

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

三維波形管之熱傳分析

Analysis of Heat Transfer in Three Dimensional Wavy Duct



研究生：羅啟修

指導教授：傅武雄 博士

中華民國一百零一年六月

三維波形管之熱傳分析

Analysis of Heat Transfer in Three Dimensional Wavy Duct

研究生：羅啟修

Student: Chi-Xiu Lo

指導教授：傅武雄

Advisor: Wu-Shung Fu



Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science in Mechanical Engineering

June 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

三維波形管之熱傳分析

研究生：羅啟修

指導教授：傅武雄

國立交通大學機械工程學系

摘要

本研究利用數值方法分析可壓縮流在三維垂直波形管道中的流動及熱傳機制。網格採用橢圓偏微分方程法生成。流場利用有限差分法進行計算，計算方法可分為兩部分：第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式採用 Roe 方法計算通量，並且加入 Preconditioning 矩陣，使程式在計算低速可壓縮流可獲得良好之收斂結果，而由於使用 Preconditioning 法時加入 Artificial time term 破壞了整個統御方程式，因此需使用 Dual time stepping 疊代使其在 Artificial domain 收斂才能進入下一個真實時階；第二部份為黏滯性項的計算，採用二階中央插分法。在時間項方面則採用 LUSGS 隱式法，利用 LUSGS 疊代以求出下一時階物理量。出口設非反射性邊界條件避免可壓縮流中壓力波的干擾。由於本研究為可壓縮流之模擬，不需使用 Boussinesq assumption，適用於溫差高於 30K 之情形，應用範圍更為廣泛。另外為提升計算速度，本文採用 OpenMP 方法進行平行化運算。

本研究以振幅波長比及瑞利數為主要參數進行模擬。對於三維波形管，流體流經波峰時類似流經漸縮管，邊界層縮小，熱傳能力較好。而流經波谷時，流體在壁面處近乎停滯，熱傳效率較差。在所計算之瑞利數($10^4 \sim 10^6$)和振幅波長比(0、0.1、0.2)之間流場並無出現不穩定的情形。三維波形管在自然對流時，平均紐塞數隨振幅波長比增加而下降，且雖然散熱面積增加，但總熱傳量反而下降。

Analysis of Heat Transfer in Three Dimensional Wavy Duct

Student: Chi-Xiu Lo

Advisor: Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

An investigation of heat transfer in a three-dimensional wavy duct with consideration of the flow compressibility is studied numerically. The finite difference method is adopted and the computational approaches are divided into two parts. One is the Roe scheme applied for the flux of inviscid terms and the preconditioning matrix is added for the efficiency in all speed fields. The other one is the central difference method of second order utilized to solve viscous terms. The temporal term is solved by LUSGS. Non-reflection conditions at the outlet is derived in order to resolve reflections induced by acoustic waves. Due to the consideration of flow compressibility, Boussinesq assumption is not used. Therefore, applicable to cases with temperature difference higher than 30K. Besides, to enhance the computing efficiency, the OpenMP method is also used.

In this study, amplitude-wavelength ratio and Rayleigh number is set to be primary variables. The results show that when flow passes through the crests, the boundary layer gets smaller, therefore a better heat transfer rate. And when flow passes through the troughs, fluid is almost stagnant near the walls, which leads to a poor heat transfer rate. Flow field shows no instability for Rayleigh number ranging from $10^4 \sim 10^6$ and amplitude-wavelength ratio 0~0.2. In all cases studied, the averaged Nusselt number is decreased as amplitude-wavelength ratio increases, and the total heat flux decreases too even though the cooling area is increased.

誌謝

首先感謝指導教授傅武雄老師，在大學時豐富的課程讓我對熱流領域感興趣，以及研究所期間對於課業論文及生活上耐心的教導與提點，指引我做研究時正確的方法及方向。同時也感謝機械系師長在這六年來課業上的指導及良好的學習環境。另外要特別感謝實驗室的大家，感謝李崇綱、黃玠超、王威翔、黃耘、黃上豪等學長姊的教學，研究上的問題總是能夠迎刃而解，還有同儕的鄭景木、李世豪和黃崑榕一同為了畢業而互相打氣努力，總是在精神上支持協助的學弟們蔡承志、范家魁、吳佩蓉，為我抒解了許多的壓力。另外也要感謝常到實驗室陪伴我們的同學劉岳儒、陳彥志、顏士傑。最後更要感謝我的父母，給予我衣食無缺的環境，感謝您們對我的照顧與包容，今日方能順利完成學業。最後僅將此喜悅和所有關心我的人分享。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
目錄	iii
表目錄	iv
圖目錄	v
符號表	vii
一、緒論	1
二、物理模式	6
2-1 物理尺寸與分析模式	6
2-2 分析假設及統御方程式	7
2-3 邊界條件	9
三、數值計算模式	13
3-1 統御方程式	13
3-2 橢圓 PDE 網格生成法	17
3-3 Roe scheme	26
3-4 MUSCL 法	34
3-5 Preconditioning	36
3-6 黏滯性項之差分	40
3-7 Dual time stepping	43
3-8 LUSGS 法	45
3-9 反射性邊界	47
四、結果與討論	51
五、結論	90
參考文獻	92

表目錄

表 3-1 精度係數值..... 35

表 4-1 二維波形板改變振幅波長比之結果..... 63

表 4-2 三維波形管散熱面積之比較..... 84



圖目錄

圖 2-1(a.b) 波形管道之物理模式	11
圖 3-1 對邊界加密之網格.....	20
圖 3-2 對邊界正交化之網格.....	21
圖 3-3 沿 X 方向波形壁面之管道.....	22
圖 3-4 管道在 Z=0.5 的 XY 平面網格分布	23
圖 3-5 管道在波谷處之 YZ 平面網格分布	24
圖 3-6 管道在波峰處之 YZ 平面網格分布	25
圖 3-7 黎曼問題特徵值結構圖.....	33
圖 3-8 差分示意圖.....	42
圖 3-9 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 於管道兩端的方向性示意圖	50
圖 4-1(a.b) 和 Guzman[26]結果之比對圖	58
圖 4-2 和 Bhavnani[2]實驗對照所設定之物理模式.....	60
圖 4-3 和 Bhavnani[2]振幅波長比 0.1 之局部熱傳係數比對圖.....	61
圖 4-4 和 Bhavnani[2]及 Ostrach[28]振幅波長比 0 之局部熱傳係數比對圖.....	62
圖 4-5 三維波形管網格測試圖.....	64
圖 4-6(a~c) $Ra=10^5$, $\alpha=0$ 管道中央XY截面之結果	65
圖 4-7(a.b) $Ra=10^5$, $\alpha=0$ 管道YZ截面之速度場	66
圖 4-8(a~c) $Ra=10^5$, $\alpha=0$ 管道中央XY截面之結果	67
圖 4-9(a.b) $Ra=10^5$, $\alpha=0.1$ 管道YZ截面之速度場	68
圖 4-10(a~c) $Ra=10^5$, $\alpha=0.2$ 管道中央XY截面之結果	69
圖 4-11(a.b) $Ra=10^5$, $\alpha=0.2$ 管道YZ截面之速度場	70
圖 4-12(a.b) $a=10^5$ 沿X方向紐塞數比較圖	71
圖 4-13(a.b) $Ra=10^5$ 沿Y方向紐塞數比較圖	72

圖 4-14(a~c) $Ra=5.5*10^4$ 流線圖	73
圖 4-15(a~c) $Ra=5.5*10^4$ 速度場圖	74
圖 4-16(a~c) $Ra=5.5*10^4$ 等溫線圖	75
圖 4-17(a~c) $Ra=2.5*10^4$ 流線圖	76
圖 4-18(a~c) $Ra=2.5*10^4$ 速度場圖	77
圖 4-19(a~c) $Ra=2.5*10^4$ 等溫線圖	78
圖 4-20 振幅波長比 0 時沿 x 方向管道中央壁面局部紐塞數圖.....	79
圖 4-21 振幅波長比 0.1 時沿 x 方向管道中央壁面局部紐塞數圖.....	80
圖 4-22 振幅波長比 0.2 時沿 x 方向管道中央壁面局部紐塞數圖.....	81
圖 4-23 平均紐塞數對瑞利數之趨勢圖.....	82
圖 4-24 總熱傳量對瑞利數之趨勢圖.....	83
圖 4-25(a~c) 振幅波長比 0.1 之流線圖.....	85
圖 4-26(a~c) 振幅波長比 0.1 之等溫線圖.....	86
圖 4-27(a~c) 振幅波長比 0.2 之流線圖.....	87
圖 4-28(a~c) 振幅波長比 0.2 之等溫線圖.....	88
圖 4-29 平均紐塞數對瑞利數之趨勢圖.....	89

Nomenclature

a	wavy amplitude [m]
C_p	constant-pressure specific heat [$J \cdot kg^{-1} \cdot k^{-1}$]
C_v	constant-volume specific heat [$J \cdot kg^{-1} \cdot k^{-1}$]
d	width of the vertical tube [m]
e	internal energy [$J \cdot kg^{-1}$]
g	acceleration of gravity [$m \cdot s^{-2}$]
h	Enthalpy [J]
h_x	local heat transfer coefficient [$Wm^{-2}K^{-1}$]
\bar{h}	average heat transfer coefficient [$Wm^{-2}K^{-1}$]
k	thermal conductivity [$Wm^{-1}k^{-1}$]
l	length of the vertical tube [m]
Nu	Nusselt number defined in Eq.(4-6)
	$Nu_x = \frac{h_x d}{k}$
\overline{Nu}	average Nusselt number
	$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \iint_A Nu dx dy$
P	Pressure [Pa]
q	total heat flux (watt)
R	gas constant [$J \cdot kg^{-1} \cdot k^{-1}$]
Ra	Rayleigh number

$$Ra = Pr \cdot Gr = Pr \frac{g \rho^2 (T_w - T_0) d^3}{T \mu(T)^2}$$

T Kelvin temperature[K]

T_0 Surrounding temperature[K]

T_w temperature of heat surface[K]

u velocity component in x -direction[$m \cdot s^{-1}$]

v velocity component in y -direction[$m \cdot s^{-1}$]

w velocity component in z -direction[$m \cdot s^{-1}$]

x, y, z Cartesian coordinate (m)



Greek symbols

α amplitude-wavelength ratio

$$\alpha = \frac{a}{\lambda}$$

ρ density [$kg \cdot m^{-3}$]

ρ_0 surrounding density [$kg \cdot m^{-3}$]

ν kinematics viscosity [$m^2 \cdot s^{-1}$]

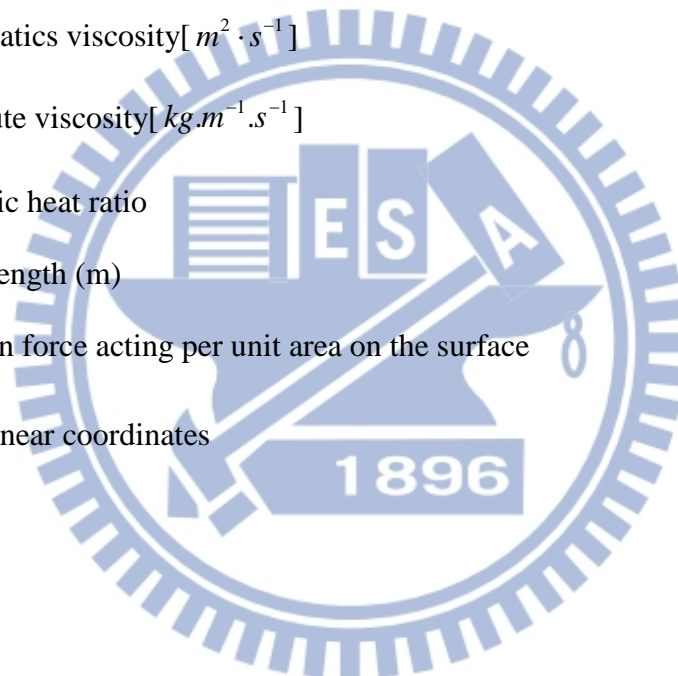
μ absolute viscosity [$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$]

γ specific heat ratio

λ wavelength (m)

τ_w friction force acting per unit area on the surface

ξ, η, ζ curvilinear coordinates



第一章、緒論

近年來，科技產業蓬勃發展，電子設備及產品為提高競爭力，不斷的在效能上衝刺，加上半導體製程技術之進步，促使消費性電子產品的使用與生活型態做結合，因而許多電子產品的設計走向高效能、微小化的趨勢，致使電子元件舉凡電腦 CPU、顯示卡、筆記型手機等其封裝元件之發熱密度越來越高，其單位熱通量亦相對地不斷增加，對性能及可靠度等方面均造成不容忽視之影響。因此在未來產品的發展趨勢走向更輕薄短小之際，散熱技術對於其性能及可靠度的提升將扮演重要的角色。一般正常電腦中央處理器在執行程式下溫度大約為攝氏 50~60 度之間，超過攝氏八十度則電腦基於保護狀態，自動關閉系統，長期下來內部零組件壽命將會減短。因此為了維持元件於額定溫度下運作，必須將此密集的熱量能有效散逸於系統外之環境。傳統的散熱片多使用鋁合金製造，其熱傳導性只屬於中等程度，對於今日元件發熱功率越來越高的情況，逐漸有捉襟見肘的情況發生，目前電子元件的發熱量達到每平方公分數十瓦的等級，且接點可承受之溫度約在攝氏 150 度以下。因此如何在有限之條件下提升熱傳效率為當前重要之研究課題之一。

一般提高熱傳效率，增加主動式散熱元件功率為最直接的選擇，但如此往往伴隨高噪音高耗能或體積增加等之缺點，因此在工程上應用時，通常會藉由改變散熱區域之外型以達到同功率輸入下之最佳熱傳，其重要之設計原理除了增加散熱面積、降低熱阻抗、減少流動所需之壓差外，設計之外形能否有效干擾熱交換面邊界層形成使壁面高溫和外界低溫流體混合也是重要參考之因素之一。而其中一常見之外型是波形壁面，波形壁面在工業上應用廣泛，在許多產品中都可見到其身影，如板形熱交換器(plate heat exchanger)、半透膜加氧器(membrane oxygenators)、電透析器(electrodialyzer)等，由於波形壁面在波谷處容易引起渦流，使得流體混合效率提升並破壞熱邊界層，因此可有效增加熱傳效率。探討波形壁面之文獻不少，其中自然對流的部分，Yao[1]利用座標轉換的方式模

擬二維垂直波形壁面於開放空間之自然對流現象，其採用 Boussinesq 假設，壁面振幅對波長比 $0 \sim 0.3$ ，結果顯示局部紐塞數對流動方向呈正弦函數震盪，波長為壁面波長之半，振幅則隨流動方向遞減。而平均紐塞數部分，所測試之案例皆略低於平板。Bhavnani 和 Bergles[2]以實驗方法觀測等溫波形板之熱傳，其研究結果和 Yao[1]相異，局部紐塞數震盪之週期和壁面週期相同，他們推測此差異可能是由於 Yao 在統御方程式做了過多之近似。隨後 Moulic 及 Yao[3]針對波形壁面之混合對流進行模擬，試圖解釋和實驗結果差異的原因，他們指出自然對流的浮力效應會造成類似混合對流的現象，而模擬結果顯示混合對流在平均紐塞數圖出現兩個諧波(two harmonics)震盪的現象，分別和自然對流及強制對流相關。Ashjaee 等人[4]使用干涉計測量雷射束通過流體時產生之相位差(phase shift)得到波形壁面自然對流之溫度場，結果在壁面振幅波長比為 0.2 、 $Ra=5.59 \times 10^5$ 的案例中，局部熱傳系數具有兩個諧波震盪的現象，但在壁面振幅波長比低於 0.2 的案例中第二諧波並不明顯，在這篇研究中也利用 SIMPLE 法模擬，其結果和實驗結果相當接近，並且將結果之局部紐塞數對流動方向座標、瑞利數和壁面振幅波長比製作成經驗方程式。

而在波形壁面強制對流的部分，Wang和Vanka[5]利用橢圓PDE生成網格，將二維管道映射至正交網格計算，流動方向採週期性邊界，探討其暫態及穩態熱傳，結果顯示當雷諾數低於 180 時，其流場為穩態層流，高於此雷諾數，則流場會出現不穩定的情形。而隨著雷諾數上升，非線性之對流項影響逐漸提高，因此流場由上下對稱趨於不對稱，另外在上壁面波峰處（下壁面波谷處）可觀察到渦流之現象，當雷諾數高於 180 時，流場不穩定的現象使壁面渦流週期性生成消散，破壞熱邊界層，因此熱傳效率較平板高。Rush等人[6]利用可視法觀察波形管道內過渡流場發生位置與雷諾數、振幅、波長、上下壁面相位差之關係，實驗結果發現即使入口速度為穩定且均勻，當雷諾數高於一過渡雷諾數時，流場即會產生不穩定的現象，此現象發生之位置隨雷諾數增加往入口方向移動，且和壁面相位差、

相對振幅有關，而在測試案例中相對波長對此位置影響不大。Pham 等人[7]利用大渦流模擬(LES)配合沉浸式邊界計算波形壁面之流場及熱傳現象，其物理模式在流動方向設定為八個波長，藉以觀測流場由層流轉變為紊流之過程。測試之雷諾數範圍為 750 到 4500，當雷諾數在 1500 以下，流場雖可觀測不穩定的現象但仍維持層流，雷諾數 3000 以上則出現明顯紊流的特徵。而壓降及熱傳分析顯示，間隙比(channel spacing ratio 振幅除以上下壁面間距)越低則速度場越均勻且紊流強度也越小，Fanning factor隨間隙比減少而下降，Colburn factor和間隙比較無關，最佳 j/f 比發生於流場產生不穩定現象但未進入紊流時。由結果可得縮小間隙比對流場分離及渦流產生有抑制之效果，能在相同之熱傳量下以較低之壓降進行。Sun 等人[8]利用直接數值模擬法(DNS)配合座標轉換模擬波形壁面之紊流現象，繪出鄰近壁面之平均速度及紊流強度。Alawadhi和Bourisli[9]使用套裝軟體FLUENT模擬波形壁面管道之流場，其數值方法採用SIMPLE法，入口之邊界條件為等速流外加一正弦振盪之擾動，出口為定壓，結果顯示當速度擾動和渦流生成之頻率一致時，熱傳效率最好，在特定條件時熱傳效率比沒有擾動提高 60%。SAMAD 等人[10]使用套裝軟體ANSYS-CFX 11.0 計算交錯排列凹槽壁面管道之流場，數值方法採用RANS，以無因次化參數凹槽深除以凹槽半徑、管寬除以凹槽半徑、凹槽半徑除以凹槽間距為變數，利用polynomial RSA surrogate model進行最佳化，結果得到凹槽深除以凹槽半徑越大時，其所定義的熱傳表現越好。Haitham[11]探討穩態完全發展流流經二維波形及弧形管道之流場，在特定條件下，熱傳能提升 80%，但大部分時熱傳表現都低於直管。Mohammed[12]等人模擬三維波形微渠道散熱器，結果得到振幅波長比低於 0.25 的例子時，振幅越大平均熱傳係數也越好，但振幅波長比 0.25 則反而下降且低於直管微渠道。綜觀前述之研究，波形壁面之熱傳效率和相關參數影響甚大，某些參數設定下，波形壁面熱傳和平板熱傳相比並無顯著改善，但如果當參數調整合宜使流場出現不穩定的現象時，熱傳效率則能有效提升，此外臨界雷諾數也會因相關參數影響，從穩定層流至不穩定層流的臨

界雷諾數約在 200~800 之間，而進入紊流的臨界雷諾數應大於 1500。

目前波形壁面之模擬文獻，多需借助許多假設，如流體為不可壓縮，使用 Boussinesq assumption 以模擬密度差所造成之浮力等，這些假設限制了程式使用之範圍，在工程上應用時容易造成不可忽視之誤差。此外為節省網格使用量，早期之研究多假設為二維流場，因此實際三維流場之流動現象無法仔細探討，而在邊界條件上，也常見在不適合處使用完全發展流邊界條件。

本研究針對三維之流場作模擬，工作流體為可壓縮流，密度受溫度及壓力而改變，不需使用 Boussinesq assumption，因此適用於高溫差及高速之案例，對於工業之應用較為廣泛及實際。在波形壁面變形部分採用 Thompson J.F. 等[13] 及 Hoffmann[14]之座標轉換式，配合橢圓 PDE 網格生成法生成，由於本研究為三維管道，在流動方向網格一般採等間距分布即可，只需對垂直到向之平面調整，因此使用二維橢圓 PDE 網格法生成並針對邊界處加密。程式主體參考李[15]發展出之黏性流場之全域速度場數值解法，此種方法最大的困難處在於計算低速流場時，由於可壓縮流必須遵守 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)條件，因此在低速流體時，受限於流體變化傳遞速度(約等於聲速)，時階將會極小。在此種情況造成計算過程將耗費極大的時間與整體過低的計算效率。為了改善此缺點，本研究在計算可壓縮流時加入 Preconditioning 法，藉此讓流體即使在低速時，也可有較高的效率與良好的收斂性。在計算此種低馬赫數流體的方面，目前有密度基底法(Density-based method)與壓力基底法(Pressure-based method)。本研究以密度基底法為主。而在密度基底法中又以 Turkel[16]提出 Preconditioning 法最為廣泛應用，不僅可同時應用在可壓縮流與不可壓縮流中，更可以讓程式的收斂性增加。在邊界設定最棘手的問題是流體的流動速度和壓力波的速度相差過大，導致在出口反射回彈的壓力波會干擾流體流動，故在入口及出口處設置非反射性(non-reflecting)邊界條件[17]，避免干擾發生，若設定為完全展開流，則會與實際流場有所差異。

故本文需要求解完整的 Navier-Stokes 方程式與理想氣體方程式(ideal gas equation)以得此可壓縮流中密度的變化，以期能同時考慮密度與壓力變化之效應符合實際物理現象。採用中央插分法處理黏性項部分；而非黏性項則必須採用 Roe 法[18]，以解決偏微分方程式的不連續問題；本研究在作數值計算時，主要是利用網格之間的物理量，因此使用 MUSCL(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)法[19]來計算 ROE 法中網格與網格間的物理量；為了處理在低速可壓縮流時不易收斂的困擾，計算時加入了 Preconditioning 法[20]，可有效提高收斂效率，使其在高速與低速可壓縮流場均可適用，但卻破壞原統御方程式，為了彌補此一缺點，故需要加入 Artificial time term 來修正；並使用 Dual time stepping[21]來計算暫態的物理量；最後使用 LUSGS(implicit lower-upper symmetric Gauss-Seidel algorithm)法[22]做迭代運算。

此外，在處理複雜的流體力學問題時需要大量的計算過程，利用多核心處理器來提升運算速度已為目前的發展主流。多核心處理器對於單一執行緒在平行運算方面，並無法提升計算速度；若利用多執行緒的程式架構，可透過不同核心來同時計算，達到提升計算效率、節省計算時間之目的；但是多執行緒的程式在撰寫、編輯上，也都比單一執行緒的程式架構複雜。常見的平行運算方法有 MPI 和 OpenMP 兩種方法；本文採用 OpenMP 方法提升運算速度。MPI (Message Passing Interface)是一種分散式記憶體(distributing memory)的觀念，而 OpenMP (Open Multi-Processing)為共享式記憶體(sharing memory)的觀念，而兩種方法各有優缺點。MPI 在撰寫程式上面相較於 OpenMP 較困難，且計算速度較慢且會受限於網路效率，在設備擴充方面較昂貴；反之 OpenMP 在程式撰寫上較簡單，計算速度快且不會受限於網路效率，在設備擴充方面需較少的經費。因此本程式利用 OpenMP 來進行平行化運算，效率為原程式的四倍，減少計算時間及成本。

第二章 物理模式

2-1、物理尺寸與分析模式：

本文之物理模式如圖 2-1 所示，為一正方形截面之三維管道，由上而下可分為三個段落：上直管、波形管、下直管。上下直管截面之邊長為 d ，長度上直管為 λ 、下直管 λ ，邊界設定為絕熱壁面、不可滑移條件。波形管道段落長度為 3λ ，由振幅 a 、波長 λ 之正弦函數三個週期組成，邊界設定為等溫壁面、不可滑移條件。外界環境及流體初始條件設定為壓力 $p_0=101300\text{Pa}$ 、溫度 $T_0=298.0592\text{K}$ ，受到波形壁面高溫 T_w 影響，密度改變造成浮力效應驅動流場，使得流體進出上下管道邊界。以往大多將此截面設為速度完全發展流條件，但此方式在可壓縮流中壓力波於出口處易反射回計算區域而影響收斂性，較不適用於低速可壓縮流流場；且為使熱管道內的熱流場更容易成為完全發展流，管道的長寬將有所限制，因此常使得網格需求增加，計算時間較長，因此本研究在出口條件部分設為非反射性(non-reflecting)邊界條件[14]，此時可視其出口為極遠處的邊界條件，大幅減少使用網格數量。

此外定義無因次參數振幅波長比 $\alpha = \frac{a}{\lambda}$ 。另外如圖 2-1a，以管道中央為基準，定義壁面之波峰波谷。

2-2、分析假設及統御方程式：

本研究選擇層流流場作為模擬流場，設定如下：

1. 可壓縮流，空氣密度會隨溫度與壓力而改變。
2. 工作流體為空氣，假設為理想氣體，遵循理想氣體方程式。流體性質為牛頓流體(Newtonian fluid)，黏滯係數為等方向性。
3. 有重力效應影響。
4. 進出口條件皆為完全非反射條件。
5. 考慮溫度變化對流體所造成的影響。
6. 所有壁面均為不可滑移(No slip condition)。

統御方程式分別為連續方程式(Continuity equation)、動量方程式(Momentum equation)與能量方程式(Energy equation)，壓力方面則假設流體為理想氣體，利用理想氣體狀態方程式定義。

連續方程式、動量方程式、能量方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (2-1)$$

其中

$$U = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho e)^T \quad (2-2)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) u + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho v w - \tau_{yz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) v + P v - k \frac{\partial T}{\partial y} - u \tau_{yx} - v \tau_{yy} - w \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

$$H = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u - \tau_{zx} \\ \rho w v - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + P - \tau_{zz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) w + P w - k \frac{\partial T}{\partial z} - u \tau_{zx} - v \tau_{zy} - w \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gu \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

ρ 為密度， p 為壓力。 u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向的速度。 k 為 thermal diffusivity。 $e = C_v T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ ， C_v 為等容比熱。

理想氣體狀態方程式：

$$P = \rho R T \quad (2-7)$$

2-3、邊界條件：

本研究所採用的統御方程式為可壓縮 Navier-stokes 方程式，因此需要給定的邊界條件有：初始狀態、入口條件、出口條件、壁面邊界。

2-3.1 初始狀態：初始速度、初始壓力、初始密度

初始速度 u ： $0m/s$

初始速度 v ： $0m/s$

初始速度 w ： $0m/s$

初始壓力 p ： 一大氣壓力($101300Pa$)

初始密度： 空氣密度($1.1842kg/m^3$)

2-3.2 下出口邊界條件：

入口速度 u ：非反射性邊界

入口速度 v ：非反射性邊界

入口速度 w ：非反射性邊界

入口壓力 p ：非反射性邊界

入口溫度 T ：非反射性邊界

2-3.3 上出口邊界條件：

出口速度 u ：非反射性邊界

出口速度 v ：非反射性邊界

出口速度 w ：非反射性邊界

出口壓力 p ：非反射性邊界

入口溫度 T ：非反射性邊界

2-3.4 波形壁面邊界：

邊界速度：不可滑移條件， $u = v = w = 0m/s$

邊界溫度：加熱壁面溫度 T_w

邊界壓力：在垂直壁面方向，梯度為零， $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

2-3.5 上直管壁面邊界：

邊界速度：不可滑移條件， $u = v = w = 0 \text{ m/s}$

邊界溫度：絕熱壁面，垂直壁面方向溫度梯度為零， $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

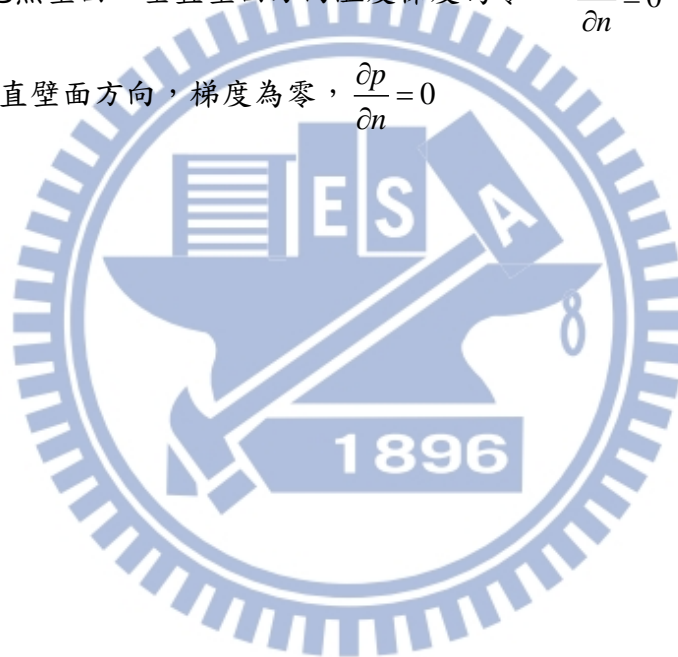
邊界壓力：垂直壁面方向，梯度為零， $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

2-3.6 下直管壁面邊界：

邊界速度：不可滑移條件， $u = v = w = 0 \text{ m/s}$

邊界溫度：絕熱壁面，垂直壁面方向溫度梯度為零， $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

邊界壓力：垂直壁面方向，梯度為零， $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$



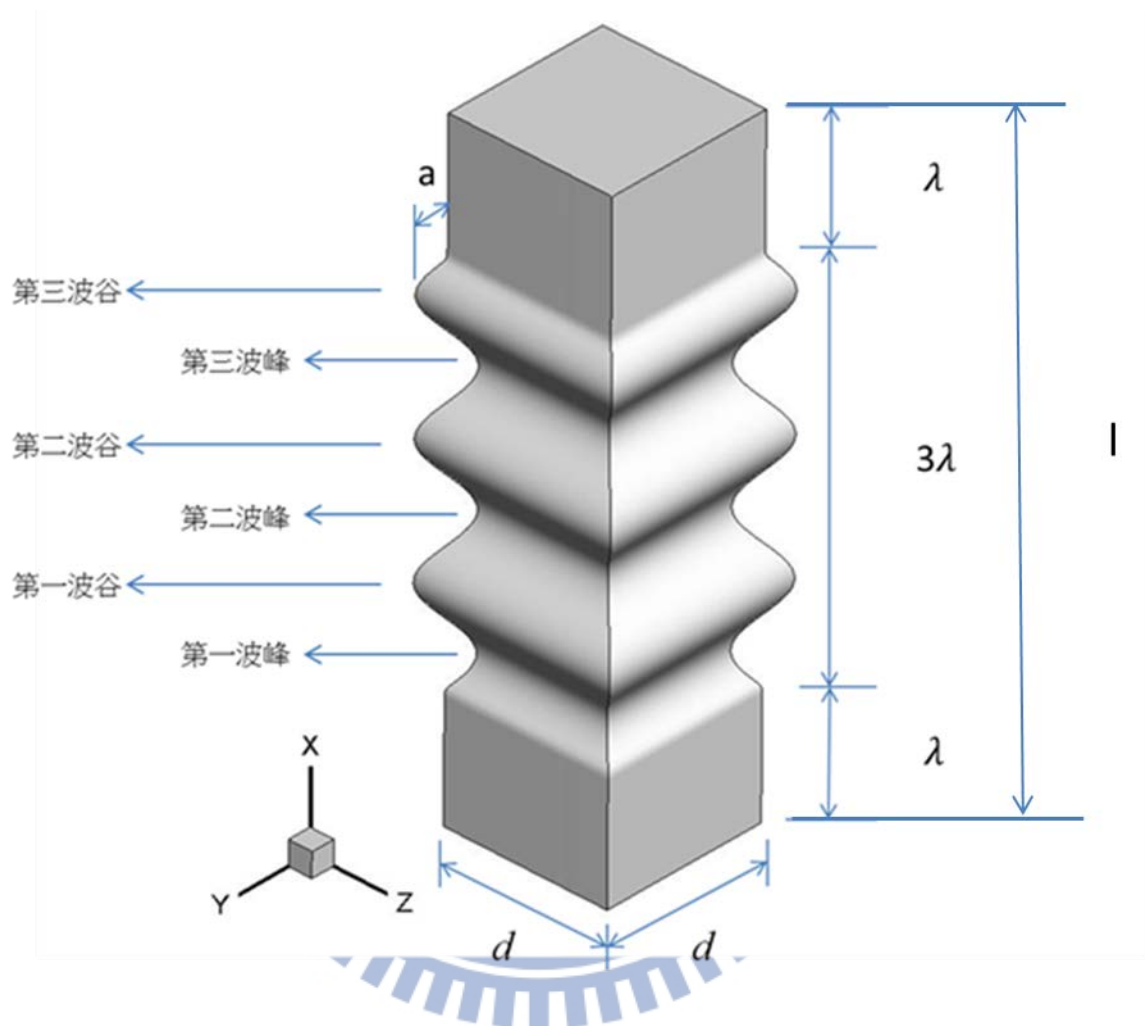


圖 2-1a 波形管道之物理模式圖一

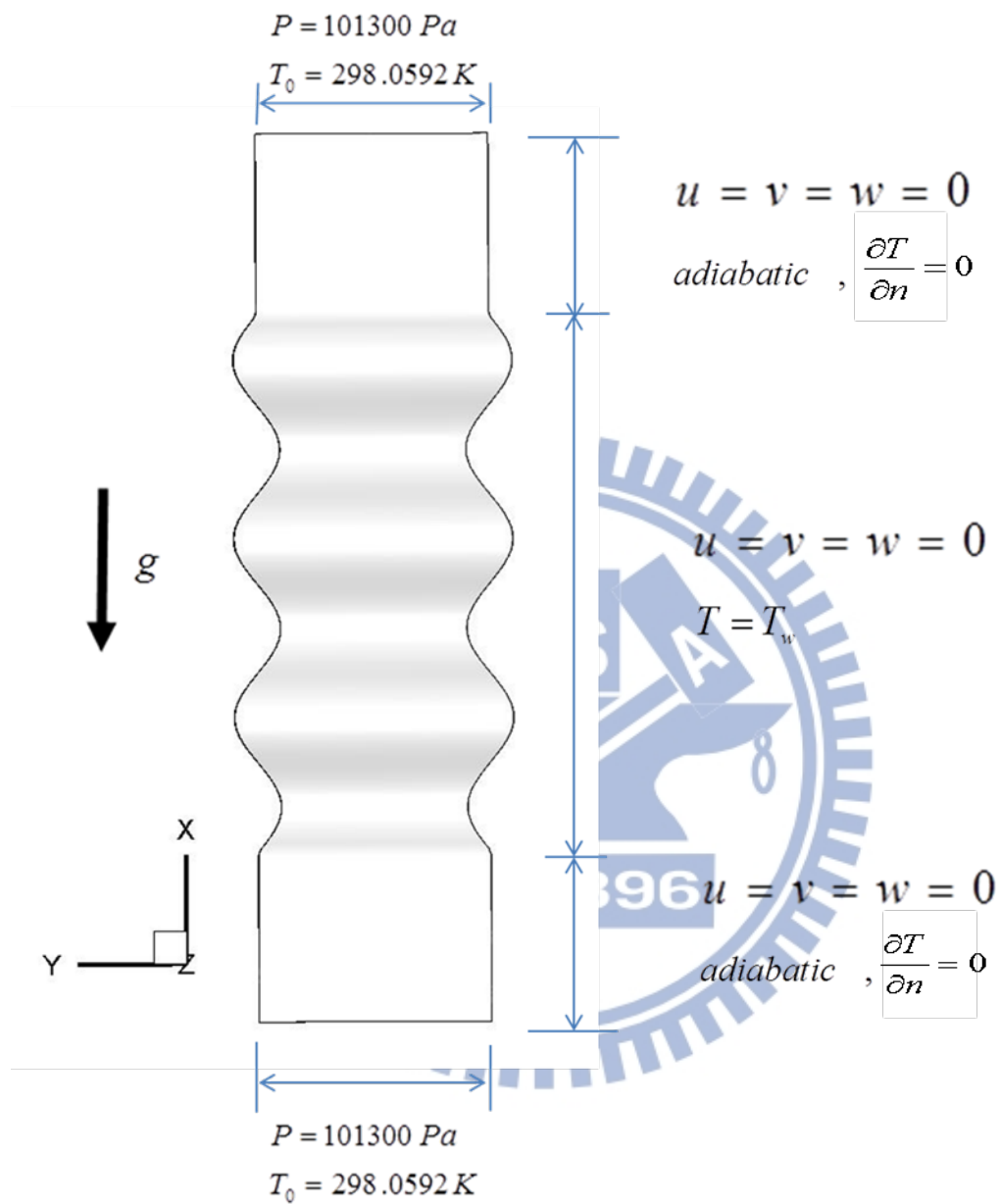


圖 2-1b 波形管道之物理模式圖二

第三章 數值計算模式

本章主旨在說明本論文的數值計算所使用的模式。第一節介紹統御方程式 Navier-Stokes 方程式。參考 Fu 和 Li 等人[23]之數值方法，將方程式拆解為非黏滯項與黏滯項。而由於研究主題為曲線管道，為簡化計算過程將物理空間映射至計算空間求解，因而統御方程式也須經過轉換。第二節介紹橢圓 PDE 網格生成法[14]及利用差分法求得轉換導數。第三節介紹的為黎曼解中的 ROE 法(Roe Scheme)[18]，利用 ROE 法來求出非黏滯項的通量。接著第四節介紹 MUSCL 法(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)[19]，此法是為了要解出 ROE 法中使用的網格之間的物理量，然後為了防止在高階插分時產生震盪現象，在 MUSCL 法插分的結果方程式中加入 Minmod limiter 以確保程式不會發散。第五節為介紹 Preconditioning 法[20]，因為當計算低速可壓縮流時，因速度和音速的數量級(order)上差距過大，在數值分析時不好計算，所以為彌補此一缺點須使用 Preconditioning 法。第六節介紹計算黏滯性項則採用二階精度的中央差分法。第七節為 Dual time stepping，因使用 Preconditioning 法時，加入 Artificial time term 而破壞了完整的統御方程式，為了使計算暫態結果較準確，因此需使用 Dual time stepping 疊代，使其在 Artificial domain 收斂時才能進入下一個真實時階，更提高程式的效率。第八節為 LUSGS 法(implicit lower-upper symmetric Gauss-Seidel algorithm)[22]，程式因為在使用 Preconditioning 法，故而在統御方程式中修改了計算時階，故需要加入 Artificial time term，待時階項收斂時才能達到真實穩態。第九節為完全非反射邊界之介紹，為了使自然對流之邊界可以更接近真實狀態，在程式的出入口邊界使用完全非反射邊界。綜合上述，本論文在數值上的計算過程為，利用 MUSCL 法算出 ROE 法所需要的網格間物理量，求出非黏滯的通量，並且在計算通量時加入 Preconditioning 法，以拉近與音速的數量級(order)。接下來使用二階中央插分法對黏滯項做插分進而求出黏滯項；然後再與 ROE 法求出的通量結合得到真正的物理通量。最後使用 Dual time stepping 及 LUSGS 法疊代以求出正確時階的物理量。

3-1、統御方程式：

本研究在計算流場的方面其統御方程式分可為兩大部分，第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式，第二部份為黏滯性項。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-1)$$

其中

$$U = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho e)^T \quad (3-2)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) u + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) v + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

$$H = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu - \tau_{zx} \\ \rho wv - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + P - \tau_{zz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) w + Pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gu \end{pmatrix}$$

ρ 為密度， p 為壓力。 u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向的速度。 k 為 thermal diffusivity。

$$e = C_v T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \quad C_v \text{ 為等容比熱。}$$

上式可拆解為黏滯性項與非黏滯性項：

$$F = F_{inviscid} + F_{viscid} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) u + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

$$G = G_{inviscid} + G_{viscid} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) v + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

$$H = H_{inviscid} + H_{viscid} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + P \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) w + Pw - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

因此統御方程式可改寫如下

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E_{inv}}{\partial x} + \frac{\partial F_{inv}}{\partial y} + \frac{\partial G_{inv}}{\partial z} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial G_v}{\partial z} + S \quad (3-10)$$

左式由非黏滯項組成的部分稱為尤拉方程式。

為了簡化曲線模型易造成的複雜計算過程，將物理空間 (x, y, z) 映射至計算空間 (ξ, η, ζ) 求解，利用下列關係式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta}
\end{aligned} \tag{3-11}$$

將(3-11)代入(3-10)改寫，得

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \bar{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial \zeta} + S \tag{3-12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{Q} &= \frac{Q}{J} \\
\bar{E} &= \frac{1}{J} (\xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F + \xi_z G) \\
\bar{F} &= \frac{1}{J} (\eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F + \eta_z G) \\
\bar{G} &= \frac{1}{J} (\zeta_t Q + \zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G) \\
\bar{E}_v &= \frac{1}{J} (\xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v) \\
\bar{F}_v &= \frac{Q}{J} (\eta_x E_v + \eta_y F_v + \eta_z G_v) \\
\bar{G}_v &= \frac{Q}{J} (\zeta_x E_v + \zeta_y F_v + \zeta_z G_v)
\end{aligned}$$

式子(3-12)即為統御方程式在計算空間之形式。

3-2、橢圓 PDE 網格生成法：

3-1 小節介紹了流場的統御方程式，但由於其解析解並不容易求得，因此對於較複雜的問題，常藉由數值方法估算，將偏微分導數改寫為有限差分的形式進行求解。而在求有限差分時，需要將計算區域分割為許多離散的點，藉由這些離散的點之值估算偏微分導數，因此標示這些點的位置是在求解前必要的準備工作。

通常為了方便計算，希望這些格點是在一方型區域內沿著正交的網格線等間距分布，但是對於曲線系統，這樣的網格邊界處理不易且容易造成誤差。為了克服這樣的問題，一般會將其分為物理領域和計算領域，藉由轉換的方法將物理領域非正交的網格轉換到一正交且等間距的計算領域來求解，只要設定好計算領域和物理領域網格一對一對應關係，計算領域網格所求得的數值即可視為物理領域相對應位置的數值。但這樣的作法會產生一重要的議題，如何求得物理領域的網格點？也就是如何求得每個計算領域的網格其在物理領域所對應的座標，一個好的對應關係必須具備幾個特徵，一對一關係必須是一對一，也就是同族的網格線不能互相交錯，二網格線最好是平滑且偏斜越少越好，另外網格最好易於調整，像在數值高變化處能增加網格的密度等等。本研究中所採用的生成法為橢圓 PDE 生成法[14]，和代數法相比，橢圓 PDE 網格生成法具有許多優點，像是網格較為平滑、可由邊界網格生成內部網格、易於調整網格之正交性等等，因此橢圓 PDE 網格生成法應用之範圍廣泛。其原理為解 Laplace 方程式或 Poisson 方程式時，從等高圖可描繪出等高線，如果利用兩組不同軸向之等高線則可交織出一完整之 2D 網格。其公式如下：

$$\begin{aligned}\eta_{yy} + \eta_{zz} &= 0 \\ \zeta_{yy} + \zeta_{zz} &= 0\end{aligned}\tag{3-13}$$

將獨立變數和因變數互換，則可得

$$\begin{aligned}ay_{\eta\eta} - 2by_{\eta\zeta} + cy_{\zeta\zeta} &= 0 \\ az_{\eta\eta} - 2bz_{\eta\zeta} + cz_{\zeta\zeta} &= 0\end{aligned}\tag{3-14}$$

其中

$$\begin{aligned}
a &= y_\eta^2 + z_\eta^2 \\
b &= y_\xi y_\eta + z_\xi z_\eta \\
c &= y_\xi^2 + z_\xi^2
\end{aligned}$$

在解上列方程組時，必須要輸入一初始條件，利用下列方程式生成

$$\begin{aligned}
x &= \lambda * \xi \\
\begin{cases} y = d * \eta + a * \sin[\frac{2\pi(x-l_3)}{\lambda}] - 2 * a * \eta * \sin[\frac{2\pi(x-l_3)}{\lambda}] & \text{for } l_3 < x < l_3 + l_2 \\ y = d * \eta & \text{for otherwise} \end{cases} \\
\begin{cases} z = d * \zeta + a * \sin[\frac{2\pi(x-l_3)}{\lambda}] - 2 * a * \zeta * \sin[\frac{2\pi(x-l_3)}{\lambda}] & \text{for } l_3 < x < l_3 + l_2 \\ z = d * \zeta & \text{for otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

而轉換導數(transform derivatives)則利用有限差分法得到，內部點使用中央差分，在邊界處之點則採用前進/後退差分求得。進行疊代至收斂即可求得網格。而對於需要邊界加密或需要網格正交的問題則可將生成網格之統御方程式改寫為下式

$$\begin{aligned}
\eta_{yy} + \eta_{zz} &= P(\eta, \zeta) \\
\zeta_{yy} + \zeta_{zz} &= Q(\eta, \zeta)
\end{aligned}$$

其中邊界及局部加密之P和Q函數如下

$$\begin{aligned}
P &= -\sum_{m=1}^M a_m \frac{\eta - \eta_m}{|\eta - \eta_m|} \exp(-c_m |\eta - \eta_m|) - \sum_{n=1}^N b_n \frac{\eta - \eta_n}{|\eta - \eta_n|} \exp\{-d_n [(|\eta - \eta_n|)^2 + (|\zeta - \zeta_n|)^2]^{\frac{1}{2}}\} \\
Q &= -\sum_{m=1}^M a_m \frac{\zeta - \zeta_m}{|\zeta - \zeta_m|} \exp(-c_m |\zeta - \zeta_m|) - \sum_{n=1}^N b_n \frac{\zeta - \zeta_n}{|\zeta - \zeta_n|} \exp\{-d_n [(|\eta - \eta_n|)^2 + (|\zeta - \zeta_n|)^2]^{\frac{1}{2}}\}
\end{aligned}$$

其中 a、b、c、d 為用以調整之常數。

(3-16)

經過加密後的網格範例如圖 3-1，在接近壁面處由於邊界層的影響，在數值上會有較大的變化，因此對其加密。

而網格正交化可分為 Neumann orthogonality 及 Dirichlet orthogonality，使用 Neumann orthogonality 調整的網格範例如圖 3-2，根據 Thompson 等人的研究，網格偏斜容易造成截斷誤差(truncation error)，尤其是在邊界處影響特別大，因此針對邊界處調整，使

網格線垂直。

一般而言，對於管道流，流動方向之網格多以平均分布即可，因此適合使用 2D 之橢圓 PDE 網格對於垂直到向的每個平面調整。以 (圖 3-3)之管道為例，將 x 方向切為 150 個 YZ 截面，輸入 YZ 截面邊界之座標進行疊代，則可得到如(圖 3-4~3-6)之網格分布。而對於需要使用到 3D 橢圓 PDE 網格生成法之問題則可參考 Upender[24]。



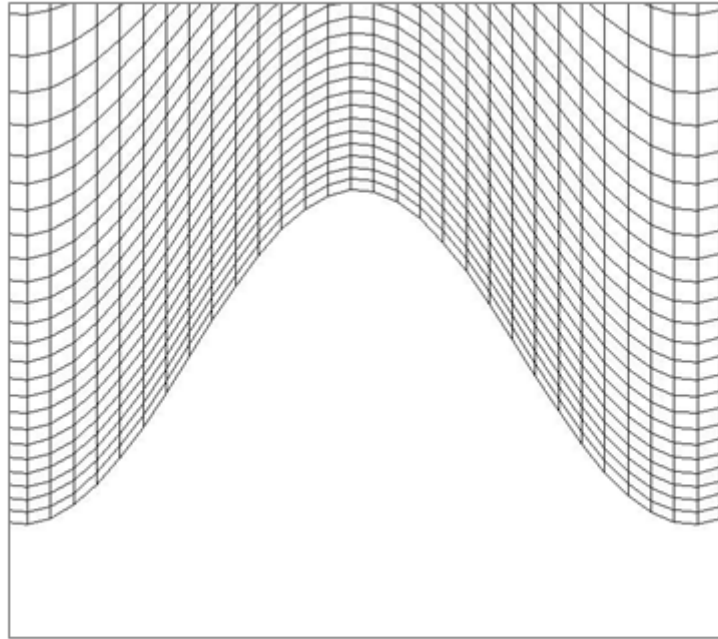


圖 3-1 對邊界加密之網格

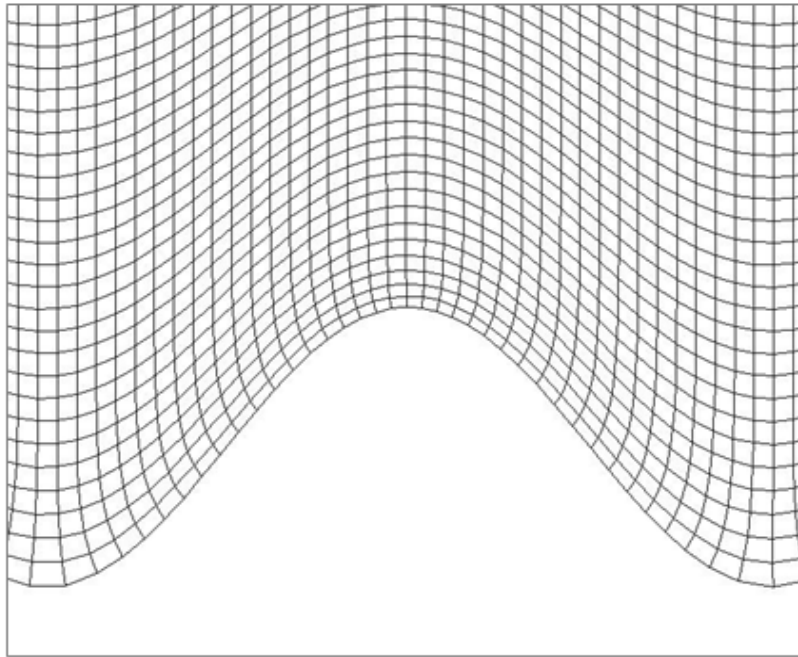


圖 3-2 對邊界正交化之網格

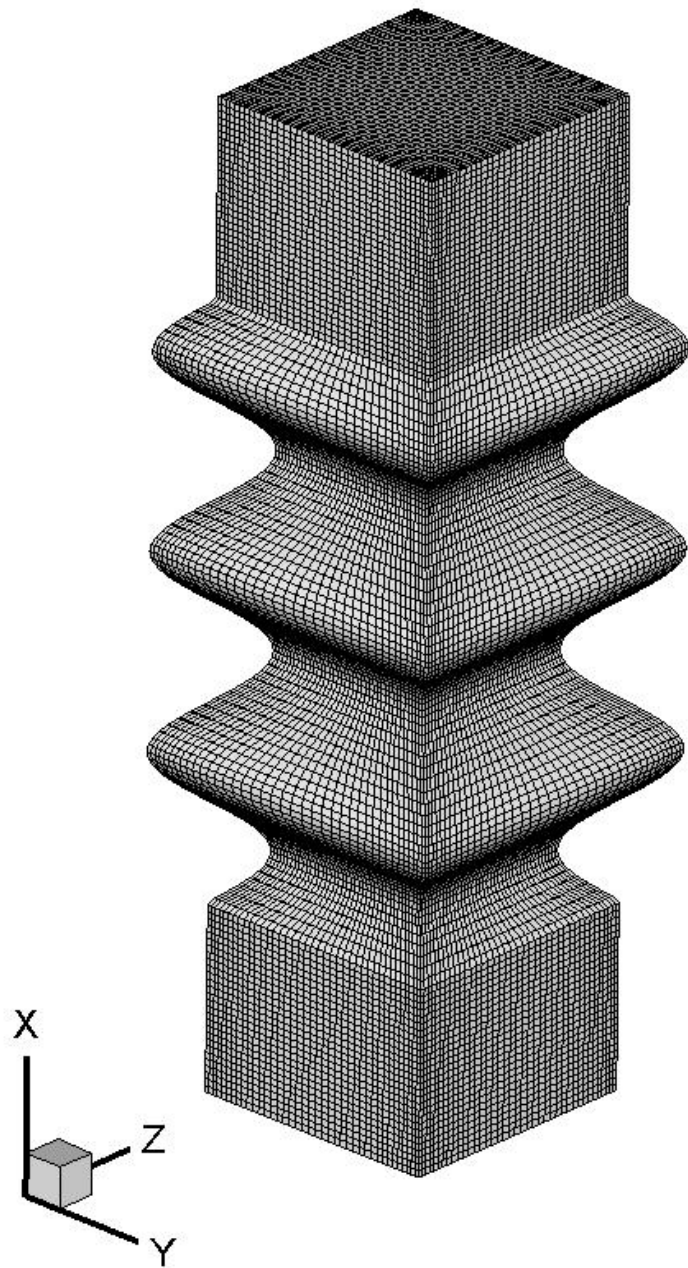


圖 3-3 沿 X 方向波形壁面之管道

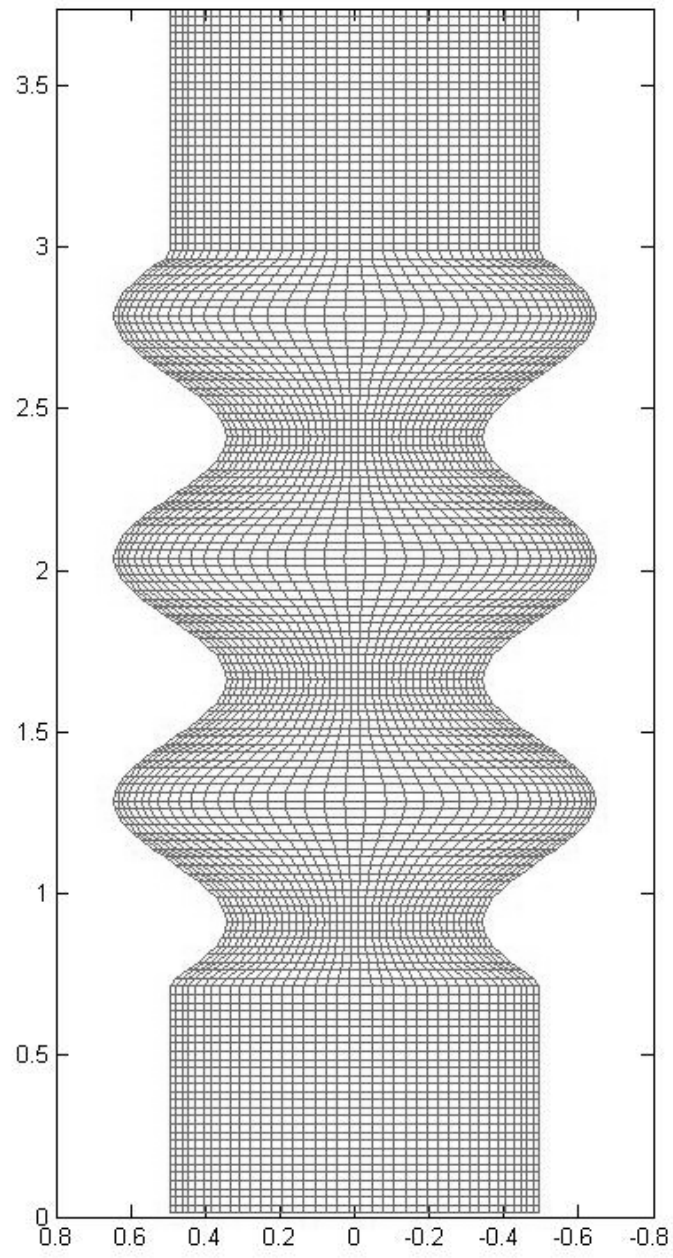


圖 3-4 管道在 $Z=0.5$ 的 XY 平面網格分布

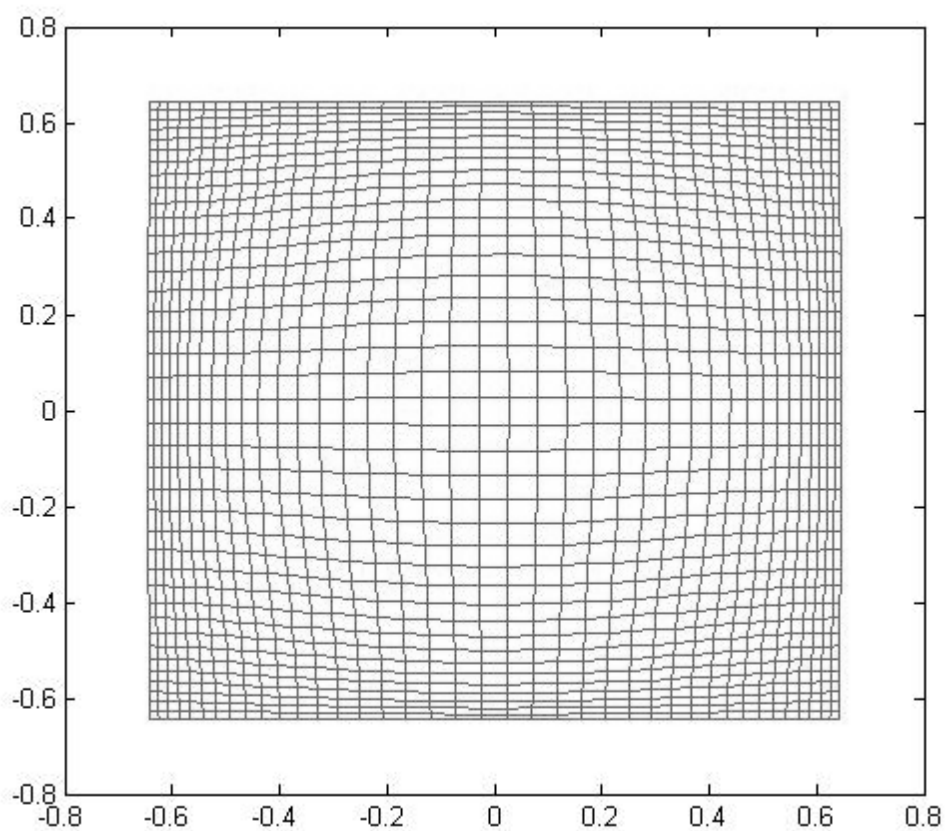


圖 3-5 管道在波谷處之 YZ 平面網格分布

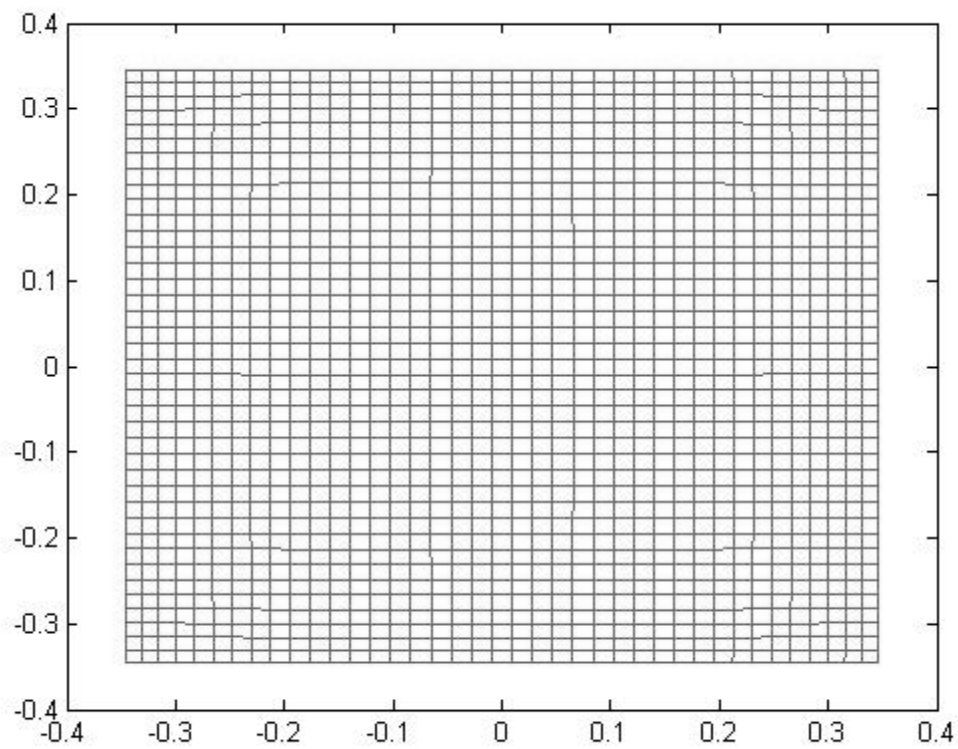


圖 3-6 管道在波峰處之 YZ 平面網格分布

3-3、Roe scheme：

在雙曲線的守恆形式方程式中，若其初始條件包含有不連續的片段連續(piecewise)常數，此類型的問題通稱為黎曼(Riemann)問題。因為其包含有不連續解，因此在流體計算上有著相當廣泛的應用。一維線性黎曼方程式如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-18)$$

其中 a 為一常數 Jacobian 矩陣。

$$\text{初始條件為 } u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases}$$

從新改寫(3-10)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

求出 A 之特徵值矩陣以及特徵向量。

$$A = K \Lambda K^{-1}, \text{ 其中 } \Lambda \text{ 為特徵值矩陣： } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}。$$

$$K = [K^{(1)}, \dots, K^{(m)}]^T \text{ 為特徵向量，故 } AK^{(i)} = \lambda_i K^{(i)}。$$

接著定義特徵變數 W (characteristic variables)，其定義如下：

$$W = W(t, x), \quad W = K^{-1}U \text{ 或 } U = KW。$$

$$\text{因此 } \frac{\partial U}{\partial t} = K \frac{\partial W}{\partial t} \text{ 且 } \frac{\partial U}{\partial x} = K \frac{\partial W}{\partial x},$$

將此結果代入(3-10)式中可得：

$$KW_t + AKW_x = 0,$$

可再繼續簡化成：

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \quad (3-19)$$

方程式(3-19)稱為 canonical form 或 characteristic form。

將以上的結果簡單整理如下：

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0, \text{ 或 } \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_x = 0 \quad (3-20)$$

上式可由特徵曲線法求得其解為：

$$w_i(x,t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i & x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (3-21)$$

其中， α_i 與 β_i 為初始值的特徵變數。由於 $U = KW$ ，可以得到

$$u(x,t) = \sum_i^m w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)}$$

參照圖(3-7)，可以進一步推導出

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=p+1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (3-22)$$

除此之外，還可決定出 $U(x,t)$ 中的 jump ΔU ：

$$\Delta U = U_R - U_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-23)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \beta_i - \alpha_i$ 。

在一維線性黎曼問題中，雖然有 exact solution，但在非線性問題裡需利用疊代等方法，這些動作將耗費大量的時間，因此在實際應用上並不廣泛。為了解決此問題，一般皆求解近似黎曼問題〈approximation Riemann problem〉解而不直接求其 exact solution。在求解近似黎曼問題中最被廣泛應用的方法為 Roe 所提出，亦即為 Roe scheme，其內容如下：

假設一維尤拉方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-24)$$

根據 chain rule，可將方程式(3-24)改寫如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

再令 $A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$ ，於是方程式(3-24)可以表示成：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3-25)$$

其中， $A(U)$ 就稱為 Jacobian 矩陣。

而 Roe scheme 將原本的 Jacobian 矩陣 $A(U)$ 用常數 Jacobian 矩陣〈constant Jacobian

matrix〉 $\tilde{A}(U_L, U_R)$ 代替，因此本來的黎曼問題可以改寫成近似黎曼問題：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x > 0 \end{cases} \quad (3-26)$$

於是前述方法可以得到(3-26)的近似解。由以上的原理可得知，在近似黎曼問題上，Roe 利用常數 Jacobian 矩陣取代原本的 Jacobian 矩陣使方程式由非線性轉變成線性，但是初始條件並沒有改變，因此可以得到方程式(3-26)的近似解。為了要求得合理的常數 Jacobian 矩陣，須合乎 Roe 所提出的四項條件：

1. U 與 F 之間，存在著線性轉換的關係。
2. 當 $U_R - U_L \rightarrow U$ ，則 $\tilde{A}(U_L, U_R) \rightarrow A(U)$ ，此處 $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 。
3. $\tilde{A}(U_L - U_R) = F_L - F_R$ 。
4. 矩陣 \tilde{A} 的特徵向量必須線性獨立。

這四項條件都是雙曲線方程式所需具備的，這同時也說明了 Roe 所提出的常數 Jacobian 矩陣必須有實數特徵值，其所對應的特徵向量必須線性獨立。除此之外，條件 3. 則是為了符合守恆定律（conservation law）與 Rankine-Hugoniot 條件。

線性黎曼問題的解析解，可以直接從(3-21)與(3-23)式得到， $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ 的解可以利用

用下面的方程式計算：

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-27)$$

$$\text{或 } U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-28)$$

其中 $i + \frac{1}{2}$ 表示網格與網格之間的交界面(face)。

而黎曼問題的近似解，則須從解近似黎曼問題著手：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(U)}{\partial x} = 0, \text{ 根據(3-26)式可得知 } \tilde{F} = \tilde{A}U$$

為了符合守恆的條件，因此下式必須成立：

$$\tilde{F}(U_R) - \tilde{F}(U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (3-29)$$

接著在固定體積的條件下，積分近似解 $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ ，可得到通量(flux)的數值公式：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}(U_{i+\frac{1}{2}}(0)) + F(U_R) - \tilde{F}(U_R) \quad (3-30)$$

再從 $\tilde{F} = \tilde{A}U$ 的關係中可進一步求得：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{A}U_{i+\frac{1}{2}}(0) + F(U_R) - \tilde{A}U_R \quad (3-31)$$

再根據(3-27)式與(3-28)式可以推導出：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) - \tilde{A} \sum_{\tilde{\lambda}_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_R) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^+ \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-32)$$

$$\text{或 } F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) + \tilde{A} \sum_{\tilde{\lambda}_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_L) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^- \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-33)$$

(3-32)與(3-33)所指的 $\tilde{\lambda}_i^-$ 與 $\tilde{\lambda}_i^+$ 分別是代表負的特徵值與正的特徵值，接著再利用平均的

方法將 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 更進一步表示成：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \right] \quad (3-34)$$

再由(3-22)式可再次改變 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 的形式如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - |\tilde{A}| \Delta U \right] \quad (3-35)$$

其中 $\Delta U = U_R - U_L$ 、 $|\tilde{A}| = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^- = \tilde{K} |\tilde{\Lambda}| \tilde{K}^{-1}$ ， $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & |\lambda_m| \end{pmatrix}$ 。

接下來需找出 $|\tilde{A}|$ 中所需的物理量，必須利用下列方法：

現考慮一維等溫尤拉方程式：

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (3-36)$$

其中 $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}$ ； $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 p \end{bmatrix}$ ， a 為聲速

方程式(3-36)的 Jacobian 矩陣與其對應的特徵值與特徵向量如下所示：

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

特徵值： $\lambda_1 = u - a$ ， $\lambda_2 = u + a$

特徵向量： $K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \end{bmatrix}$ ， $K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \end{bmatrix}$

接著選定 parameter vector Q

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

再將 F 與 U 利用 Q 表示：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1 Q = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + a^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

為了表示出 ΔU 與 ΔF 需在定義 averaged vector \tilde{Q} ：

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

再找出 $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{Q})$ 與 $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{Q})$ 使得

$$\Delta U = \tilde{B} \Delta Q ; \Delta F = \tilde{C} \Delta Q \quad (3-42)$$

將(3-42)結合可得

$$\Delta F = (\tilde{C} \tilde{B}^{-1}) \Delta U \quad (3-43)$$

再根據上述條件 3 求出近似 Jacobian 矩陣

$$\tilde{A} = \tilde{C} \tilde{B}^{-1} \quad (3-44)$$

為了滿足(3-42)，可以求得

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \end{bmatrix} ; \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \\ 2a^2 \tilde{q}_1 & \tilde{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

再帶入(3-44)可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

\tilde{u} 為 Roe averaged velocity

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-47)$$

因此可以用同樣方法得到以下物理量：

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-48)$$

$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L} w_L + \sqrt{\rho_R} w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-49)$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-50)$$

$$\tilde{a} = [(\gamma - 1)(\tilde{H} - 1/2\tilde{V})]^{1/2} \quad (3-51)$$

其中 \tilde{u} 、 \tilde{v} 、 \tilde{w} 分別代表 x 方向、 y 方向、 z 方向的速度。 \tilde{H} 、 \tilde{a} 則分別為焓和音速。

(3-47)~(3-50)式中的 U_L 以及 U_R 則是利用 MUSCL 法求出。



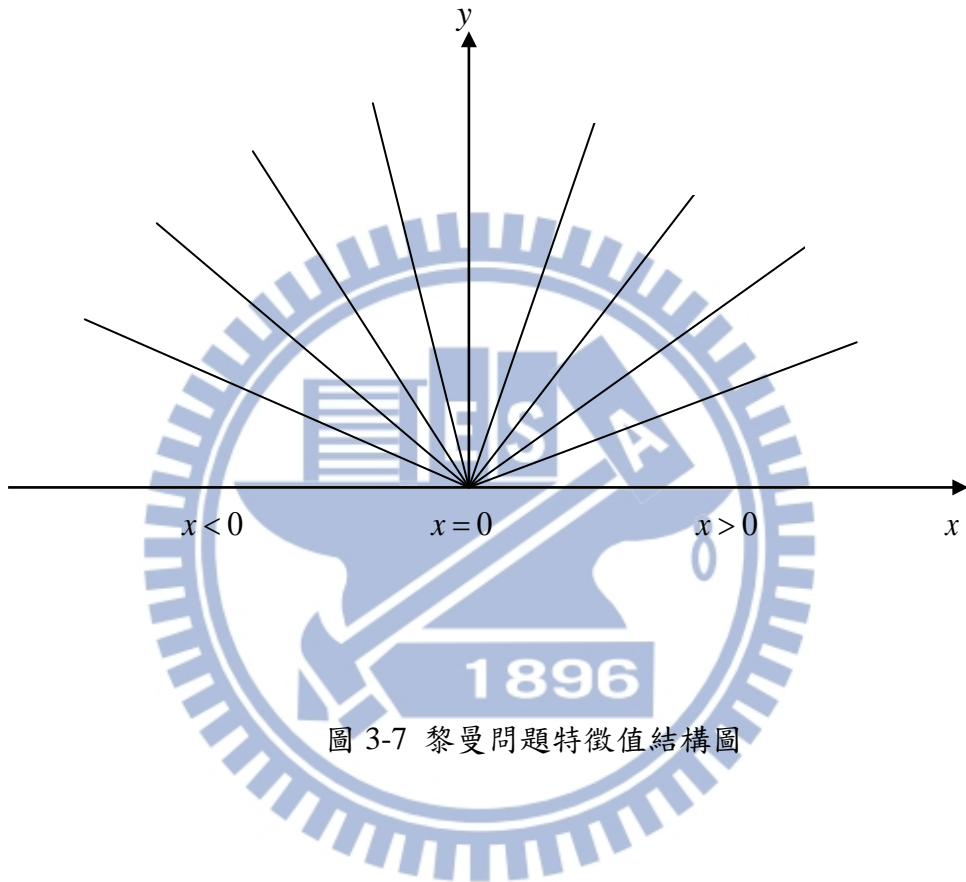


圖 3-7 黎曼問題特徵值結構圖

3-4、Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws(MUSCL)：

本論文使用的是採用I. Abalakin等[19]中所使用的插分法。其方程式如下：

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \Delta u_{i+1/2}^L \quad (3-52)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \Delta u_{i+1/2}^R \quad (3-53)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^L &= (1-\beta)(u_{i+1}-u_i) + \beta(u_i-u_{i-1}) + \theta^c(-u_{i-1}+3u_i-3u_{i+1}+u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_{i-2}+3u_{i-1}-3u_i+u_{i+1}) \end{aligned} \quad (3-54)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^R &= (1-\beta)(u_{i+1}-u_i) + \beta(u_{i+2}-u_{i+1}) + \theta^c(-u_{i-1}+3u_i-3u_{i+1}+u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_i+3u_{i+1}-3u_{i+2}+u_{i+3}) \end{aligned} \quad (3-55)$$

其中(3-54)、(3-55)式中的 β 、 θ^c 、 θ^d 值可由表(3-1)中查得。代入不同的值可以得到不同的精度。本論文則是使用三階精度，以減少數值計算的消散性。

在程式中，高次項的插分法在不連續的情況下，容易使震盪變大，為了降低震盪，本研究在 MUSCL 法插分出來的方程式中加入 minmod limiter，用來確保程式不會發散。

因此(3-52)與(3-53)式需改寫如下：

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^L) \quad (3-56)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^R) \quad (3-57)$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{Sgn}(x) \text{Max}\{0, \text{Min}[|x|, y \text{Sgn}(x)]\}$$

表 3-1 精度係數值

β	θ^c	θ^d	Order
1/3	0	0	2
1/3	-1/6	0	3
1/3	0	-1/6	4
1/3	-1/10	-1/15	5

3-5、Preconditioning 法：

為了提高程式的應用範圍，在 Navier-Stokes 方程式中加入 preconditioning 法，讓程式不論在高速或低速流內計算可壓縮流，皆可獲得精確的結果。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-58)$$

上式為原始方程式，接著將保守形式 (conserved variables) 轉變成主要變數形式 (primitive variables)，其形式如下：

$$M \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-59)$$

其中 $U_p = [p \ u \ v \ w \ T]^T$ ， M 為轉換矩陣：

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

其中 $\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}$ ； $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}$

接著將(3-59)式的方程式乘上矩陣 K

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(H - |V|^2) & -u & -v & -w & 1 \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

再將 K 與 M 相乘

$$KM = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-62)$$

將(3-62)式帶入(3-59)式，連續方程式：

$$\rho_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-63)$$

在理想氣體中可將(3-55)再表示成

$$\frac{\gamma}{C^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-64)$$

其中 C 為聲速

由(3-64)式可以看出，在等密度條件下，由於 ρ_p 為零，(3-55)式將變成

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-65)$$

上式即為不可壓流的連續方程式。

綜上所述，可以得知只要改變(3-62)式中的 ρ_p 項，利用當地流場速度 (local velocity) 的倒數取代，即可轉換系統中的特徵值，藉此改變低速情況下流場的聲速，使聲速與流場速度冪次級數(order)相同，系統不再受到 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy Condition) 條件的限制，提高程式的計算效率。

利用 θ 取代 ρ_p 項：

$$\theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{TC_p} \right) \quad (3-66)$$

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon \times U_{\max} & \text{if } |u| < \varepsilon \times C \\ |u| & \text{if } \varepsilon \times C < |u| < C \\ C & \text{if } |u| > C \end{cases} \quad (3-67)$$

其中 ε 為一極小的值，約等於 10^{-5} ，其主要是用來防止停滯點 (stagnation point) 在計算時所造成的奇異點 (singular point) 現象。對於黏制性流體而言， U_r 必須大於流體的當地擴散速度 (local diffusion velocity)，因此 U_r 還需加入下列限制：

$$U_r = \max\left(U_r, \frac{\nu}{\Delta x}\right)$$

將 θ 帶入(3-62)式後，可得到一新矩陣 Γ_{nc}

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

經過上述推導之後，方程式從(3-59)式轉變如下：

$$\Gamma_{nc} \frac{\partial U_p}{\partial t} + K \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = S \quad (3-69)$$

為了讓(3-69)式中的通量項再度轉換成保守形式，在乘上 K^{-1}

$$(K^{-1}\Gamma_{nc}) \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-70)$$

根據(3-70)式，定義

$$\Gamma = K^{-1}\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{T} \\ \theta u & \rho & 0 & 0 & \frac{-\rho u}{T} \\ \theta v & 0 & \rho & 0 & \frac{-\rho v}{T} \\ \theta w & 0 & 0 & \rho & \frac{-\rho w}{T} \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{-\rho}{T} H + \rho C_p \end{bmatrix}$$

最後方程式簡化成如下形式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-71)$$

其中 Γ 為 preconditioning 矩陣， U_p 為 primitive form $[P, u, v, w, T]^T$

由於方程式在時間項經過改變，因此必須重新推導 Roe 所提出的近似黎曼解。在(3-35)

式中，可以觀察到 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 項，是由 $\frac{1}{2}(F(U_R) + F(U_L))$ 的中央差分法加上為了解決不連續面

問題的 artificial viscosity term $\frac{1}{2}|\tilde{A}|\Delta U$ 所組成。加入 preconditioning 的方程式只需在

artificial viscosity term 做改變即可，其推導如下：

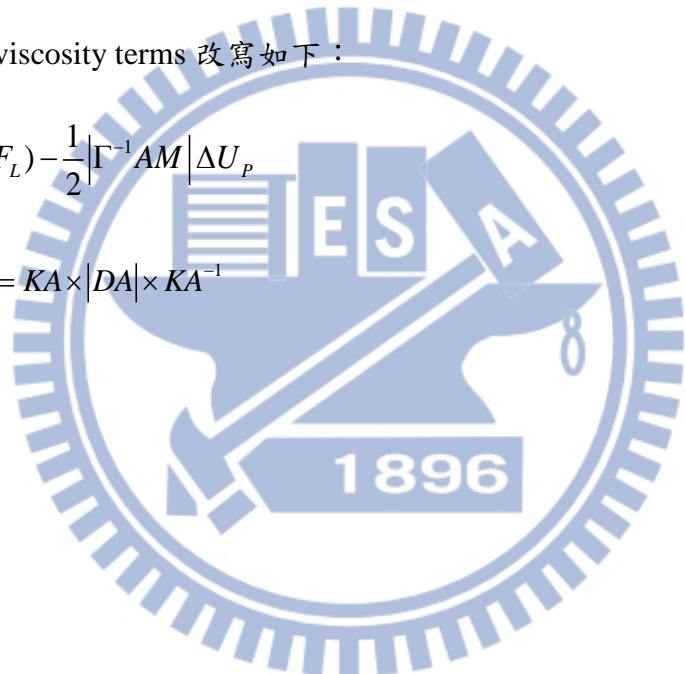
$$\begin{aligned} \Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= \mathbf{S} \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) &= \Gamma^{-1} \mathbf{S} \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= \Gamma^{-1} \mathbf{S} \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(AM \frac{\partial U_p}{\partial x} + BM \frac{\partial U_p}{\partial y} + CM \frac{\partial U_p}{\partial z} \right) &= \Gamma^{-1} \mathbf{S} \end{aligned} \tag{3-72}$$

其中 $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$

所以 artificial viscosity terms 改寫如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F_R + F_L) - \frac{1}{2} |\Gamma^{-1} AM| \Delta U_p \tag{3-73}$$

其中 $|\Gamma^{-1} AM| = KA \times |DA| \times KA^{-1}$



3-6、黏滯性項之差分：

黏滯性項；在黏滯性項方面，採用二階中央差分法。由於在尤拉方程式中計算的範圍皆為網格與網格之間的通量項，因此在黏滯性項方面，所需要得到的速度梯度項也必須是網格之間的通量項。下列以三維的 X 方向為例，圖 3-8 為其示意圖。

圖 3-8 中各編號所代表的位置分別為：

$$1 \rightarrow (i, j+1, k) ; 2 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k) ; 3 \rightarrow (i+1, j+1, k) ;$$

$$4 \rightarrow (i, j, k-1) ; 5 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k-1) ; 6 \rightarrow (i+1, j, k-1) ;$$

$$7 \rightarrow (i, j, k) ; 8 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k) ; 9 \rightarrow (i+1, j, k) ;$$

$$10 \rightarrow (i, j, k+1) ; 11 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k+1) ; 12 \rightarrow (i+1, j, k+1) ;$$

$$13 \rightarrow (i, j-1, k) ; 14 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j-1, k) ; 15 \rightarrow (i+1, j-1, k) ;$$

其各速度梯度差分分別如下表示：

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\Delta U}{\Delta X} = \frac{U(9) - U(7)}{\Delta X} \quad (3-74)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\Delta V}{\Delta X} = \frac{V(9) - V(7)}{\Delta X} \quad (3-75)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\Delta W}{\Delta X} = \frac{W(9) - W(7)}{\Delta X} \quad (3-76)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\Delta U}{2\Delta Y} = \frac{U(2) - U(14)}{2\Delta Y} \quad (3-77)$$

$$\text{其中 } U(2) = \frac{U(3) + U(1)}{2} ; U(14) = \frac{U(13) + U(15)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{(\frac{U(3) + U(1)}{2}) - (\frac{U(13) + U(15)}{2})}{2\Delta Y} = \frac{U(3) + U(1) - U(13) + U(15)}{4\Delta Y} \quad (3-78)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{(\frac{V(3) + V(1)}{2}) - (\frac{V(13) + V(15)}{2})}{2\Delta Y} = \frac{V(3) + V(1) - V(13) + V(15)}{4\Delta Y} \quad (3-79)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{W(3)+W(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{W(13)+W(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{W(3)+W(1)-W(13)+W(15)}{4\Delta Y} \quad (3-80)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\Delta U}{2\Delta Z} = \frac{U(11)-U(5)}{2\Delta Z} \quad (3-81)$$

$$\text{其中 } U(11) = \frac{U(10)+U(12)}{2} ; U(5) = \frac{U(4)+U(6)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\left(\frac{U(10)+U(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{U(4)+U(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{U(10)+U(12)-U(4)+U(6)}{4\Delta Z} \quad (3-82)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\left(\frac{V(10)+V(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{V(4)+V(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{V(10)+V(12)-V(4)+V(6)}{4\Delta Z} \quad (3-83)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\left(\frac{W(10)+W(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{W(4)+W(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{W(10)+W(12)-W(4)+W(6)}{4\Delta Z} \quad (3-84)$$

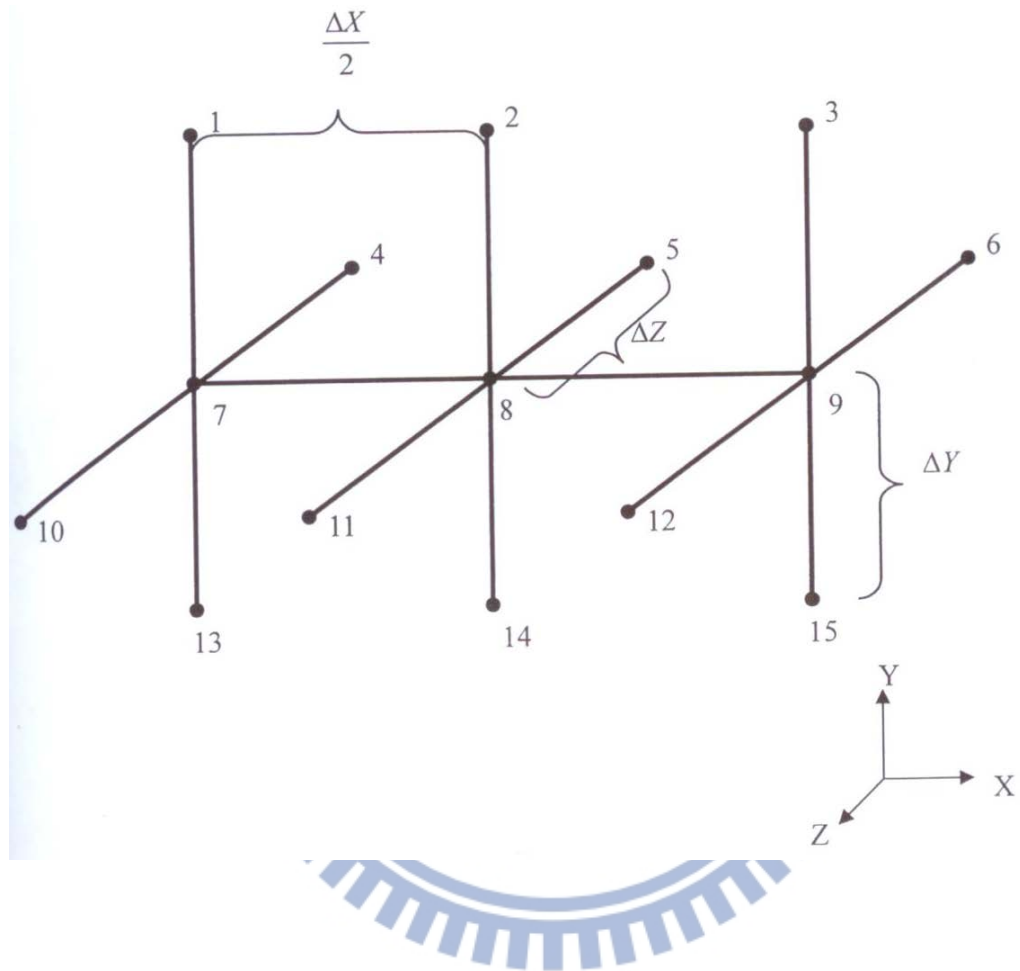


圖 3-8 差分示意圖

3-7、Dual time stepping :

方程式(3-59)中的 Navier-Stokes 方程式在時間項方面遭到修改，因此利用修改後的方程式來計算暫態結果並不恰當，因此本程式再加入 dual time stepping[21]的模組，不僅讓程式在計算暫態結果方面較準確，更提高程式的效率，縮短計算時間。

首先，先在原始 Navier-Stokes 方程式加入一虛擬時間項，稱為 artificial time term。

方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-85)$$

其中 τ 即為 artificial time， t 為 physical time

U 為 conservative form $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e)^T$

接著在 artificial time term 加入 preconditioning method :

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-86)$$

最後對 artificial time term 採一階的有限差分離散，對 physical time term 採二階的後項差分離散， $\frac{\partial F}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial G}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial H}{\partial z}$ 利用中央插分法可得

$$\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} + \frac{3U^{k+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{k+1} - F_{i-\frac{1}{2},j,k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2},k}^{k+1} - G_{i,j-\frac{1}{2},k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta z} (H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{k+1}) = S \quad (3-87)$$

接著整理上式，先將其線性化

$$\Gamma \frac{\Delta U_p}{\Delta \tau} + \frac{3(U^n + M \Delta U_p) - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_x (F^k + A_p^k \Delta U_p) + \delta_y (G^k + B_p^k \Delta U_p) + \delta_z (H^k + C_p^k \Delta U_p) = S \quad (3-88)$$

其中 $\Delta U_p = U_p^{k+1} - U_p^k$ ， $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$

$U^{k+1} = U^n + M \Delta U_p$ ， $F^{k+1} = F^k + A_p^k \Delta U_p$ ， $A_p^k = AM = \frac{\partial F^k}{\partial U_p}$

再將 ΔU_p 項放置在等號左邊，其餘則在右邊：

$$\left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \Gamma^{-1} (\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_x C_p^k) \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k \quad (3-89)$$

此處 $R^k = S - \left(\frac{3U^k - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} \right) - (\delta_x F^k + \delta_y G^k + \delta_x H^k)$ ， I 為單位矩陣，

其中 $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$ ， $A_p = \frac{\partial F}{\partial U_p}$ 、 $B_p = \frac{\partial G}{\partial U_p}$ 與 $C_p = \frac{\partial H}{\partial U_p}$ 為 flux Jacobian。

k 為 artificial time 中的疊帶次數， n 為 physical time 的計算階數。上述方程式，當 artificial time term 收斂時， $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta\tau} = 0$ ，方程式即會回復到原始的 Navier-Stokes 方程式，並且包含著時間項，故程式可以計算暫態結果。



3-8、LUSGS 法:

本研究採用 LUSGS implicit 法計算時間方程式(3-85)，此法的優點除了收斂快速外，還有不需額外的 Artificial Dissipation 來幫助程式收斂。本文選用收斂速度較快的 LUSGS 法來計算修改後的方程式。

由方程式(3-89):

$$\left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \Gamma^{-1}(\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_x C_p^k) \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-90)$$

此處 $R^k = S - \left(\frac{3U^k - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} \right) - (\delta_x F^k + \delta_y G^k + \delta_x H^k)$ ， I 為單位矩陣

現在令 $\tilde{A}_p = \Gamma^{-1}A_p^k$ 、 $\tilde{B}_p = \Gamma^{-1}B_p^k$ 、 $\tilde{C}_p = \Gamma^{-1}C_p^k$

並將其分為兩部分:

$$\tilde{A}_p = \tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-, \quad \tilde{B}_p = \tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^-, \quad \tilde{C}_p = \tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^- \quad (3-91)$$

其中 $\tilde{A}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{A}_p^\pm | \lambda_{\tilde{A}} | I)$ 、 $\tilde{B}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{B}_p^\pm | \lambda_{\tilde{B}} | I)$ 、 $\tilde{C}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{C}_p^\pm | \lambda_{\tilde{C}} | I)$

$\lambda_{\tilde{A}}$ 、 $\lambda_{\tilde{B}}$ 、 $\lambda_{\tilde{C}}$ 分別為 \tilde{A}_p 、 \tilde{B}_p 、 \tilde{C}_p 中最大的特徵值。

將上述帶入(3-90)得

$$\left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^- - \tilde{A}_{p,i-1}^-}{\Delta x} + \frac{\tilde{B}_{p,i}^+ - \tilde{B}_{p,i-1}^+}{\Delta y} + \frac{\tilde{B}_{p,i+1}^- - \tilde{B}_{p,i-1}^-}{\Delta y} + \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta z} + \frac{\tilde{C}_{p,i+1}^- - \tilde{C}_{p,i-1}^-}{\Delta z} \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-92)$$

其中 $\delta_x(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-) = \delta_x^- \tilde{A}_p^+ + \delta_x^+ \tilde{A}_p^- = \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^- - \tilde{A}_{p,i-1}^-}{\Delta x}$

可將(3-92)式整理成

$$(L + D + U)\Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k$$

其中

$$L = - \left[\frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^+)_{i-1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^+)_{i,j-1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^+)_{i,j,k-1} \right]$$

$$D = \frac{I}{\Delta \tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\Delta x} [(\tilde{A}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{A}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta y} [(\tilde{B}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{B}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta z} [(\tilde{C}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k}] \right\}$$

$$U = \left[\frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^-)_{i+1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^-)_{i,j+1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k+1} \right]$$

$$\text{最後整理為 } (L+D)D^{-1}(D+U)\Delta U_p^k = \Gamma^{-1}R^k$$

上式可以用以下的步驟解出：

$$1. (L+D)\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k$$

$$\text{其中 } \Delta U_p^* = D^{-1}(D+U)\Delta U_p^k$$

$$2. (D+U)\Delta U_p^k = D\Delta U_p^*$$

$$\Delta U_p^k = \Delta U_p^* - D^{-1}U\Delta U_p^k$$

$$3. U_p^{k+1} = U_p^k + \Delta U_p$$

4. 重複步驟一至三，直到 $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta t} = 0$ 則下一個物理時間項可求得。

3-9、非反射性邊界(Non-reflecting Boundary)：

本研究主要探討可壓縮流在三維垂直管道內流動與熱傳，過去在模擬低速可壓縮流流場時，出口條件多利用速度完全發展流條件及大氣壓力邊界，然而此上述的出口條件設定方式，由於壓力波易會在出口處反射回計算區域而影響收斂，因此不適用於低速可壓縮流；且完全發展流出口在物理模式的設定上需有一定長寬比例，將使網格需求量增加。故本文在出口條件部分採用 Fu 和 Li 等人[23]改善 Poinsot 和 Lele[17]的非反射性邊界條件(non-reflecting boundary)，可適用於極低速可壓縮流，且大幅減少網格總數及計算時間。

根據 Poinsot 等人[17]所提出的 LODI(The local one-dimensional inviscid relations)將(3-86)

簡化成在出口邊界的一維 Navier-Stokes 方程式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-93)$$

為了將 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 轉換成主要變數形式(primitive form)，將(3-93)的左邊乘上 Γ^{-1}

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-94)$$

$$\text{其中 } \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial U_p} \frac{\partial U_p}{\partial x} = \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-95)$$

將(3-93)代入方程式(3-94)以主要變數形式為變數(primitive variables)的方程式如下所

示：

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} = 0 \quad (3-96)$$

再將 $\Gamma^{-1} A_p$ 做相似轉換以得到進出口的特徵速度：

$$\Gamma^{-1} A_p = K \lambda K^{-1} \quad (3-97)$$

此處 K 為特徵向量 (Eigen vector)， λ 為 $\Gamma^{-1} A_p$ 的特徵值(Eigen values)，即為出口處的特徵速度。根據 Dennis 等人[25]轉換低速情況下原流體速度 u 及原音速 c ，將其調整使修正過後的流場速度 u' 與聲速 c' 幕次級數(order)接近。

特徵值矩陣為

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u' + c' \\ u' - c' \end{pmatrix} \quad (3-98)$$

其中 $u' = \frac{(\beta+1)u}{2}$ 與 $c' = \frac{\sqrt{u^2(\beta-1)^2 + 4\beta c^2}}{2}$

再令 $L = \lambda K^{-1} \frac{\partial U_p}{\partial x}$ (3-99)

展開 L 可得

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho\kappa} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (u' + c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' - c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ (u' - c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' + c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{pmatrix} \quad (3-100)$$

L 之物理意義即為邊界條件，波強度隨時間變化量。

為了得到 L 與 $\frac{\partial U_p}{\partial t}$ 的關係，將(3-99)代回(3-96)並整理可得

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + KL = 0 \quad (3-101)$$

展開(3-101)可得壓力、速度與溫度在邊界條件上的方程式如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho c'}(L_4 - L_5) &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial \tau} - L_3 &= 0 \\
\frac{\partial w}{\partial \tau} + L_2 &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial \tau} + L_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] &= 0
\end{aligned} \tag{3-102}$$

方程式(3-102)可離散如下：

$$\begin{aligned}
p^{k+1} &= p^k - \frac{\Delta \tau}{2\rho c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] \\
u^{k+1} &= u^k - \frac{\Delta \tau}{2\rho c'}(L_4 - L_5) \\
v^{k+1} &= v^k + L_3 \Delta \tau \\
w^{k+1} &= w^k - L_2 \Delta \tau \\
T^{k+1} &= T^k - L_1 \Delta \tau + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma + 1}{\gamma} (p^{k+1} - p^k)
\end{aligned} \tag{3-103}$$

根據圖 3-9(a)，如果流體從管內往大氣流出時， L_1 、 L_2 、 L_3 與 L_4 方向與流體流動方向相同，因此可利用方程式(3-100)定義 L_1 、 L_2 、 L_3 與 L_4 。由於 $u' - c'$ 小於零的關係， L_5 的方向則與流體流動方向相反。由於壓力於極遠處的變化為零，所以 $\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$ ，方程式

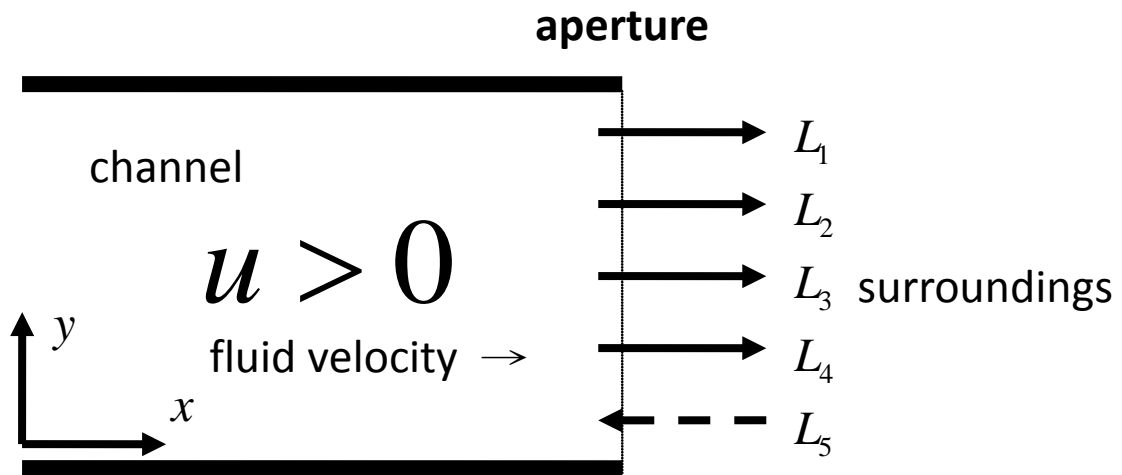
(3-102)將如下：

$$\frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] = 0 \tag{3-104}$$

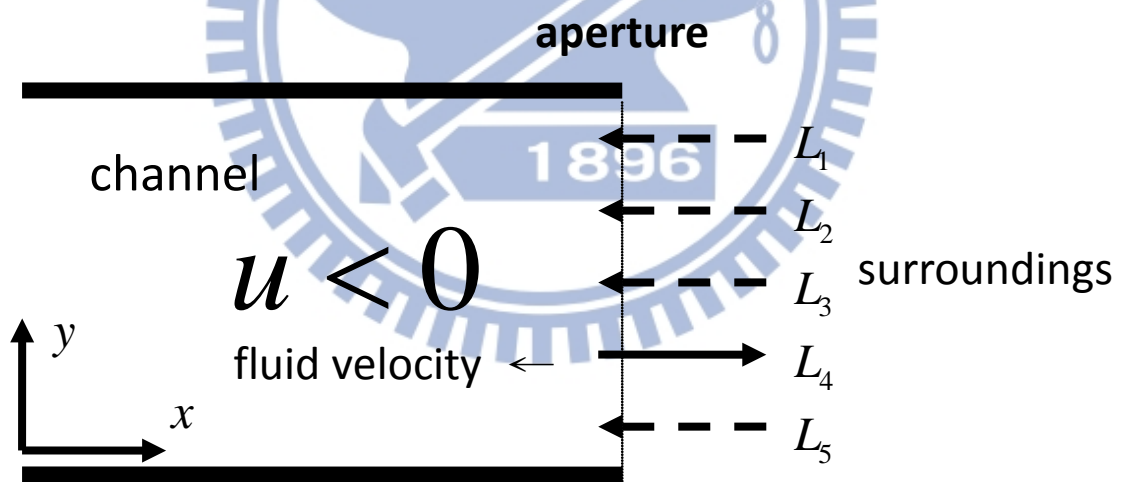
因此 L_5 可定義如下：

$$L_5 = \frac{(u' + c' - u)}{(u' - c' - u)} L_4 \tag{3-105}$$

圖 3-9(b)則為流體從大氣環境往管內流動。 L_4 可由方程式(3-104)直接求得，由於非反射性邊界的關係， L_1 、 L_2 與 L_3 則設定為 0。 L_5 則可由方程式(3-105)得到。



(a)



(b)

圖 3-9 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 於管道兩端的方向性示意圖

第四章 結果與討論

本研究主要探討三維波形管和直管在流場及溫度場之差異，以波形壁面的振幅波長比和瑞利數為主要參數，比較速度、溫度及局部紐塞數產生的變化，進而說明管道壁面呈波形變化時對於熱傳效率的影響。為驗證程式之正確性，本研究參考文獻之物理模式進行結果比對，並討論二維情況下波形壁面之相關特性。本研究模擬之案例分為兩部分，第一部分為改變壁面溫度以調整瑞利數，計算三種振幅波長比之結果，第二部分為固定外型比例調整特徵長度，藉以探討不同尺寸對流場之影響。另外本研究在程式計算時使用有因次之參數，但為了結果討論比較時之方便性，將其轉換為無因次表示，以下為無因次之轉換式：

$$X = \frac{x}{d}, \quad Y = \frac{y}{d}, \quad Z = \frac{z}{d} \quad (4-1)$$

$$U = \frac{u}{\sqrt{Ra} \frac{\alpha_d}{h}}, \quad V = \frac{v}{\sqrt{Ra} \frac{\alpha_d}{h}}, \quad W = \frac{w}{\sqrt{Ra} \frac{\alpha_d}{h}}$$

α_d 為熱擴散率 Thermal diffusivity

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_0}, \quad \text{振幅波長比 } \alpha = \frac{a}{\lambda}。$$

其他有因次之參數表示如下：

$$V_{mag} = \sqrt{(u)^2 + (v)^2 + (w)^2} \quad (4-2)$$

$$T_0 = 298.0592K, \quad \rho_0 = 1.1842kg/m^3$$

以空氣為工作流體，其黏度及熱傳導係數依 Sutherlands' s law 如下所示：

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_0 + S}{T + S} \right) \quad (4-3)$$

$$k(T) = \mu \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) Pr} \quad (4-4)$$

其中 $S_{air} = 110$ ， $\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} Ns/m^2$ ， $R = 287J/kg \cdot K$ ， $\gamma = 1.4$ ， $Pr = 0.72$

流體之假設為理想空氣，瑞利數定義如下

$$Ra = \frac{Pr g \rho^2 \beta (T - T_0) d^3}{\mu^2} \quad (4-5)$$

由於本研究流體為可壓縮流，且黏性隨溫度改變，因此計算瑞利數時所使用的密度、黏性、熱膨脹係數使用薄膜溫度(the film temperature)時之值計算，而普蘭特數本研究假設不隨溫度改變，因此在計算瑞利數時也設為定值。

薄膜溫度之定義：

$$T_{film} = \frac{T_w + T_0}{2} \quad (4-6)$$

局部紐塞數及熱傳係數定義：

$$h_x = \frac{q_s''}{T_w - T_0} \quad (4-7)$$

$$Nu_x = \frac{h_x d}{k_f} \quad (4-8)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{A} \int_A h_x dA \quad (4-9)$$

$$\overline{NU} = \frac{1}{A} \int_A NU dA \quad (4-10)$$

但由於本研究模擬使用之網格並非垂直於壁面，因此需要將熱通量公式重新推導轉換至計算空間計算：

$$q_s'' = -k \nabla T \cdot \vec{n} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \vec{n} = -k \left\{ \frac{\frac{\partial T}{\partial \eta} (-\eta_x ak \cos kx + \eta_y) + \frac{\partial T}{\partial \xi} (-\xi_x ak \cos kx + \xi_y)}{[1 + (ak \cos kx)^2]^{0.5}} \right\}$$

(4-11)

其中因為壁面邊界條件設定為等溫，壁面沿 ξ 方向之溫度梯度為零，因此熱通量之公式簡化為：

$$q_s'' = -k \left\{ \frac{\frac{\partial T}{\partial \eta} (-\eta_x ak \cos kx + \eta_y)}{[1 + (ak \cos kx)^2]^{0.5}} \right\} \quad (4-12)$$

在計算三維問題前，為驗證程式之正確性，參考 Guzman[26]及 Bhavnani[2]之結果進行比對。Guzman 研究為數值模擬二維波形管道之強制對流現象，流場假設為不可壓縮流，結果觀察到雷諾數大於135時，流場具有自發性的震盪現象，如圖 4-1 左，黏滯力無法將渦流侷限在波谷處，造成上下方渦流交替移動至出口，並且和主流混合。圖 4-1 右為相同雷諾數下本研究所模擬出之結果，不穩定的現象和 Guzman 相似，但各個階段出現的時間略有差距，推測可能和流體壓縮性的假設或是邊界條件有關。Bhavnani 利用干涉儀測量波形壁面對開放空間之溫度場，流場形式為自然對流，波形板垂直地面，本研究 and Bhavnani 研究案例中振幅波長比 0.1 結果對照，設立一物理模式如圖 4-2，相關物理參數比照 Bhavnani 之研究：波長 50.8mm、振幅 5.08mm、空氣溫度 25°C、壁面溫度 55°C，而網格經過測試採 112*50 對邊界加密的版本，局部熱傳係數比對結果如圖 4-3，

Ashjaee[4]仿照 Bhavnani 之研究得到此瑞利數之平均熱傳係數 \bar{h} 約為 4.675，而本研究之平均熱傳係數 4.8258，誤差 3.2%，而振幅波長比為零之平板計算結果和 Bhavnani 及 Ostrach[28]比對如圖 4-4，平均熱傳係數誤差 4.0%。另外為了解波形壁面之基本特性，除前述之振幅波長比 0 及 0.1、瑞利數 3×10^5 外，本研究做了許多測試，其中值得注意的是雖然振幅波長比越高平均熱傳係數越低，但由於散熱面積的提升，總熱傳量隨著振幅波長比增加而上升，如表 4-1，因此本研究探討三維波形管時以振幅波長比為主要參數。

由於三維可壓縮流之模擬對記憶體要求相當高且需耗費大量計算效能，為了在模擬之效率和結果之準確性兩者間平衡，本研究以瑞利數 10^5 、振幅波長比 0.1 為例，測試了 $x \times y \times z$ 方向分別為 114×30×30、150×40×40、190×50×50 三種網格作紐塞數比較，作沿高溫壁面上中央位置之紐塞數圖。如圖 4-5 所示，使用網格數 114×30×30 時，可見其紐塞數在波峰處低於其他兩種網格所得結果；而使用網格較大的 150×40×40 及 190×50×50 時所得結果十分貼近，故本研究採用 150×40×40 為總網格數，以期在理想之計算時間內得到精確之結果。

本研究第一部分改變溫度以調整瑞利數，計算 2.5×10^4 、 5.5×10^4 、 1.0×10^5 三種瑞利數以及振幅波長比 $\alpha=0$ 、 $\alpha=0.1$ 、 $\alpha=0.2$ 共九種案例，藉此探討熱傳能力和瑞利數及振幅波長比之關係。首先介紹瑞利數 1.0×10^5 時的三個案例，當振幅波長比為零時，物理模式為常見之直管，從中央XY截面之流線圖 4-6(a)，可觀察到壁面高溫引起向上之浮力，造成流體由下方進入上方流出的現象，而靠近下方入口之壁面處，由於壁面不可滑移條件，流線最為稀疏，但流體隨著壁面持續加溫，浮力效應增強，因此在管道後方出現靠近壁面之流線。圖 4-6(b) 為等溫線圖，熱邊界層由加熱壁面開始逐漸發展，由於流場以x方向為主，較少有橫向之速度，因此熱量傳遞在x方向以熱對流為主，而熱邊界層的發展主要依賴熱擴散。流場中最高的速度發生在加熱壁面剛開始處，如圖 4-6(c)，此位置應為不可滑移條件造成流體往遠離壁面移動以及高溫使得壁面流體加速兩者間力平衡之處。圖 4-7 為管道第三週期波峰及波谷處yz截面之無因次x方向速度場，由於對直管而言並無波峰波谷之分，因此圖 4-7(a)(b) 之差異僅在x方向之距離，比較圖 4-7(a)(b) 可得知浮力效應使流體向壁面移動，推測如果加熱長度繼續增加或是管寬增加則可能發展為壁面附近速度較高而管道中央速度較低之流場。第二個案例為振幅波長比 0.1，由圖 4-8(a) 可看到流體本身動量的關係，經過波峰還未到波谷之間形成一流體停滯之區域，而在此位置到下一周期之波峰間，受到形狀漸縮的影響，流線最為貼近壁面。等溫圖圖 4-8(b) 可觀察到此流動停滯之區域熱量無法散逸，因此等溫線較為稀疏，而在波峰處則等溫線最為密集。圖 4-8(c) 可得知流場進入波峰處時類似漸縮管，邊界層變小整體速度較為均勻，而在離開波峰後，截面積增加造成流體向兩側擴散，直到下個波峰前此一擴散形成之流速撞擊壁面，沿著壁面離開。圖 4-9(a)(b) 分別為波峰及波谷處YZ截面之無因次速度場，和直管比較波峰處之流場較為均勻，而在波谷處流速擴散的幅度尚未影響至壁面，因此壁面處速度較低，且在角落的地方由於中央主流流速無法擴散至此，出現些微負方向之速度。圖 4-10 為振幅波長比 0.2 之結果，由圖 4-10(a)

可看到明顯渦流的現象，由於波峰波谷之截面積差距更大，主流流速橫向擴散的情形也更為明顯，流體撞擊壁面後大部分沿波峰向上方移動，而少部分沿壁面向下方流動產生渦流，此渦流於壁面中央處形成，逐漸向兩側移動，最後在角落處消散向上方流動。而溫度場的部分如圖 4-10(b)，由於渦流的關係，溫度較低的流體由波谷上方進入，造成波谷上方之溫度梯度增加，而波谷整體而言，流速偏低，熱量傳遞以熱擴散為主，因此等溫線較振幅波長比 0.1 之案例來得稀疏。觀察圖 4-10(c) x 方向速度場，波谷鄰近壁面處雖然有負速度，但其值相當小，對熱對流助益不大，而影響此處速度之原因有幾點，一為增加流體撞擊上方壁面時流進波谷之比例，可以藉由調整波谷上壁面之角度等做法以達成，另外渦流在壁面處產生向下之流場，但壁面受熱時流體具有向上之浮力也是造成速度較低的原因。而在圖 4-11(a)(b)，由於面積變化大，波峰處速度場沒有振幅波長比 0.1 時來得均勻，在角落速度稍微偏低，而波谷截面壁面中央可以觀察到明顯負流速，但此渦流最後由角落散逸，因此在角落速度為正。

圖 4-12 為瑞利數 1.0×10^5 三個案例沿 x 方向的局部紐塞數比較圖，為了能清楚分辨形狀造成的影響，定義 x^* ：

$$x^* = \frac{x - \text{直管長度}}{\lambda} \quad (4-13)$$

當 $x^* = 0.25, 1.25, 2.25$ 時為波峰處，而 $x^* = 0.75, 1.75, 2.75$ 則為波谷。圖 4-12(a) 為壁面中央沿 x 方向所做之局部紐塞圖，在振幅波長比為零之案例可看到下方流進之流體溫度低，因此加熱壁面前段紐塞數較高，而隨著流體持續受熱，熱邊界層發展，局部紐塞數沿 x 方向逐漸下降。而在振幅波長比 0.1 之案例，整體趨勢除同樣隨 x 方向下降外，還具有明顯之波形振幅現象，此振幅之峰值約在

$x^* = 1.2, 2.2$ 稍微偏離物理模式之波峰值，此處局部紐塞數較高之原因是因為流體流過波峰時截面積縮小，流速增加邊界層縮小，因此壁面熱對流較好，而從波谷逐漸向橫向擴散之流速在 $x^* = 1.2, 2.2$ 正向撞擊壁面，使熱邊界層縮小。紐塞數之

最低值也發生在波谷稍微前方處，整體而言由於浮力效應，紐塞數於朝下的壁面較朝上之壁面好。對於振幅波長比 0.2 的案例可看到局部紐塞數震盪的幅度更為明顯，而在紐塞數最低值的地方斜率較為平緩，可能和前面所提到的波谷渦流現象有關。圖 4-12(b) 為管道角落沿 X 方向之局部紐塞數圖，管道角落受到兩邊壁面不可滑移條件影響，流速較慢，從振幅波長比 0 的案例就可觀察到紐塞數普遍較低，且流體同時受到兩邊高溫壁面加熱，局部紐塞數下降的幅度較圖 4-12(a) 快。在振幅波長比 0.1 的案例，截面積變化干擾邊界層的效果明顯，因此紐塞數普遍較直管好，但熱傳效率依然不高。振幅波長比 0.2 的局部紐塞數和振幅波長比 0.1 時類似，但在 $x^*=0.5, 1.5, 2.5$ 的地方可見到紐塞數有局部峰值的情形，推測是中央壁面之渦流向兩側移動時，提升了此處之對流能力，因此紐塞數上升。沿 Y 方向的局部紐塞數比較圖如圖 4-13，圖 4-13(a) 為波峰處 ($x^*=2.25$)，紐塞數的分布和截面積負相關，而圖 4-13(b) 為波谷處 ($x^*=2.75$) 之局部紐塞數圖，可以看到直管的紐塞數遠高於波形管道，波谷所造成流速停滯之區域大幅減弱此區之熱傳能力。

圖 4-14 為瑞利數 5.5×10^4 三種振幅波長比的流線圖，和瑞利數 10^5 之結果相比，波谷處流線較為稀疏，以振幅波長比 0.2 來看，瑞利數 10^5 的無因次速度 U 最小值為 -0.08，而瑞利數 5.5×10^4 的 U 最小值則下降到 -0.05，如圖 4-15。而圖 4-16 為瑞利數 5.5×10^4 時的等溫線圖，和瑞利數 10^5 相比，三種振幅波長比等溫線皆較為稀緩，熱邊界層增加，降低熱傳能力。接下來圖 4-17 至圖 4-19 為 $Ra=2.5 \times 10^4$ 的結果，在圖 4-17 的流線圖可看到渦流的現象進一步衰減，振幅波長比 0.2 的案例無因次速度 U 最小值降為 -0.03，圖 4-19 的等溫線圖也可以看到熱邊界層進一步增厚。圖 4-20~圖 4-22 分別為三種振幅波長比的中央壁面局部紐塞數比較圖，從圖 4-20 可看到浮力所引起之流速隨瑞利數正相關，而流體帶走熱的能力和流速有關，造成瑞利數越高時紐塞數也相對增加，此外除前端和後端外紐塞數隨瑞利數改變之幅度相似。圖 4-21 為振幅波長比 0.1 之結果，同樣

局部紐塞數和瑞利數正相關，但主要之差異在外型之波峰處，外型之波谷處由於本來流速就較小，熱量傳遞主要依賴熱擴散，因此影響不大。圖 4-22 為振幅波長比 0.2 之結果，現象和振幅波長比 0.1 時類似，主要的差異皆發生在外型之波峰處。圖 4-23 為前述三種瑞利數配合三種振幅波長比所做之平均紐塞數對瑞利數之趨勢圖，可觀察到振幅波長比越大時平均紐塞數越低，且振幅波長比越小時斜率越高，因此趨勢上來說紐塞數和振幅波長比負相關。而在總熱傳量的部分如圖 4-24，振幅波長比 0.1 之散熱面積較直管多 8.7%，振幅波長比 0.2 較直管多 30.2%，但結果如圖，總熱傳量振幅波長比 0 之直管還是較佳，這是由於波形管散熱能力較佳之波峰處，因為向內縮的關係面積因此較小，但散熱能力較差之波谷處，四壁面向外擴張，散熱面積卻是最大的，如表 4-2，因此不像 2D 波形壁面波峰波谷處散熱面積相當，面積的增加提升了總熱傳量。

本論文第二部分為改變特徵長度，但維持無因次參數 $\frac{\lambda}{d}=0.75$ ， $\frac{l}{d}=3.75$ 不變，也就是同樣的外型等比例放大縮小，探討尺寸對流場及溫度場之影響。圖 4-25 為振幅波長比 0.1 三種瑞利數之流線圖，從結果可看到特徵長度尺寸越大時，渦流越明顯，在瑞利數 1.0×10^4 流線幾乎無渦流的現象，而圖 4-26 為其等溫線圖，瑞利數越小時熱邊界層所影響的區域比例越大。圖 4-27 及圖 4-28 為振幅波長比 0.2 之結果，可看到三種瑞利數皆有明顯的渦流現象。最後比較平均紐塞數對瑞利數之趨勢圖，同樣的在此計算瑞利數區間，振幅波長比高將會降低平均紐塞數。

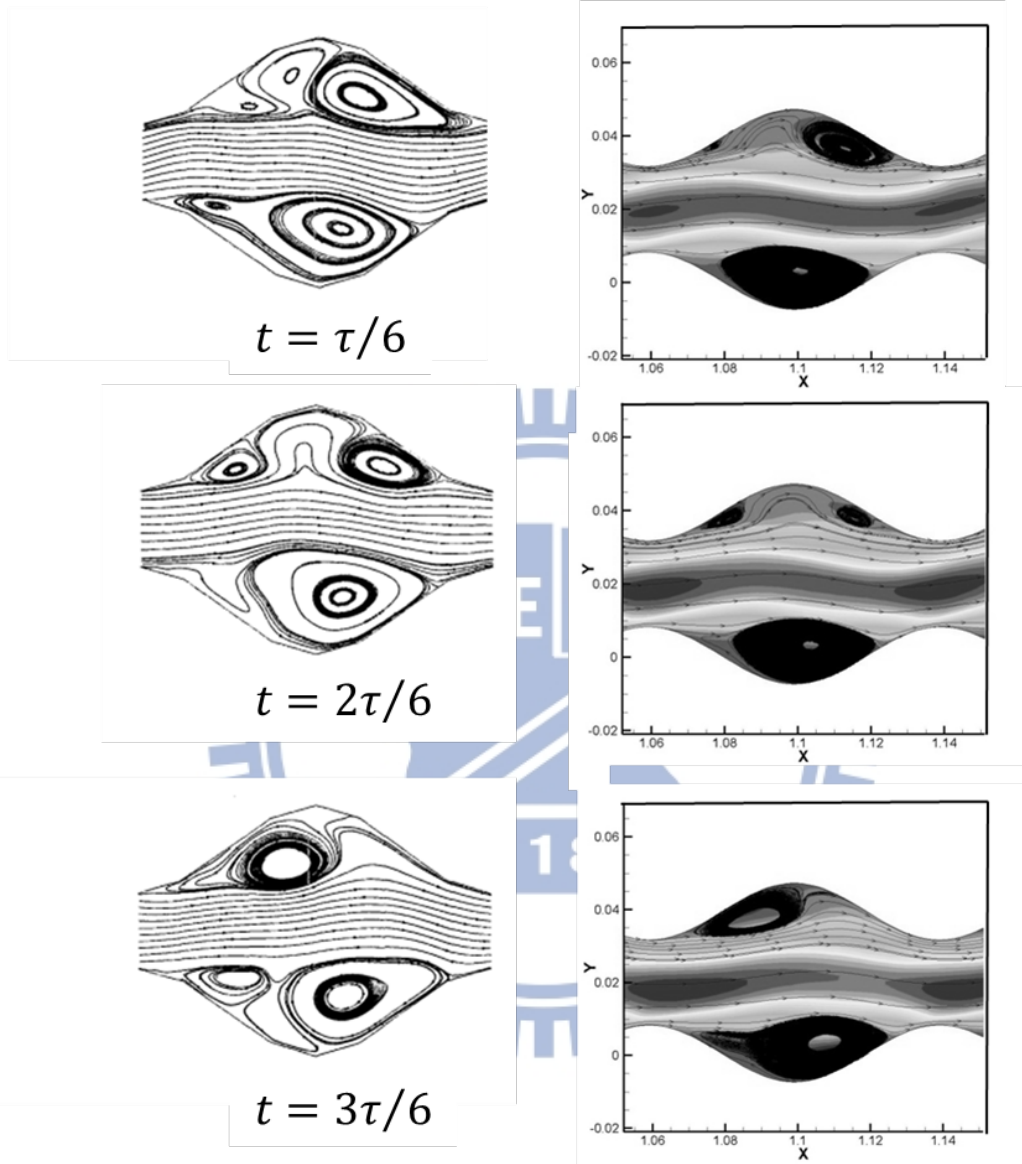


圖 4-1(a) 和 Guzman[26] 結果之比對圖

左:Guzman 右:本研究之結果

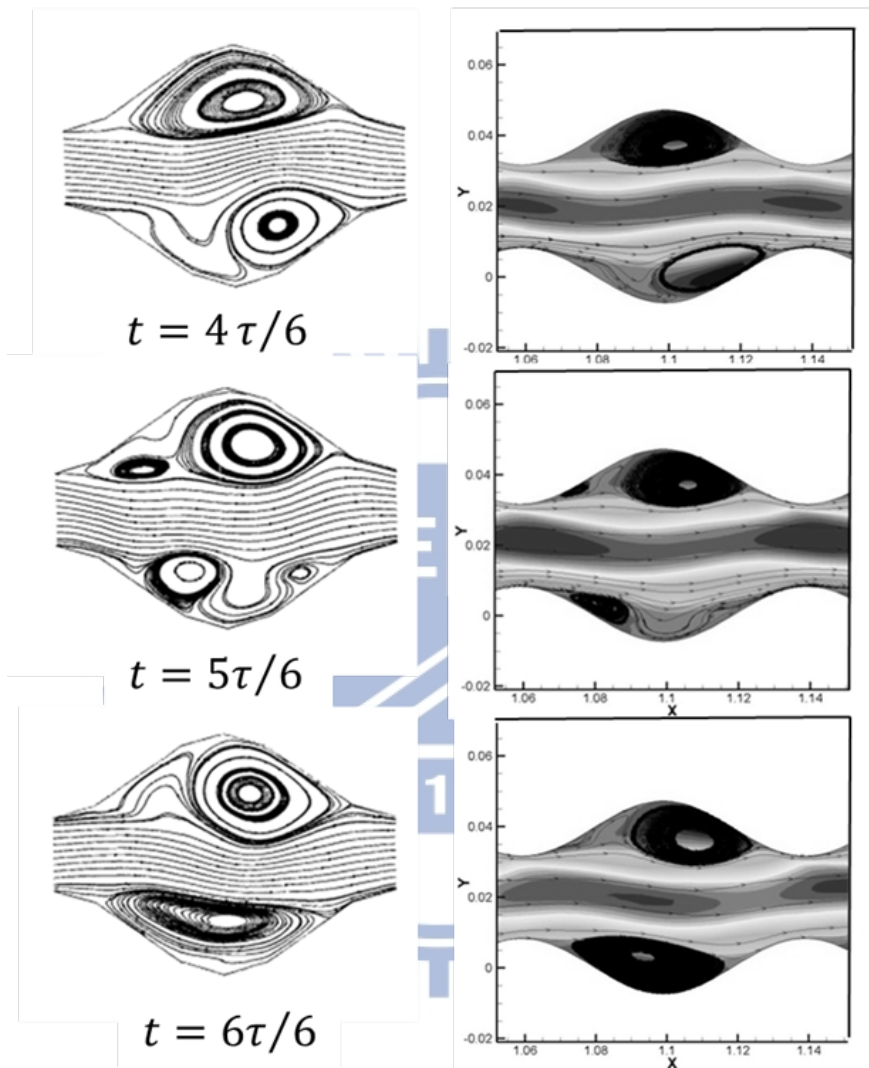


圖 4-1(b) 和 Guzman[26] 結果之比對圖

左:Guzman 右:本研究之結果

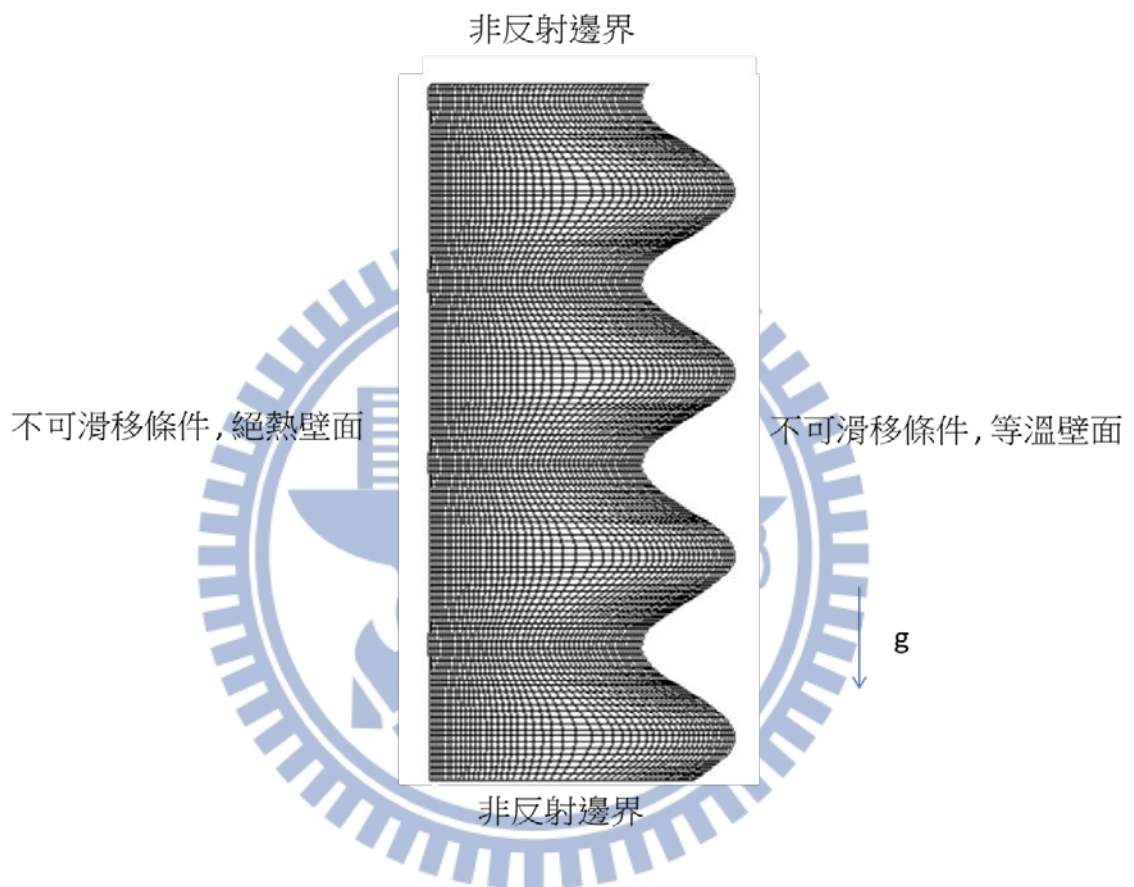


圖 4-2 和 Bhavnani[2]實驗對照所設定之物理模式

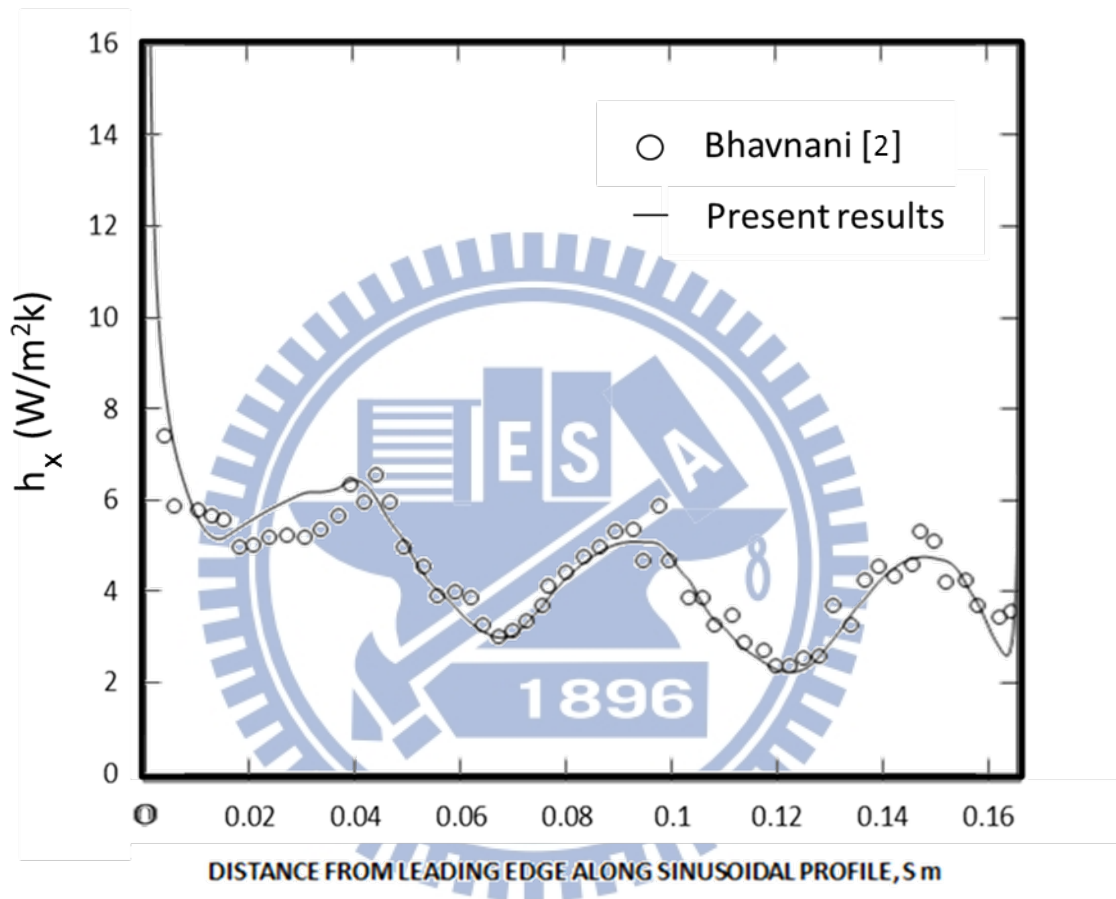


圖 4-3 和 Bhavnani[2] 振幅波長比 0.1 之局部熱傳係數比對圖

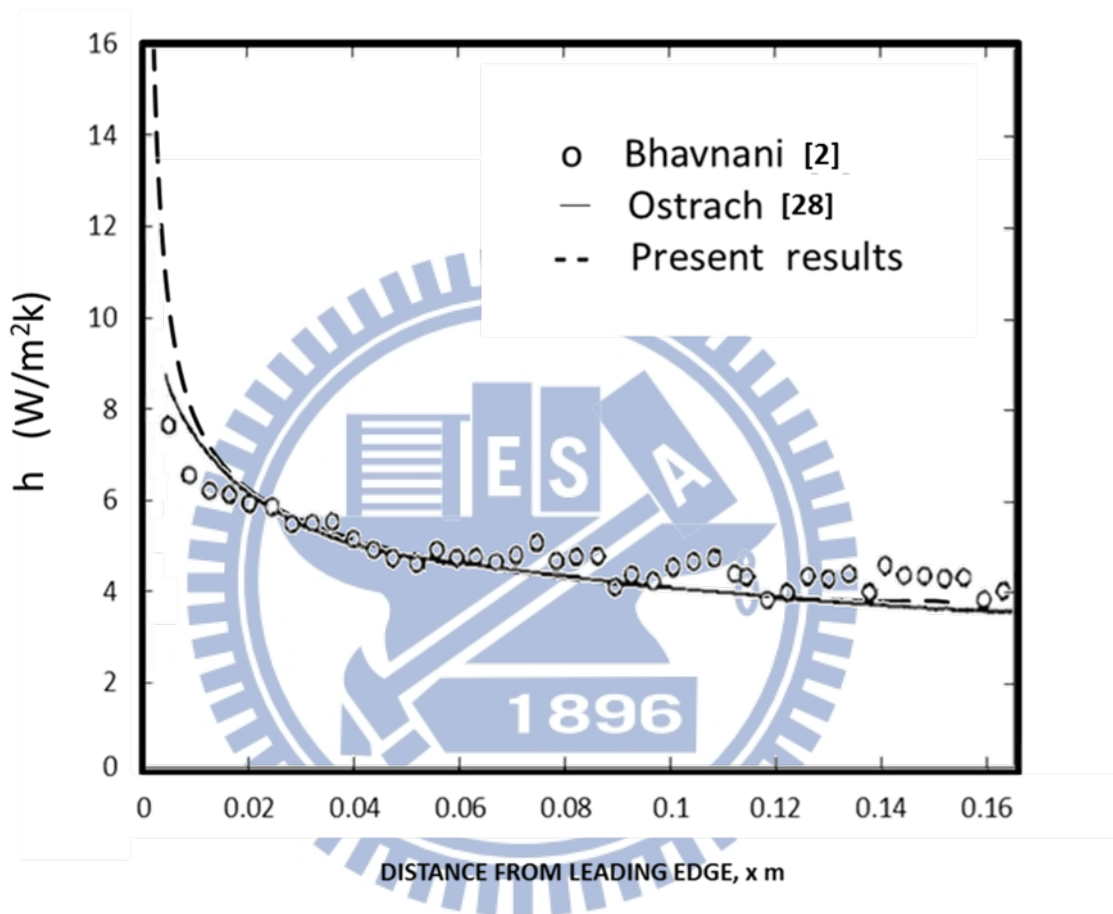


圖 4-4 和 Bhavnani[2]及 Ostrach[28]振幅波長比 0
之局部熱傳係數比對圖

表 4-1 二維波形板改變振幅波長比之結果

振幅波長比	0	0.1	0.3
平均熱傳係數 \bar{h} (W/(m ² K))	5.155	4.826	3.535
散熱面積(m ²)	0.152	0.166	0.245
總熱傳量 q (Watt)	23.57	24.06	25.97

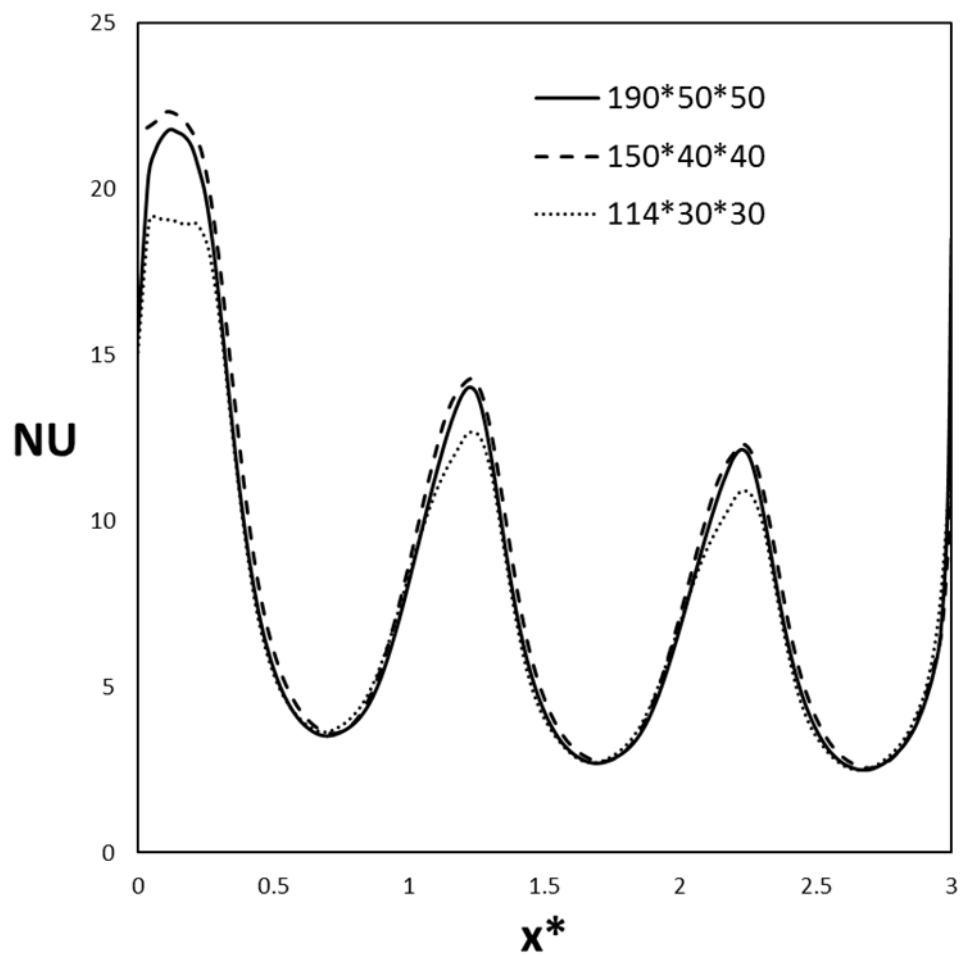


圖 4-5 三維波形管網格測試圖

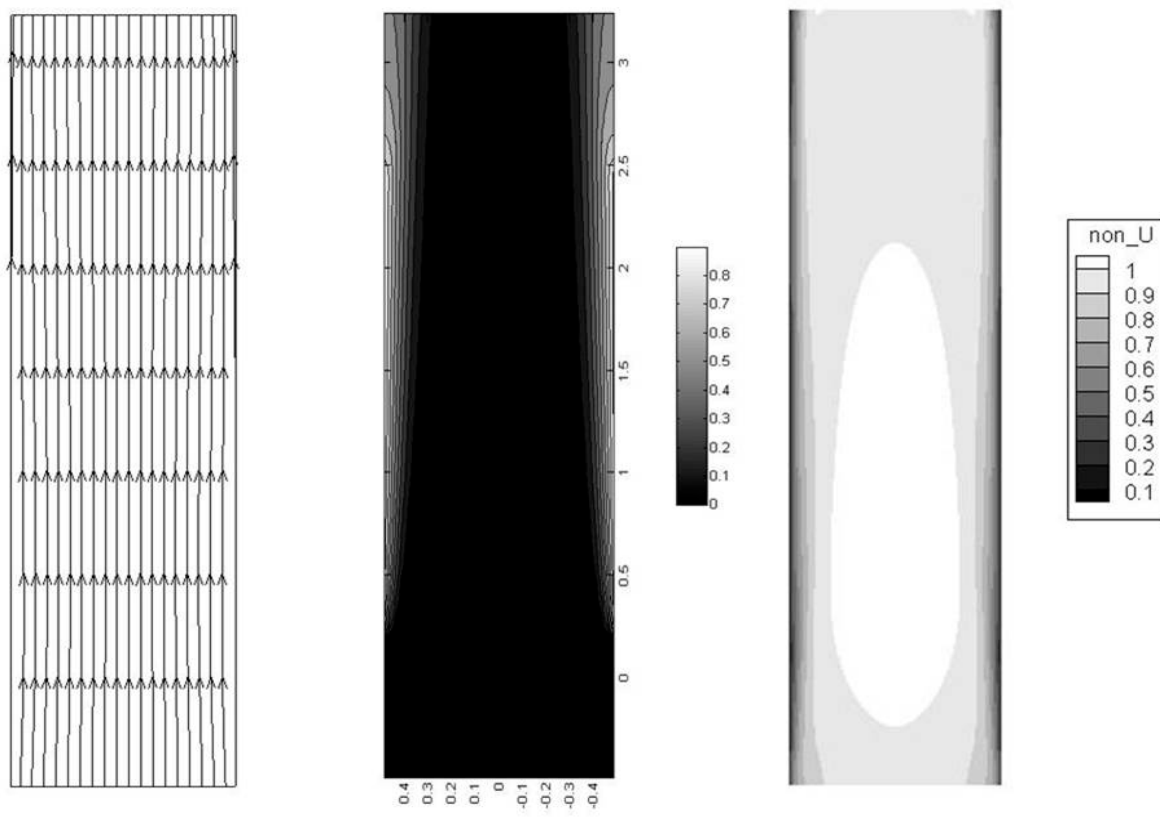


圖 4-6 $Ra=10^5$, $\alpha=0$ 管道中央XY截面

(a)流線圖 (b)溫度場 (c)x 方向無因次速度場

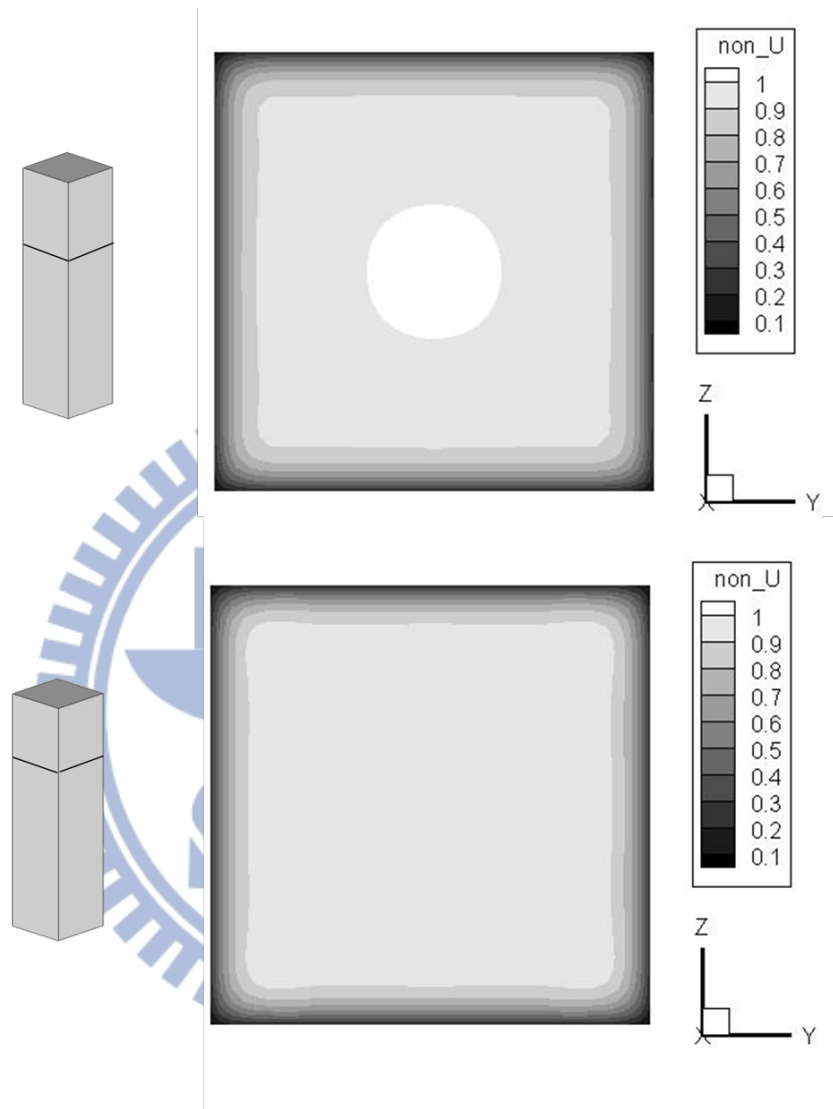


圖 4-7 $Ra=10^5$, $\alpha=0$ 管道YZ截面之速度場

(a)波峰處 (b)波谷處

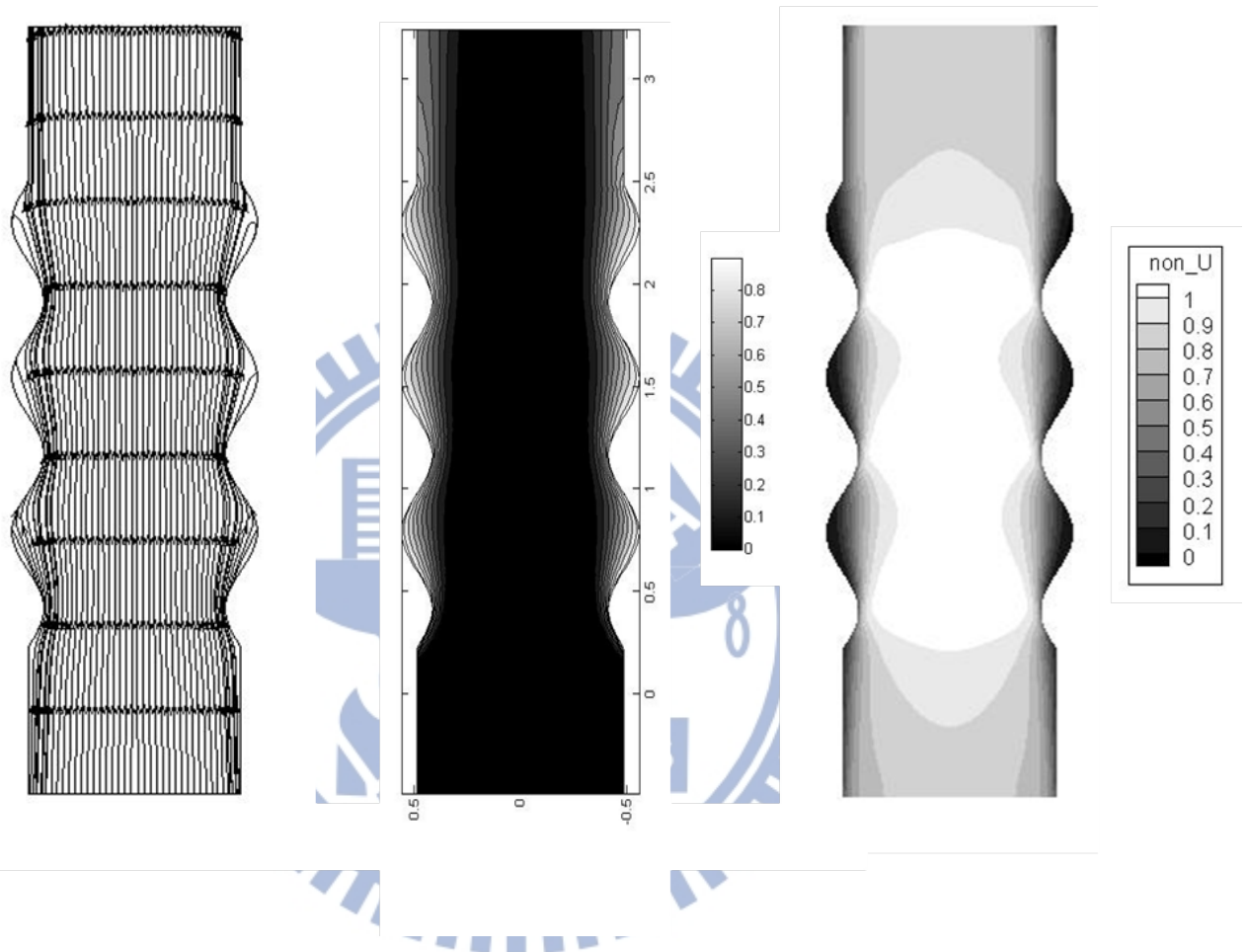


圖 4-8 $Ra=10^5$, $\alpha=0.1$ 管道中央XY截面

(a)流線圖 (b)溫度場 (c)x 方向無因次速度場

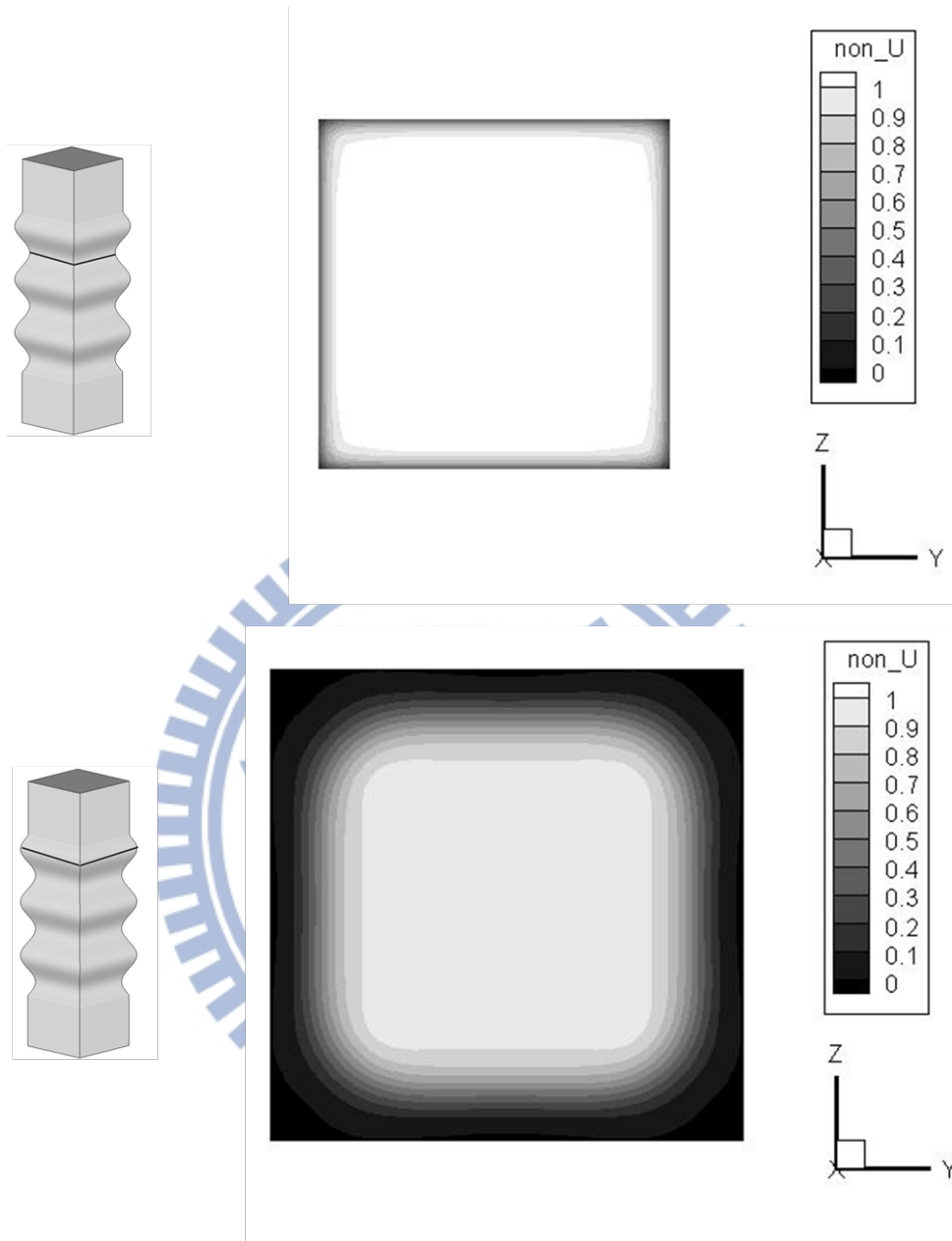


圖 4-9 $Ra=10^5$, $\alpha=0.1$ 管道YZ截面之速度場

(a)波峰處 (b)波谷處

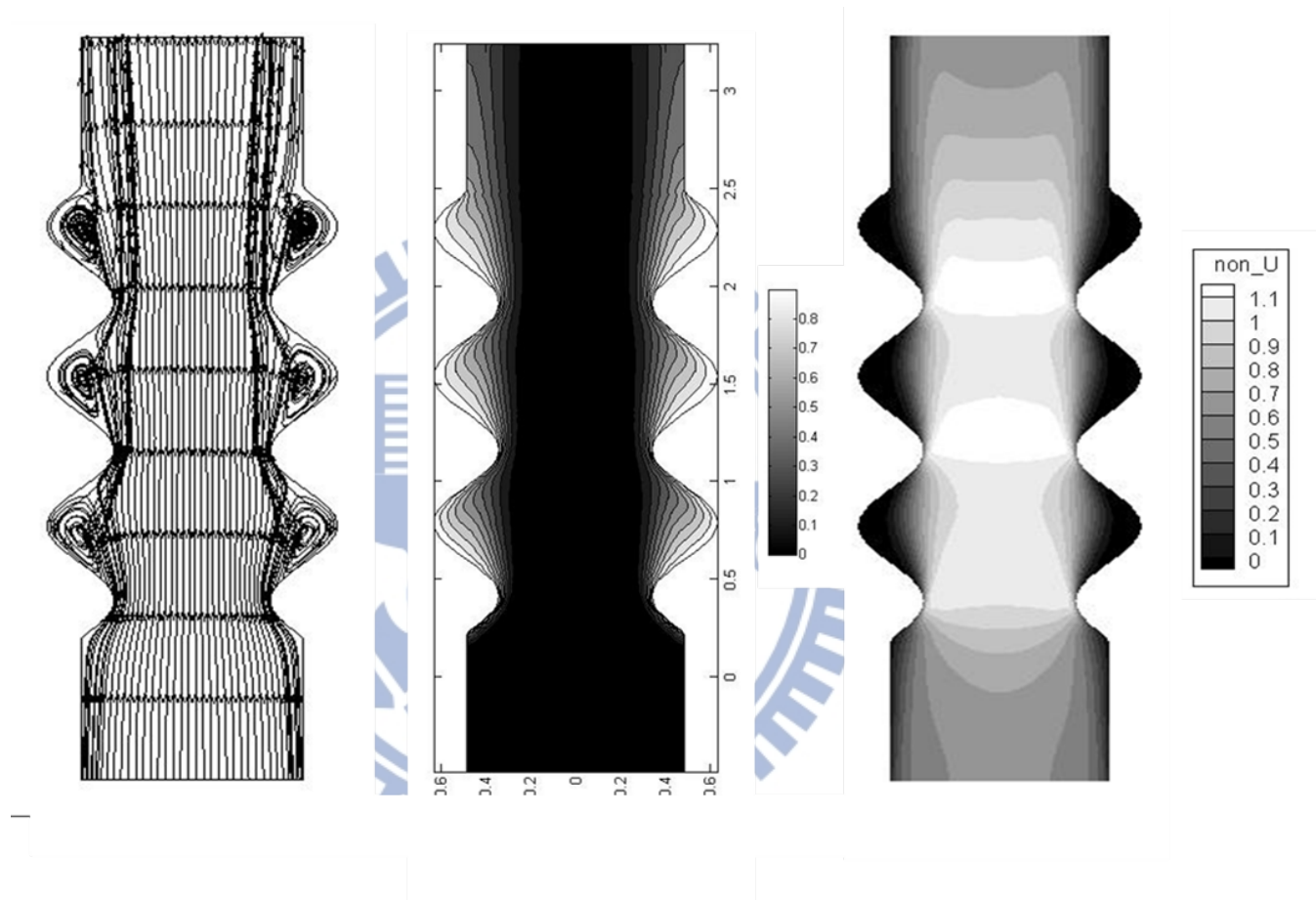


圖 4-10 $Ra=10^5$, $\alpha=0.2$ 管道中央XY截面

(a)流線圖 (b)溫度場 (c)x 方向無因次速度場

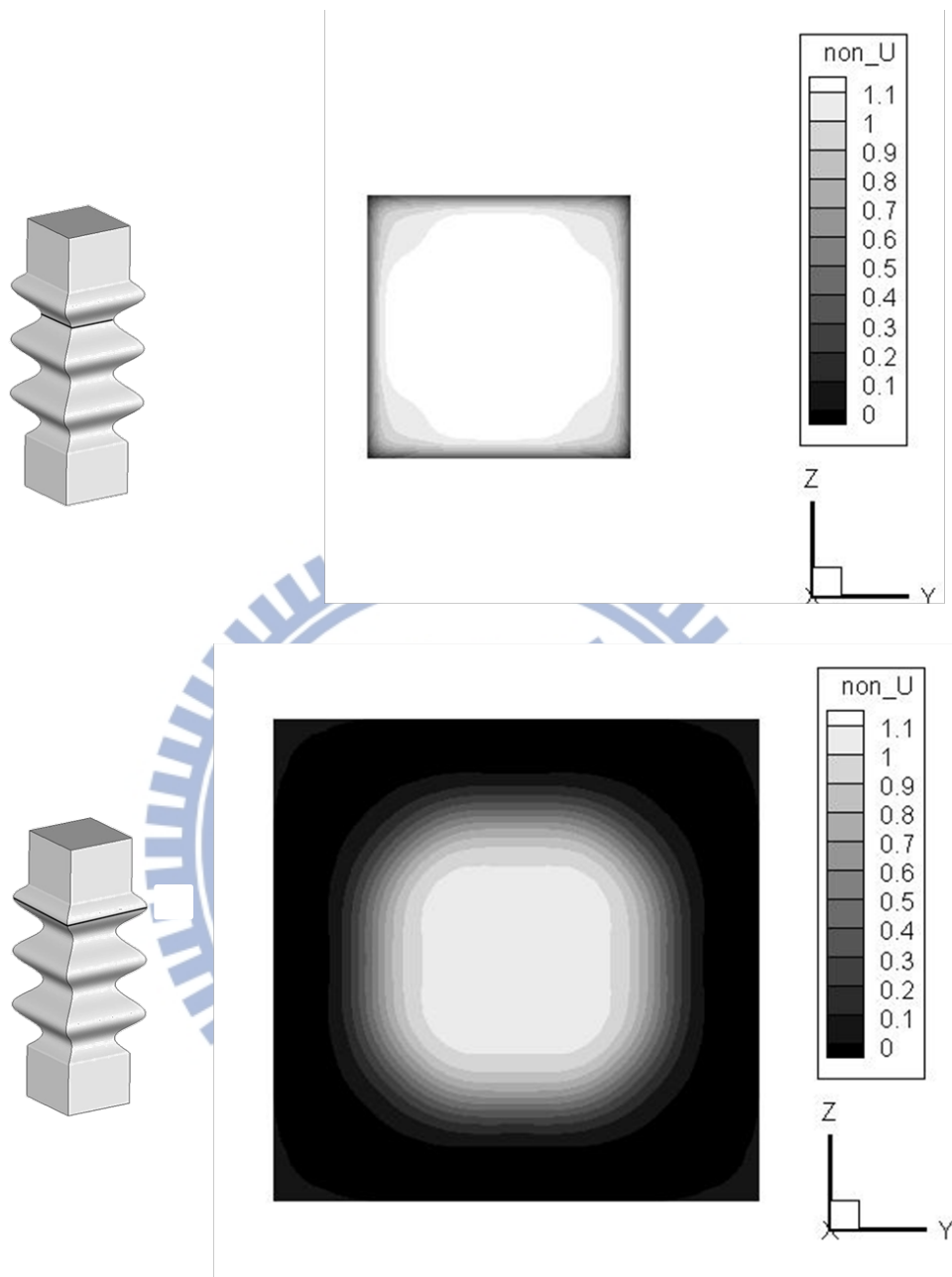


圖 4-11 $Ra=10^5$, $\alpha=0.2$ 管道YZ截面之速度場

(a)波峰處 (b)波谷處

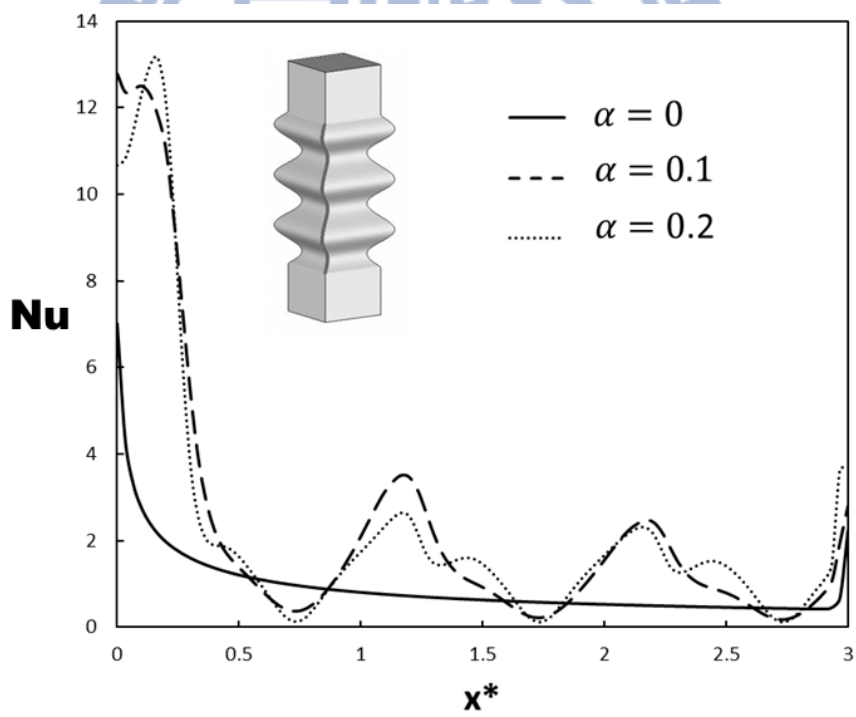
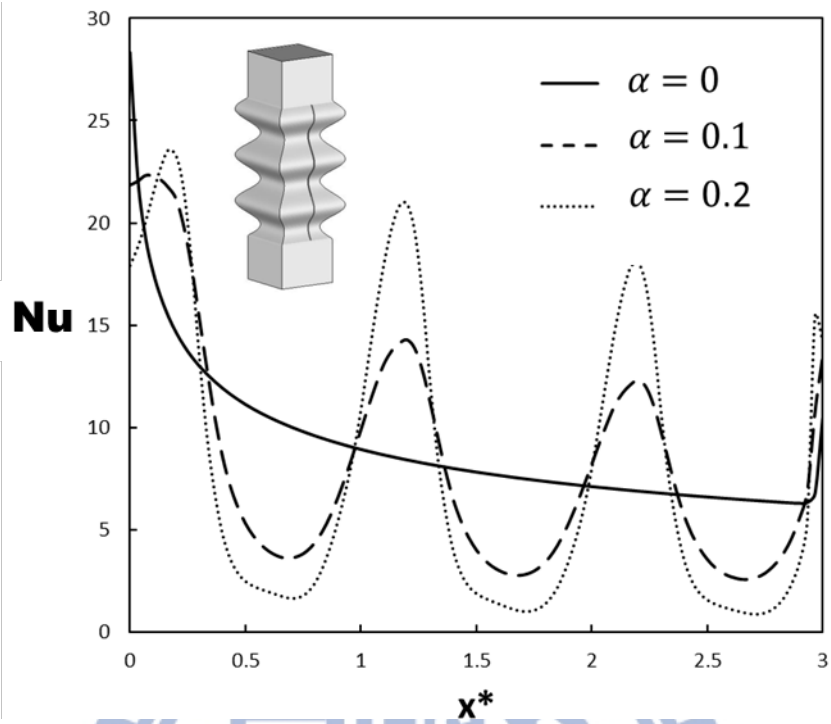


圖 4-12 $Ra=10^5$ 沿X方向紐塞數比較圖

(a)壁面中央($Y=0$) (b)管道角落處

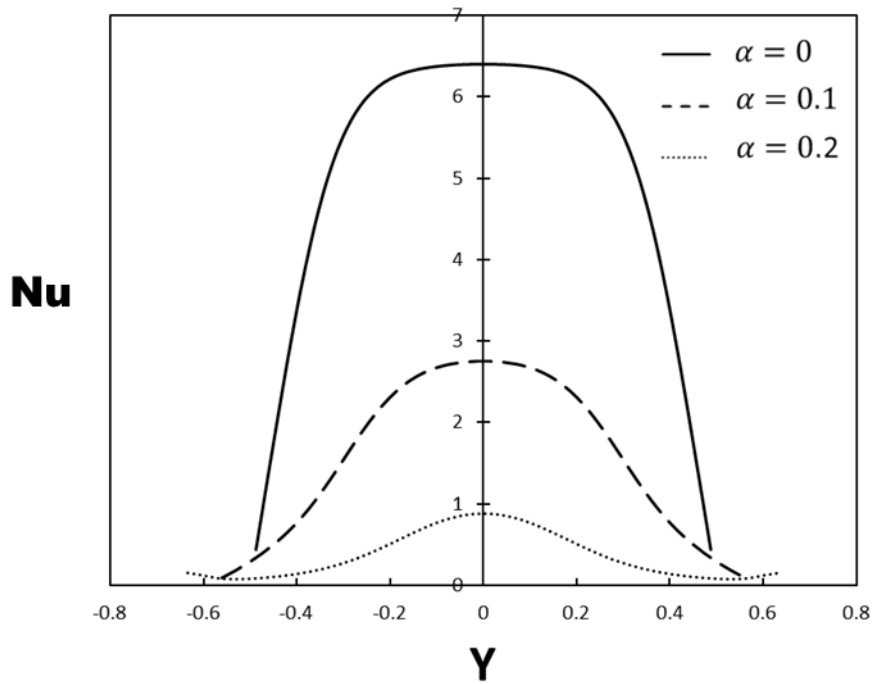
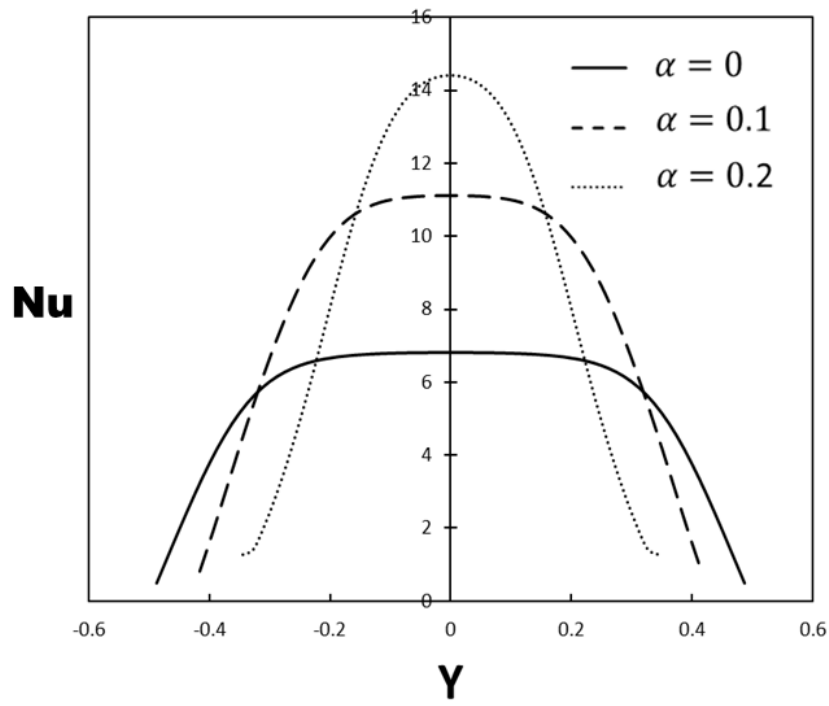


圖 4-13 $Ra=10^5$ 沿Y方向紐塞數比較圖

(a)波峰 (b)波谷

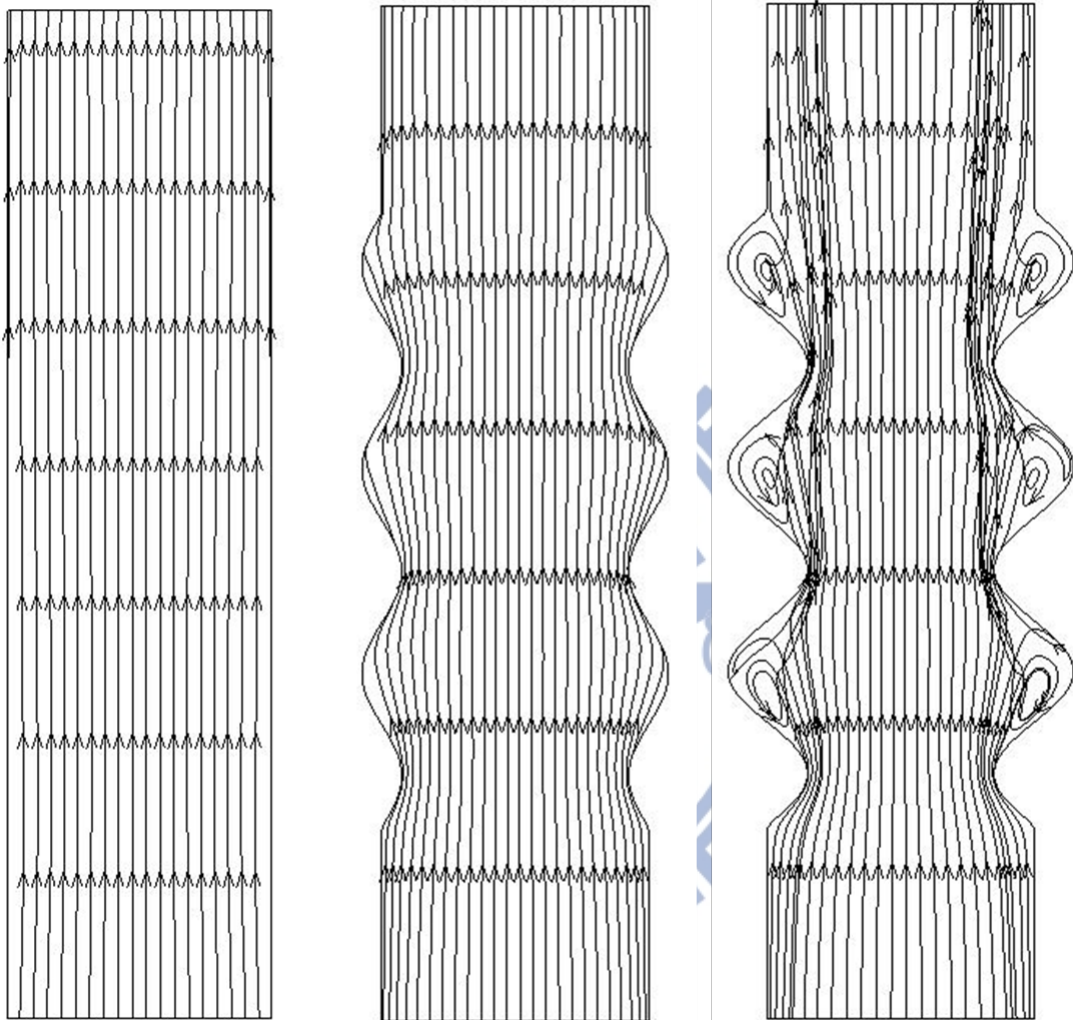


圖 4-14 $Ra=5.5*10^4$ 流線圖

(a)振幅波長比 0 (b)振幅波長比 0.1 (c)振幅波長比 0.2

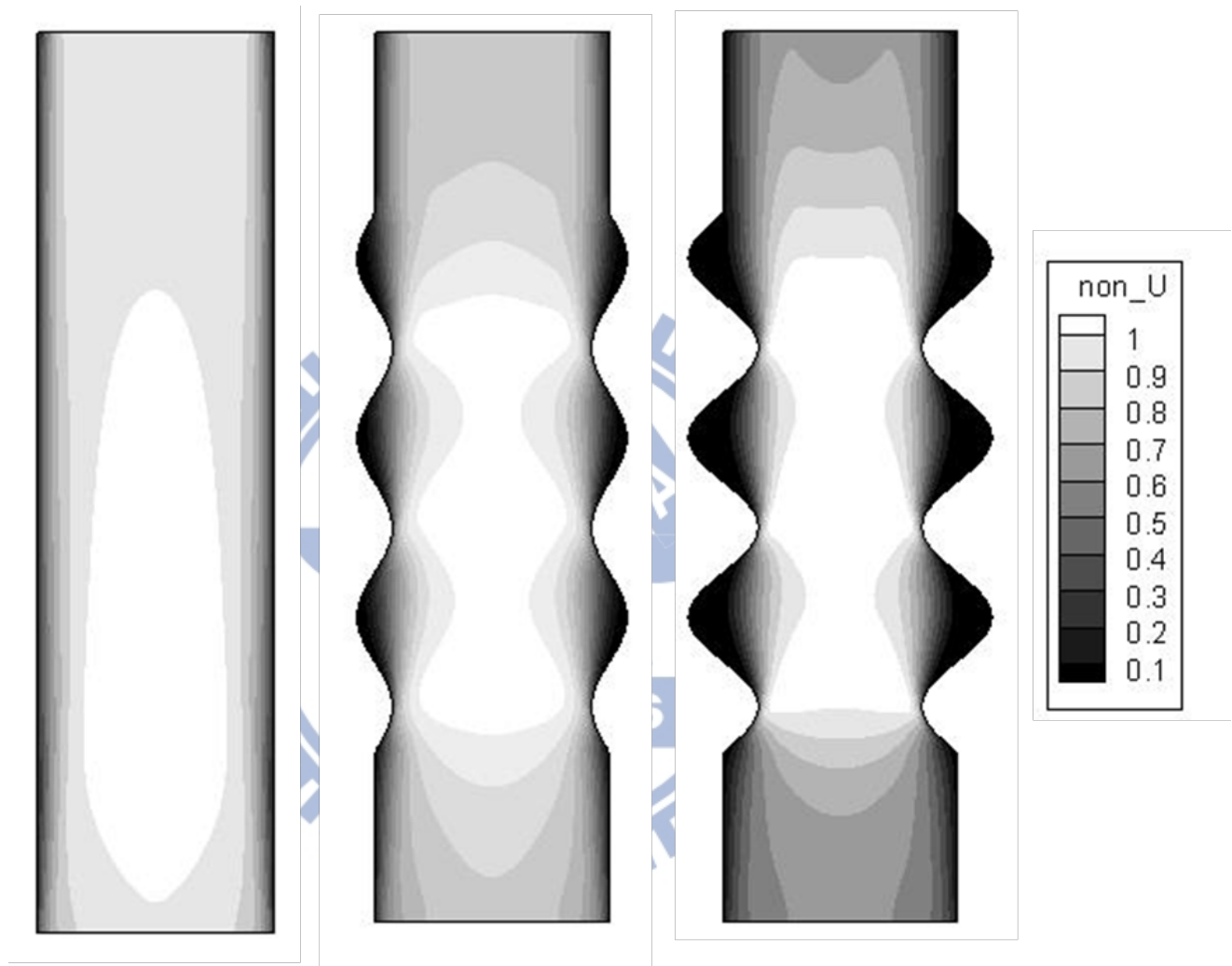


圖 4-15 $Ra=5.5 \times 10^4$ 速度場圖

(a) 振幅波長比 0 (b) 振幅波長比 0.1 (c) 振幅波長比 0.2

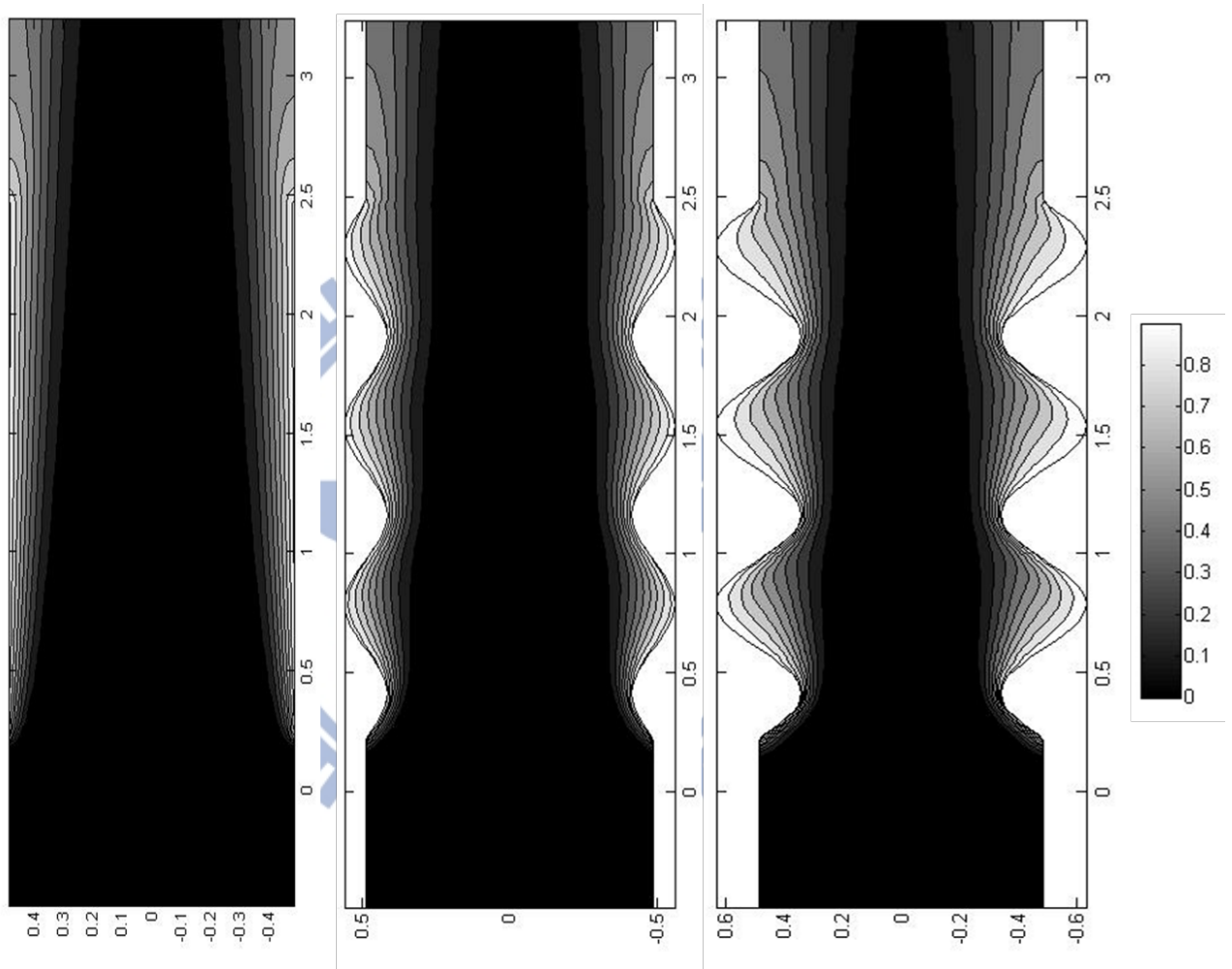


圖 4-16 $Ra=5.5 \times 10^4$ 等溫線圖

(a) 振幅波長比 0 (b) 振幅波長比 0.1 (c) 振幅波長比 0.2

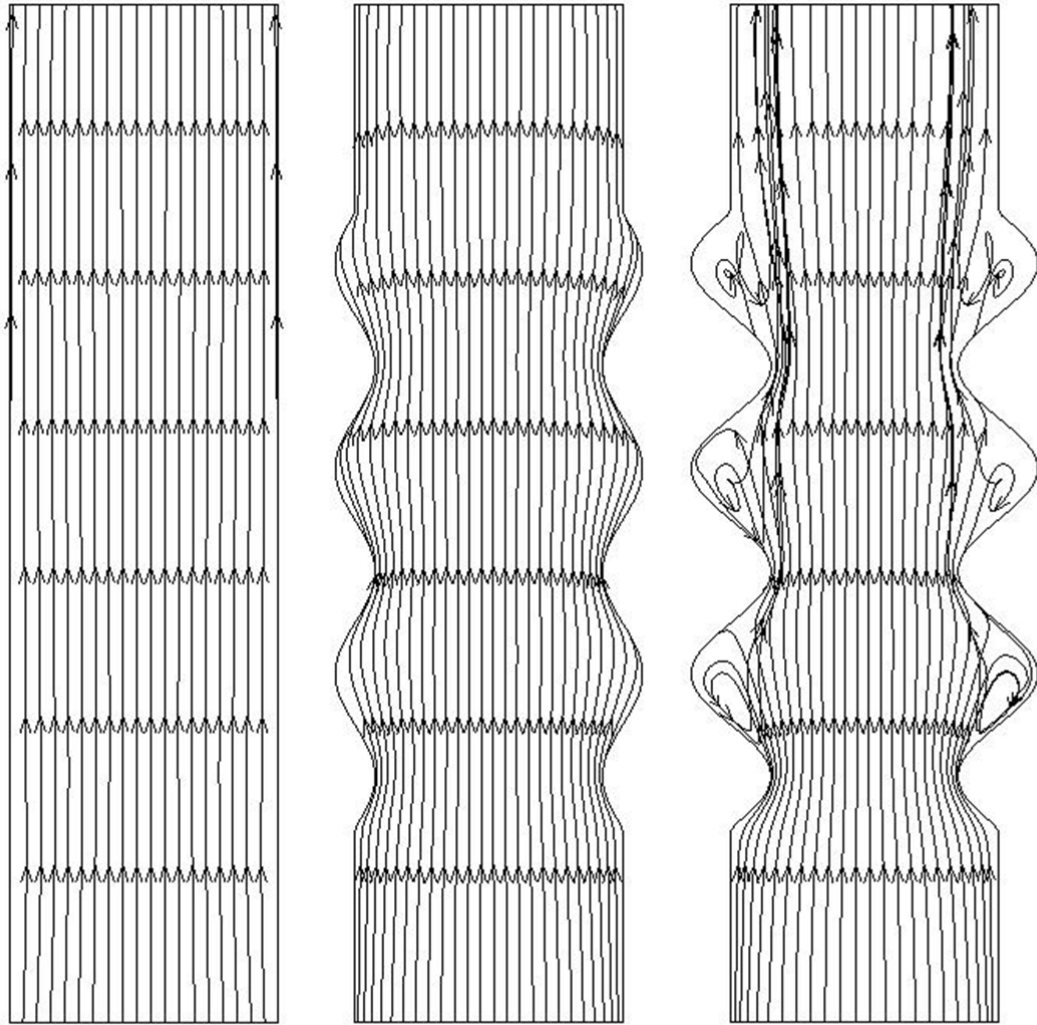


圖 4-17 $Ra=2.5 \cdot 10^4$ 流線圖

(a)振幅波長比 0 (b)振幅波長比 0.1 (c)振幅波長比 0.2

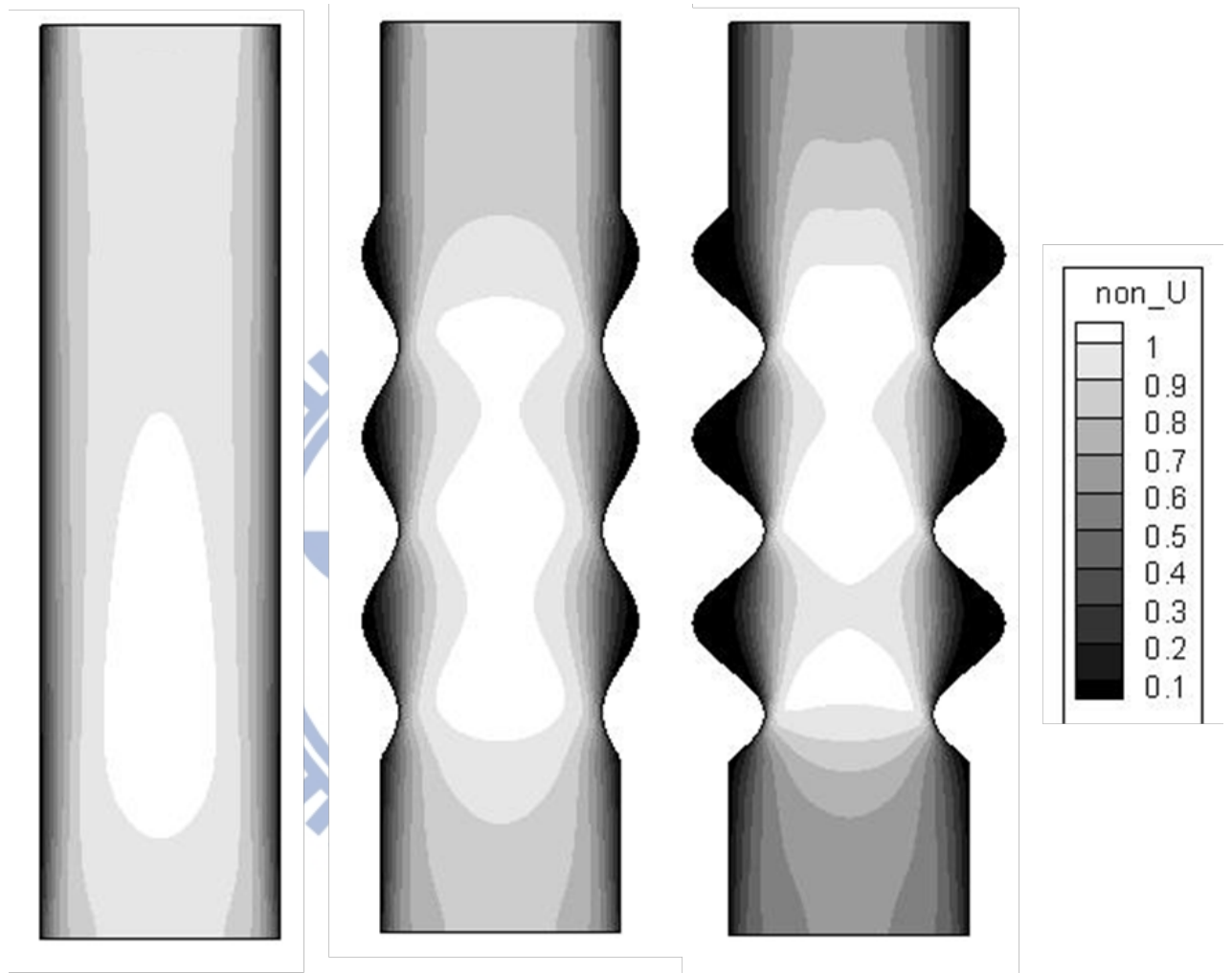


圖 4-18 $Ra=2.5 \times 10^4$ 速度場圖

(a) 振幅波長比 0 (b) 振幅波長比 0.1 (c) 振幅波長比 0.2

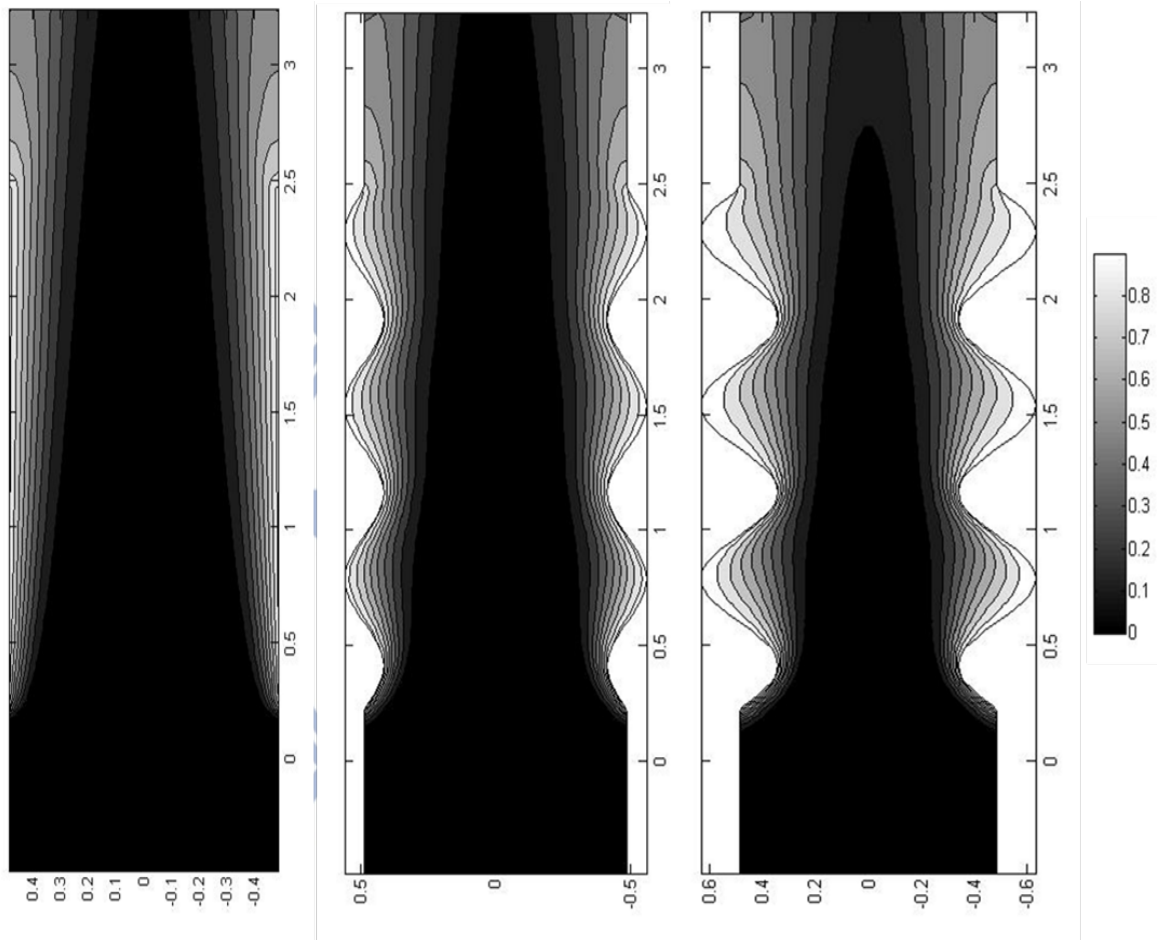


圖 4-19 $Ra=2.5 \times 10^4$ 等溫線圖

(a) 振幅波長比 0 (b) 振幅波長比 0.1 (c) 振幅波長比 0.2

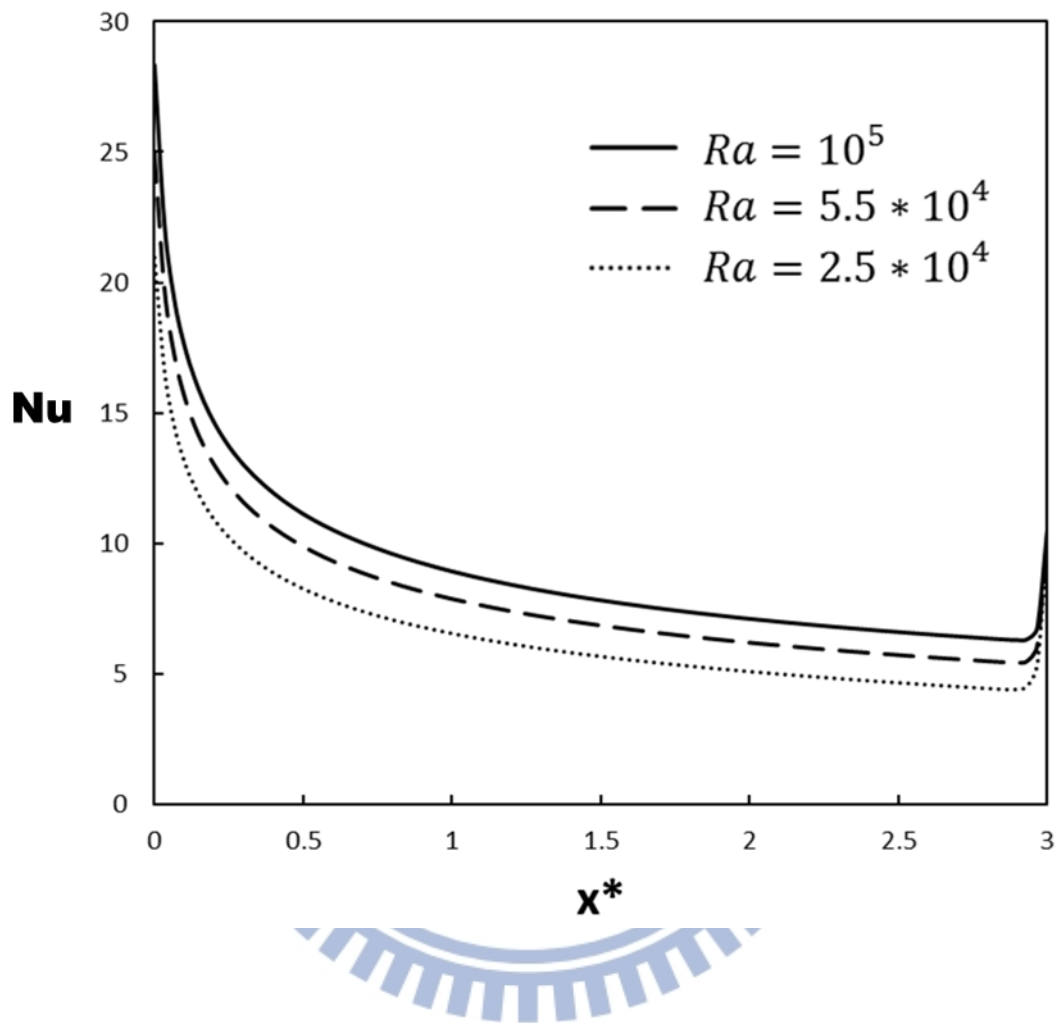


圖 4-20 振幅波長比 0 時沿 x 方向管道中央壁面局部紐塞數圖

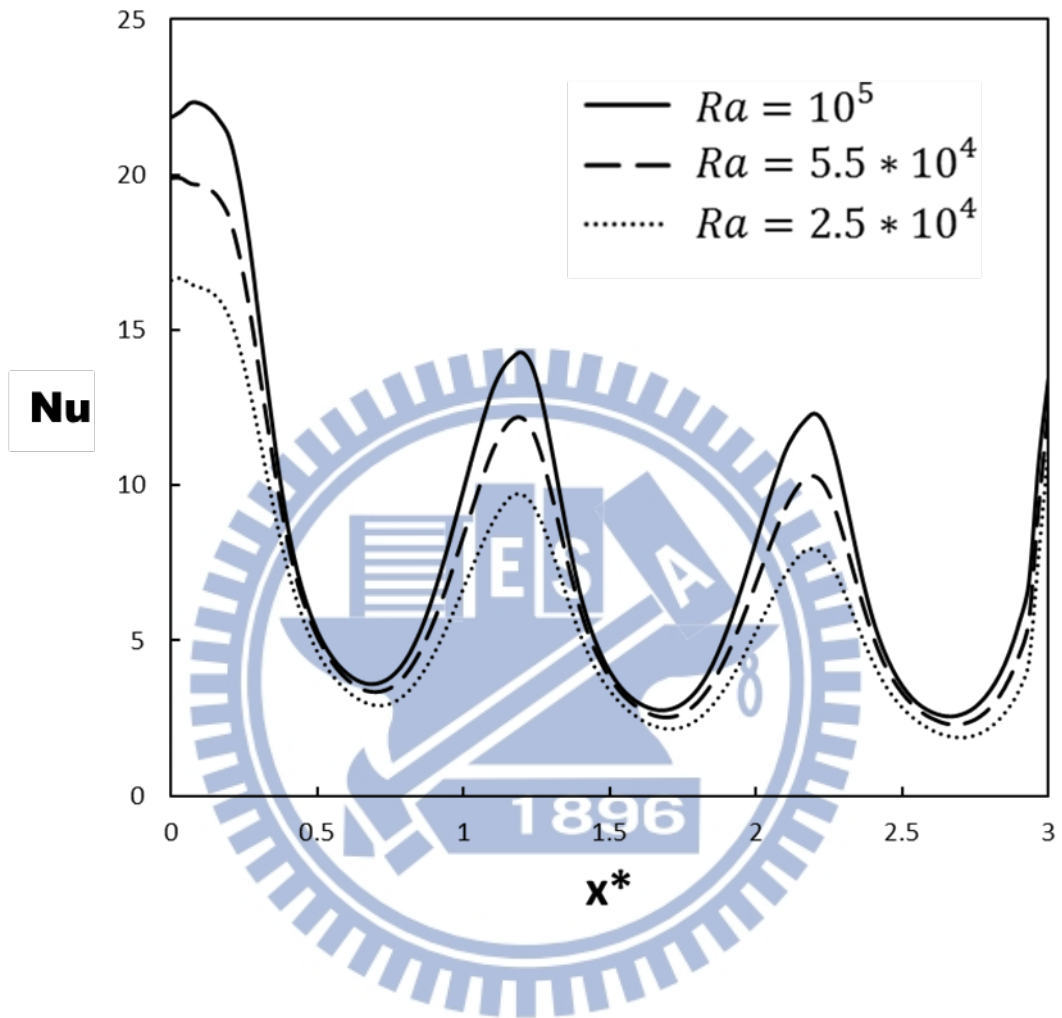


圖 4-21 振幅波長比 0.1 時沿 x 方向管道中央壁面局部紐塞數圖

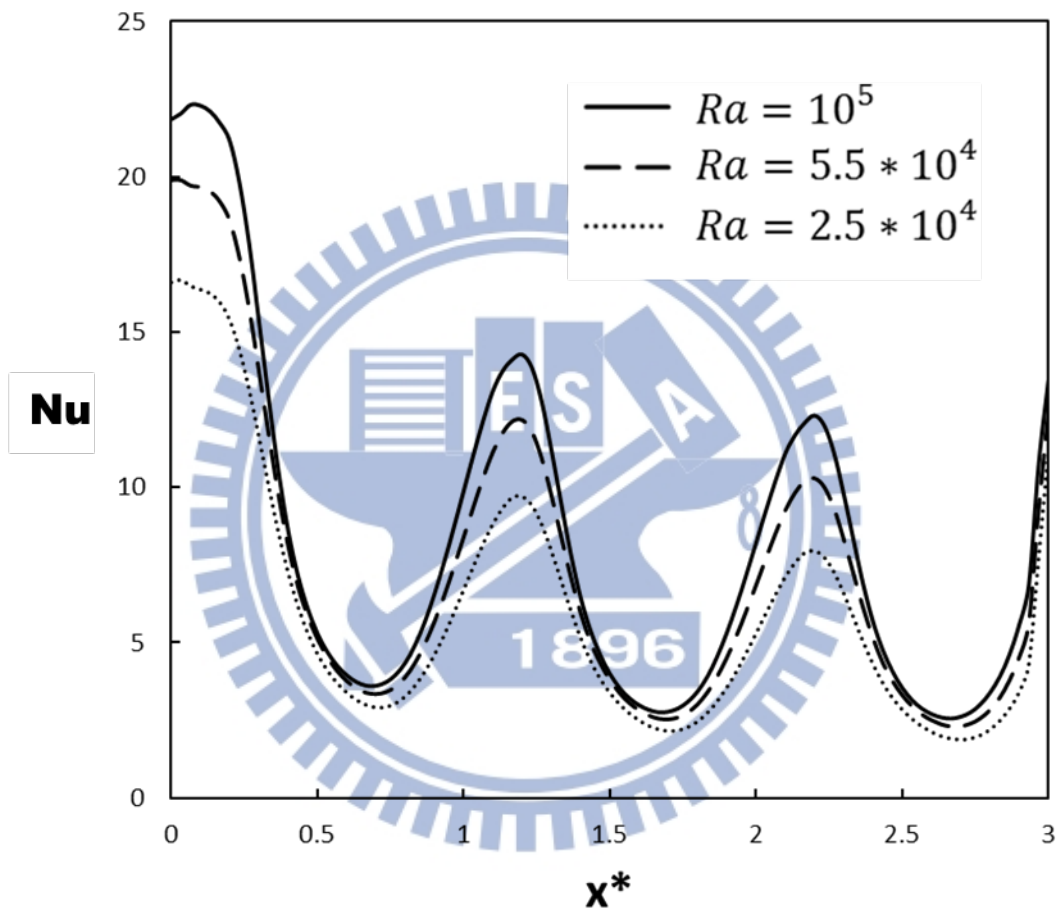


圖 4-22 振幅波長比 0.2 時沿 x 方向管道中央壁面局部紐塞數圖

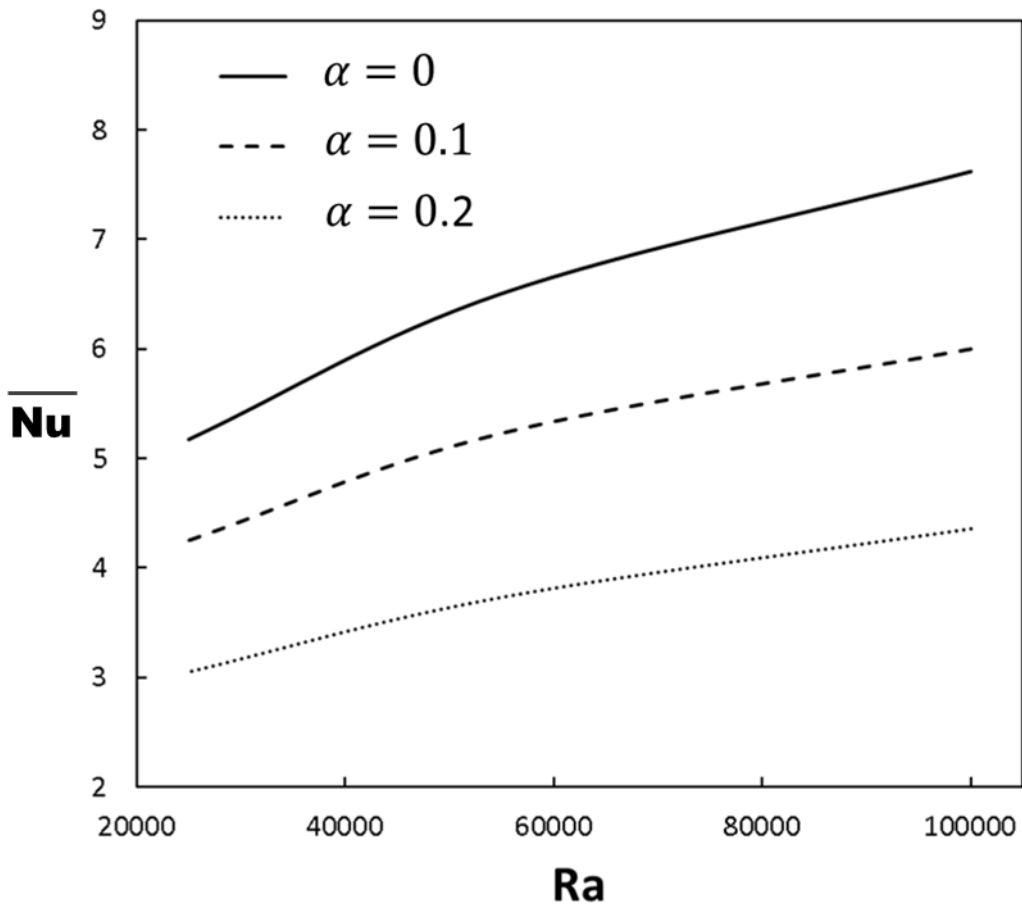


圖 4-23 平均紐塞數對瑞利數之趨勢圖

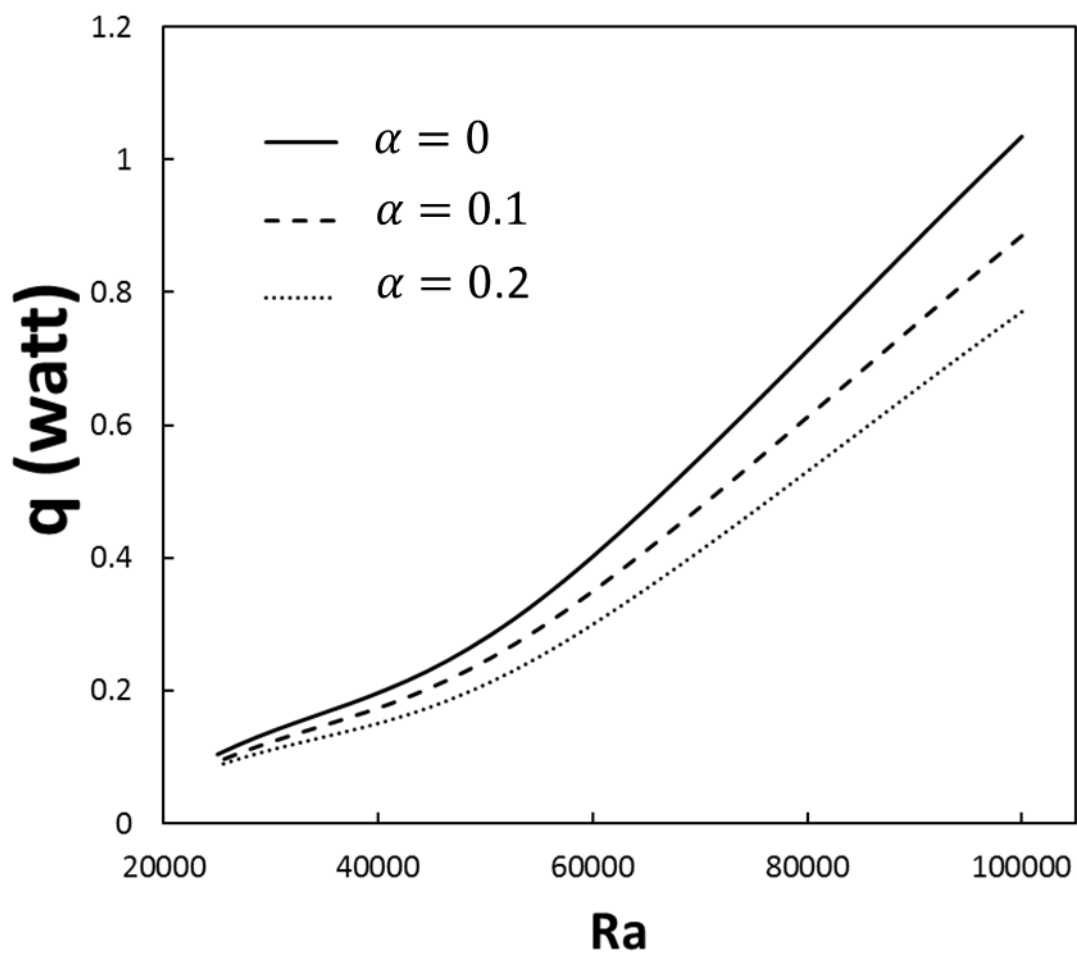


圖 4-24 總熱傳量對瑞利數之趨勢圖

表 4-2 三維波形管散熱面積之比較

α	總散熱面積 (10^{-4}m^2)	波峰所佔 之比例(%)	波谷所佔 之比例(%)
0	6.341	50	50
0.1	6.898	45.34	54.66
0.2	8.283	41.12	58.87

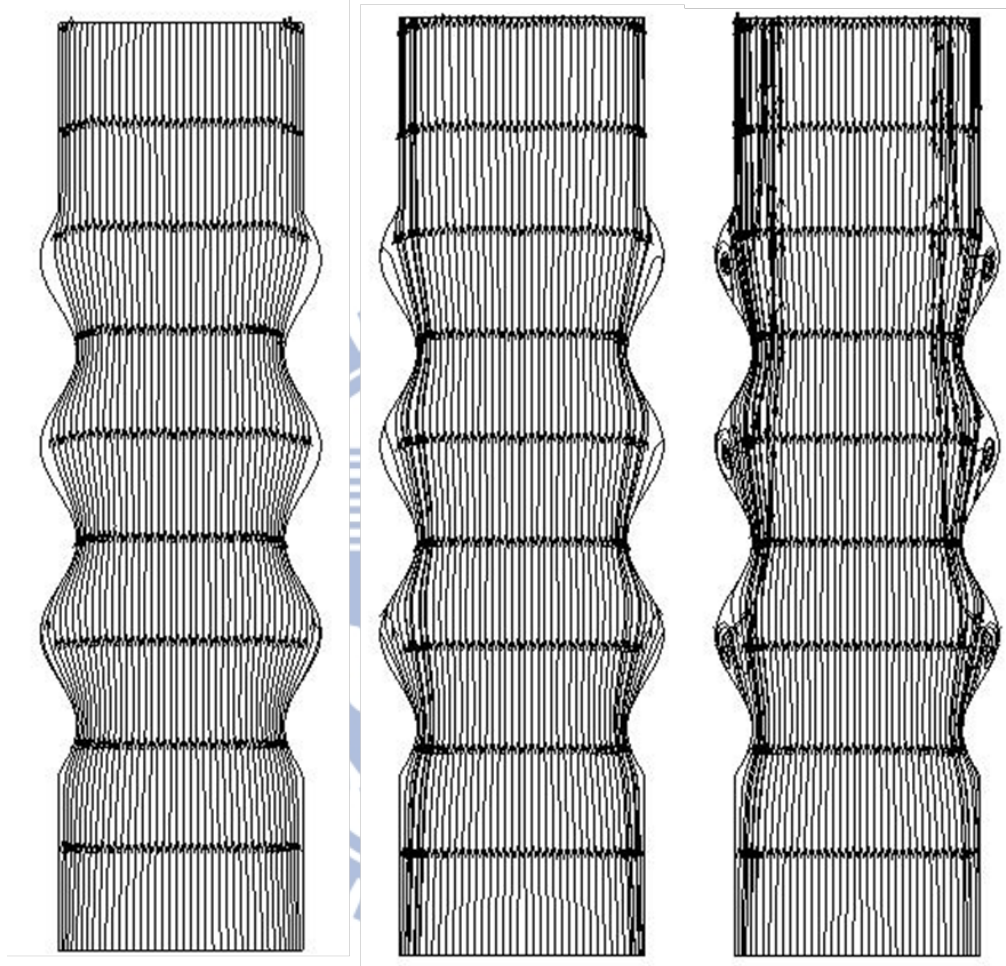


圖 4-25 振幅波長比 0.1 之流線圖

(a) $Ra=1.0 \times 10^4$ (b) $Ra=1.0 \times 10^5$ (c) $Ra=1.0 \times 10^6$

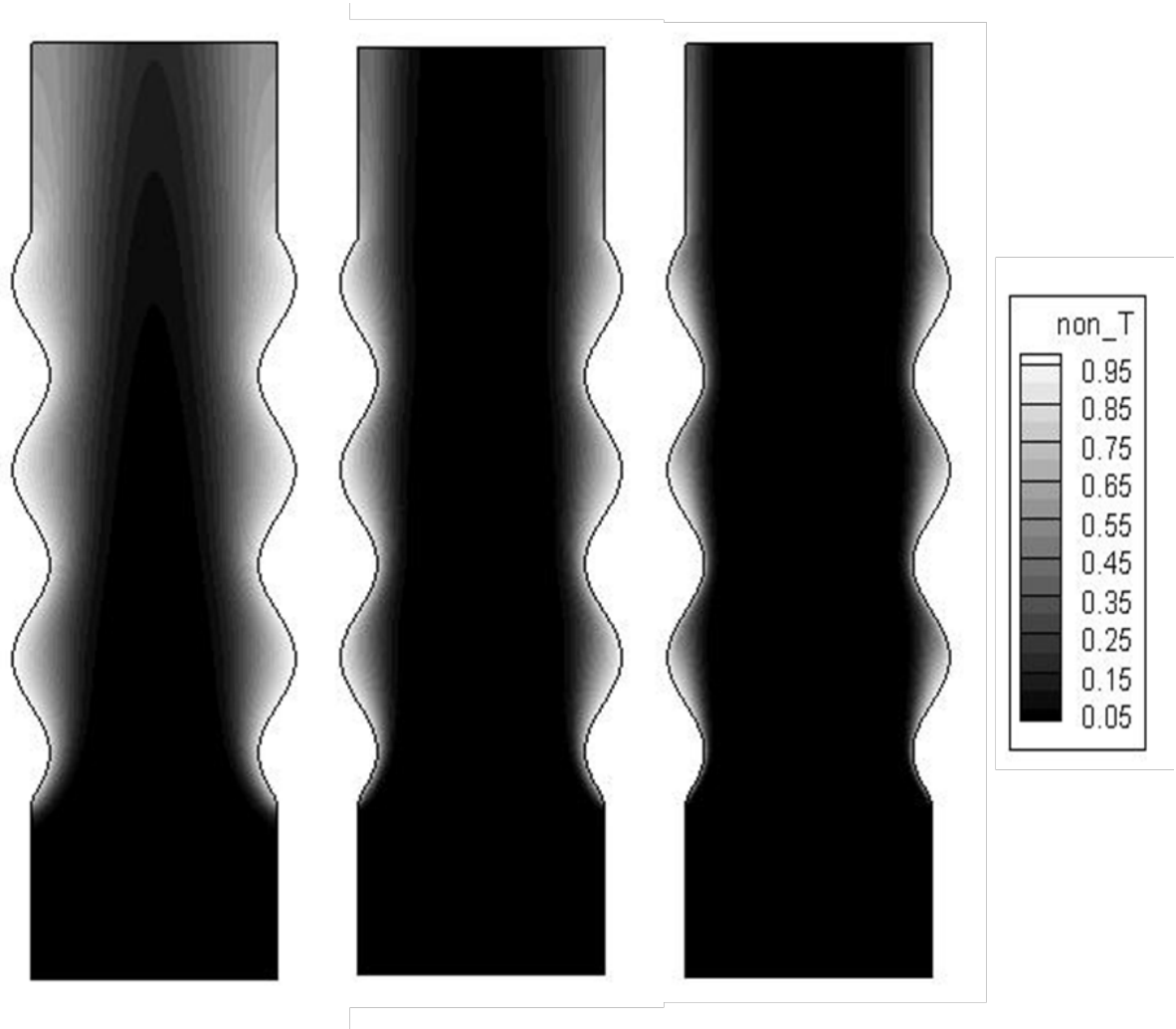


圖 4-26 振幅波長比 0.1 之等溫線圖

(a) $Ra=1.0 \times 10^4$ (b) $Ra=1.0 \times 10^5$ (c) $Ra=1.0 \times 10^6$

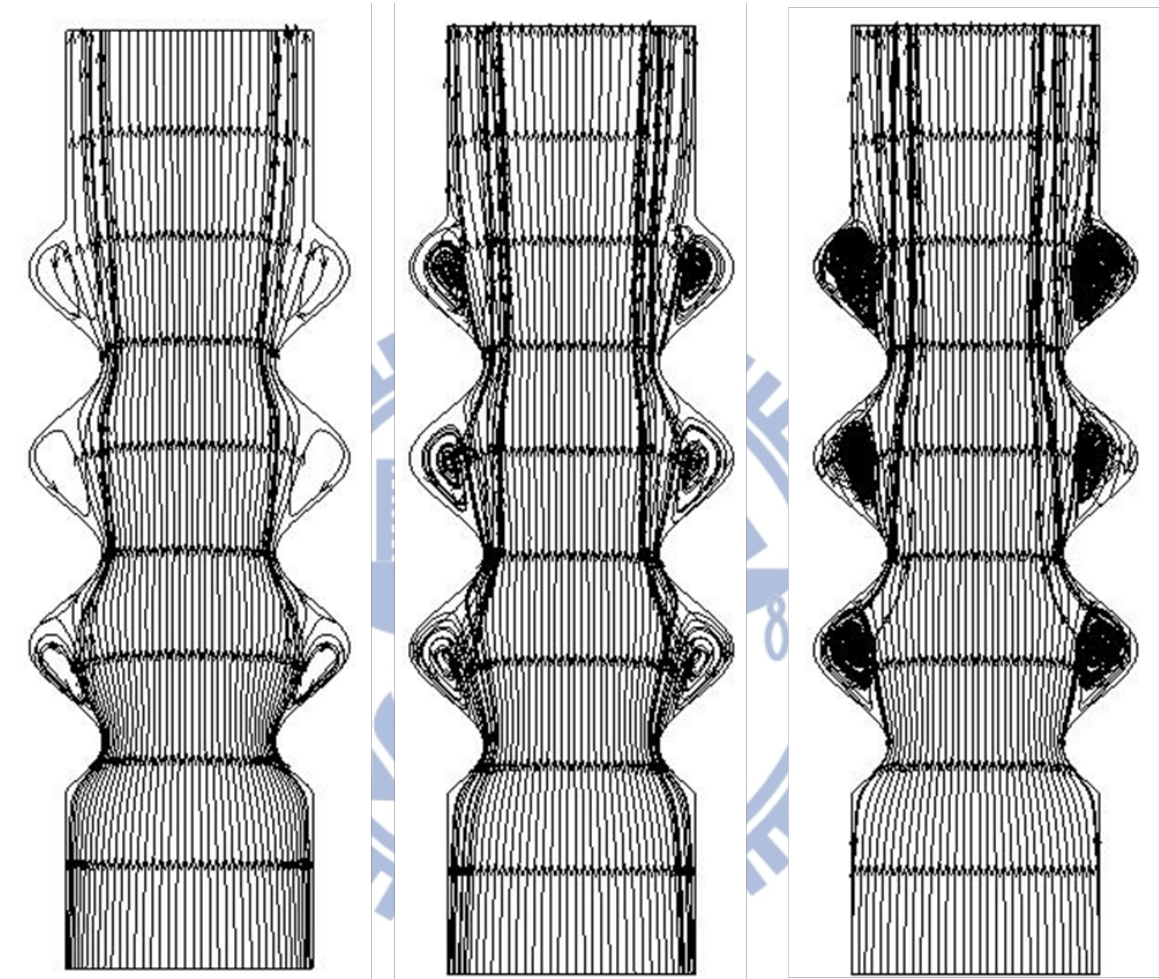


圖 4-27 振幅波長比 0.2 之流線圖

(a) $Ra=1.0 \cdot 10^4$ (b) $Ra=1.0 \cdot 10^5$ (c) $Ra=1.0 \cdot 10^6$

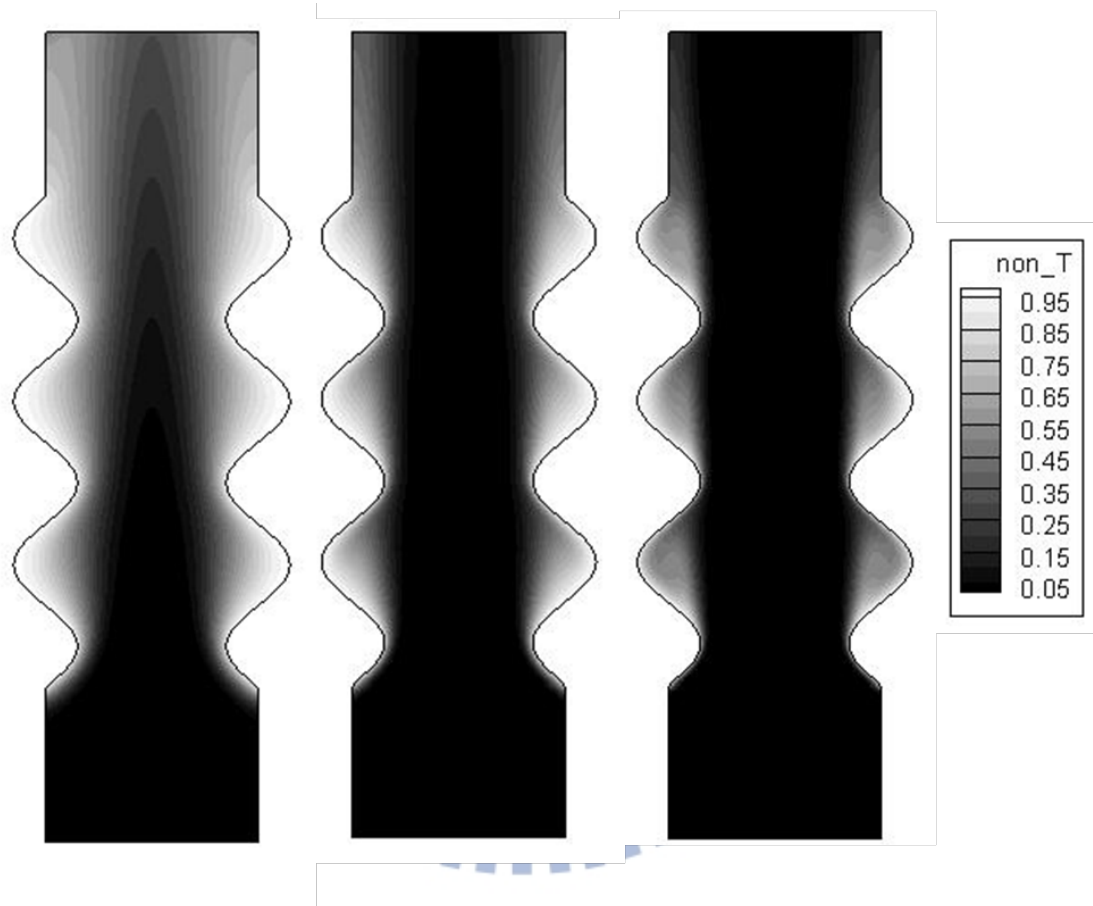


圖 4-28 振幅波長比 0.2 之等溫線圖

(a) $Ra=1.0 \cdot 10^4$ (b) $Ra=1.0 \cdot 10^5$ (c) $Ra=1.0 \cdot 10^6$

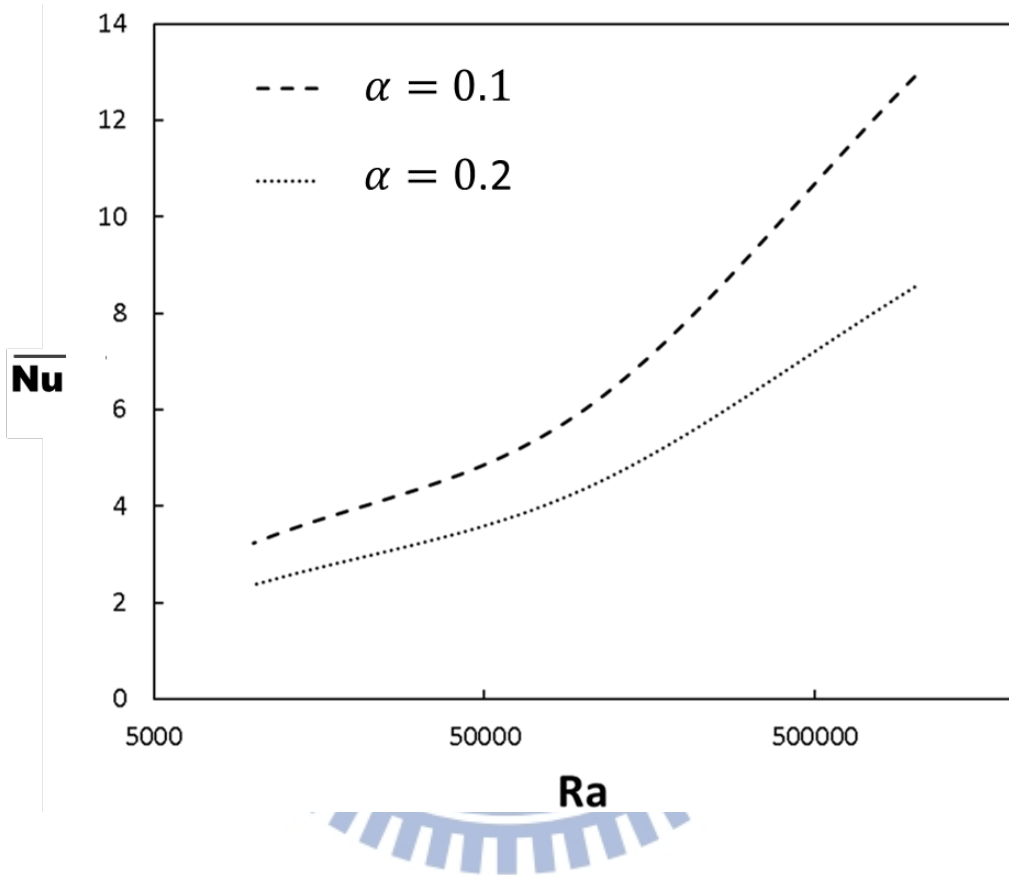


圖 4-29 平均紐塞數對瑞利數之趨勢圖

第五章 結論

本研究利用數值方法探討可壓縮流在三維垂直波形管道中的流動與熱傳機制。將 Navier-Stokes 方程式分成黏性項及非黏性項兩部分，黏性項採用二階中央差分法，而非黏性項的部分則以 Roe 法來解方程式，MUSCL 法解出 ROE 法中使用的網格之間的物理量，當計算低速可壓縮流時，因速度和音速的數量級上差距過大，在數值分析時造成計算的困難，為彌補此一缺點須使用 Preconditioning 法。而程式因為在使用 Preconditioning 時加入 Artificial time term，已破壞了整個統御方程式，因此需使用 Dual time stepping 疊代使其在 Artificial domain 收斂時才能進入下一個真實時階，出口設非反射性邊界條件避免低速可壓縮流中壓力波的干擾。本程式利用 OpenMP 來進行平行化運算，效率為原程式的四倍，減少計算時間及成本。根據本研究計算模擬的結果，與前述的各案例討論，得到結論如下：

1. 本研究採用橢圓偏微分方程網格生成法，將物理座標曲線分布且間距不相等之網格轉換至一垂直且等間距之計算領域模擬。利用此方法，可以對較複雜之物理模式生成網格，並可對於壁面加密、減少網格線歪斜及使網格線垂直於壁面等條件調整。
2. 波形管道在強制對流時容易生成不穩定的渦流現象，提升熱傳效率。而二維波形壁面在自然對流時，雖然平均熱傳係數較平板低，但由於散熱面積增加，因此總熱傳量隨振幅波長比增加而提高。
3. 對於三維波形管道，流體流經波峰時類似流經漸縮管，邊界層縮小，熱傳能力好。而流經波谷時，由於流體動量橫向擴散的幅度不大，接近壁面處流體近乎停滯，熱傳的形式以熱擴散為主，效率較差。
4. 三維波形管道在波谷處有渦流的現象，此渦流之強度隨瑞利數、振幅波長比增加而增加，影響此渦流之原因有一：主流速度撞擊波峰時部分流體轉進波谷形成負向之速度，二：波谷高溫壁面使流體具有正向之浮力，兩

種不同方向之影響抗衡下，造成渦流之速度值小，對於熱傳之幫助不大。

另外在所計算之瑞利數($10^4 \sim 10^6$)之間流場並無出現不穩定的情形。

5. 三維波形管在自然對流的情況下，平均紐塞數隨振幅波長比增加而下降。且由於波形管局部紐塞數較好之波峰處，外型向內縮造成散熱面積較小，因而雖然波形管的總散熱面積較直管高，但對於熱傳量助益不高。以振幅波長比 0.2、瑞利數 10^5 為例，散熱面積雖較直管增加 30%，但總熱傳量卻減少了 25%。



參考文獻

1. L. S. Yao, "Natural convection along a vertical wavy surface," *Journal of Heat Transfer*, vol. 105, no. 3, pp. 465–468, 1983.
2. Bhavanani S.H. and Bergles A.E. "Effect of surface geometry and orientation on laminar natural convection heat transfer from a vertical flat plate with transverse roughness elements." *International journal heat and mass transfer*. Volume-33 No. 5 pp-no.965, 1990.
3. S. Ghosh Moulic and L.S. Yao , "Mixed Convection Along a Wavy Surface" , *ASME J. Heat Transfer* **111**, pp 974-979 ,1989.
4. M. Ashjaee , M. Amiri and J. Rostami , "A correlation for free convection heat transfer from vertical wavy surfaces" , *Heat Mass Transfer* , 2007 , 44:101-111
5. G. Wang and S.P. Vanka , "Convective hat transfer in periodic wavy passages" , *int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 38 , No.17 pp. 3219-3230,1995
6. T.A. Rush , T.A. Newell and A. M. Jacobi , "An experimental study of flow and heat transfer in sinusoidal wavy passages" , *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 42,1999,1541-1553
7. M. V. Pham , F. Ploure and S.K. Doan , "Turbulent heat and mass transfer in sinusoidalwavy channel" , *Int. J. of Heat and Fluid Flow* 29 , 2008 , 1240-1257
8. Zhen-Sheng Sun , Yu-Xin Ren , ,Shi-Ying Zhang and Yue-Cheng Yang , "High-resolution finite difference scheme s using curvilinear coordinate grids for DNS of compressible turbulent flow over wavy walls" , *Computers & Fluids* 45(2011) 84-91
9. Esam M. Alawadhi and Raed I. Bourisli , "The Role of Periodic Vortex Shedding in Heat Transfer Enhancement for Transient Pulsatile Flow Inside Wavy Channels" , *World Academy of Science,Engineering and Technology*

51 ,2009 ,26-732

10. Abdus Samad ,Ki-Don Lee ,Kwang-Yong Kim , “Multi-objective optimization of a dimpled channel for heat transfer augmentation” , Heat Mass Transfer(2008) 45:207-217
11. Haitham M. S. Bahaidarah and N.K.Anand,”Numerical study of heat and momentum transfer in channels with wavy walls”,Numerical Heat Transfer ,Part A,47:471-439,2005
12. H.A.Mohammed, P.Gunnasegaran ,N.H.Shuaib,”Numerical simulation of heat transfer enhancement in wavy microchannel heat sink”,International Communications in Heat and Mass Transfer 38(2011) 63-68
13. Joe E. Thompson, Z.U.A. Warsi and C. Wayne Mastin , “Numerical Grid Generation Foundations and Applications” , Elsevier , New York, 1985
14. Klaus A. Hoffmann , Steve T. Chiang ,”Computational Fluid Dynamics for Engineers” , Engineering Education System , 1993
15. 李崇綱“黏性流體之全域速度場數值解法研究”, 國立交通大學 碩士論文 (2006)
16. E. Turkel, “Preconditioned method for solving the incompressible and low speed compressible equations,” Journal of Computational Physics, vol.72, pp.277-298, 1987
17. T.J. Poinso and S.K. Lele,”Boundary Conditions for Navier–Stokes,” Journal of Computational Physics, vol. 101,pp. 104–129,1992.
18. P.L. Roe,”Approximation Riemann Solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes,” Journal of Computational Physics, vol. 43, pp. 357–372, 1981.
19. I. Abalakin, A. Dervieux and T. Kozubskaya,” A Vertex Centered High Order MUSCL Scheme Applying to Linearised Euler Acoustics,” INRIA, no. 4459, 2002.

20. J.M. Weiss and W.A. Simth, "Preconditioning Applied to Variable and Constants Density Flows," AIAA ,vol. 33,pp. 2050–2056,1995.
21. X.F.Xu,J.S.Lee and R.H.Pletcher," A compressible finite volume formulation for large eddy simulation of turbulent pipe flows at low Mach number in Cartesian coordinates.", J.Comput.Phys.,vol.203, pp.22-48, 2005
22. S. Yoon and A. Jamesont, "Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations", AIAA,vol. 26,no. 9,1988.
23. W.S. Fu ,C.C. Li , C.P. Huang ,and J.C. Huang ,"An Investigation of a High Temperature Difference Natural Convection in a Finite Length Channel without Boussinesq Assumption," International Journal of Heat and Mass Transfer,vol.52,pp.2571-2580,2009.
24. Upender K. Kaul , "Three-Dimensional elliptic grid generation with fully automatic boundary constraints", J. of Computational Physics 229 (2010) 5966-5979
25. J. Dennis, P. Thomas, and B. Pieter, Recent Enhancements to OVEERFLOW, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 35th, Reno, NV, 1997
26. A.M. Guzzman and C. H. Amon , "Transition to chaos in converging-diverging channel flows Ruelle-Takens-Newhouse scenario", Phys. Fluids 6 (6) June 1994
27. 李崇綱 "氣動聲學前期研究:全域可壓縮流場計算方法研究" , 國立交通大學博士論文(2011)
28. Ostrach, S."An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force." NACA Technical Note 2635 (1952)