通道預測器的效能，定義兩種預測器所能達到的最小均方誤差如下，首先是最佳通道預測器的均方誤差，

$$\begin{aligned}\overline{MSE}[n] &\triangleq \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \hat{h}_{i,\mathcal{P}}(K+n) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k) - h_i(K+n) \right|^2 \right\}\end{aligned}\quad (3.17)$$

以及傳統通道預測器的均方誤差，

$$\begin{aligned}\widetilde{MSE}[n] &\triangleq \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \hat{h}'_{i,\mathcal{P}}(K+n) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k) - h_i(K+n) \right|^2 \right\}\end{aligned}\quad (3.18)$$

以下定理為(3.17)及(3.18)的分析結果。

定理 3.2：令(3.17)和(3.18)所定義的 $\overline{MSE}[n]$ 以及 $\widetilde{MSE}[n]$ 為(3.9)及(3.15)兩種通道預測機制所能達成的最小均方誤差。讓我們回顧 2.3 節的基本假設 $\sum_{i=0}^{L-1} \sigma_{h,i}^2 = 1$ 以及 $r(0) = 1$ ，我們可獲得

$$\overline{MSE}[n] = 1 - \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i^2 \left[\mathbf{r}_K^{(n)T} (\beta_i \mathbf{R} + \gamma_i \mathbf{I}_K)^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)} \right] \quad (3.19)$$

以及

$$\widetilde{MSE}[n] = \overline{MSE}[n] + \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)H} \mathbf{R}_i^{-1} \left[\left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right)^2 \cdot \mathbf{R}_i + \frac{\alpha_i \gamma_i}{\beta_i} \cdot \mathbf{I}_K \right] \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} \quad (3.20)$$

其中 \mathbf{R}_i 、 α_i 、 β_i 、 γ_i 、以及 $\tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ 的定義如同(3.10)、(3.11)、(3.12)、(3.13)以及(3.15)。

[證明]：見附錄二。

□

從(3.20)可以很簡單看出 $\widetilde{MSE}[n] \geq \overline{MSE}[n]$ 。因此，本篇論文所設計的將通道估計誤差影響一併考慮的最佳預測器，確實提升了通道預測機制的準確度。我們會在第 3.4 節中給出數值模擬結果。

3.3 複雜度分析

從前一節中，我們已經證明本篇論文所提出的最佳通道預測器，性能比傳統通道預測器好。在這一節裡，除了前述兩種通道預測機制的複雜度，我們也一併給出(2.24)線性最小均方誤差法則估計機制的複雜度，同時比較這三種方法計算時域通道向量的複雜度。在以下討論中，所有的複數乘法器及複數加法器皆已轉換成等效的實數乘法器及加法器。

會在這一節討論複雜度的問題，是因為直覺上系統耗能會與複雜度的多寡呈現正相關，只要能夠降低接收端獲取通道狀態資訊演算法的複雜度，那麼除了在傳送端可以減少訓練符號的傳送，更能提升整體系統能源使用效率。

3.3.1 通道估計機制的複雜度

首先是(2.24)的通道估計機制複雜度，首先讓我們回憶一下

$$\hat{\mathbf{h}}[k] = \left(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{y}[k] \quad (3.21)$$

並且 M 表示的是用戶所佔用的子載波數，而 L 表示的是時域通道的路徑數目。從(3.21)可知通道估計可分為以下幾個步驟，其中(1)到(5)可直接經由簡單的矩陣運算求得，而(6)則是使用 LU 分解(Lower-Upper Decomposition)[15]求得。

- (1) $\mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{y}[k]$ ，共需要 $4M$ 個乘法器及 $2M$ 個加法器。
- (2) $\tilde{\mathbf{F}}_N^H \left(\mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{y}[k] \right)$ ，共需要 $4ML$ 個乘法器及 $(4ML - 2L)$ 個加法器。
- (3) $\tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N$ ，共需要 $4ML^2$ 個乘法器及 $(4ML^2 - 2L^2)$ 個加法器。
- (4) $\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1}$ ，共需要 $2L$ 個乘法器及 0 個加法器。
- (5) $\left(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N \right)$ ，共需要 0 個乘法器及 $2L$ 個加法器。
- (6) $\left(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N \right)^{-1} \left(\tilde{\mathbf{F}}_N^H \mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{y}[k] \right)$ ，共需要 $\frac{4L(L-1)(L+4)}{3}$ 個乘法器及 $\frac{L(L-1)(4L+13)}{3}$ 個加法器。

綜上所述，使用最小均方誤差法則估計時域通道共需要
 $4M + 4ML + 4ML^2 + 2L + \frac{4L(L-1)(L+4)}{3}$ 個乘法器及
 $2M + 4ML + 4ML^2 - 2L^2 + \frac{L(L-1)(4L+13)}{3}$ 個加法器。

3.3.2 最佳通道預測機制的複雜度

緊接著，我們將在這一節介紹使用最佳通道預測器(3.9)以獲取最新時域通道狀態資訊 $\tilde{\mathbf{h}}[K+n]$ ， $n \geq 1$ ，的複雜度。讓我們回憶一下(3.9) $\tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} = \alpha_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)}$ ，其中 \mathbf{R}_i 、 α_i 、 β_i 以及 γ_i 的定義如同(3.10)、(3.11)、(3.12)以及(3.13)。其中 $\tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} = \alpha_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)}$ 可利用 LU 分解來計算，但觀察到 \mathbf{R}_i 如(3.10)所定義為一個 Toeplitz 矩陣，因此我們可藉由 Levinson-Durbin 演算法[15]更進一步減少計算複雜度。通道預測機制可分成以下幾個步驟，

(1) α_i 、 β_i 以及 γ_i ， $i = 1 \cdots L$ 的計算：首先在通道估計的期間裡，我們已經計算過 $\tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N$ 以及 $(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)$ 。

(1-1) 首先回憶 $\alpha_i \triangleq \sigma_{h,i}^2 \cdot \mathbf{e}_i^T \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i$ ，其中 $[(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i]$ 可藉由 LU 分解獲得，共需要 $4 \left[\frac{L(L-1)(L+1)}{3} + L^2 \right]$ 個乘法器以及 $\left[\frac{L(L-1)(4L+1)}{3} + 4L^2 - 2L \right]$ 個加法器。 $\sigma_{h,i}^2 \cdot [\mathbf{e}_i^T \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N] \cdot [(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i]$ 可由直接的矩陣代數運算獲得，共需要 $(4L+4)$ 個乘法器以及 $4L$ 個加法器。

(1-2) $\beta_i \triangleq \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i$ ，從(1-1)已經獲得 $[(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i]$ ，接下來矩陣乘法 $\mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N [(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i]$ 共需要 $4L^2 + 4L$ 個乘法器及 $4L^2$ 個加法器。向量乘法 $[\mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N] [\mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i]$ 共需要 $4L$ 個乘法器及 $4L-2$ 個加法器。

(1-3) $\gamma_i = \sigma_w^2 \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i$ ，我們已在(1-1)及(1-2)求得 $\tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i$ 及 $(\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i$ ，因此 γ_i 的計算僅需 $4L + 4$ 個乘法器及 $4L$ 個加法器。

(2) 計算出 α_i 、 β_i 及 γ_i 後，我們使用 Levinson-Durbin 演算法來計算最新的通道預測器 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ ， $i = 1, \dots, L$ ， $n \geq 1$ ，其中當 $n = 1$ 時共需要 K^2 個乘法器及 K^2 個加法器 [15, pp.194-195]； $n > 1$ 時則需要 $2K^2$ 個乘法器及 $2K^2$ 個加法器 [15, pp.196-197]。

(3) 獲得最新的通道預測器 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ 之後，我們便可將 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ 代入(3.14)求得最新的通道狀態預測值 $\hat{h}_{i,p}(K+n) = \sum_{k=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k)$ ， $n \geq 1$ ，共需要 $4K$ 個乘法器以及 $(4K - 2)$ 個加法器。

值得注意的是，只有當第一次預測通道，亦即 $n = 1$ 時需要計算 α_i 、 β_i 及 γ_i ，而 $n > 1$ 時無須重新計算，僅需使用 Levinson-Durbin 演算法求取最新的通道預測器 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ ， $i = 1, \dots, L$ ， $n > 1$ 。另外一點， $n = 1$ 時以及 $n > 1$ 時，第(2)個步驟的複雜度也有所不同。因此使用本篇論文所設計的通道預測機制獲取最新的通道狀態資訊的複雜度可分為兩個階段討論，並且因為每條路徑皆須分別計算一次最佳通道預測器，因此複雜度相佳以後須乘上 L 。兩階段複雜度如以下所示，

(1) 當 $n = 1$ 時共需要 $\left[K^2 + 4K + \frac{4L(L-1)(L+1)}{3} + 8L^2 + 16L + 8 \right] \cdot L$ 個乘法器以及 $\left[K^2 + 4K + \frac{L(L-1)(4L+1)}{3} + 8L^2 + 10L - 4 \right] \cdot L$ 個加法器。

(2) 當 $n > 1$ 時共需要 $(2K^2 + 4K)L$ 個乘法器以及 $(2K^2 + 4K - 2)L$ 個加法器。

由以上可看出在 $n > 1$ 時，計算最新通道狀態資訊的複雜度要比 $n = 1$ 時低上許多，因此若能夠連續預測多次通道狀態資訊，那麼每次預測的平均複雜度能夠大為降低，因而節省接收端獲取最新通道狀態資訊的複雜度。

3.3.3 傳統通道預測機制的複雜度

使用(3.15)的傳統通道預測器時，沒有將通道估計誤差的影響考慮進來，每個路徑的預測器皆是相同的，因此每次預測最新通道時，僅須計算一次通道預測器即可套用到所有路徑上。亦即 $\tilde{\mathbf{a}}_0^{(n)} = \dots = \tilde{\mathbf{a}}_{L-1}^{(n)}$ 。只有一點需要注意的是，如同 3.3.2 節中使用 Levinson-Durbin 演算法計算最新最佳通道預測器，在這裡亦需分成兩個階段探討其複雜度。其中當 $n = 1$ 時共需要 K^2 個乘法器及 K^2 個加法器 [15, pp.194-195]； $n > 1$ 時則需要 $2K^2$ 個乘法器及 $2K^2$ 個加法器 [15, pp.196-197]。接著

便可直接從(3.16)求得最新通道狀態資訊 $\hat{h}'_{i,p}(K+n) = \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k)$ ，

$n \geq 1$ ，共需要 $4K$ 個乘法器以及 $4K - 2$ 個加法器。

綜上所述，兩階段複雜度如以下所示，

- (1) 當 $n = 1$ 時共需要 $K^2 + 4KL$ 個乘法器以及 $K^2 + (4K - 2)L$ 個加法器。
- (2) 當 $n > 1$ 時共需要 $2K^2 + 4KL$ 個乘法器以及 $2K^2 + (4K - 2)L$ 個加法器。

從以上我們可看出最佳通道預測器在 $n > 1$ 時，具有和傳統通道預測器相差不多的複雜度。這表示最佳通道預測器的複雜度在可接受的範圍內，只要能夠連續預測多次通道，便能夠降低每次預測的平均複雜度。

從整個 3.3 節的討論中，我們可看出在獲取時域通道狀態資訊時，只有通道估計機制的複雜度會受到占用子載波數多寡所影響，而其他兩種通道預測機制皆不受之影響。當用戶需要高傳輸速率時，系統會分配較多的子載波給他，如此一來，因為通道估計機制複雜度會受子載波數影響，使得其訊號處理複雜度因而增加。但是通道預測機制則無此缺點。

假設時域通道路徑數目 L 為 6，而預測階數 K 為 3，在低傳輸速率需求如子載波數目 M 為 36 時，亦即 3 個資源區塊(Resource Block, RB)，則通道估計機制複雜度為 13022 個運算， $n = 1$ 時的最佳通道預測器為 7848 個運算， $n > 1$ 時的最佳通道預測器為 348 個運算， $n = 1$ 時的傳統通道預測器為 150 個運算， $n > 1$ 時的傳統通道預測器為 312 個運算。

另外在高傳輸速率需求下如子載波數目 M 為 1200 時，亦即 100 個資源區塊，兩種通道預測機制的複雜度維持不變，而通道估計機制複雜度則變為 411110 個運算，可看出在高傳輸速率要求下，通道預測機制的複雜度和通道估計機制相較之下非常低。

我們接著用表 1 表示以上三種機制的複雜度，其中所有複數乘法器及加法器均已換成等效的實數乘法器及加法器。

表 1 通道估計機制與通道預測機制複雜度比較 (M ：用戶所佔用的子載波數， L ：時域通道路徑數目， K ：通道預測器的階數)

	乘法器	加法器
通道估計器	$4M + 4ML + 4ML^2 + 2L + \frac{4L(L-1)(L+4)}{3}$	$2M + 4ML + 4ML^2 - 2L^2 + \frac{L(L-1)(4L+13)}{3}$
最佳通道預測器， $n = 1$	$\left[K^2 + 4K + \frac{4L(L-1)(L+1)}{3} + 8L^2 + 16L + 8 \right] \cdot L$	$\left[K^2 + 4K + \frac{L(L-1)(4L+1)}{3} + 8L^2 + 10L - 4 \right] \cdot L$
最佳通道預測器， $n > 1$	$(2K^2 + 4K)L$	$(2K^2 + 4K - 2)L$
傳統通道預測器， $n = 1$	$K^2 + 4KL$	$K^2 + (4K - 2)L$
傳統通道預測器， $n > 1$	$2K^2 + 4KL$	$2K^2 + (4K - 2)L$

3.4 模擬結果

在以下模擬當中，訓練符號的擺設方式均參照 LTE 系統標準擺放。我們比較了三種機制的均方誤差，依次為通道估計機制、最佳通道預測機制以及傳統通道預測機制。其中通道估計機制在每個時槽中皆會估計通道狀態資訊以用來等化訊號；最佳預測器則是接收端估計過幾次通道狀態資訊後，便使用這些已經估計好的通道狀態資訊輔以通道在時間上的相關性來預測最新的通道狀態資訊，並且在預測的過程中一併考慮先前通道估計的誤差；傳統預測器則是忽略通道估計誤差的影響來進行預測。為了簡化分析，以下通道預測機制皆為每估計三次通道接著就預測三次通道，依此類推，如圖 8 所示，

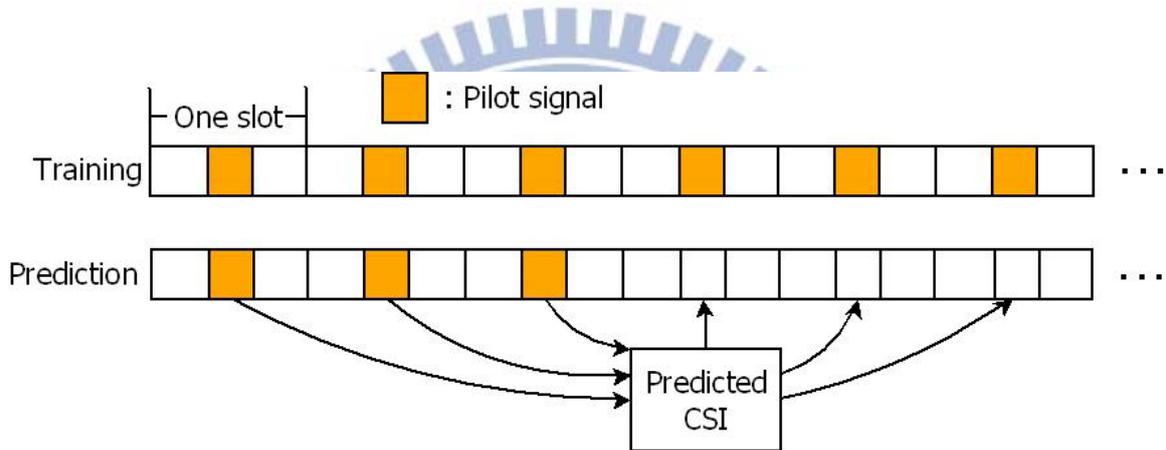


圖 8 通道預測機制示意圖

此外所有的模擬參數設定如表 2 所示，

表 2 模擬參數設定

模擬參數	設定值
時域路徑數目 L	6
快速傅立葉轉換尺寸 N	1024
占用子載波數 M	120
移動速度	10 Km/hr
預測階數 K	3
時槽長度	0.5 ms

圖 9 為均方誤差對雜訊功率的關係，圖 10 及圖 11 則為均方誤差對移動速率的關係，從圖上可看出不管在第一次或第二次預測、雜訊是大或小，本篇論文所設計的最佳通道估計機制要比傳統預測機制的均方誤差好大約 10-15dB。並且從圖 9 中，我們亦證實(3.19)與(3.20)所推導的均方誤差明確表示式跟實際模擬值十分吻合。在以下模擬圖中，sim.為模擬(Simulated)的簡寫而 theo.為理論(Theoretical)的簡寫。

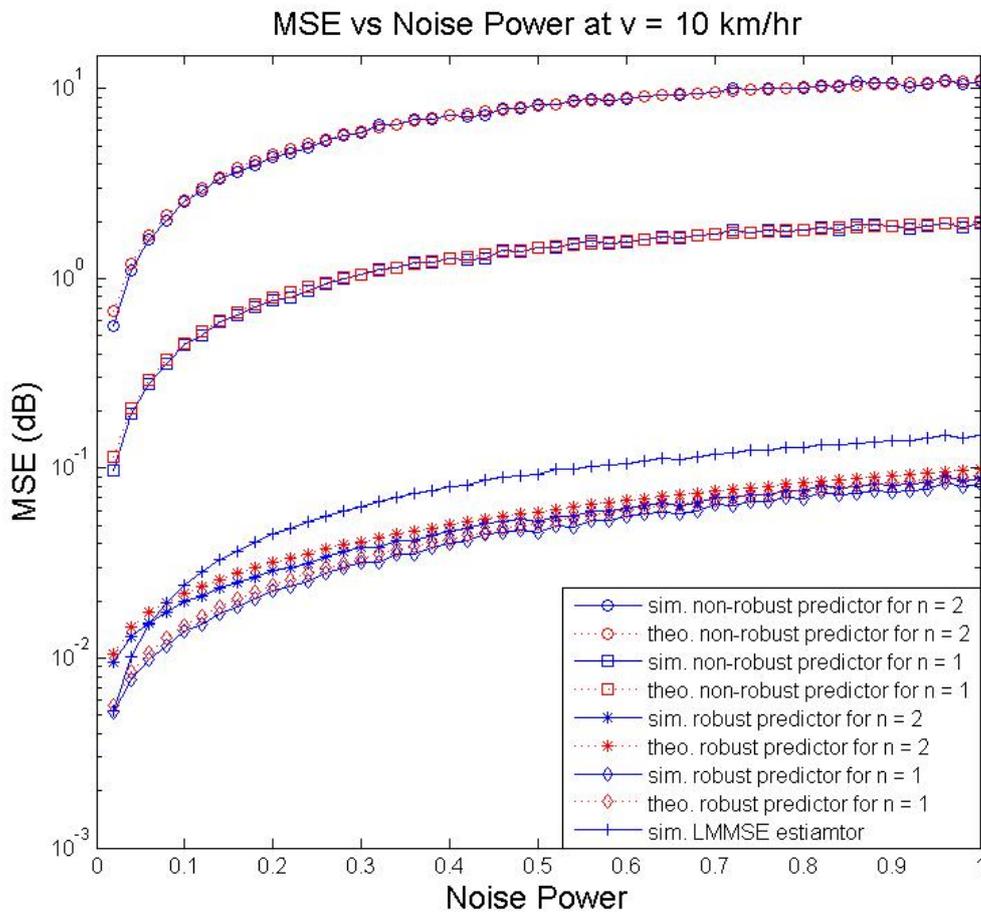


圖 9 嶄新通道預測機制與傳統估計機制均方誤差比較圖
(QPSK 調變，橫軸為雜訊功率， $v = 10 \text{ km/hr}$)

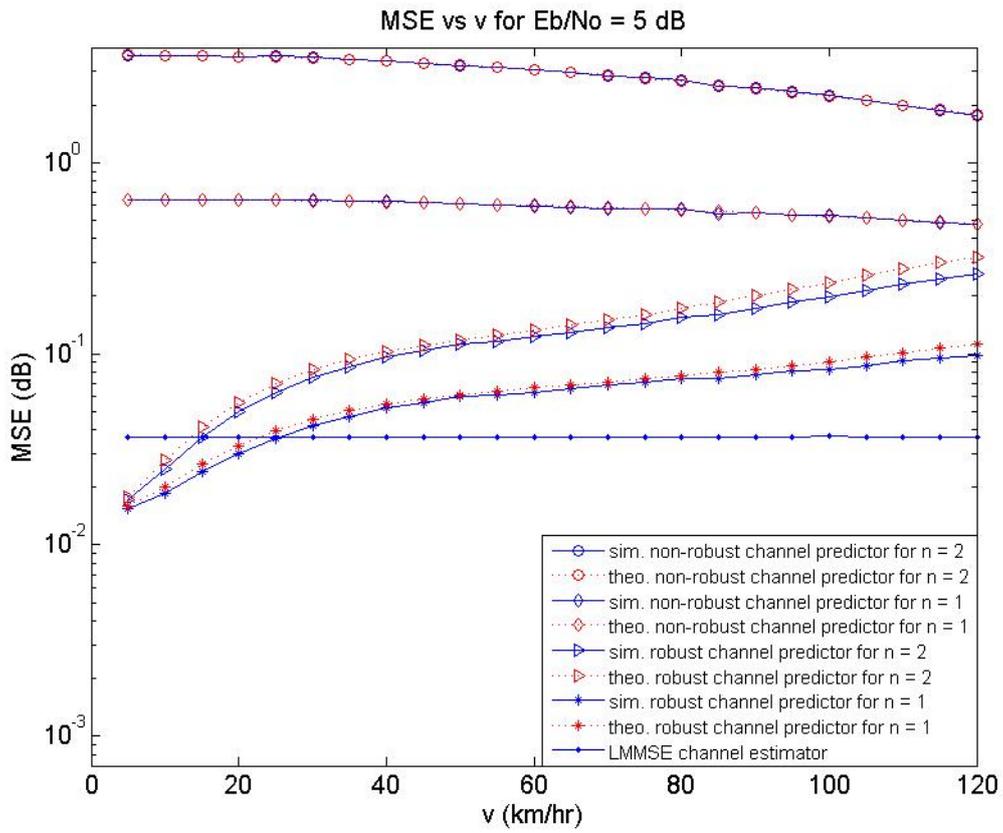


圖 10 嶄新通道預測機制與傳統估計機制均方誤差比較圖
(QPSK 調變，橫軸為移動速率， $E_b/N_0 = 5$ dB)

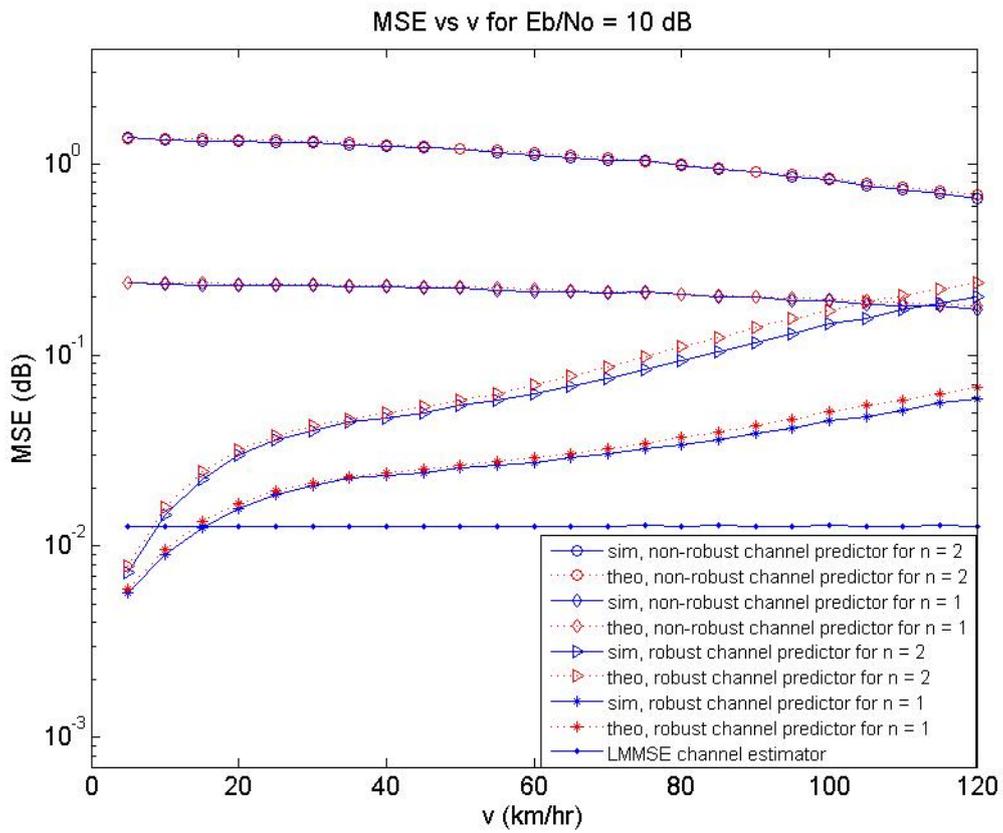


圖 11 嶄新通道預測機制與傳統估計機制均方誤差比較圖
(QPSK 調變，橫軸為移動速率， $E_b/N_0 = 10$ dB)

從圖 12 及圖 13，可看出不論是 QPSK 調變、16-QAM 調變、第一次或第二次預測、雜訊是大或小，本篇論文所設計之最佳預測機制能夠提供和通道估計機制近乎相等的位元錯誤率，明顯比傳統預測機制要好上一截。

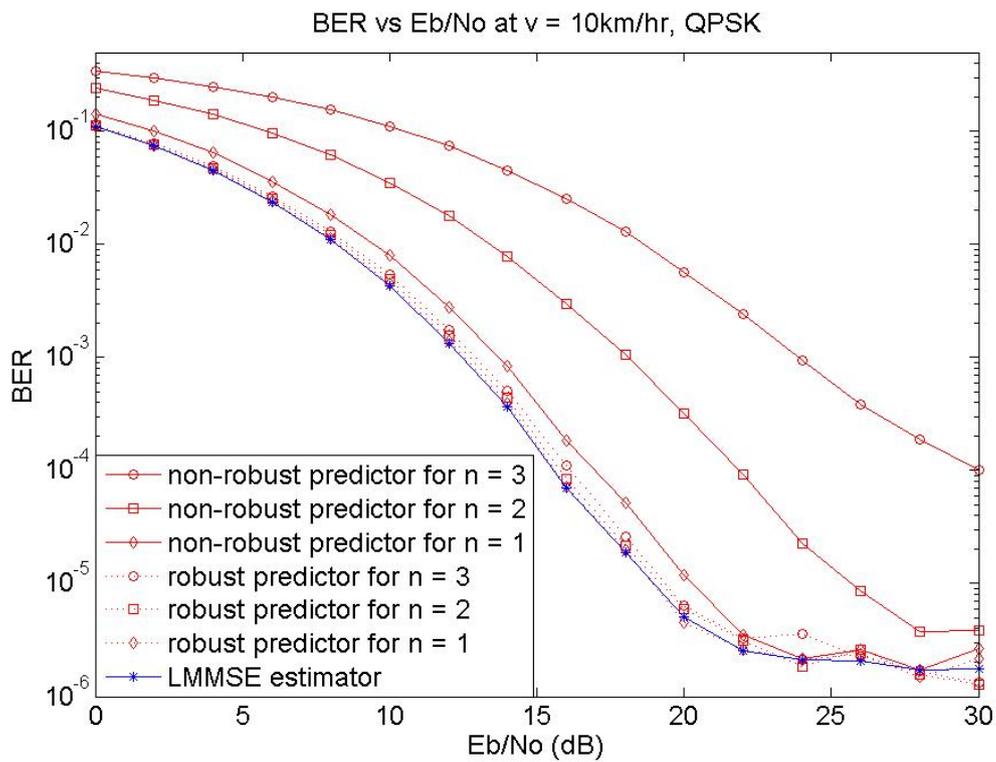


圖 12 通道估計機制、嶄新通道預測機制與傳統估計機制位元錯誤率比較圖
(QPSK 調變， $v = 10 \text{ km/hr}$)

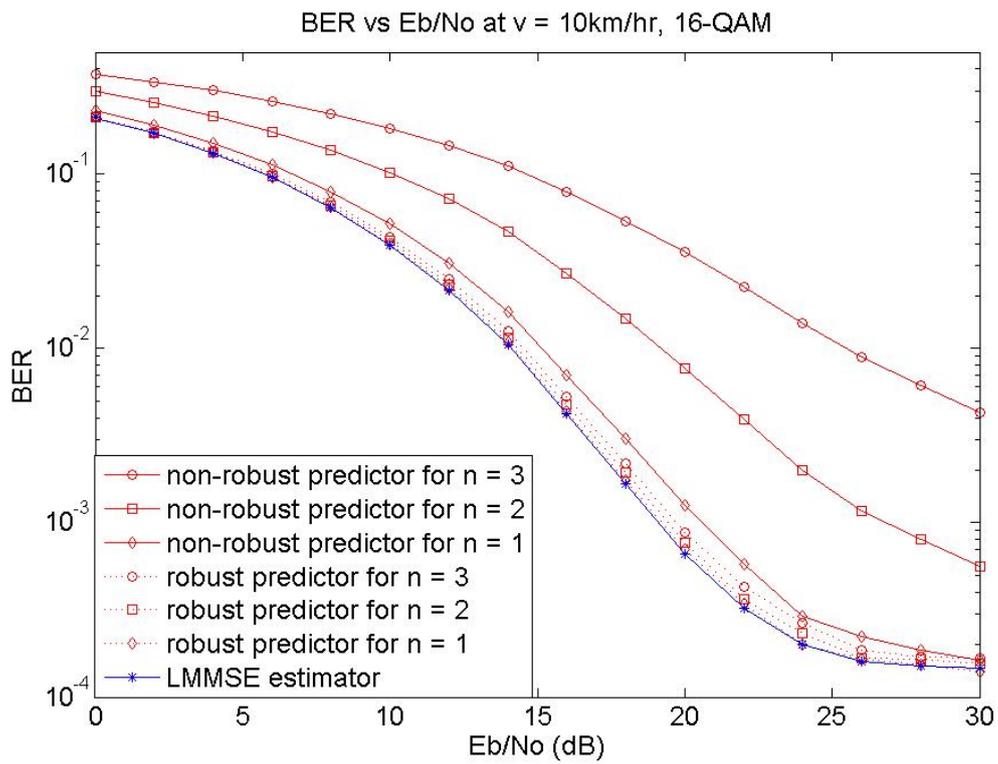


圖 13 通道估計機制、嶄新通道預測機制與傳統估計機制位元錯誤率比較圖
(16-QAM 調變, $v = 10 \text{ km/hr}$)



第四章 輸出訊雜比分析

在前一章我們已經對通道預測機制做了均方誤差效能分析，在這一節中，我們會根據最小均方誤差法則來等化訊號，並且等化器的設計是根據通道預測值(3.14)來做設計。首先，我們把時域的通道預測向量轉換到頻域如下，

$$\tilde{\mathbf{h}}_p[K+n] \triangleq [\tilde{h}_{1,p}(K+n) \cdots \tilde{h}_{M,p}(K+n)]^T = \tilde{\mathbf{F}}_N \hat{\mathbf{h}}_p[K+n] \in \mathbb{C}^M \quad (4.1)$$

接著，經過一連串處理的資料訊號到達接收端後，消除循環字首並轉換到頻域後，可表示如下，

$$\tilde{\mathbf{y}}_s[K+n] \triangleq \tilde{\mathbf{H}}[K+n] \mathbf{F}_M \mathbf{s}[K+n] + \mathbf{w}[K+n] \quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{s}[K+n]$ 為傳送端產生的時域正交振幅調變訊號，而 $\tilde{\mathbf{H}}[K+n] \triangleq \text{Diag}\{\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{h}}[k]\} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ 定義如第二章。接著，我們使用預測的通道向量把頻域訊號作等化並將之轉換到時域上可得

$$\mathbf{y}_s[K+n] \triangleq \mathbf{F}_M^H \mathbf{Z}[K+n] \tilde{\mathbf{H}}[K+n] \mathbf{F}_M \mathbf{s}[K+n] + \mathbf{F}_M^H \mathbf{Z}[K+n] \mathbf{w}[K+n], \quad (4.3)$$

其中 $\mathbf{Z}[K+n]$ 為一對角矩陣，可分別等化每個子載波上的訊號，並且定義如下，

$$\mathbf{Z}[K+n] = \text{Diag} \left(\frac{\tilde{h}_{1,p}^*(K+n)}{|\tilde{h}_{1,p}(K+n)|^2 + \sigma_w^2 / E_s}, \dots, \frac{\tilde{h}_{M,p}^*(K+n)}{|\tilde{h}_{M,p}(K+n)|^2 + \sigma_w^2 / E_s} \right) \quad (4.4)$$

接著，第 $(K+n)$ 時槽的訊雜比(Signal-to-Noise-Ratio)可表示如下，

$$SNR[K+n] = \frac{\sum_{m=1}^M E \left\{ \frac{|\tilde{h}_m^*(K+n) \cdot \tilde{h}_{m,p}(K+n)|^2}{|\tilde{h}_{m,p}(K+n)|^2 + \sigma_w^2 / E_s} \right\} \cdot E_s}{\sum_{m=1}^M E \left\{ \frac{|\tilde{h}_{m,p}(K+n)|^2}{|\tilde{h}_{m,p}(K+n)|^2 + \sigma_w^2 / E_s} \right\} \cdot \sigma_w^2} \quad (4.5)$$

(4.5)之證明位於附錄三中。其中 $\tilde{h}_m(K+n)$ 及 $\tilde{h}_{m,p}(K+n)$ 分別表示真實的頻域通道響應以及預測的頻域通道響應， E_s 表示來源訊號的平均功率。在(4.5)中，期望值是對真實通道增益以及雜訊的統計特性來取。由(4.5)可看出 $SNR[K+n]$ 的分子項及分母項均為二次式的累加，在之後的分析我們將會分別推導出分子項及分母項的明確表示式，之後將之分別加總起來在相除。本章的目的即在於推導出(4.5)中 $SNR[K+n]$ 的完整分析表示式。

4.1 $SNR[K+n]$ 推導

為了推導 $SNR[K+n]$ ，我們將(4.1)的頻域通道預測向量 $\tilde{\mathbf{h}}_{\mathcal{P}}[K+n]$ 表示成頻域真實通道向量以及雜訊項的線性組合，首先定義

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^H[K+n] & \tilde{\mathbf{h}}^H[K] & \cdots & \tilde{\mathbf{h}}^H[1] & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}[K])^H & \cdots & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}[1])^H \end{bmatrix}^H \in \mathbb{C}^{(2K+1)M} \quad (4.6)$$

其中 $\tilde{\mathbf{h}}[k]$ 為頻域真實通道向量且定義如(2.9)， \mathbf{P} 為訓練符號的對角矩陣且定義如(2.26)， $\mathbf{w}[k]$ 則為雜訊項。其結果如以下引理所示。

引理 4.1：定義以下兩個矩陣

$$\mathbf{W}'_1 \triangleq \tilde{\mathbf{F}}_N \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^{(n)T} & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \bar{\mathbf{a}}_2^{(n)T} & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_L^{(n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{e}_1^T & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{e}_1^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_L^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{e}_L^T & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{e}_L^T \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times KL}, \quad (4.7)$$

其中 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ 定義如(3.9)且 $\mathbf{e}_j \in \mathbb{C}^K$ 表示第 j 個單位標準向量，

$$\mathbf{s} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{KL \times M} & \mathbf{S}' & \mathbf{S}' \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(KL) \times (2K+1)M} \quad (4.8)$$

其中

$$\mathbf{S}' \triangleq \mathbf{I}_K \otimes \left\{ \left(\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \right\} \in \mathbb{C}^{KL \times KM} \quad (4.9)$$

那麼(4.1)所定義的頻域通道預測向量 $\tilde{\mathbf{h}}_{\mathcal{P}}[K+n]$ 可表示成

$$\tilde{\mathbf{h}}_{\mathcal{P}}[K+n] = \mathbf{W}'_1 \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} \quad (4.10)$$

其中 \mathbf{x} 定義如(4.6)。

[證明]：見附錄四。

□

有了(4.10)的幫助，在(4.5) $SNR[K+n]$ 中的分子項和分母項分別可改寫成 \mathbf{x} 的二次式。具體而言，經由一些直接的矩陣代數運算可得

$$E \left\{ \left| \frac{\tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n)}{|\tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n)|^2 + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} = E \left\{ \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{1,m} \mathbf{x}}{|\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{1,m} \mathbf{x} + \sigma_w^2 / E_s|^2} \right\}, \quad (4.11)$$

以及

$$E \left\{ \left| \frac{\tilde{h}_m^*(K+n) \cdot \tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n)}{|\tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n)|^2 + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} = E \left\{ \left| \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{2,m} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{1,m} \mathbf{x} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\}, \quad (4.12)$$

其中

$$\mathbf{W}_{1,m} \triangleq \mathbf{S}^H \mathbf{W}_1'^H \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T \mathbf{W}_1' \mathbf{S} \text{ 且 } \mathbf{W}_{2,m} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{2KM \times M} \end{bmatrix} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T \mathbf{W}_1' \mathbf{S} \quad (4.13)$$

(4.11)及(4.12)的推導位於附錄五。值得注意的是，(4.11)及(4.12)皆包含了複數隨機向量 \mathbf{x} 的二次式，根據(4.6)可直接得知 $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_{(2K+1)M}, \Sigma)$ ，其中

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} r(0) & r(n) & r(n+1) & \cdots & r(K+n-1) \\ r(n) & r(0) & r(1) & \cdots & r(K-1) \\ r(n+1) & r(1) & r(0) & \cdots & r(K-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(K+n-1) & r(K-1) & r(K-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \otimes \tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H + \mathbf{0}_{M(K+1) \times MK} + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{MK \times MK} \quad (4.14)$$

為了進一步分析 $SNR[K+n]$ ，我們接著將(4.11)及(4.12)表示成等效的實數二次式，首先定義 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j\mathbf{x}_I$ ，其中 \mathbf{x}_R 及 \mathbf{x}_I 分別為 \mathbf{x} 的實部(Real Parts)及虛部(Imaginary Parts)，並且定義 \mathbf{x} 的實數擴充向量如下，

$$\tilde{\mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2M(2K+1)} \quad (4.15)$$

那麼 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的統計特性為 $\tilde{\mathbf{x}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{2M(2K+1)}, \tilde{\Sigma})$ ，其中 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的斜方差矩陣(Covariance

Matrix)的說明在附錄六並且給定如下，

$$\tilde{\Sigma} \triangleq E \{ \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \} = E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R^T & \mathbf{x}_I^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\text{Re}(\Sigma)}{2} & -\frac{\text{Im}(\Sigma)}{2} \\ \frac{\text{Im}(\Sigma)}{2} & \frac{\text{Re}(\Sigma)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

因此，在以下引理中我們將(4.11)及(4.12)的 $\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{1,m} \mathbf{x}$ 及 $\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{2,m} \mathbf{x}$ 這兩個複數二次式表示成等效的實數二次式。

引理 4.2：令 $\mathbf{W}_{1,m}$ 及 $\mathbf{W}_{2,m}$ 給定如(4.13)，並且定義

$$\mathbf{W}_{3,m} \triangleq (\mathbf{W}_{2,m} + \mathbf{W}_{2,m}^H) / 2 \text{ 及 } \mathbf{W}_{4,m} \triangleq (\mathbf{W}_{2,m} - \mathbf{W}_{2,m}^H) / 2 \quad (4.17)$$

由(4.13)及(4.17)可看出 $\mathbf{W}_{1,m}$ 、 $\mathbf{W}_{3,m}$ 為共軛對稱矩陣，亦即 $\mathbf{W}_{1,m} = \mathbf{W}_{1,m}^H$ 且 $\mathbf{W}_{3,m} = \mathbf{W}_{3,m}^H$ ；而 $\mathbf{W}_{4,m}$ 則為斜共軛對稱矩陣，亦即 $\mathbf{W}_{4,m} = -\mathbf{W}_{4,m}^H$ 。另外，對 $i = 1, 3, 4$ 定義 $\mathbf{W}_{i,m} = \mathbf{W}_{i,m,R} + j\mathbf{W}_{i,m,I}$ ，其中 $\mathbf{W}_{i,m,R}$ 及 $\mathbf{W}_{i,m,I}$ 分別表示 $\mathbf{W}_{i,m}$ 的實部及虛部，同時定義

$$\tilde{\mathbf{W}}_{i,m} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{i,m,R} & -\mathbf{W}_{i,m,I} \\ \mathbf{W}_{i,m,I} & \mathbf{W}_{i,m,R} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 3, \text{ 及 } \tilde{\mathbf{W}}_{4,m} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{4,m,I} & \mathbf{W}_{4,m,R} \\ -\mathbf{W}_{4,m,R} & \mathbf{W}_{4,m,I} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

那麼我們可得以下關係式，

$$\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{1,m} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.19)$$

以及

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{2,m} \mathbf{x}|^2 = |\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{3,m} \tilde{\mathbf{x}}|^2 + |\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{4,m} \tilde{\mathbf{x}}|^2 \quad (4.20)$$

[證明]見附錄七。 □

藉由(4.11)、(4.12)、(4.19)及(4.20)，(4.5)中的 $SNR[K + n]$ 可改寫如下

$$SNR[K + n] = \frac{E_s}{\sigma_w^2} \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \left(E \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{3,m} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} + E \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{4,m} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} \right)}{\sum_{m=1}^M \left(E \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} \right)} \quad (4.21)$$

使用 $\tilde{\mathbf{x}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{2M(2K+1)}, \tilde{\Sigma})$ 此一統計特性，(4.21)中 $SNR[K+n]$ 分子和分母的數學表示式可改寫如以下定理。

定理 4.3：令 $\tilde{\Sigma}$ 定義如(4.16)，並且 $\tilde{\mathbf{W}}_{i,m}$ ， $i=1,3,4$ ，定義如(4.18)，令 λ_{mj} ， $j=1, \dots, r$ ，為 $\tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \triangleq \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\Sigma}$ 的特徵值，我們具有以下結果

$$E \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}}}{|\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s|^2} \right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty z_2 \exp\{-(\sigma_w^2 / E_s)z_2\} f_{1,m}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (4.22)$$

其中

$$f_{1,m}(z_1, z_2) \triangleq \left\{ 2 \sum_{j=1}^r \left(\frac{\lambda_{mj}}{1 + 2(z_1 + z_2)\lambda_{mj}} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^r \frac{\lambda_{mj}}{1 + 2(z_1 + z_2)\lambda_{mj}} \right)^2 \right\} \cdot \prod_{j=1}^r (1 + 2(z_1 + z_2)\lambda_{mj})^{-1/2} \quad (4.23)$$

[證明]見附錄八。

□

定理 4.3 推導出(4.21)分母項的數學明確表示式，但在分析(4.21)分子項的過程中，由於 $\tilde{\mathbf{W}}_{3,m}$ 及 $\tilde{\mathbf{W}}_{4,m}$ 僅為對稱矩陣，皆非為正定矩陣，因此遭遇到了技術上的困難。進行到此，藉由(4.22)，我們將 $SNR[K+n]$ 表示如下，

$$\begin{aligned} SNR[K+n] &= \frac{E_s}{\sigma_w^2} \frac{\sum_{m=1}^M \left(E \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{3,m} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} + E \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{4,m} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} \right)}{\sum_{m=1}^M \left(\int_0^\infty \int_0^\infty z_2 \exp\{-(\sigma_w^2 / E_s)z_2\} f_{1,m}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \right)} \\ &= \frac{E_s}{\sigma_w^2} \frac{\sum_{m=1}^M \left(E \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{3,m} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} + E \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{4,m} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} \right)}{\int_0^\infty \int_0^\infty z_2 \cdot \exp\{-(\sigma_w^2 / E_s)z_2\} \cdot \sum_{m=1}^M [f_{1,m}(z_1, z_2)] dz_1 dz_2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

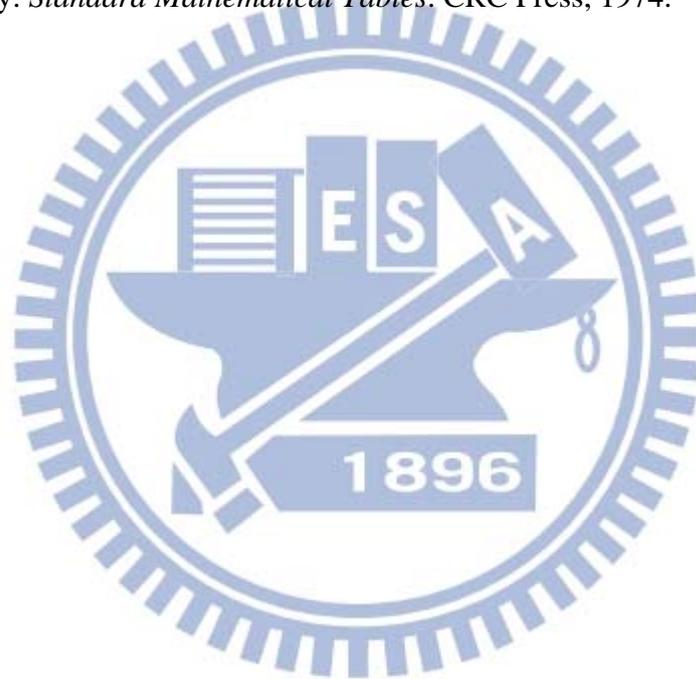
第五章 結論

為了在接收端消除傳送訊號所受到的通道失真，因此需要獲取準確的通道狀態資訊，而為了做到這一點，傳統上，傳送端必須周期性地發送訓練符號而接收端則必須不斷地估計通道狀態資訊，由此可見整個系統必須不斷地耗費通訊冗餘進而損耗能量。然而在近代無線通訊系統當中，節能是一個至關重要的研究課題。在本篇論文中，我們從基頻訊號處理的觀點出發，探討如何實現低複雜度的通道狀態資訊獲取機制，藉以提升能源效率。我們提出一個低複雜度的通道預測機制——基地台連續估計了數次通道狀態資訊後，便利用通道在時間上的相關性來預測最新的通道。並且，相較於將先前通道估計視為完美無誤的傳統預測機制，我們一併將通道估計誤差考慮進來以設計一個可有效抵抗通道估計誤差的最佳預測機制，只需要付出比傳統預測機制稍高的複雜度，便可提供與最小均方誤差通道估計機制相近的效能，數值模擬顯示其可達成的均方誤差比起傳統通道預測機制要好上 5-10dB。同時，我們亦推導出均方誤差的數學明確表示式，數值模擬顯示出此表示式的理論值和實際模擬值相當吻合。最後我們嘗試分析訊雜比的明確數學表示式，並具有相當的成果。

参考文献

- [1] G. Y. Li, Z. Xu, C. Xiong, C. Yang, S. Zhang, Y. Chen, and S. Xu, “Energy-efficient wireless communications: Tutorial, survey, and open issues,” *IEEE Communications Magazines*, preprint.
- [2] H. G. Myung and D. J. Goodman, *Single Carrier FDMA: A New Interface for Long Term Evolution*, John Wiley & Sons, Ltd., 2008.
- [3] S. Sesia, I. Toufik, and M. Baker, *LTE, The UMTS Long Term Evolution: From Theory to Practice*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Ltd., 2011.
- [4] J.-J. van de Beek, O. Edfors, M. Sandell, S. K. Wilson and P. O. Borjesson, “On channel estimation in OFDM systems,” in Proc. VETEC, Jul. 1995, vol. 2, pp. 815-819.
- [5] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed., PEARSON, Ltd., 2008.
- [6] H. Sari, G. Karam, and I. Jeanclaude, “Frequency domain equalization of mobile radio and terrestrial broadcast channels,” *Proc. IEEE GLOBECOM'94*, vol. 1, November 1994.
- [7] A. Klein, G. W. Kaleh, and P. W. Baier, “Zero forcing and minimum mean-square error equalization for multiuser detection in code-division multiple-access channels,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 45, no. 2, pp: 276-287, 1996.
- [8] G. K. Kaleh, “Channel equalization for block transmission systems,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 13, no. 1, pp. 110–121, Jan. 1995.
- [9] M. V. Clark, “Adaptive frequency-domain equalization and diversity combining for broadband wireless communications,” in Proc. IEEE 48th Veh. Technol. Conf., vol. 1, May 1998, pp. 1385–1395.
- [10] M. Tuchler and J. Hagenauer, nLinear time and frequency domain turbo equalization, *Proc. IEEE 53rd Veh. Techno. Conf. (VTC)*, vol. 2, May 2001, pp. 1449-1453.
- [11] N. Benvenuto and S. Tomasin, “Iterative Design and Detection of a DFE in the Frequency Domain”, *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 53, No. 11, pp. 1867–1875, Nov. 2005.
- [12] F. Pancaldi and G. M. Vitetta, “Block channel equalization in the frequency domain,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 3, pp. 463–471, Mar. 2005.

- [13] 3GPP, TS 36.211 (V10.3.0), Physical Channels and Modulation, Sep, 2011.
- [14] Steven M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, Vol. 1, Prentice Hall, 1993.
- [15] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed., The Johns Hopkins University, 1996.
- [16] H. Anton, *Elementary Linear Algebra*, 9th ed., John Wiley & Sons, 2005.
- [17] A. M. Mathai and Serge B. Provost, *Quadratic Forms in Random Variables: Theory an Applications*, Marcell Dekker, 1992.
- [18] Thomas P. Minka. Old and new matrix algebra useful for statistics, December 2000. Notes.
- [19] S. M. Selby. *Standard Mathematical Tables*. CRC Press, 1974.



附錄一 定理 3.1 的證明

首先從 (3.6) 出發，我們先推導出互相關 (Cross-Correlation) 項 $E\{h_i[K+n]\hat{h}_i^*[K+1-j]\}$ 以及自相關 (Auto-Correlation) 項 $E\{\hat{h}_i[K+1-k]\hat{h}_i^*[K+1-j]\}$ 。互相關項可以表示如下，

$$E\{h_i[K+n]\hat{h}_i^*[K+1-j]\} = \mathbf{e}_i^T E\{\mathbf{h}[K+n]\hat{\mathbf{h}}^H[K+1-j]\}\mathbf{e}_i \quad (\text{A.1})$$

根據(A.1)，我們可獲得

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_i^T E\{\mathbf{h}[K+n]\hat{\mathbf{h}}^H[K+1-j]\}\mathbf{e}_i \\ & \stackrel{(a)}{=} \mathbf{e}_i^T E\left\{\mathbf{h}[K+n]\left[(\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H (\tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{h}[K+1-j] + \mathbf{X}_p^{-1}[k] \mathbf{w}[k])\right]^H\right\} \mathbf{e}_i \\ & \stackrel{(b)}{=} \mathbf{e}_i^T E\left\{\mathbf{h}[K+n]\mathbf{h}^H[K+1-j]\right\} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i \\ & \stackrel{(c)}{=} r[n+j-1] \cdot \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i \\ & \stackrel{(d)}{=} r[n+j-1] \cdot \sigma_{h,i}^2 \cdot \mathbf{e}_i^T \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i \\ & \triangleq r[n+j-1] \cdot \alpha_i, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

其中將(2.4)代入(A.1)可得(a)等式，(b)等式成立是因為根據 2.2 節的基本假設，真實通道向量 $\mathbf{h}[k]$ 和雜訊 $\mathbf{w}[k]$ 互為獨立，(c)等式和(d)等式則是經由直接的矩陣計算得之。我們接著推導自相關項如下

$$\begin{aligned} E\{\hat{h}_i[K+1-k]\hat{h}_i^*[K+1-j]\} &= \mathbf{e}_i^T E\{\hat{\mathbf{h}}[K+1-k]\hat{\mathbf{h}}^H[K+1-j]\}\mathbf{e}_i \\ & \stackrel{(e)}{=} \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H E\{(\tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{h}[K+1-k] + \mathbf{X}_p^{-1} \mathbf{w}[K+1-k]) \\ & \quad (\mathbf{h}^H[K+1-j] \tilde{\mathbf{F}}_N^H + \mathbf{w}^H[K+1-j] \mathbf{X}_p)\} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i \\ & \stackrel{(f)}{=} \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \{r[j-k] \cdot \tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H + \sigma_w^2 \cdot \delta[j-k] \cdot \mathbf{I}_M\} \\ & \quad \cdot \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i \\ & = r[j-k] \cdot \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i \\ & \quad + \delta[j-k] \mathbf{e}_i^T (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N (\sigma_w^2 \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \mathbf{e}_i \\ & \triangleq r[j-k] \cdot \beta_i + \delta[j-k] \cdot \gamma_i, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

其中將(2.24)代入可得(e)等式，(f)等式成立則是因為真實通道和雜訊互為獨立。根據(A.2)及(A.3)，(3.6)中的 K 個等式可寫成矩陣向量型式如下，

$$(\beta_i \mathbf{R} + \gamma_i \mathbf{I}_K) \cdot \bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} = \alpha_i \mathbf{r}_K^{(n)} \quad (\text{A.4})$$

因此從(A.4)證得定理 3.1。

□



附錄二 定理 3.2 的證明

首先我們會證明等式(3.19)，將(3.17)展開如下，

$$\begin{aligned}
 \overline{MSE}[n] &\triangleq \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \hat{h}_{i,\mathcal{P}}(K+n) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\
 &= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \sum_{k=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\
 &= \sum_{i=0}^{L-1} \left(E \left\{ \left| h_i(K+n) \right|^2 \right\} - 2 \sum_{k=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} \operatorname{Re} \left\{ E \left[h_i(K+n) \hat{h}_i^*(K+1-k) \right] \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} E \left\{ \hat{h}_i(K+1-k) \hat{h}_i^*(K+1-j) \right\} \bar{a}_{i,j}^{(n)} \right)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

其中根據基本假設 $E \left\{ \left| h_i(K+n) \right|^2 \right\} = \sigma_{h,i}^2$ ，並且將(A.2)及(A.3)代入(B.1)可得

$$\begin{aligned}
 \overline{MSE}[n] &= \sum_{i=0}^{L-1} \left(\sigma_{h,i}^2 - 2 \sum_{k=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} \cdot r(n+j-1) \cdot \alpha_i + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} [r(j-k) \cdot \beta_i + \delta(j-k) \cdot \gamma_i] \bar{a}_{i,j}^{(n)} \right) \\
 &\stackrel{(a)}{=} 1 - \sum_{i=0}^{L-1} \left(2 \sum_{k=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} \cdot r(n+j-1) \cdot \alpha_i - \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K \bar{a}_{i,k}^{(n)} [r(j-k) \cdot \beta_i + \delta(j-k)] \cdot \gamma_i \bar{a}_{i,j}^{(n)} \right) \\
 &\stackrel{(b)}{=} 1 - \sum_{i=0}^{L-1} \left(2 \alpha_i \bar{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{r}_K^{(n)} - \bar{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} \right) \\
 &\stackrel{(c)}{=} 1 - \sum_{i=0}^{L-1} \left[\alpha_i^2 \cdot \mathbf{r}_K^{(n)T} (\beta_i \cdot \mathbf{R} + \gamma_i \cdot \mathbf{I}_K)^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)} \right]
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

其中等式(a)成立是因為根據基本假設 $\sum_{i=0}^{L-1} \sigma_{h,i}^2 = 1$ ，(b)是經由簡單的矩陣代數運算

獲得，(c)則是將 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} = \alpha_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)}$ 代入並經由直接的矩陣代數運算得之。因此證得

(3.19)。為了證明(3.20)，我們定義 $\mathbf{u}_i \triangleq \left[\hat{h}_i[K] \quad \hat{h}_i[K-1] \quad \cdots \quad \hat{h}_i[1] \right]^T$ ，並且將(3.18)

中的 $\overline{MSE}[n]$ 改寫如下

$$\begin{aligned}
\widetilde{MSE}[n] &\triangleq \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \hat{h}'_{i,\mathcal{P}}(K+n) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{i,k}^{(n)} \hat{h}_i(K+1-k) - h_i(K+n) \right|^2 \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{u}_i - h_i[K+n] \right|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

同時，從(3.9)已知

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} &= \alpha_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{r}_K^{(n)} \\
&= \alpha_i (\beta_i \cdot \mathbf{R} + \gamma_i \cdot \mathbf{I}_K)^{-1} \cdot \mathbf{r}_K^{(n)} \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \left(\mathbf{R} + \frac{\gamma_i}{\beta_i} \cdot \mathbf{I}_K \right)^{-1} \cdot \mathbf{r}_K^{(n)}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

利用矩陣反轉換定理[14, p. 571]，我們可獲得 $\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ 與 $\tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ 之間的關係式如下，

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} &= \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \left(\mathbf{R} + \frac{\gamma_i}{\beta_i} \cdot \mathbf{I}_K \right)^{-1} \cdot \mathbf{r}_K^{(n)} \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \left[\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{R}^{-1} + \frac{\beta_i}{\gamma_i} \mathbf{I}_K \right)^{-1} \mathbf{R}^{-1} \right] \cdot \mathbf{r}_K^{(n)} \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \left[\mathbf{R}^{-1} - \gamma_i (\beta_i \mathbf{R} + \gamma_i \mathbf{I}_K)^{-1} \mathbf{R}^{-1} \right] \cdot \mathbf{r}_K^{(n)} \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta_i} \left[\mathbf{I}_K - \gamma_i \mathbf{R}_i^{-1} \right] \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{r}_K^{(n)} \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta_i} \left[\mathbf{I}_K - \gamma_i \mathbf{R}_i^{-1} \right] \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

我們接著定義 $\Delta_i^{(n)} \triangleq \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} - \bar{\mathbf{a}}_i^{(n)}$ ，並且根據(B.5)可得

$$\begin{aligned}
\Delta_i^{(n)} &\triangleq \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} - \bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} \\
&= \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \left[\mathbf{I}_K - \gamma_i \mathbf{R}_i^{-1} \right] \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} \\
&= \left[\left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) \cdot \mathbf{I}_K + \frac{\alpha_i \cdot \gamma_i}{\beta_i} \mathbf{R}_i^{-1} \right] \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

接著將(B.6)代入(B.3)可得

$$\begin{aligned}
\widetilde{MSE}[n] &= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{u}_i - h_i[K+n] \right|^2 \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \left(\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)} + \Delta_i^{(n)} \right)^T \mathbf{u}_i - h_i[K+n] \right|^2 \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \left(\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{u}_i - h_i[K+n] \right) + \Delta_i^{(n)T} \mathbf{u}_i \right|^2 \right\} \\
&\stackrel{(d)}{=} \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \bar{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{u}_i - h_i[K+n] \right|^2 \right\} + \sum_{i=0}^{L-1} E \left\{ \left| \Delta_i^{(n)T} \mathbf{u}_i \right|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

其中(d)成立是由正交定理(3.5)而得，其數學推導可表示如下

$$E \left\{ \left(\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{u}_i - h_i[K+n] \right) \left(\Delta_i^{(n)T} \mathbf{u}_i \right)^* \right\} = E \left\{ \left(\bar{\mathbf{a}}_i^{(n)T} \mathbf{u}_i - h_i[K+n] \right) \cdot \mathbf{u}_i^H \right\} \cdot \Delta_i^{(n)} = 0 \tag{B.8}$$

最後， $E \left\{ \left| \Delta_i^{(n)T} \mathbf{u}_i \right|^2 \right\}$ 的明確表示式可表示如下，

$$\begin{aligned}
E \left\{ \left| \Delta_i^{(n)T} \mathbf{u}_i \right|^2 \right\} &= \Delta_i^{(n)H} \cdot E \left(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \right) \cdot \Delta_i^{(n)} \\
&= \Delta_i^{(n)H} \cdot \mathbf{R}_i \cdot \Delta_i^{(n)} \\
&= \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)H} \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) \cdot \mathbf{I}_K + \frac{\alpha_i \cdot \gamma_i}{\beta_i} \mathbf{R}_i^{-1} \right] \cdot \mathbf{R}_i \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) \cdot \mathbf{I}_K + \frac{\alpha_i \cdot \gamma_i}{\beta_i} \mathbf{R}_i^{-1} \right] \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} \\
&= \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)H} \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right)^2 \cdot \mathbf{R}_i + 2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) \cdot \frac{\alpha_i \cdot \gamma_i}{\beta_i} \cdot \mathbf{I}_K + \frac{\alpha_i^2 \cdot \gamma_i^2}{\beta_i^2} \cdot \mathbf{R}_i^{-1} \right] \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} \\
&= \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)H} \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) \cdot \mathbf{R}_i^{1/2} + \frac{\alpha_i^2 \cdot \gamma_i^2}{\beta_i^2} \cdot \mathbf{R}_i^{-1/2} \right]^2 \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)} \\
&= \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)H} \cdot \mathbf{R}_i^{-1} \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) \cdot \mathbf{R}_i + \frac{\alpha_i \cdot \gamma_i}{\beta_i} \cdot \mathbf{I}_K \right]^2 \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i^{(n)}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

(3.20)得證。

□

附錄三 (4.3)的證明

關於(4.3)的證明，可經由直接的矩陣推導如下，

$$\begin{aligned}
 SNR[K+n] &= \frac{E \left\{ \left| \mathbf{F}_M^H \mathbf{Z}[K+n] \tilde{\mathbf{H}}[K+n] \mathbf{F}_M \mathbf{s}[K+n] \right|^2 \right\}}{E \left\{ \left| \mathbf{F}_M^H \mathbf{Z}[K+n] \mathbf{w}[K+n] \right|^2 \right\}} \\
 &= \frac{E \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{s}^H [K+n] \mathbf{F}_M^H \tilde{\mathbf{H}}^H [K+n] \mathbf{Z}^H [K+n] \mathbf{Z} [K+n] \tilde{\mathbf{H}} [K+n] \mathbf{F}_M \mathbf{s} [K+n] \right) \right\}}{E \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{w}^H [K+n] \mathbf{Z}^H [K+n] \mathbf{Z} [K+n] \mathbf{w} [K+n] \right) \right\}} \\
 &\stackrel{(a)}{=} \frac{E \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{F}_M^H \tilde{\mathbf{H}}^H [K+n] \mathbf{Z}^H [K+n] \mathbf{Z} [K+n] \tilde{\mathbf{H}} [K+n] \mathbf{F}_M \mathbf{s} [K+n] \mathbf{s}^H [K+n] \right) \right\}}{E \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{Z}^H [K+n] \mathbf{Z} [K+n] \mathbf{w} [K+n] \mathbf{w}^H [K+n] \right) \right\}} \\
 &\stackrel{(b)}{=} \frac{E \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{F}_M^H \tilde{\mathbf{H}}^H [K+n] \mathbf{Z}^H [K+n] \mathbf{Z} [K+n] \tilde{\mathbf{H}} [K+n] \mathbf{F}_M \right) \right\} \cdot \frac{E_s}{\sigma_w^2}}{E \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{Z}^H [K+n] \mathbf{Z} [K+n] \right) \right\}} \\
 &= \frac{E \left\{ \text{tr} \left(\left| \mathbf{Z}[K+n] \tilde{\mathbf{H}}[K+n] \right|^2 \right) \right\} \cdot \frac{E_s}{\sigma_w^2}}{E \left\{ \text{tr} \left(\left| \mathbf{Z}[K+n] \right|^2 \right) \right\}} \\
 &= \frac{\text{tr} \left(E \left\{ \left| \mathbf{Z}[K+n] \tilde{\mathbf{H}}[K+n] \right|^2 \right\} \right) \cdot \frac{E_s}{\sigma_w^2}}{\text{tr} \left(E \left\{ \left| \mathbf{Z}[K+n] \right|^2 \right\} \right) \cdot \frac{E_s}{\sigma_w^2}} \\
 &= \frac{\sum_{m=1}^M E \left\{ \left| \frac{\tilde{h}_m^*(K+n) \cdot \tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n)}{\left| \tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n) \right|^2 + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} \cdot E_s}{\sum_{m=1}^M E \left\{ \left| \frac{\tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n)}{\left| \tilde{h}_{m,\mathcal{P}}(K+n) \right|^2 + \sigma_w^2 / E_s} \right|^2 \right\} \cdot \sigma_w^2}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

其中(a)是套用了以下基本線性代數定理[16]

$$tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA}), \tag{C.2}$$

而(b)則是因為根據 2.3 節的基本假設，所有的來源訊號皆為獨立且同分布，不同路徑的雜訊亦為獨立且同分布。

附錄四 引理 4.1 的證明

首先把先前 K 個時刻的通道估計向量 $\hat{\mathbf{h}}[k]$ 收集成一個擴增向量如下，

$$\hat{\mathbf{h}} \triangleq \left[\hat{\mathbf{h}}^T[K] \ \hat{\mathbf{h}}^T[K-1] \cdots \hat{\mathbf{h}}^T[1] \right]^T \in \mathbb{C}^{KL} \quad (\text{D.1})$$

基於(3.1)，直接使用矩陣代數運算可得

$$\tilde{\mathbf{h}}_p[K+n] = \mathbf{W}_1' \hat{\mathbf{h}} \quad (\text{D.2})$$

接下來便只須找出 $\hat{\mathbf{h}}$ 和(4.6)中所定義 \mathbf{x} 的關係式。為了做到這件事，我們將 $\hat{\mathbf{h}}$ 改寫如下，

$$\hat{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}[K] \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \mathbf{P}[K]^{-1} \mathbf{y}_p[K] \\ \vdots \\ (\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H \mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{y}_p[1] \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{(a)}{=} \begin{bmatrix} (\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H (\tilde{\mathbf{h}}[K] + \mathbf{P}[K]^{-1} \mathbf{w}[K]) \\ \vdots \\ (\sigma_w^2 \cdot \mathbf{R}_h^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_N^H \tilde{\mathbf{F}}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_N^H (\tilde{\mathbf{h}}[1] + \mathbf{P}[k]^{-1} \mathbf{w}[1]) \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

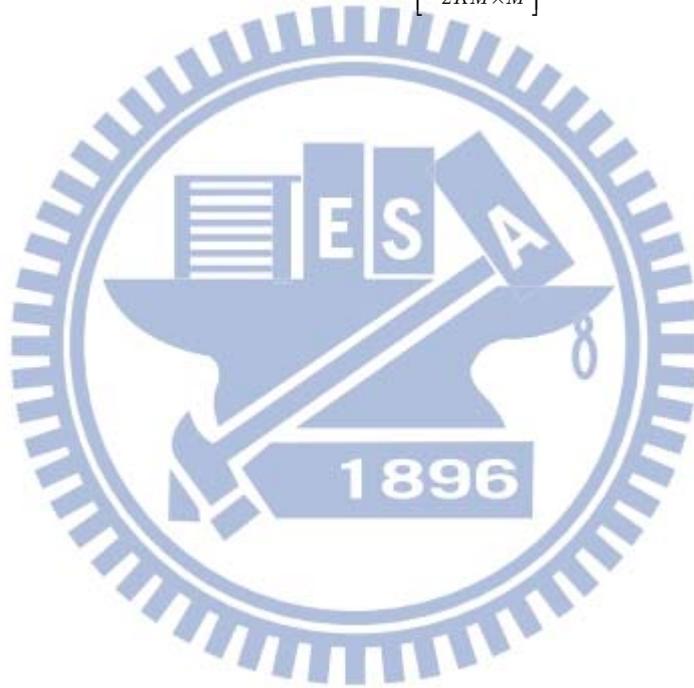
其中(a)是將(2.22)和(2.24)的關係代入而得。在經由一些直接的矩陣代數運算可證得引理 4.1。

附錄五 (4.11)及(4.12)的證明

要證明 (4.11) 及 (4.12) ，即相當於證明 $|\tilde{h}_{\mathcal{P},m}[K+n]|^2 = \mathbf{x}^H \mathbf{W}_1 \mathbf{x}$ 以及 $\tilde{h}_m^*[K+n] \cdot \tilde{h}_{\mathcal{P},m}[K+n] = \mathbf{x}^H \mathbf{W}_2 \mathbf{x}$ 。前者可由 $\tilde{h}_{\mathcal{P},m}[K+n] = \mathbf{e}_m^T \tilde{\mathbf{h}}_{\mathcal{P}}[K+n]$ 以及 (4.10) 獲得，而後者可經由直接的矩陣代數運算或得如下

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_m^*[K+n] \cdot \tilde{h}_{\mathcal{P},m}[K+n] &= \left(\mathbf{e}_m^T \cdot \tilde{\mathbf{h}}[K+n] \right)^H \cdot \mathbf{e}_m^T \mathbf{W}_1' \mathbf{S} \mathbf{x} \\
 &= \tilde{\mathbf{h}}^H [K+n] \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T \mathbf{W}_1' \mathbf{S} \mathbf{x} \tag{E.1} \\
 &= \mathbf{x}^H \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{2KM \times M} \end{bmatrix} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T \mathbf{W}_1' \mathbf{S} \mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

□



附錄六 (4.16)的證明

首先我們將(4.3)的 \mathbf{x} 改寫成通道向量以及雜訊向量的合成 $\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_h \\ \mathbf{x}_w \end{bmatrix}$ ，其中

$$\mathbf{x}_h \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^H[K+n] & \tilde{\mathbf{h}}^H[K] & \cdots & \tilde{\mathbf{h}}^H[1] \end{bmatrix}^H \in \mathbb{C}^{(K+1)M} \quad \text{且}$$

$$\mathbf{x}_w \triangleq \left[(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}[K])^H \cdots (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}[1])^H \right]^H \in \mathbb{C}^{KM}。 \text{因為通道增益與雜訊互為獨立，}$$

可知

$$\sum_h \triangleq E\{\mathbf{x}_h \mathbf{x}_h^H\} \triangleq \begin{bmatrix} r(0) & r(n) & r(n+1) & \cdots & r(K+n-1) \\ r(n) & r(0) & r(1) & \cdots & r(K-1) \\ r(n+1) & r(1) & r(0) & \cdots & r(K-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(K+n-1) & r(K-1) & r(K-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \otimes \tilde{\mathbf{F}}_N \mathbf{R}_h \tilde{\mathbf{F}}_N^H \quad (\text{E.1})$$

$$\sum_w \triangleq E\{\mathbf{x}_w \mathbf{x}_w^H\} = \sigma_w^2 \mathbf{I}_{MK \times MK} \quad (\text{E.2})$$

以及

$$\sum_{hw} \triangleq E\{\mathbf{x}_h \mathbf{x}_w^H\} \triangleq \mathbf{0}_{M(K+1) \times MK} \quad (\text{E.3})$$

我們將(4.16)的證明分成兩個部分進行，亦即分成通道項 \mathbf{x}_h 和雜訊項 \mathbf{x}_w 兩個部分。在此定義 $\mathbf{x}_w = \mathbf{x}_{w,R} + j\mathbf{x}_{w,I}$ ，其中 $\mathbf{x}_{w,R}$ 和 $\mathbf{x}_{w,I}$ 分別為 \mathbf{x}_w 的實部和虛部。根據基本假設，雜訊為複數循環高斯分布，亦即 $\mathbf{x}_w \sim CN(\mathbf{0}, \sigma_w^2 \mathbf{I}_{MK})$ ，並且因為實部和虛部互為獨立且同分布，因此可得

$$\begin{aligned} \sum_w &\triangleq E\{\mathbf{x}_w \mathbf{x}_w^H\} = \sigma_w^2 \mathbf{I}_{MK \times MK} \\ &= E\{(\mathbf{x}_{w,R} + j\mathbf{x}_{w,I})(\mathbf{x}_{w,R}^T - j\mathbf{x}_{w,I}^T)\} , \\ &= E\{\mathbf{x}_{w,R} \mathbf{x}_{w,R}^T\} + E\{\mathbf{x}_{w,I} \mathbf{x}_{w,I}^T\} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$E\{\mathbf{x}_{w,R} \mathbf{x}_{w,R}^T\} = E\{\mathbf{x}_{w,I} \mathbf{x}_{w,I}^T\} = \frac{\sigma_w^2}{2} \mathbf{I}_{MK} , \quad (\text{E.5})$$

以及

$$E\{\mathbf{x}_{w,I} \mathbf{x}_{w,R}^T\} = E\{\mathbf{x}_{w,R} \mathbf{x}_{w,I}^T\} = \mathbf{0}_{MK} \quad (\text{E.6})$$

至於頻域通道向量集合 \mathbf{x}_h ，我們亦定義 $\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_{h,R} + j\mathbf{x}_{h,I}$ ，經由一些直接的矩陣代數運算可得

$$\mathbf{x}_{h,R} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_R[K+n] - \text{Im}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_I[K+n] \\ \text{Re}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_R[K] - \text{Im}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_I[K] \\ \vdots \\ \text{Re}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_R[1] - \text{Im}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_I[1] \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

以及

$$\mathbf{x}_{h,I} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_I[K+n] + \text{Im}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_R[K+n] \\ \text{Re}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_I[K] + \text{Im}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_R[K] \\ \vdots \\ \text{Re}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_I[1] + \text{Im}(\tilde{\mathbf{F}}_N)\mathbf{h}_R[1] \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

其中 $\mathbf{h}_R[k]$ 及 $\mathbf{h}_I[k]$ 分別表示真實時域通道向量 $\mathbf{h}[k]$ 的實部和虛部。根據基本假設，真實時域通道向量 $\mathbf{h}[k]$ 為循環高斯分布，並且其實部和虛部亦為獨立且同分布，在(E.1)、(E.7)和(E.8)的幫忙下藉由一些直接的矩陣代數運算可得

$$E\{\mathbf{x}_{h,R}\mathbf{x}_{h,R}^T\} = E\{\mathbf{x}_{h,I}\mathbf{x}_{h,I}^T\} = \frac{1}{2}\text{Re}(\Sigma_h) \quad (\text{E.9})$$

以及

$$E\{\mathbf{x}_{h,I}\mathbf{x}_{h,R}^T\} = -E\{\mathbf{x}_{h,R}\mathbf{x}_{h,I}^T\} = \frac{1}{2}\text{Im}(\Sigma_h) \quad (\text{E.10})$$

有了(E.5)、(E.6)、(E.9)即(E.10)後，經由一些矩陣代數運算可證得(4.16)如下，

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &\triangleq E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R^T & \mathbf{x}_I^T \end{bmatrix}\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{h,R} \\ \mathbf{x}_{w,R} \\ \mathbf{x}_{h,I} \\ \mathbf{x}_{w,I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{h,R}^T & \mathbf{x}_{w,R}^T & \mathbf{x}_{h,I}^T & \mathbf{x}_{w,I}^T \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\text{Re}(\Sigma)}{2} & -\frac{\text{Im}(\Sigma)}{2} \\ \frac{\text{Im}(\Sigma)}{2} & \frac{\text{Re}(\Sigma)}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

□

附錄七 引理 4.2 的證明

首先(4.19)成立，因為

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^H \mathbf{W}_{1,m} \mathbf{x} &= (\mathbf{x}_R^T - j\mathbf{x}_I^T) (\mathbf{W}_{1,m,R} + j\mathbf{W}_{1,m,I}) (\mathbf{x}_R + j\mathbf{x}_I) \\
 &\stackrel{(a)}{=} \mathbf{x}_R^T \mathbf{W}_{1,m,R} \mathbf{x}_R - \mathbf{x}_R^T \mathbf{W}_{1,m,I} \mathbf{x}_I + \mathbf{x}_I^T \mathbf{W}_{1,m,R} \mathbf{x}_I + \mathbf{x}_I^T \mathbf{W}_{1,m,I} \mathbf{x}_R \quad (\text{G.1}) \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,m,R} & -\mathbf{W}_{1,m,I} \\ \mathbf{W}_{1,m,I} & \mathbf{W}_{1,m,R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \tilde{\mathbf{x}},
 \end{aligned}$$

其中等式 (a) 成立，因為 $\mathbf{W}_{1,m,I} = -\mathbf{W}_{1,m,I}^T$ 使得 $\mathbf{x}_R^T \mathbf{W}_{1,m,I} \mathbf{x}_R = 0$ 以及 $\mathbf{x}_I^T \mathbf{W}_{1,m,I} \mathbf{x}_I = 0$ 。為了證明(4.20)，我們使用(4.17)的定義，可得

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{2,m} \mathbf{x}|^2 &= \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{2,m} \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{2,m}^H \mathbf{x}\} \\
 &= \{\mathbf{x}^H (\mathbf{W}_{3,m} + \mathbf{W}_{4,m}) \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H (\mathbf{W}_{3,m}^H + \mathbf{W}_{4,m}^H) \mathbf{x}\} \\
 &= \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m} \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m}^H \mathbf{x}\} + \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m} \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m}^H \mathbf{x}\} \\
 &\quad + \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m} \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m}^H \mathbf{x}\} + \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m} \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m}^H \mathbf{x}\} \\
 &\stackrel{(b)}{=} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m} \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m}^H \mathbf{x}\} + \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m} \mathbf{x}\} \{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m}^H \mathbf{x}\} = |\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m} \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m} \mathbf{x}|^2, \quad (\text{G.2})
 \end{aligned}$$

其中(b)等式成立是因為 $\mathbf{W}_{3,m} = \mathbf{W}_{3,m}^H$ 且 $\mathbf{W}_{4,m} = -\mathbf{W}_{4,m}^H$ 。接著經由如同(G.1)的程序，可得 $|\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{3,m} \mathbf{x}|^2 = |\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{3,m} \tilde{\mathbf{x}}|^2$ 以及 $|\mathbf{x}^H \mathbf{W}_{4,m} \mathbf{x}|^2 = |\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{W}}_{4,m} \tilde{\mathbf{x}}|^2$ ，其中 $\tilde{\mathbf{W}}_{3,m}$ 和 $\tilde{\mathbf{W}}_{4,m}$ 定義在(4.18)，因此引理 4.2 得證。

□

附錄八 定理 4.3 的證明

首先我們直接使用[17]中(4.5d.8)的結果，則(4.21)中的分母項可表示如下，

$$E \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}}{|\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s|^2} \right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty z_2 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} M_1(-z_1, -z_2) dz_1 dz_2 \quad (\text{H.1})$$

其中 $M_1(-z_1, -z_2)$ 為 $\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}$ 以及 $\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s$ 的聯合動差產生函數 (Joint Moment Generation Function)。接著，直接引用[17]中(3.2c.3)的結果，我們發現

$$\begin{aligned} M_1(-z_1, -z_2) &= \exp\{-(\sigma_w^2 / E_s)z_2\} \cdot |\mathbf{I}_r + 2(z_1 + z_2) \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{W}}_1 \mathbf{B}|^{-1/2} \\ &= \exp\{-(\sigma_w^2 / E_s)z_2\} \cdot \prod_{j=1}^r (1 + 2(z_1 + z_2) \lambda_j)^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

其中 $|\cdot|$ 表示行列式 (Determinant)， $\tilde{\Sigma} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T$ ，而 λ_{mj} ， $j = 1, \dots, r$ ，為 $\tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \triangleq \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \mathbf{B}$ 的特徵值。將(H.2)代入(H.1)可得

$$\begin{aligned} E \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \cdot \tilde{\mathbf{x}}}{|\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}}_{1,m} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \sigma_w^2 / E_s|^2} \right\} &= \int_0^\infty \int_0^\infty z_2 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} M_{1,m}(-z_1, -z_2) dz_1 dz_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty z_2 \exp\{-(\sigma_w^2 / E_s)z_2\} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \prod_{j=1}^r (1 + 2(z_1 + z_2) \lambda_{mj})^{-1/2} dz_1 dz_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty z_2 \exp\{-(\sigma_w^2 / E_s)z_2\} \cdot f_{1,m}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

其中(H.3)裡的微分項 $f_{1,m}(z_1, z_2)$ 可直接從[17]中的(4.5d.10)獲得如下，

$$\begin{aligned} f_{1,m}(z_1, z_2) &\triangleq \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \prod_{j=1}^r (1 + 2(z_1 + z_2) \lambda_{mj})^{-1/2} \\ &= \left[2 \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_{mj}^2}{(1 + 2(z_1 + z_2) \lambda_{mj})^2} + \left(\sum_{j=1}^r \frac{\lambda_{mj}}{1 + 2(z_1 + z_2) \lambda_{mj}} \right)^2 \right] \cdot \prod_{j=1}^r (1 + 2(z_1 + z_2) \lambda_{mj})^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

接下來只需將(H.4)代入(H.3)即可證得(4.22)。

□