

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文



三維固端梁之第二次挫屈分析

The secondary buckling analysis of three dimensional Fixed-end beam

研究生：許彤羽

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百零一年八月



三維固端梁之第二次挫屈分析

The secondary buckling analysis of three dimensional Fixed-end beam

研究生：許彤羽

Student：Hsu Tung Yu

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

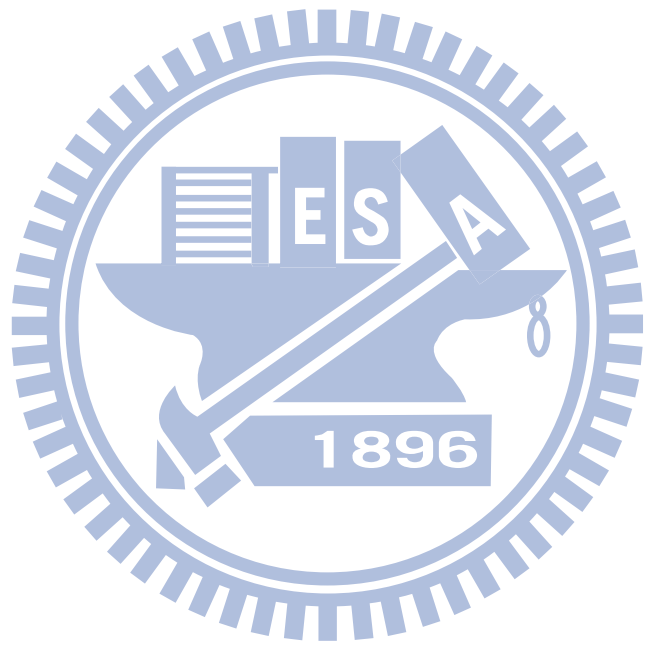
in

Mechanical Engineering

August 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 一百零一年 八月



三維固端梁之第二次挫屈分析

The secondary buckling analysis of three dimensional fixed end beam

研究生：許彤羽

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究所稱的固端梁是一端固定，另一端僅側向固定的細長直梁，若將此固端梁施加軸向壓縮位移負荷，當壓縮量到達某一臨界值時，此固端梁會發生尤拉挫屈(Euler buckling)，本文中稱其為第一次挫屈，如繼續加以軸向壓縮，則該梁會側向拱起，本文將這個挫屈後的固端梁稱為挫屈梁。若將此挫屈梁繼續施加軸向壓縮位移，則其主要平衡路徑，即原固端梁的次要平衡路徑，為一穩定的平衡路徑。當軸向壓縮位移到達某一臨界值時，該挫屈梁會發生一面外(Out of plane)的側向一扭轉挫屈，本文稱其為第二次挫屈(Secondary buckling)。

本文用共旋轉有限元素法探討不同斷面之固端梁受端點軸向位移負荷的挫屈及挫屈後的行為，還有探討兩端固定之挫屈梁，中心點受側向集中位移負荷之非線性挫屈及挫屈後的行為。

本文在當前的元素座標上，以尤拉梁正確的變形機制、工程應變、虛功原理與有限元素法、非線性梁理論的一致線性化 (consistent linearization)，推導一個十四個自由度的梁元素。本研究採用基於牛頓法及定弧長法的增量迭代法求解非線性平衡方程式，以系統的切線剛度矩陣的行列式值是否為零作為挫屈的判斷準則。

本文中用不同的數值例題比較以工程應變和 Green strain 推導之梁元

素對不同問題的影響，再以不同的數值例題探討不同斷面之固端梁的第二次挫屈、挫屈後的行為及影響固端梁第二次挫屈位移之因素，最後再探討挫屈梁中心點受側向集中位移負荷之非線性挫屈及挫屈後的行為。



The secondary buckling analysis of three dimensional fixed end beam

Student : Hsu Tung Yu

Advisor : Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

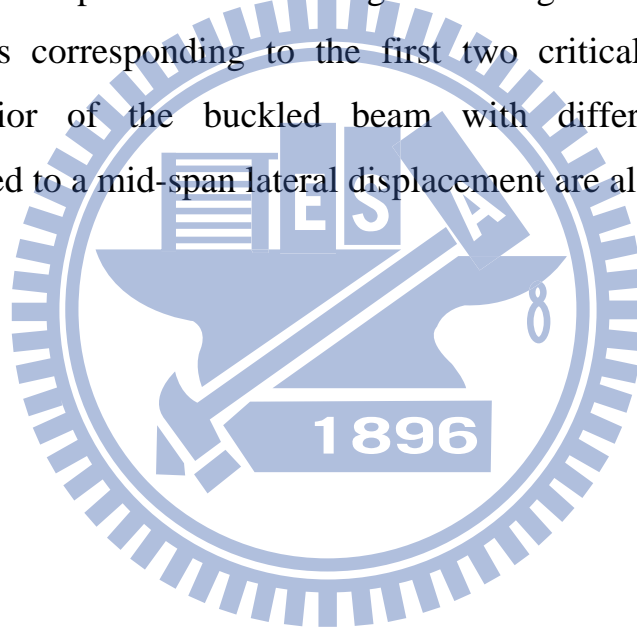
The originally straight fixed-end beam is compressed axially at one end. When the axial compression is greater than a critical value, the beam will buckle in the lateral direction which has the smallest second moment of area of the beam cross section. This buckling is the so called Euler buckling and referred to as the first buckling here. The fixed-end beam after the first buckling is stable and referred to as the buckled beam. If the buckled beam is further compressed axially, it may buckle out of plane. This buckling is referred to as the secondary buckling here.

A consistent co-rotational finite element method is used to investigate the geometric nonlinear buckling and postbuckling behavior of the fixed-end beam subjected to the axial compression and the buckled beam with fixed axial compression subjected to a mid-span lateral displacement.

The beam element developed here has two nodes with seven degrees of freedom per node. The deformations of the beam element are described using the exact kinematics of the Euler beam in the current element coordinate system constructed at the current configuration of the beam element. The element nodal forces are derived using the virtual work principle, consistent second-order linearization of the fully geometrically non-linear beam theory, and engineering strains and stresses.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations. The zero value of the tangent stiffness matrix determinant of the structure is used as the criterion of the buckling state.

Numerical examples are presented to compare the results obtained by the beam elements derived using the engineering strain and the Green strain, respectively. The effects of different rigidity ratios of the beam cross section on the second dimensionless buckling displacement of the fixed-end beam subjected to the axial compression are investigated through numerical examples. The buckling modes corresponding to the first two critical points and the postbuckling behavior of the buckled beam with different fixed axial compression subjected to a mid-span lateral displacement are also investigated.



誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年期間的指導與教誨，使本論文得以順利完成，蕭老師在研究上嚴謹的態度以及對日常生活上的關懷，使我受益良多，在此致上最高的敬意及謝意。也感謝尹慶中老師及金大仁老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝實驗室蔡明旭學長、劉峰成學長、黃楚璋學長、翁林甫學長、盧致群學長在研究上的協助與照顧以及生活上的互相照應。感謝學弟沈佳鴻、林琮棋、莊士緯、林群禮在課業上、日常生活上的幫助與鼓勵。

感謝父母親、弟弟、妹妹、男友及所有關心我的親人、朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給所有關心我的人。



目 錄

中文摘要	I
英文摘要	III
誌謝	V
目錄	VI
表目錄	VIII
圖目錄	IX
第一章 緒言	1
第二章 理論推導	6
2.1 基本假設	6
2.2 座標系統描述	6
2.3 旋轉向量	8
2.4 Euler 梁的變形描述	8
2.5 Euler 梁的應變及應變的變分	13
2.6 元素節點內力之推導	18
2.7 元素剛度矩陣之推導	23
2.8 系統平衡方程式與收斂準則	26
第三章 數值方法	27
3.1 增量迭代法	27
3.2 二分法	29
3.3 N 循環迭代法	31
第四章 數值例題之結果與討論	32
4.1 E 元素與 G 元素的比較	32
4.2 固端梁受端點軸向位移之挫屈及挫屈後行為	33

4.3 挫屈梁受側向負荷之幾何非線性分析.....	44
第五章 結論.....	49
參考文獻.....	52
附表.....	56
附圖.....	71
附錄 A.....	154
附錄 B.....	156
附錄 C.....	158
附錄 D.....	160
附錄 E.....	162
附錄 F.....	164

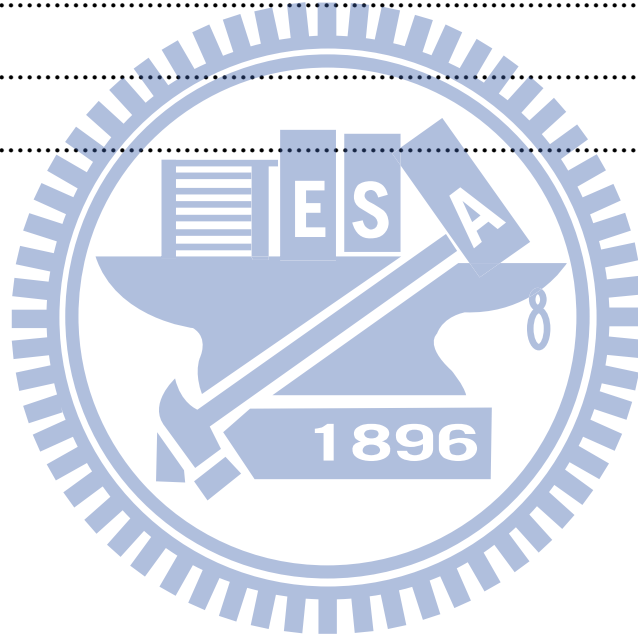


表 目 錄

表一 例題二之挫屈負荷	56
表二 Case1 端點B反力(反力矩)、C點位移與軸向位移關係表	57
表三 Case2 端點B反力(反力矩)、C點位移與軸向位移關係表	58
表四 Case3 端點B反力(反力矩)、C點位移與軸向位移關係表	59
表五 Case4 端點B反力(反力矩)、C點位移與軸向位移關係表	60
表六 挫屈梁受端點軸向位移負荷在主要平衡路徑的 δ/L_T 、端點 B之反力、反力矩(例題二, Case3)	61
表七 Case A1-A5 之材料及斷面常數	62
表八 Case A6-A8 之斷面常數(A6 正方形斷面, A7 十字形斷面, A8 十字形A斷面)	63
表九 Case A9-A10 之斷面常數(I形斷面)	64
表十 抑制翹曲及自由翹曲之挫屈梁受端點軸向位移負荷 Δ 之 二次挫屈位移	65
表十一 挫屈梁受端點軸向位移負荷 Δ 之挫屈位移, 端點反力及力矩 (WR)	66
表十二 矩形斷面之固端梁受端點軸向位移之第二次挫屈位移, 端點反力及力矩 (例題四)	66
表十三 十字形A斷面之固端梁受端點軸向位移之第二次挫屈位移, 端點反力及力矩 (例題五)	67
表十四 不同 γ 與 β 之固端梁之第二次挫屈位移	68
表十五 挫屈梁受中心點側向位移之三種挫屈模態之挫屈位移、 挫屈負荷	69

圖 目 錄

圖一 固端梁受軸向壓縮之示意圖(a)壓縮前、(b)一次挫屈後、 (c)二次挫屈後	71
圖二 總體座標、元素座標與元素截面座標.....	72
圖三 旋轉向量	73
圖四 固端梁 B 端承受一扭轉角 ϕ (例題一).....	74
圖五 例題一的端點反力 P/AE - 扭轉角 ϕ/L_T 之關係圖	75
圖六 例題一的端點反力扭矩 M/GJ - 扭轉角 ϕ/L_T 之關係圖	76
圖七 固端梁受端點軸向壓縮位移	77
圖八 例題二 Case1(WF)之 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ - 軸向位移 Δ/L_T 曲線	78
圖九 例題二 Case1(WF)之 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ - 軸向位移 Δ/L_T 曲線	79
圖十 固端梁之端點 B 在 X_1^G 方向之無因次反力 PL_T^2/EI_y -無因次軸 向位移 Δ/L_T 曲線(例題二)	80
圖十一 挫屈梁受端點軸向位移之主要平衡路徑的變形圖(例題二).....	81
圖十二 例題二 Case1 第一次挫屈挫屈模態(X_3^G 方向的位移分量).....	82
圖十三 例題二 Case1 第二次挫屈挫屈模態(X_2^G 方向的位移分量).....	83
圖十四 例題二 Case1 第二次挫屈挫屈模態(繞 X_1^G 軸方向的旋轉分量).....	84
圖十五 固端梁端點 B 在 X_1^G 方向之反力矩 $M_{BX}L_T/EI_y$ - 軸向位移 Δ/L_T 曲線(例題二)	85
圖十六 固端梁端點 B 在 X_2^G 方向之反力矩 $M_{BY}L_T/EI_y$ - 軸向位移 Δ/L_T 曲線(例題二)	86
圖十七 固端梁端點 B 在 X_3^G 方向之反力矩 $M_{BZ}L_T/EI_y$ - 軸向位移 Δ/L_T 曲線(例題二)	87

圖十八 梁中心點 C 在 X_1^G 方向之 $-U_C / L_T$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線 (例題二)	88
圖十九 梁中心點 C 在 X_3^G 方向之側向位移 δ / L_T - 軸向位移 Δ / L_T 曲線 (例題二)	89
圖二十 例題二 Case1 之變形圖(前視圖)	90
圖二十一 例題二 Case1 之變形圖(上視圖)	91
圖二十二 例題二 Case1 之變形圖(側視圖)	92
圖二十三 例題二 Case1 變形之立體圖($\Delta / L_T = 0.75$)	93
圖二十四 例題二 Case1 變形之立體圖($\Delta / L_T = 0.811$)	93
圖二十五 例題二 Case3 之變形圖(前視圖)	94
圖二十六 例題二 Case3 之變形圖(上視圖)	95
圖二十七 例題二 Case3 之變形圖(側視圖)	96
圖二十八 例題二 Case3 變形之立體圖($\Delta / L_T = 0.8225$)	97
圖二十九 例題二 Case3 變形之立體圖($\Delta / L_T = 0.8307$)	97
圖三十 例題二 Case3 變形之立體圖($\Delta / L_T = 0.8528$)	97
圖三十一 例題二 Case3 變形之立體圖($\Delta / L_T = 0.9051$)	97
圖三十二 例題二 Case4 之變形圖(前視圖)	98
圖三十三 例題二 Case4 之變形圖(上視圖)	99
圖三十四 例題二 Case4 之變形圖(側視圖)	100
圖三十五 Case1 之斷面正向壓力 $F_x L_T^2 / EI_y$ - 梁軸 X 曲線 (例題二)	101
圖三十六 Case1 在斷面主軸 X_2^S 方向之彎矩 $M_y L_T / EI_y$ - X 曲線 (例題二)	102
圖三十七 Case1 在斷面主軸 X_3^S 方向之彎矩 $M_z L_T / EI_y$ - X 曲線	

(例題二).....	103
圖三十八 Case1 在斷面主軸 X_1^S 方向之彎矩 $M_x L_T / EI_y - X$ 曲線	
(例題二).....	104
圖三十九 Case3 之斷面正向壓力 $F_x L_T^2 / EI_y - X$ 曲線	
(例題二).....	105
圖四十 Case3 在斷面主軸 X_2^S 方向之彎矩 $M_y L_T / EI_y - X$ 曲線	
(例題二).....	106
圖四十一 Case3 在斷面主軸 X_3^S 方向之彎矩 $M_z L_T / EI_y - X$ 曲線	
(例題二).....	107
圖四十二 Case3 在斷面主軸 X_1^S 方向之彎矩 $M_x L_T / EI_y - X$ 曲線	
(例題二).....	108
圖四十三 不同長寬比之矩形斷面的第二次挫屈模態(V ,例題四).....	109
圖四十四 不同長寬比之矩形斷面的第二次挫屈模態(Φ_1 ,例題四).....	110
圖四十五 不同 γ 之二次挫屈所需軸向位移 Δ / L_T -剛度比 β 曲線圖	
(例題六).....	111
圖四十六 例題六之第二次挫屈模態($V, \beta = 2.5$).....	112
圖四十七 例題六之第二次挫屈模態($\Phi_1, \beta = 2.5$).....	113
圖四十八 固端梁受軸向壓縮及側向挫屈示意圖.....	114
圖四十九 挫屈梁受中心點側向位移.....	115
圖五十 例題七之挫屈模態(X_1^G 方向的位移分量, $\Delta / L_T = 0.03125$).....	116
圖五十一 例題七之挫屈模態(X_3^G 方向的位移分量, $\Delta / L_T = 0.03125$).....	117
圖五十二 例題七之挫屈模態(X_2^G 方向的位移分量, $\Delta / L_T = 0.3125$).....	118
圖五十三 例題七之挫屈模態	
(繞 X_1^G 軸方向的旋轉分量, $\Delta / L_T = 0.3125$).....	119

圖五十四 例題七之挫屈模態(X_2^G 方向的位移分量, $\Delta/L_T = 0.8$).....	120
圖五十五 例題七之挫屈模態(繞 X_1^G 軸方向的旋轉分量, $\Delta/L_T = 0.8$).....	121
圖五十六 挫屈梁受側向位移負荷 w_{cr}/L_T -軸向壓縮 Δ/L_T 曲線 (例題七).....	122
圖五十七 挫屈梁中心點 C 在 X_3^G 方向反力 FL_T^2/EI_y - w/L_T 曲線 ($\Delta/L_T = 0.03125$, 例題七).....	123
圖五十八 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.03125$, 例題七)...	124
圖五十九 例題七 $\Delta/L_T = 0.03125$ 變形之立體圖($w/L_T = 0.0598$).....	125
圖六十 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力 $F_{AZ}L_T^2/EI_y$ - w/L_T 曲線 ($\Delta/L_T = 0.03125$, 例題七).....	126
圖六十一 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力 $F_{AX}L_T^2/EI_y$ - w/L_T 曲線 ($\Delta/L_T = 0.03125$, 例題七).....	127
圖六十二 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力矩 $M_{AY}L_T/EI_y$ - w/L_T ($\Delta/L_T = 0.03125$, 例題七).....	128
圖六十三 挫屈梁中心點 C 在 X_3^G 方向反力 FL_T^2/EI_y - w/L_T 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	129
圖六十四 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.3125$, 前視圖, 例題七).....	130
圖六十五 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.3125$, 上視圖, 例題七).....	131
圖六十六 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.3125$, 側視圖, 例題七).....	132
圖六十七 例題七 $\Delta/L_T = 0.3125$ 變形之立體圖($w/L_T = 0.0598$).....	133

圖六十八 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力 $F_{AX}L_T^2/EI_y-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	134
圖六十九 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力 $F_{AZ}L_T^2/EI_y-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	135
圖七十 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力矩 $M_{AX}L_T/EI_y-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	136
圖七十一 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力矩 $M_{AY}L_T/EI_y-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	137
圖七十二 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力矩 $M_{AZ}L_T/EI_y-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	138
圖七十三 挫屈梁 C、D、E 點 X_2^G 方向的位移 $-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	139
圖七十四 挫屈梁 C、D、E 點 X_3^G 方向位移 $-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七).....	140
圖七十五 挫屈梁中心點 C 在 X_3^G 方向反力 $FL_T^2/EI_y-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	141
圖七十六 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.8$, 前視圖 , 例題七).....	142
圖七十七 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.8$, 上視圖 , 例題七).....	143
圖七十八 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.8$, 側視圖 , 例題七).....	144
圖七十九 例題七 $\Delta/L_T = 0.8$ 變形之立體圖($w/L_T = 6.8288 \times 10^{-3}$).....	145

圖八十 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力 $F_{AX}L_T^2/EI_y - w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	146
圖八十一 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力 $F_{AY}L_T^2/EI_y - w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	147
圖八十二 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力 $F_{AZ}L_T^2/EI_y - w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	148
圖八十三 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力矩 $M_{AX}L_T/EI_y - w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	149
圖八十四 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力矩 $M_{AY}L_T/EI_y - w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	150
圖八十五 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力矩 $M_{AZ}L_T/EI_y - w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	151
圖八十六 挫屈梁 C、D、E 點 X_2^G 方向位移 $-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	152
圖八十七 挫屈梁 C、D、E 點 X_3^G 方向位移 $-w/L_T$ 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七).....	153

第一章 緒 言

本研究所稱的固端梁是如圖一 (a) 所示之細長直梁，一端固定，另一端僅側向固定，若將此固端梁施加軸向壓縮 Δ ，當壓縮量到達某一臨界值時，此固端梁會發生一面內(In plane)的側向挫屈，即所謂的尤拉挫屈(Euler buckling)，本文中稱其為第一次挫屈，如繼續加以軸向壓縮，則該梁會如圖一 (b) 所示朝側向拱起，其大小可以用梁中點的側向拱起高度 δ 表示，文獻上稱此階段的梁為挫屈梁[1,2,3]，本文亦將這個挫屈後的固端梁稱為挫屈梁。當挫屈梁拱起高度 δ 不大時，其形狀很接近第一挫屈模態[2,4-10]。因增加很小的軸向位移或壓力，即可使挫屈梁有很大的側向位移及旋轉[9]，故挫屈梁可以用來當放大器(amplifier)或致動器(actuator)[6-9]，亦可以用來當微小力的感測器[11]。

如將圖 1-1 (b) 所示之挫屈梁兩端固定 (clamped-clamped)，則為一穩定的結構[1,2,3]。若將其施加一向下的側向位移或力負荷，則當側向位移到達某一臨界值時，該挫屈梁亦會再度挫屈[1,12,13]，其平衡路徑會受到側向拱起高度 δ 的影響，當 δ 較小時，其位移－負荷曲線存在極限點 (limit point)[14]，有跳躍挫屈 (snap through buckling) 的現象，且在在側向力為零時存在兩個穩定平衡位置，即所謂的雙穩態 (bistable) [5,14-16]，當側向拱起高度 δ 較大時，其位移－負荷曲線存在極限點及分歧點 (bifurcation

point) [14]。探討挫屈梁受側向負荷之非線性行為的文獻很多[4-18]，但都為二維的分析，僅考慮面內(in-plane)的變形。

如將圖 1-1 (b) 所示之挫屈梁繼續施加軸向壓縮位移，則其主要平衡路徑，即原固端梁的次要平衡路徑，為一穩定的平衡路徑[19,20,21]。當軸向壓縮位移到達某一臨界值時，挫屈梁會發生一面外(Out of plane)的側向一扭轉挫屈[19,20,21]，本文與[19]一樣，稱其為第二次挫屈(Secondary buckling)。如繼續加以軸向壓縮，則該梁會形成如圖一 (c) 所示的三維曲線。文獻[19-21]曾探討有相同主面積慣性矩(Principal area moment of inertia) (即 $I_y = I_z = I$) 之挫屈梁的第二次挫屈及挫屈後的行為，由文獻[19]的分析結果可以發現梁斷面之主撓曲剛度 EI 和扭轉剛度 GJ 的比值愈大，則挫屈梁發生第二次挫屈時的壓縮量愈小。文獻[20,21]使用實驗及 Cosserat rod theory，即假設梁不可伸縮、沒有剪應變、僅有撓曲變形，探討圓形斷面之挫屈梁的第二次挫屈及挫屈後的行為，文獻[20,21]數值的分析結果與文獻[19]的理論解相當吻合。文獻[20,21]中，挫屈梁發生第二次挫屈時之壓縮量及挫屈後之行為的實驗結果與理論解相當吻合。但文獻[19-21]都沒有探討主面積慣性矩不同(即 $I_y \neq I_z$) 之挫屈梁的第二次挫屈及挫屈後的行為。

據本人所知，文獻上沒有 $I_y \neq I_z$ 之挫屈梁的第二次挫屈及挫屈後的行為之分析或實驗的結果。所以本研究將以有限元素法探討 $I_y \neq I_z$ 之固端梁的第二次挫屈及挫屈後的行為。本研究考慮的梁為雙對稱開口薄壁梁。

文獻[22]用共旋轉有限元素法、Green strain、完整的非線性梁理論、一致性的二階線性化及虛功原理，推導一個十四個自由度，含翹曲、扭曲及軸向變形間耦合效應之三維雙對稱開口薄壁梁元素，該元素可以應用到梁的挫屈分析、非線性、挫屈後分析[22,23]，該元素分析的結果與文獻上的結果相當一致。

文獻[24]中採用文獻[22]的雙對稱開口薄壁梁元素，探討細長圓形斷面梁先扭轉後壓縮問題[19-21]，除了在壓縮量很小時外，其分析結果與文獻[20,21]的分析結果相當吻合，這可能是因文獻[24]考慮了扭轉與軸向變形的耦合，所以在壓縮量很小時仍沒有側向變形，但文獻[20,21]中假設梁是不可伸縮的，所以任何壓縮量都會有側向變形；當壓縮量較大時，梁的軸向及側向變形主要都是剛體運動造成的，梁的軸向應變的貢獻可以忽略不計。雙對稱開口薄壁梁，在相同的變形假設下，用 Green strain 和工程應變求得的應變之二次項有一些差異[25]，文獻[24]發現當細長圓形斷面梁受端點扭轉角 ϕ 作用，但沒有由軸向位移時，用 Green strain 和工程應變求得的軸力的差異，會隨扭轉角 ϕ 的增加而增加，但兩種應變求得的扭矩幾乎沒有差異。文獻[24]並沒有用工程應變推導完整的梁元素，故沒有探討用 Green strain 和工程應變求得的剛度矩陣，對薄壁梁之挫屈分析的影響，且文獻[24]僅探討了圓形斷面梁，並未探討其他的斷面梁。

文獻[25]採用與文獻[22]相同的變形機制，用工程應變、二階梁理論、

共旋轉法及虛功原理，推導雙對稱開口薄壁梁之微分平衡方程式，探討薄壁梁受彎矩的側向-扭轉挫屈負荷，文獻[25]用級數解分析的結果與文獻[23]用文獻[22]之梁元素分析的結果很接近。

由以上的討論可知文獻[22]之梁元素應適用於本研究，但文獻上仍缺乏用共旋轉法及工程應變推導的雙對稱開口薄壁梁元素，所以本研究將先採用文獻[25]推導之工程應變及文獻[22]之梁元素的推導方法，推導一雙對稱開口薄壁梁元素。

本研究將以本文推導的梁元素及文獻[22]的梁元素分析具不同撓曲—扭轉剛度比 EI_y/GJ 、撓曲—撓曲剛度比 EI_y/EI_z ($I_z \geq I_y$) 之固端梁的第二次挫屈及挫屈後的行為，並比較兩種元素分析結果的差異。因文獻上仍缺乏挫屈梁受側向負荷之三維非線性分析，所以本研究亦擬探討挫屈梁受面內(in-plane)側向負荷時之面外(out of plane)挫屈負荷及挫屈後的行為。

本研究採用基於牛頓法及定弧長法的增量迭代法[22,26]，解非線性平衡方程式，以系統的切線剛度矩陣的行列式值是否為零作為挫屈的判斷準則。為求得完整的平衡路徑，本研究以挫屈模態當作擾動位移，用擾動位移法[22,26]進入次要平衡路徑，進行平衡迭代。

本文將在第二章中，以尤拉梁正確的變形機制、工程應變、虛功原理與有限元素法、非線性梁理論的一致線性化 (consistent linearization)，推導梁元素節點內力，再將元素節點內力對節點位移微分求得元素剛度矩陣。在

第三章中將說明本研究之幾何非線性分析與挫屈分析的數值計算方法與程序。在第四章中將先比較工程應變和 Green strain 推導之梁元素對不同問題的影響，再以不同的數值例題探討不同斷面之固端梁的第二次挫屈、挫屈後的行為及影響固端梁第二次挫屈挫屈位移之因素，最後再探討挫屈梁中心點受側向集中位移負荷之非線性挫屈及挫屈後的行為。



第二章 理論推導

本研究採用共旋轉有限元素法(corotational finite element formulation)探討挫屈梁之二次挫屈、挫屈後的行為及挫屈梁受側向負荷之三維非線性行為。本章中將推導一個兩節點、十四個自由度的梁元素，本文對梁變形的假設，梁變形機制的描述及元素的推導方法都和文獻[22, 27]相同，但本文的應變採用工程應變(Engineering strain)，文獻[22]的應變採用Green strain。為了方便比較本文的元素及文獻[22]的元素之差異，本文將文獻[22]的元素節點內力及剛度矩陣放在附錄A中。為了文章的完整性，本章中將重複與文獻[22,27]中相同的部分

2.1 基本假設

本文對梁元素的推導，做如下的假設：

- (1)梁為細長的等斷面、雙對稱梁，且Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2)梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為均勻的伸長。
- (3)梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。
- (4)梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。

2.2 座標系統描述

本研究將梁分割成若干個兩個節點的梁元素，為了描述系統的運動、元素的變形、邊界條件，本文中定義了三套直角座標系統：

(1) 固定總體座標系統(圖二)， $X_i^G (i=1, 2, 3)$

系統的節點座標方位、位移、旋轉，其他座標系統之座標軸的方向餘弦，系統的平衡方程式皆在此座標系統中定義。

(2) 元素座標系統(圖二)， $x_i (i=1, 2, 3)$

此座標系統附屬在每一梁元素上，其原點位於該元素的節點1上， x_1 軸通過該元素的兩端節點(1, 2)， x_2 軸與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致，而元素變形後的 x_2 軸與 x_3 軸，可由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定，是分別將位於節點 1, 2 變形後的斷面繞一個與該斷面之法線及 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致(此時並不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向無法定義)，然後再以兩斷面主軸方向的角平分線作為 x_2 軸及 x_3 軸的方向。梁元素的變形、節點內力、以及元素剛度矩陣，皆在此座標系統中建立。

(3) 元素斷面座標系統(圖二)， $x_i^S (i=1, 2, 3)$

此座標系統與元素的斷面一起平移和旋轉，其原點剛接於未翹曲斷面的形心， x_1^S 軸為未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 軸與 x_3^S 軸分別與未翹曲斷面的主軸重合。元素的變形是由斷面座標相對於元素座標的旋轉來決定。

本文中以符號 $\{ \}$ 代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{ X_1^G, X_2^G, X_3^G \}$ 與元素座標 $\mathbf{x} = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ ，元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{ x_1^S, x_2^S, x_3^S \}$ 的關係可表示如下：

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GE} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GS} \mathbf{x}^S \quad (2.2.1)$$

其中 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 分別代表元素座標、元素斷面座標對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣。

2.3 旋轉向量

本文中使用的旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖三所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\phi\mathbf{a}$ 的作用而轉到一個新的位置 \mathbf{b}' ，向量 \mathbf{b}' 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成[28]:

$$\mathbf{b}' = \cos\phi\mathbf{b} + (1 - \cos\phi)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \sin\phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.3.1)$$

其中符號 \cdot 與 \times 分別代表向量的內積與外積， ϕ 代表繞旋轉軸的旋轉角， \mathbf{a} 表旋轉軸的單位向量。

2.4 Euler 梁的變形描述

本文在當前的元素座標上描述梁元素的變形，由(2.1)節中的基本假設可知 Euler 梁元素的變形可以由其形心軸的位移、截面的翹曲(warping)及其截面的旋轉來描述。

圖二中，Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在同一斷面之形心軸上的對應點。在元素座標上 Q 點的變形前後位置可以表示如下:

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{r} = x_p\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 + \theta_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^S + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S \quad (2.4.2)$$

其中 x 、 y 、 z 為變形前 Q 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， x 亦為 P 點變形前 x_1 軸的座標， y 、 z 亦同時是 Q 點在 x_2^S 與 x_3^S 軸的座標。 $x_p(x)$ 、 $v(x)$ 以及 $w(x)$ 分別是變形後 P 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， $v(x)$ 、 $w(x)$ 亦為 P 點在 x_2 及 x_3 軸方向的位移， $\theta_{1,x} = \frac{\partial\theta_1}{\partial x}$ 是梁斷面沿變形後形心軸的軸向扭轉率， $\theta_1(x)$ 為形心軸的扭轉角， $\omega = \omega(y, z)$ 代表等斷面梁的聖維南翹曲函數， \mathbf{e}_i 及 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 分別為 x_i 與 x_i^S 軸的單位向量，梁變形後其形心軸的

單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos \theta_n, \theta_3, -\theta_2\} \quad (2.4.3)$$

$$\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{w'}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.4.4)$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{v'}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.4.5)$$

$$\cos \theta_n = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.4.6)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = v_{,x}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.4.7)$$

其中 ε_0 為形心軸的單位伸長量(unit extension)。

在忽略扭轉翹曲的情況下，(2.4.4)至(2.4.7)式中， s 為節點1至點P間的形心軸在變形後的弧長。由梁形心軸上的任一點P在變形後的位置向量(2.4.2)式及(2.4.6)與(2.4.7)式， $x_p(x)$ 可以表示如下

$$x_p(x) = u_1 + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.4.8)$$

其中 u_1 為節點1在 x_1 方向的位移，由元素座標系統的定義，其值為零，但其變分並不為零。

由梁元素的變形為小變形的假設，即 $\varepsilon_0 \ll 1$ ， $v_{,x} \ll 1$ ， $w_{,x} \ll 1$ ，(2.4.8)式可近似成

$$x_p(x) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2} v_{,x}^2 - \frac{1}{2} w_{,x}^2) dx \quad (2.4.9)$$

由梁之形心軸單位長度的伸長量為均勻的伸長量之假設及(2.4.9)式，形心軸單位長度伸長量 ε_0 可表示如下

$$\varepsilon_0 = \frac{\ell - L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.4.10)$$

$$\ell = L + u_2 - u_1 \quad (2.4.11)$$

其中 L 為梁元素變形前的長度， ℓ 為梁元素變形後之形心軸的弦長， u_1 、 u_2 分別為節點 1 與 2 在 x_1 方向的位移。

由座標系統的定義可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S ($i=1,2,3$) 軸的方向是一致的，即 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_1^S 與(2.4.3)式的 \mathbf{t} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) 來決定[27]：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n}_\theta \quad (2.4.12)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_t \mathbf{t} \quad (2.4.13)$$

$$\mathbf{n}_\theta = \{0, \theta_2 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \theta_3 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0, n_2, n_3\} \quad (2.4.14)$$

其中 \mathbf{n}_θ 為垂直於 \mathbf{e}_1 與 \mathbf{t} 之單位向量， θ_n 為 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{t} 的夾角， θ_t 為斷面繞 \mathbf{t} 的轉角。

將旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 作用在 \mathbf{e}_i 上，使其轉至一中繼位置 \mathbf{e}'_i ，此時 \mathbf{e}'_1 與 \mathbf{t} 重合，再將 $\boldsymbol{\theta}_t$ 作用在 \mathbf{e}'_i ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_n$ 、以及 $\boldsymbol{\theta}_t$ 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 與 $\boldsymbol{\theta}_t$ 亦唯一決定。

\mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i 之關係可表示如下[27]

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{t}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i, \quad (2.4.15)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_t \mathbf{r}_1 + \sin \theta_t \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_t \mathbf{r}_1 + \cos \theta_t \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-\theta_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_2^2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{\theta_2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_3^2\}$$

其中 \mathbf{R} 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R} 為 θ_i ($i=1,2,3$) 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。

當 θ_i ($i=1,2,3$) 分別有一微小變化 $\delta\theta_i$ 時，斷面座標會旋轉到一個新的位置，此一新的位置可由元素座標繞 x_i ($i=1,2,3$) 軸分別作微小旋轉 $\delta\phi_i$

($i=1,2,3$)而得。

$\delta\theta = \{\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3\}$ 與 $\delta\varphi = \{\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3\}$ 之關係可表示如下[27]：

$$\delta\varphi = [\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}, \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}]\delta\theta = \mathbf{T}\delta\theta \quad (2.4.16)$$

$$\mathbf{t}_1 = \left\{ -\theta_3, \frac{1-\theta_3^2}{\cos\theta_n}, \frac{\theta_2\theta_3}{\cos\theta_n} \right\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \left\{ \theta_2, \frac{\theta_2\theta_3}{\cos\theta_n}, \frac{1-\theta_2^2}{\cos\theta_n} \right\}$$

$$a = \frac{\theta_3(1-\cos\theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$b = \frac{-\theta_2(1-\cos\theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

(2.4.16)式之反函數可表示如下：

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -\theta_3 & \cos\theta_n & 0 \\ \theta_2 & 0 & \cos\theta_n \end{bmatrix} \delta\varphi = \mathbf{T}^{-1}\delta\varphi \quad (2.4.17)$$

當旋轉參數 θ_2 與 θ_3 很小時， \mathbf{T}^{-1} 矩陣可近似如下式

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

將(2.4.15)式代入(2.4.2)式，利用近似式 $\cos\theta_n \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$ 、

$\sin\theta \approx \theta$ 、 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ 並保留變形參數至二次項，則位置向量 \mathbf{r} 可以化簡

成

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 \quad (2.4.19)$$

$$r_1 = x_p + y(\theta_2\theta_1 - \theta_3) + z(\theta_2 + \theta_3\theta_1) + \theta_{1,x}\omega$$

$$r_2 = v + y[1 - \frac{1}{2}(\theta_3^2 + \theta_1^2)] + z(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_1) + \theta_{1,x}\theta_3\omega$$

$$r_3 = w + y(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_1) + z[1 - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2)] - \theta_{1,x}\theta_2\omega$$

本文中假設梁元素形心軸的側向位移 v, w 與軸向扭轉角 θ_1 皆為 x 的三次 Hermitian 多項式，因此 v, w 及 θ_1 可表示成：

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.4.20)$$

$$w(x) = \{N_1, -N_2, N_3, -N_4\}^t \{w_1, -w'_1, w_2, -w'_2\} = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (2.4.21)$$

$$\theta_1(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{\theta_{11}, \beta_1, \theta_{12}, \beta_2\} = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d \quad (2.4.22)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \quad (2.4.23)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi),$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.4.24)$$

其中 v_j 與 w_j ($j=1, 2$) 分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值， v'_j 與 w'_j ($j=1, 2$) 則分別是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 與 $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ 在節點 j 之節點值。 θ_{1j} ($j=1, 2$) 是 θ_1 在節點 j 的節點值， β_j ($j=1, 2$) 則是 $\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ 在節點 j 的節點值。 N_i ($i=1-4$) 為形狀函數 (shape function)。

由(2.4.9)式可得梁的軸向位移 $u(x)$ ，並表示如下

$$u(x) = x_p - x = u_1 + \varepsilon_0 x - \frac{1}{2} \int_0^x (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.4.25)$$

將(2.4.11)、(2.4.20)、(2.4.21)式代入(2.4.10)式，整理可得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{L} (\mathbf{G}_a^t \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \frac{1}{2} \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) \quad (2.4.26)$$

$$\mathbf{G}_a = \{-1, 1\} \quad (2.4.27)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.4.28)$$

$$\mathbf{G}_c = \{G_{c1}, G_{c2}, G_{c3}, G_{c4}\} = \int \mathbf{N}'_c w_{,x} dx \quad (2.4.29)$$

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\} \quad (2.4.30)$$

將(2.4.26)式代入(2.4.25)式整理可得

$$u(x) = \mathbf{N}'_a \mathbf{u}_a + \frac{x}{2L} (\mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) - \frac{1}{2} \int_0^x (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.4.31)$$

$$\mathbf{N}'_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.4.32)$$

2.5 Euler 梁的應變及應變的變分

本研究用虛功原理推導梁元素的節點內力時需要梁元素的應變及變分。本文中採用工程應變(Engineering strain)來描述梁的應變。

2.5.1 梁的應變

為了推導上的方便，本文中先推導出 Green Strain $\varepsilon_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ ，再由 Green Strain 求得與其對應之工程應變。

假如將(2.4.1)式中的 x 、 y 、 z 視為拉格蘭日座標(Lagrange coordinates)，則 Green strains ε_{11} 、 ε_{12} 、 ε_{13} 可以表示成[29]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3 \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2.5.2)$$

將(2.4.9)、(2.4.19)帶回(2.5.2),可得 \mathbf{g}_i 的分量 g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)如下

$$g_{11} = 1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + y(\theta_1\theta_{2,x} + \theta_2\theta_{1,x} - \theta_{3,x}) \quad (2.5.3)$$

$$+ z(\theta_1\theta_{3,x} + \theta_3\theta_{1,x} + \theta_{2,x}) + \theta_{1,xx}\omega$$

$$g_{12} = (1 + \varepsilon_o)\theta_3 - y(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_3\theta_{3,x})$$

$$+ z\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} - \theta_{1,x}\right) + \theta_{1,xx}\theta_3\omega + \theta_{1,x}\theta_{3,x}\omega$$

$$g_{13} = -(1 + \varepsilon_o)\theta_2 + y\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} + \theta_{1,x}\right)$$

$$- z(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_2\theta_{2,x}) - \theta_{1,xx}\theta_2\omega - \theta_{1,x}\theta_{2,x}\omega$$

$$g_{21} = \theta_1\theta_2 - \theta_3 + \theta_{1,x}\omega_{,y}$$

$$g_{22} = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,y}$$

$$g_{23} = \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,y}$$

$$g_{31} = \theta_1\theta_3 + \theta_2 + \theta_{1,x}\omega_{,z}$$

$$g_{32} = -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,z}$$

$$g_{33} = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,z}$$

將(2.4.4)、(2.4.5)、(2.5.2)式及(2.5.3)式代回(2.5.1)式，保留變形參數及

其微分到二次項可得：

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.5.4-a)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_o - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + \varepsilon_{o,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\theta_{1,x}^2 - y\theta_1w_{,xx} + z\theta_1v_{,xx} + \frac{1}{2}y^2v_{,xx}^2$$

$$+ yzv_{,xx}w_{,xx} + \frac{1}{2}z^2w_{,xx}^2 + \omega\varepsilon_o\theta_{1,xx} - \theta_{1,xx}\omega(yv_{,xx} + zw_{,xx}) + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.5.4-b)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - z)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^2 = \frac{1}{2} & [\omega_{,y}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x}v_{,xx} - z\omega_{,y}\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}z(v_{,x}w_{,xx} - w_{,x}v_{,xx}) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.5.4-c)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,z} + y)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^2 = \frac{1}{2} & [\omega_{,z}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}w_{,xx} - y\omega_{,z}\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}y(w_{,x}v_{,xx} - v_{,x}w_{,xx}) \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_{1j}^k (j=1,2,3, k=1,2)$ 代表 ε_{1j}^k 中之 k 次項， $\varepsilon_{0,x} = 0$ 。

Green Strains $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$ 與工程應變 $e_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ 間的關係如下[29]：

$$e_{11} = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1 \quad (2.5.5a)$$

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2}(1 + 2\varepsilon_{22})^{1/2}} \quad (2.5.5b)$$

$$\sin \gamma_{13} = \frac{2\varepsilon_{13}}{(1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2}(1 + 2\varepsilon_{33})^{1/2}} \quad (2.5.5c)$$

當應變很小時(2.5.5)式可以用下列近似式代替

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2 \quad (2.5.6a)$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} - 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{11} \quad (2.5.6b)$$

$$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} - 2\varepsilon_{13}\varepsilon_{11} \quad (2.5.6c)$$

因(2.5.1)及 (2.5.2)式中 Green strain 僅保留到旋轉參數的二次項，所以本文中工程應變亦僅保留到旋轉參數的二次項。由(2.5.4)式及(2.5.6)式，並保留 ε_0 、 $\varepsilon_{0,x}$ 、旋轉參數及其微分項到二次項可得[25]

$$e_{11} = e_{11}^1 + e_{11}^2 \quad (2.5.7a)$$

$$e_{11}^1 = \varepsilon_0 - zw_{,xx} - yv_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$e_{11}^2 = \frac{1}{2}\theta_{1,x}^2(y^2 + z^2) + y(-\theta_1 w_{,xx} + \varepsilon_0 v_{,xx}) + z(\varepsilon_0 w_{,xx} + \theta_1 v_{,xx}) \\ + \varepsilon_{0,x}(yv_{,x} + zw_{,x})$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}^1 + \gamma_{12}^2 \quad (2.5.7b)$$

$$\gamma_{12}^1 = (-z + \omega_{,y})\theta_{1,x}$$

$$\gamma_{12}^2 = -z^2\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\theta_{1,x}v_{,xx} + z(\varepsilon_0\theta_{1,x} + v_{,x}\frac{w_{,xx}}{2} - w_{,x}\frac{v_{,xx}}{2} \\ + \omega\theta_{1,x}\theta_{1,xx}) - yz\theta_{1,x}v_{,xx}$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{13}^1 + \gamma_{13}^2 \quad (2.5.7c)$$

$$\gamma_{13}^1 = (y + \omega_{,z})\theta_{1,x}$$

$$\gamma_{13}^2 = y^2\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\theta_{1,x}w_{,xx} + y(-\varepsilon_0\theta_{1,x} - v_{,x}\frac{w_{,xx}}{2} + w_{,x}\frac{v_{,xx}}{2} \\ - \omega\theta_{1,x}\theta_{1,xx}) + yz\theta_{1,x}w_{,xx}$$

其中 $e_{11}^k, \gamma_{12}^k, \gamma_{13}^k$ ($k=1, 2$) 代表 $e_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ 中之 k 次項，因本研究假設 ε_0 為一常數，所以 $\varepsilon_{0,x} = 0$ ，(2.5.7a) 式中加底線____之項可以不考慮。

2.5.2 梁的應變的變分:

將(2.5.7)式中之 $e_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ 分別作變分可得到下式[25]

$$\delta e_{11} = \delta e_{11}^0 + \delta e_{11}^1 \quad (2.5.8a)$$

$$\delta e_{11}^0 = \delta \varepsilon_0 - \delta w_{,xx} z - \delta v_{,xx} y + \delta \theta_{1,xx} \omega$$

$$\begin{aligned} \delta e_{11}^1 = & \delta w_{,xx} (-\theta_1 y + \varepsilon_0 z) + \delta v_{,xx} (\varepsilon_0 y + \theta_1 z) + \delta \theta_{1,x} (y^2 + z^2) \theta_{1,x} \\ & + \delta \theta_1 (-y w_{,xx} + z v_{,xx}) + \delta \varepsilon_0 (z w_{,xx} + y v_{,xx}) + \delta v_{,x} y \varepsilon_{0,x} \\ & + \delta w_{,x} z \varepsilon_{0,x} + \delta \varepsilon_{0,x} (y v_{,x} + z w_{,x}) \end{aligned}$$

$$\delta \gamma_{12} = \delta \gamma_{12}^0 + \delta \gamma_{12}^1 \quad (2.5.8b)$$

$$\delta \gamma_{12}^0 = \delta \theta_{1,x} (-z + \omega_{,y})$$

$$\delta \gamma_{12}^1 = \delta w_{,xx} (-z^2 \theta_{1,x} + \frac{z v_{,x}}{2}) + \delta v_{,xx} (\omega \theta_{1,x} - \frac{1}{2} z w_{,x} - y z \theta_{1,x})$$

$$+ \delta \theta_{1,x} (-z^2 w_{,xx} + \omega v_{,xx} + z \varepsilon_0 + \omega z \theta_{1,xx} - y z v_{,xx})$$

$$+ \delta \varepsilon_0 z \theta_{1,x} + \frac{1}{2} \delta v_{,x} z w_{,xx} - \frac{1}{2} \delta w_{,x} z v_{,xx} + \delta \theta_{1,xx} \omega z \theta_{1,x}$$

$$\delta \gamma_{13} = \delta \gamma_{13}^0 + \delta \gamma_{13}^1 \quad (2.5.8c)$$

$$\delta \gamma_{13}^0 = \delta \theta_{1,x} (y + \omega_{,z})$$

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_{13}^1 &= \delta w_{,xx}(\omega\theta_{1,x} - \frac{1}{2}y v_{,x} + yz\theta_{1,x}) + \delta v_{,xx}(y^2\theta_{1,x} + \frac{1}{2}y w_{,x}) \\
&+ \delta\theta_{1,x}(y^2 v_{,xx} + \omega w_{,xx} - y\varepsilon_0 - \omega y\theta_{1,xx} + yz w_{,xx}) \\
&- \delta\varepsilon_0 y\theta_{1,x} - \frac{1}{2}\delta v_{,x} y w_{,xx} + \frac{1}{2}\delta w_{,x} y v_{,xx} - \delta\theta_{1,xx} \omega y\theta_{1,x}
\end{aligned}$$

其中 $\delta e_{11}^k, \delta\gamma_{12}^k, \delta\gamma_{13}^k$ ($k=0,1$) 代表 $\delta e_{11}, \delta\gamma_{12}, \delta\gamma_{13}$ 中之 k 次項，因 $\varepsilon_{0,x}=0$ ，所以(2.5.8a)式中含底線____之項可以不考慮。

(2.5.8a)式中之 $\delta\varepsilon_0$ 可將(2.4.26)式變分求得，並表示如下

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{1}{L}(\delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) \quad (2.5.9)$$

2.6 元素節點內力之推導

本文將元素的節點內力 \mathbf{f} 視為作用元素節點的外力。本文利用虛功原理在元素座標上推導元素節點內力。若在元素當前的變形位置給元素節點 j ($j=1,2$) 一個虛位移 $\delta\boldsymbol{\varphi}_j = \{\delta\varphi_{1j}, \delta\varphi_{2j}, \delta\varphi_{3j}\}$ ， $\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\boldsymbol{\beta} = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$ ，則由虛功原理可知

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext} &= \delta\mathbf{q}^t \mathbf{f} = \delta W_{int} \\
&= E \int_V e_{11} \delta e_{11} dV + G \int_V (\gamma_{12} \delta\gamma_{12} + \gamma_{13} \delta\gamma_{13}) dV = \delta\mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta
\end{aligned} \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \quad (2.6.2)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\} \quad (2.6.3)$$

$$\delta\mathbf{q} = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\boldsymbol{\phi}_1, \delta\mathbf{u}_2, \delta\boldsymbol{\phi}_2, \delta\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.6.4)$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\boldsymbol{\theta}_1^*, \delta\mathbf{u}_2, \delta\boldsymbol{\theta}_2^*, \delta\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.6.5)$$

其中 δW_{ext} 為外力所作的虛功， δW_{int} 為內力所作的虛功， $\delta \mathbf{q}_j^* = \{\delta \theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $\delta \mathbf{q}_\theta$ 為元素節點變形參數 \mathbf{q}_θ 受虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 作用引起的變量， $\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}$ 、 $\mathbf{f}_j^\theta = \{f_{1j}^\theta, f_{2j}^\theta, f_{3j}^\theta\}$ 、 $\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}$ 、 $\mathbf{m}_j^\theta = \{m_{1j}^\theta, m_{2j}^\theta, m_{3j}^\theta\}$ ($j=1, 2$)、 $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$ ， f_{ij} 、 f_{ij}^θ 為作用在元素節點 j ， x_i 方向的內力， m_{ij} 為作用在元素節點 j ，繞 x_i 軸的力矩、 m_{ij}^θ 為作用在元素節點 j 的廣義力矩之 x_i 分量， B_j 為作用在元素節點 j 的雙力矩(Bimoment)。

\mathbf{f} 、 \mathbf{f}_θ 為梁元素對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的廣義元素節點內力 $E \int_V e_{11} \delta e_{11} dV + G \int_V (\gamma_{12} \delta \gamma_{12} + \gamma_{13} \delta \gamma_{13}) dV$ 為應力所作的虛功， δe_{11} 、 $\delta \gamma_{12}$ 、 $\delta \gamma_{13}$ 為梁元素對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的虛應變， E 為楊氏模數， G 為剪力模數， V 為梁元素變形前的體積。本文中梁元素的應變、位置向量都表示成節點變形參數 \mathbf{q}_θ 的函數，為了推導上的方便，本文中將內力所作的虛功先表示成等效節點力 \mathbf{f}_θ 對 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 所作的虛功，再由 $\delta \mathbf{q}$ 與 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的關係求得元素的節點內力 \mathbf{f} 與 \mathbf{f}_θ 的關係。

因本文中 e_{11} 、 γ_{12} 、 γ_{13} 僅保留到變形參數到的二次項，所以 \mathbf{f} 保留到變形參數的二次項，因文獻[22]提到 $\theta_{1,x}$ 的三次項不能忽略，所以本文中亦將其保留。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素數目的增加， θ_i ($i=1, 2, 3$) 都會趨近於零、 θ_i/L 和 $\theta_{i,x}$ ($i=1, 2, 3$) 都會趨近於一個常數，文獻[30]中由數值例題發現當元素數目較多時可以將 \mathbf{f} 中含 θ_i ($i=1, 2, 3$) 的二次項忽略，因此本文中在計算元素的節點內力時，將 \mathbf{f} 中含 θ_i ($i=1, 2, 3$) 的

二次項忽略，但保留 θ_i/L 和 $\theta_{i,x}$ ($i=1,2,3$) 的二次項。

由(2.4.4)、(2.4.5)、(2.4.18) 及(2.5.9)式， $\delta\mathbf{q}$ 與 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的關係可以表示如下

下

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta\mathbf{q} \quad (2.6.6)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b1} & \mathbf{T}_{a1} & -\mathbf{T}_{b1} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b2} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{b2} & \mathbf{T}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.6.7)$$

$$\mathbf{T}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\theta_{2j}/L & 0 & 0 \\ -\theta_{3j}/L & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{aj} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{3j}/2 & -\theta_{2j}/2 \\ -\theta_{3j} & 1 + \varepsilon_0 & 0 \\ \theta_{2j} & 0 & 1 + \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2) \quad (2.6.8)$$

其中 $\bar{\mathbf{0}}$ 為 3×2 的零矩陣

將(2.6.1)式代入(2.6.6)式可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.6.9)$$

將(2.6.7)式代入(2.6.9)式，忽略含 θ_i ($i=1,2,3$) 的二次項可得

$$f_{12} = -f_{11} = f_{12}^\theta + \frac{\theta_{21}}{L} m_{21}^\theta + \frac{\theta_{22}}{L} m_{22}^\theta + \frac{\theta_{31}}{L} m_{31}^\theta + \frac{\theta_{32}}{L} m_{32}^\theta \quad (2.6.10)$$

$$f_{21} = -f_{22} = f_{21}^\theta$$

$$f_{31} = -f_{32} = f_{31}^\theta$$

$$m_{11} = -m_{12} = m_{11}^\theta$$

$$m_{21} = (1 + \varepsilon_0)m_{21}^\theta$$

$$m_{31} = (1 + \varepsilon_0)m_{31}^\theta$$

$$m_{22} = (1 + \varepsilon_0)m_{22}^\theta$$

$$m_{32} = (1 + \varepsilon_0)m_{32}^\theta$$

2.6.1 等效節點變形內力 \mathbf{f}_θ 的推導

將(2.5.7)式及(2.5.8)式代入(2.6.1)式中，經整理後 δW_{int} 可寫成

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\text{int}} &= E \int_V e_{11} \delta e_{11} dV + G \int_V (\gamma_{12} \delta \gamma_{12} + \gamma_{13} \delta \gamma_{13}) dV \\
 &= E \int_0^L \left\{ \delta \varepsilon_0 (A \varepsilon_0 + \frac{1}{2} I_p \theta_{1,x}^2 - I_y w_{,xx}^2 - I_z v_{,xx}^2) \right. \\
 &\quad + \frac{\delta \varepsilon_{0,x} (-I_z v_{,x} v_{,xx} - I_y w_{,x} w_{,xx})}{2} \\
 &\quad + \frac{\delta v_{,x} (-I_z \varepsilon_{0,x} v_{,xx}) + \delta w_{,x} (-I_y \varepsilon_{0,x} w_{,xx}) - \delta \theta_1 (I_y - I_z) v_{,xx} w_{,xx}}{2} \\
 &\quad + \delta \theta_{1,x} (I_p \varepsilon_0 \theta_{1,x} + \frac{1}{2} K_I \theta_{1,x}^3) + \delta \theta_{1,xx} (I_\omega \theta_{1,xx}) \\
 &\quad + \delta v_{,xx} [(1 - 2\varepsilon_0) I_z v_{,xx} - I_z \varepsilon_{0,x} v_{,x} - (I_y - I_z) w_{,xx} \theta_1] \\
 &\quad + \delta w_{,xx} [(1 - 2\varepsilon_0) I_y w_{,xx} - I_y \varepsilon_{0,x} w_{,x} - (I_y - I_z) \theta_1 v_{,xx}] \left. \right\} dx \\
 &\quad + G \int_a^b \left\{ \delta w_{,xx} (-\frac{1}{2} J v_{,x} \theta_{1,x}) + \delta v_{,xx} (\frac{1}{2} J w_{,x} \theta_{1,x}) \right. \\
 &\quad + \delta \theta_{1,x} [(1 - 2\varepsilon_0) J \theta_{1,x} + \frac{1}{2} J w_{,x} v_{,xx} - \frac{1}{2} J v_{,x} w_{,xx}] \\
 &\quad + \delta \varepsilon_0 (-J \theta_{1,x}^2) + \delta v_{,x} (-\frac{1}{2} J w_{,xx} \theta_{1,x}) + \delta w_{,x} (\frac{1}{2} J v_{,xx} \theta_{1,x}) \left. \right\} dx
 \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

$$I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA \tag{2.6.12}$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA, \quad I_p = I_y + I_z$$

$$J = \int \{(-z + \omega_y)^2 + (y + \omega_z)^2\} dA$$

$$K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA$$

因 $\varepsilon_{0,x} = 0$ ，所以(2.6.11)式中含底線 _____ 之項可以不考慮。

再將(2.4.20)–(2.4.24)及(2.5.9)式代入(2.6.11)式可得

$$\begin{aligned}
W_{\text{int}} = & \frac{1}{L}(\delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c)[AEL\varepsilon_0 + \frac{1}{2}(EI_p - 2GJ) \int \theta_{1,x}^2 dx \\
& - (1 - \varepsilon_0)EI_y \int w_{,xx}^2 dx - (1 - \varepsilon_0)EI_z \int v_{,xx}^2 dx] \\
& + \delta \mathbf{u}_b [EI_z(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' w_{,xx} \theta_1 dx \\
& + \frac{1}{2}GJ \int (\mathbf{N}_b'' \theta_{1,x} w_{,x} - \mathbf{N}_b' \theta_{1,x} w_{,xx}) dx] \\
& + \delta \mathbf{u}_c [EI_y(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' v_{,xx} \theta_1 dx \\
& + \frac{1}{2}GJ \int (\mathbf{N}_c'' \theta_{1,x} v_{,xx} - \mathbf{N}_c' \theta_{1,x} v_{,x}) dx] \\
& + \delta \mathbf{u}_d [(GJ + (EI_p - 2GJ)\varepsilon_0) \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x} dx + EI_\omega \int \mathbf{N}_d'' \theta_{1,x} dx \\
& + \frac{1}{2}EK_I \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x}^3 dx + E(I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d v_{,xx} w_{,xx} dx]
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

為了表示方便，本文將 \mathbf{f}_θ 拆成以下四個分量

$$\mathbf{f}_a^\theta = \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\}, \mathbf{f}_b^\theta = \{f_{21}^\theta, m_{31}^\theta, f_{22}^\theta, m_{32}^\theta\} \tag{2.6.14}$$

$$\mathbf{f}_c^\theta = \{f_{31}^\theta, m_{21}^\theta, f_{32}^\theta, m_{22}^\theta\}, \mathbf{f}_d^\theta = \{m_{11}^\theta, B_1, m_{12}^\theta, B_2\}$$

其中 \mathbf{f}_i^θ ($i = a, b, c, d$)為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$)的廣義節點變形力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.4.20)–(2.4.23)式及(2.4.30)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。

由(2.6.1)、(2.6.3)、(2.6.5)、(2.6.13)、(2.6.14)式

廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i^θ ($i = a, b, c, d$)可表示如下

$$\mathbf{f}_a^\theta = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AEL\varepsilon_o + \frac{1}{2}(EI_p - 2GJ)] \int \theta_{1,x}^2 dx$$

$$- \frac{(1-\varepsilon_o)EI_y}{2} \int w_{,xx}^2 dx - \frac{(1-\varepsilon_o)EI_z}{2} \int v_{,xx}^2 dx \quad (2.6.15)$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = EI_z(1-\varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + f_{12} \mathbf{G}_b + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' w_{,xx} \theta_1 dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \theta_{1,x} w_{,x} - \mathbf{N}_b' \theta_{1,x} w_{,xx}) dx$$

$$\mathbf{f}_c^\theta = EI_y(1-\varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx + f_{12} \mathbf{G}_c + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' v_{,xx} \theta_1 dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_c' \theta_{1,x} v_{,xx} - \mathbf{N}_c'' \theta_{1,x} v_{,x}) dx$$

$$\mathbf{f}_d^\theta = (GJ + (EI_p - 2GJ)\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x} dx + EI_\omega \int \mathbf{N}_d'' \theta_{1,xx} dx + E(I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d v_{,xx} w_{,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_d' (w_{,x} v_{,xx} - v_{,x} w_{,xx}) dx + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x}^3 dx$$

上列各式的積分範圍是由 0 至 L ，畫底線——之項為與用 Green Strain 推導之元素節點內力不同之項，畫虛底線-----之項為元素較多時會趨近於零的項。

2.7 元素剛度矩陣之推導

依元素切線剛度矩陣的定義 $d\mathbf{f} = \mathbf{k}d\mathbf{q}$ 及(2.6.15)式，元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} 可以表示成[22]

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}} = [\mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_D] \mathbf{T}_{\theta\phi} \quad (2.7.1)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.7.2)$$

$$\mathbf{H}_D = \left. \frac{\partial(\mathbf{T}_{\theta\theta}^t \mathbf{f}_\theta)}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right|_{\mathbf{f}_\theta} \quad (2.7.3)$$

其中 \mathbf{k}_θ^0 為 \mathbf{k}_θ 的零次項， \mathbf{H}_D 為一非對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_{a1} & -\mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (2.7.4)$$

$$\mathbf{h}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L}m_{2j}^\theta & -\frac{1}{L}m_{3j}^\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & m_{3j}^\theta & -m_{2j}^\theta \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_{1j}^\theta \\ 0 & -\frac{1}{2}m_{1j}^\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad (j=1, 2) \quad (2.7.5)$$

其中 $\mathbf{0}_2$ 、 $\mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathbf{0}}$ 為 2×2 、 3×3 及 3×2 的矩陣。

剛度矩陣 \mathbf{k}_θ 可以由以下的子矩陣 \mathbf{k}_{ij}^θ ($i=a, b, c, d, j=a, b, c, d$) 用直接

剛度法組合而成

$$\mathbf{k}_{ij}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_i^\theta}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.7.6)$$

其中 \mathbf{f}_i^θ ($i=a, b, c, d$) 已在(2.6.14)式定義， \mathbf{u}_j ($j=a, b, c, d$) 已在(2.4.20)–(2.4.23)式及(2.4.29)式定義。

\mathbf{k}_{ij}^θ 為一對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{k}_{aa}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_a} = \frac{AE}{L} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t \quad (2.7.7)$$

$$\mathbf{k}_{ab}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_b} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AEG_b^t - \underline{2(1 - \varepsilon_0)EI_z}] \int \mathbf{N}_b''^t v_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{ac}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_c} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AEG_c^t - \underline{2(1 - \varepsilon_0)EI_y}] \int \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{ad}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_d} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [(EI_p - 2GJ)] \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{k}_{bb}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_b} = \frac{EI_z(1 - \varepsilon_0)^2}{L} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx + \underline{f_{12}} \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{bc}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_c} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_1 dx + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_c''^t) \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_d} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,x} - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx}) dx$$

$$\mathbf{k}_{cc}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_c} = \frac{EI_y(1 - \varepsilon_0)^2}{L} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t dx + \underline{f_{12}} \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{cd}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_d} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} - \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_d''^t v_{,x}) dx$$

$$\mathbf{k}_{dd}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^{\theta}}{\partial \mathbf{u}_d} = (GJ + (EI_p - 2GJ)\varepsilon_0) \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t dx + EI_{\omega} \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t dx \\ + \frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x}^2 dx$$

$$\mathbf{k}_{ij}^{\theta} = \mathbf{k}_{ji}^{\theta t}$$

上列各式的積分範圍是由 0 至 L ，畫底線_____之項為與用 Green Strain 推導之元素剛度矩陣不同之項，畫虛底線_____之項為元素較多時會趨近於零的一次

項。另外本文中保留了含 $\theta_{1,x}$ 的二次項。

2.8 系統平衡方程式與收斂準則

結構的非線性平衡方程式，可表示成

$$\Psi(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda_d \mathbf{Q}_d) - \lambda_f \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.8.1)$$

其中 Ψ 為系統的不平衡力， \mathbf{F} 為系統節點內力， \mathbf{Q} 為系統的節點位移， \mathbf{Q}_d 為參考位移負荷向量， \mathbf{P} 為參考力負荷向量， λ_f 為力負荷參數， λ_d 為位移負荷參數，本文中考慮了多階段的加載，但在每一階段僅考慮一個可變動的負荷參數。其中 \mathbf{F} 可由(2.6.14)式中在元素座標上定義的元素節點變形力經座標轉換後組合而成。

本文以不平衡力向量 Ψ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，若負荷為位移負荷時，則平衡迭代的收斂準則可表示成

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N} \|\mathbf{P}_r\|} \leq e_{tol} \quad (2.8.2)$$

其中 N 表離散系統的自由度數， \mathbf{P}_r 為結構整體反力， e_{tol} 是一給定的容許誤差值。

若負荷為力移負荷時，則平衡迭代的收斂準則可表示成

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N} |\lambda_f| \|\mathbf{P}\|} \leq e_{tol} \quad (2.8.3)$$

第三章 數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式(2.8.1)式的數值計算方法是基於牛頓—拉福森(Newton-Raphson)法配合弧長控制法(arc length control)的增量迭代法[1,22]。本文中以系統切線剛度的行列式值為零當作挫屈的準則，為了求得挫屈負荷，本文採用二分法[1,22]，決定增量位移的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了求得次要平衡路徑，本文中在平衡路徑的第一個挫屈負荷分歧點加入一個與第一挫屈模態向量方向一致的擾動位移。

3.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，則在此位置的系統切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 可以求得，且第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值(Euler predictor)求得

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{Q}_T, \quad (3.1)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， $\mathbf{Q}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}_{ref}$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 的切線解。 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出[1,22]

$$\Delta\lambda = \pm \Delta\ell / (\mathbf{Q}_T^t \mathbf{Q}_T)^{1/2}, \quad (3.2)$$

其中正負符號之決定方法如下：若第 I 與 $I-1$ 個增量收斂時，系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 Δl 表第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定

$$\Delta l = (J_D/J_I)^{1/2} \Delta l_I, \quad (3.3)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量，迭代至平衡所使用的迭代次數， Δl_I 為第 I 個增量的增量弧長。

本文中第一個增量的增量弧長 Δl_1 是由下式決定

$$\Delta l_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|} \quad (3.4)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 作用下的系統線性解 \mathbf{R}_0 的 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量的絕對值。

在平衡迭代時增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ 及增量負荷 $\Delta\lambda$ 已知，由 $\Delta\mathbf{Q}$ 可求得梁結構新的變形位置。再利用 2.7 與 2.8 節的方法，求得元素座標上的節點內力及剛度矩陣。而對應此位置的負荷參數為 $\lambda = \lambda_I + \Delta\lambda$ ，其中 λ_I 為第 I 個增量達平衡時的負荷參數， $\Delta\lambda$ 即增量負荷參數。當系統內力及外力求得後，不平衡力量 Ψ 向量可由 (2.8.1) 式求得。若 (2.8.2) 或 (2.8.3) 式的收斂準則不能滿足，則利用定弧長控制法，求得一位移修正量 $\delta\mathbf{Q}$ 與負荷參數修正量 $\delta\lambda$ ，

並加入前一次迭代的 $\Delta\mathbf{Q}$ 與 $\Delta\lambda$ 中，而得一新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次的迭代。 $\delta\mathbf{Q}$ 與 $\delta\lambda$ 可由下列二式決定

$$\delta\mathbf{Q} = \mathbf{K}_T^{-1}(-\boldsymbol{\psi} + \delta\lambda\mathbf{P}) \quad (3.5)$$

$$\Delta\ell^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q})^t (\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}) \quad (3.6)$$

以上之迭代計算過程一直重覆至滿足(2.8.2)或(2.8.3)式的收斂準則為止。

3.2 二分法

利用3.1節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構切線剛度矩陣的行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 $I+1$ 的增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 $\Delta\ell_{I+1}$ 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{NB} ：

(1) 令 $\Delta\ell_L = 0, \Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}, \lambda_L = \lambda_I, \lambda_R = \lambda_{I+1}$ ，其中下標 L 及 R 表示左界及右界。

(2) 取 $\Delta\ell_{I+1} = \frac{\Delta\ell_L + \Delta\ell_R}{2}$ ，重作第 $I+1$ 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。

(3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}, \Delta\ell_L = \Delta\ell_{I+1}$

若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}, \Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}$

(4) 若下列二式挫屈誤差準則同時滿足

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D \quad (3.7)$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda \quad (3.8)$$

其中 e_D 及 e_λ 為給定的容許誤差值

則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。

經由二分法求得挫屈負荷 λ ，再利用系統切線剛度 $\mathbf{K}(\lambda)$ 計算挫屈模態，以下將說明挫屈模態的計算程序

- (1) 將 $\mathbf{K}(\lambda)$ 分解成一下三角矩陣 \mathbf{L} 及上三角矩陣 \mathbf{U} 使 $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$ ，其中 \mathbf{L} 的對角線元素值皆為 1。
- (2) 找出矩陣 \mathbf{U} 主對角線元素之絕對值有最小值的行令為第 I 行。
- (3) 令模態第 I 個分量 $\Theta_I = 1$ ，再將 $\mathbf{K}\Theta = \mathbf{0}$ 改寫成下式

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,I-1} & 0 & K_{1,I+1} & \cdots & K_{1,N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ K_{I-1,1} & & & 0 & & & K_{I-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{I+1,1} & & & 0 & & & K_{I+1,N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ K_{N+1,1} & & & 0 & & & K_{N,N} \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{I-1} \\ \Theta_I \\ \Theta_{I+1} \\ \vdots \\ \Theta_N \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} -K_{1,I} \\ \vdots \\ -K_{I-1,I} \\ 1 \\ -K_{I+1,I} \\ \vdots \\ K_{N,I} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (3.9)$$

(4) 用高斯消去法求解(3.9)式得到模態 Θ

(5) 將 Θ 除以其分量中絕對值最大的分量 Θ_{\max} ，即

$$\bar{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta_{\max}} \quad (3.10)$$

3.3 N 循環迭代法

在計算元素的剛度矩陣及節點內力時，必須使用形心的正應變 ε_c 。對某些問題，最初幾次迭代之形心正應變會比其收斂值的階數(order)大很多，因此可能引起平衡迭代收斂困難或發散。為了改善收斂情況，本文採用了 N 循環迭代法[31]，並說明如下：

在第一次循環迭代中，(2.6.15)式及(2.7.7)式中，除了(2.6.15)式的 \mathbf{f}_a 及(2.7.7)式中的 \mathbf{k}_{aa} 使用目前變形的形心正應變外，其餘部份皆使用上一個增量收斂的形心正應變來計算元素的節點力與剛度矩陣。

在第 I 次($I > 1$)循環迭代中，除了(2.6.15)式之 \mathbf{f}_a 及(2.7.7)式中的 \mathbf{k}_{aa} 使用目前形心正應變來計算外，其餘的節點力與元素剛度矩陣皆使用前一次循環迭代收斂的形心正應變來計算。此種循環迭代一直進行到相鄰兩循環中元素的收斂軸力之差異小於給定的容許誤差才停止。

第四章 數值例題之結果與討論

4.1 E 元素與 G 元素的比較

本節中將以採用工程應變(Engineering strain)和 Green strain 推導的元素分析數值例題，並比較其結果。為了方便稱呼，本文將這兩種元素稱為 E

及 G 元素，並將其節點內力並列於附錄 B 中。本章中令 $P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_z}{L_T^2} (I_y \geq I_z)$

為固端梁受軸向力之挫屈負荷的線性解析解，WF 為自由翹曲 (Warping free) 邊界，WR 為抑制翹曲(Warping restraint) 邊界。

例題一：固端梁受端點扭角

本例題考慮，如圖四所示，一長度為 L_T 的圓形斷面梁，其 A 端為固定端，B 端只允許扭轉且承受扭轉角 ϕ 的位移負荷，兩端皆為 WF 邊界。本例題之 $L_T = 300$ 、 1200 mm，斷面半徑 $r = 0.5$ mm，楊氏模數 $E = 57 \times 10^3$ N/mm²，剪力模數 $G = 20 \times 10^3$ N/mm²。本例題分析時使用 50 個元素，容許誤差 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 。圖五、圖六為本文的分析結果。由圖五可看出梁的軸力會隨 ϕ/L_T 增加而增加；採用 E 元素分析的軸力比用 G 元素分析的軸力大，且 ϕ 越大兩者間的差異也就越大。本例題之軸向及側向位移皆為零，扭轉率 $\theta_{1,x} = \phi/L_T$ 為一常數。由附錄 B 的(B1)式可知本例題之端點軸力 P 可表示成

$$P_E = \left(\frac{1}{2}EI_p - GJ\right)\left(\frac{\phi}{L_T}\right)^2$$

及

$$P_G = \frac{1}{2}EI_p\left(\frac{\phi}{L_T}\right)^2$$

由上式可知端點軸力 P 與 ϕ/L_T 的平方成正比。因圓形斷面之 GJ 與 $\frac{1}{2}EI_p$ 相當接近，所以本例題中 E 元素與 G 元素之軸力有相當的差異。因圓形桿件的

最大剪應變為 $\gamma = r\theta_{1,x}$ ，圖五中之最大扭轉率約為 0.01，所以本例題的最大

剪應變為 $\gamma_{\max} = 5 \times 10^{-3}$ 。固端梁受軸向力的挫屈應變為 $\varepsilon_{cr} = \frac{4\pi^2}{\eta^2}$ ，其中

$\eta = \sqrt{\frac{AL_T^2}{I}}$ 為梁的細長比。由上式可知本例題 $L_T = 300 \text{ mm}$ 及 1200 mm 之梁

的 ε_{cr} 分別為 2.74156×10^{-5} 及 1.71347×10^{-6} ，所以圖五中之最大軸向拉應

變雖然很小，但其大小已超過 $L_T = 1200 \text{ mm}$ 之梁的挫屈壓應變。由附錄 B

的(B8)式可知本例題之端點扭矩 M 可表示成

4.2 固端梁受端點軸向位移之挫屈及挫屈後行為

本節中探討，如圖七所示，長度為 L_T 的梁，其 A 端為固定端，B 端只允許軸向位移且承受 Δ 的位移負荷。當軸向壓縮位移到達某一臨界值時，

會造成一面內(In plane)的挫屈，即所謂的尤拉挫屈(Euler buckling)，本文中稱其為第一次挫屈，該臨界壓縮位移用 Δ_{cr1} 表示。當軸向壓縮位移超過 Δ_{cr1} 的固端梁，文獻上稱其為挫屈梁[1,2,3]。挫屈梁受軸向壓縮位移 Δ 的主要平衡路徑，即原固端梁的次要平衡路徑，為一穩定的平衡路徑[19,20,21]。當軸向壓縮位移到達某一臨界值時，挫屈梁會發生一面外(Out of plane)的側向一扭轉挫屈[19,20,21]，本文與[19]一樣，稱其為第二次挫屈(Secondary buckling)，本文中用 Δ_{cr2} 表示該臨界壓縮位移。本節將分析不同斷面及

WF、WR 對二次挫屈及挫屈後形為的影響，為了方便稱呼，本節令 $\beta = \frac{EI_y}{GJ}$

表示撓曲一扭轉剛度比， $\gamma = \frac{EI_y}{EI_z} = \frac{I_y}{I_z}$ 表示撓曲一撓曲剛度比， $\alpha = \frac{EI_\omega}{GJL_T^2}$ 表

示翹曲一扭轉剛度比， $P^* = \frac{PL_T^2}{EI_y}$ ， $M^* = \frac{ML_T}{EI_y}$ ，其中 I_y 與 I_z 分別為斷面慣

性矩的最小值與最大值， Δ_{cr1} 、 P_{cr1} 、 M_{cr1} 為固端梁受軸向壓縮的第 I 次挫屈位移、挫屈負荷、端點反力矩之非線性有線元素法的數值解。

例題二：固端梁端點受軸向壓縮位移

為了探討不同斷面二次挫屈及挫屈後行為，本例題考慮了 4 個 Case：

Case1 與 Case2 為圓形斷面(圖七之斷面(a))， $L_T = 300\text{mm}$ ， $r = 0.5\text{mm}$ ，Case1 之楊氏模數 $E = 40 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ ，剪力模數 $G = 20 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ ，Case2 之楊氏模數 $E = 57 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ ，剪力模數 $G = 20 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ 。Case3 為矩形

斷面(圖七之斷面(b))， $a = 2\text{mm}$ ， $b = 1\text{mm}$ ，Case4 為十字形 A 斷面(圖七之斷面(d))， $a = 1.5\text{mm}$ ， $b = 1\text{mm}$ ， $t = 0.2\text{mm}$ ， $n = 2$ 。Case3 與 Case4 之 $L_T = 1600\text{mm}$ ，楊氏係數 $E = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ ，剪力模數 $G = 7.9 \times 10^4 \text{N/mm}^2$ 。本例題的 Case1 考慮 WF 與 WR 兩種翹曲邊界條件，Case2-4 都僅考慮 WR 一種翹曲邊界條件。本例題平衡迭代收斂的容許誤差為 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 。本例題分析 Case1(WF)時，使用的是 E 與 G 元素，分析 Case1(WR)時使用的是 E 元素，Case1 使用的元素數目皆為 50、100、300 三種，分析 Case2-Case4 使用的皆是 E 元素，Case2 的元素數目為 300，Case3 使用的元素數目為 200、400 兩種，Case4 使用的元素數目為 400。表一-表六及圖八一圖四十二為本文分析的結果。圖八及九為 Case1(WF)之無因次切線剛度的行列式值 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線，其中 $\det \mathbf{K}$ 和 $\det \mathbf{K}_0$ 分別為切線和線性剛度的行列式值，表一為第一次挫屈時，端點 B 的無因次壓縮位移 Δ_{cr1} / L_T 及無因次反力 $P_{cr1} L_T^2 / EI_y$ 和第二次挫屈時，端點 B 的無因次壓縮位移 Δ_{cr2} / L_T 及無因次反力 $P_{cr2} L_T^2 / EI_y$ 。因在第一次挫屈前，不同種類及數目之元素得到的 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ - Δ / L_T 曲線都重合，所以圖八中沒有標示元素的種類及數目。由圖九可發現在第一次挫屈後、第二次挫屈前，不同種類及數目之元素得到的 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ - Δ / L_T 曲線有很大的差異，在第一次挫屈後、第二次挫屈前，所有 E 元素和 300 個 G 元素的 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ 值都是正的，所以在第一次挫屈後、第二次挫屈前之固端梁應是穩定的，但 G 元

素數目為 50 和 100 時，在第一次挫屈後，其 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ 值是由負的再轉正，這應是元素的數目不足造成的數值上的誤差，但由表一及圖九可發現用不同種類及數目之元素偵測到的第二次挫屈負荷都很接近。因元素數目不夠多時，無法求得第二次挫屈後的平衡路徑，所以圖九中，在第二次挫屈後僅有 300 個元素的 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0 - \Delta / L_T$ 曲線，第二次挫屈後 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ 值是負的，所以在第二次挫屈後之固端梁是不穩定的。由表一知 E 元素與 G 元素分析結果差異很小。由表一可知圓形斷面之 WR 與 WF 的結果差異很小。圓形斷面之翹曲函數為零，所以理論上圓形斷面應無 WR 的邊界條件，但 WR 與 WF 之有限元素法的結果似乎沒有明顯的差別。由於 Case3 之 Δ_{cr2} / L_T 較大，變形較大，元素數目低於 200 時，平衡迭代時收斂困難無法求得 Δ_{cr2} 。由本例題可知分析固端梁之第二次挫屈及挫屈後行為需要 300 個以上的元素，平衡迭代時較易收斂，且結果較準確，所以本章中以後圓形斷面的例題使用的元素數皆取 300，非圓形斷面使用的元素數皆取 400。

本例題的圖十一圖四十二中的 Case1，除非另有說明，都是指 Case1(WR)。圖十為端點 B 在 X_1^G 方向的無因次反力 $P_{cr2} L_T^2 / EI_y -$ 無因次軸向位移 Δ / L_T 曲線，其中 Case1 及 Case2 是 300 個 E 元素的結果，Case3 及 Case4 是 400 個 E 元素的結果。圖中可以發現在第一次挫屈前，各 Case 之反力 $PL_T^2 / EI_y - \Delta / L_T$ 曲線幾乎為一垂直線，這是因第一次挫屈前的變形

主要是軸向壓縮變形，其值非常小；在第一次挫屈後，第二次挫屈前，各 Case 有相同的次要平衡路徑，這是可預期的結果，因第二次挫屈前的變形主要是撓曲變形。圖中亦可發現在第一次挫屈後，第二次挫屈前，其軸力會隨著位移的增加而增加，所以為穩定的平衡路徑；第二次挫屈後其軸力會隨著位移的增加而減小，所以在第二次挫屈後之固端梁是不穩定的，以上的結果與圖九的結果是一致的。由圖十還可以看出本文 Case2 的結果與文獻[20]的結果幾乎重合，本文中將圖十曲線上一部分點的座標列於表二-表五中，由圖十及表二-表五可以發現各 Case 的 Δ_{cr2}/L_T 都不同，這可能是不同 Case 的斷面剛度比 β 、 γ 及 α 的值都不一樣造成的，本節將在下一個例題中進一步探討梁的斷面剛度比 β 、 γ 及 α 對 Δ_{cr2}/L_T 的影響。圖十一為挫屈梁受端點軸向位移之主要平衡路徑的變形圖，表六為與圖十一對應的中心點 C 在 X_3^G 方向的位移、端點 B 之反力、反力矩，由圖中可以發現當挫屈梁之無因次端點位移 $\Delta/L_T \geq 0.85$ 時，挫屈梁在其主要平衡路徑上會互相接觸，所以第二次挫屈之挫屈位移 $\Delta_{cr2}/L_T \geq 0.85$ 的情況，在實際上應不會發生。本文中並未考慮接觸問題，所以當 $\Delta/L_T \geq 0.85$ 時，本文之挫屈梁在其主要平衡路徑上的分析結果應與實際情況不符。圖十二-圖十四為 Case1 之第一次挫屈挫屈模態與第二次挫屈挫屈模態，圖中 X 為梁軸之無因次總體(global) Lagrange 座標。圖十五-圖十七為端點 B 在總體座標軸方向的反力矩-軸向位移 Δ/L_T 曲線，圖十八與圖十九分別為梁中心點 C 在總體

座標軸 X_1^G 方向的位移 $-U_1/L_T$ 及 X_3^G 方向的位移 δ/L_T 一軸向位移 Δ/L_T 曲線。本文中將圖十五-圖十九曲線上一部分點的座標列於表二-表五中，因在 B 點之斷面方向是固定的，所以 B 點之斷面座標軸和總體座標軸的方向一致，故圖十與圖十五-圖十七 B 點在總體座標軸方向的反力(反力矩)亦為 B 點在斷面座標軸方向之內力的合力(合力矩)，由圖十與圖十五-圖十七及表二-表五可以看出在相同的壓縮位移下二次挫屈前 Case1-Case4 端點 B 有相同的反力(反力矩)，二次挫屈後則有類似的變化趨勢。由圖十八及表二-表五可看出梁中心點 C 在 X_1^G 方向的位移為軸向位移的一半，這是可預期的結果，因在此例題中挫屈梁的變形對中心點 C 是對稱的。由圖十八、圖十九可看出第二次挫屈前，Case1-Case4 之 C 點的位移曲線重合。圖二十-圖二十四為 Case1 在無因次壓縮位移 $\Delta/L_T = 0.5, 0.75, 0.811$ 時之變形圖，圖二十五-圖三十一為 Case3 在無因次壓縮位移 $\Delta/L_T = 0.7736, 0.8225, 0.8307, 0.8528, 0.9051$ 時之變形圖，圖三十二-圖三十四為 Case4 在無因次壓縮位移 $\Delta/L_T = 0.7155, 0.7350, 0.8003, 0.8501$ 時之變形圖，由圖二十-圖三十四可看出挫屈梁在第二次挫屈後的變形對中心點 C 仍是對稱的。圖三十五-圖三十八為 Case1 在無因次壓縮位移 $\Delta/L_T = 0.5, 0.75, 0.811$ 時，斷面座標軸方向之內力的合力(合力矩)沿變形軸的分布曲線，圖三十九-圖四十二為 Case3 在無因次壓縮位移 $\Delta/L_T = 0.7736, 0.8307, 0.9051$ 時，斷面座標軸方向之內力的合力(合力矩)沿變形軸的分布曲線。圖中 X 為梁軸之無因次

總體(global) Lagrange 座標。固端梁在第一次挫屈發生時，所有梁斷面都是承受相同的軸向壓力，由圖三十五及圖三十九可以看出在第二次挫屈前，梁端點及中點有最大的軸向壓力，在 $X = 1/4$ 及 $3/4$ 處有最小的軸力；在 $\Delta/L_T = 0.5$ 時，最小的軸力仍為壓力，但 $\Delta/L_T = 0.7736$ 時，最小的軸力已變為拉力，不過曲線的分佈趨勢差異不大。在第二次挫屈後，軸力分布曲線的式樣變化不大，但整條曲線向下移動，且梁中點有最大的軸向壓力。圖三十六及圖四十中 M_y 為斷面主軸 X_2^S 方向所受的力矩，由圖三十六及圖四十可見在第二次挫屈後，梁中心部分之 M_y 的大小，隨 Δ/L_T 增加，先增加再減小，但兩端之 M_y 的大小隨 Δ/L_T 增加而減小。圖三十七與圖四十一中 M_z 為斷面主軸 X_2^3 方向所受的力矩，由圖三十七及圖四十一可見在第二次挫屈後 M_z 分佈的式樣變化不大。圖三十八與圖四十二中 M_x 為斷面主軸 X_1^S 方向所受的扭矩，由圖三十八可看出 Case1 的 M_x 沿梁軸的變化非常的微小，但由圖四十二可看出 Case3 的 M_x 沿梁軸的變化相當的大，在梁中點有最小值，且呈類似 W 字形對稱分佈，但兩 Case 之 M_x 皆隨著 Δ/L_T 增加而增加。Case1 的 $I_y = I_z$ ，若假設梁為不可伸縮的(Inextensible)，則 Case1 的 M_x 沿梁軸的分布是均勻的[20]。本研究雖考慮軸向變形，但軸向應變很小，所以 M_x 沿梁軸的分布雖不均勻，但變化很小。Case3 的 $I_y \neq I_z$ ，所以 M_x 沿梁軸的分布是不均勻的。

例題三：斷面剛度比 β 、 γ 、 α 及翹曲邊界條件對第二次挫屈挫屈負荷的影響

由例題二可發現梁的斷面剛度比 β 、 γ 、 α 及翹曲邊界條件 WF 及翹曲邊界條件 WR 對固端梁之第二次挫屈挫屈負荷 Δ_{cr2}/L_T 有影響，但探討的斷面種類太少，且翹曲一扭轉剛度比 α 太小，無法確定不同斷面、翹曲剛度及翹曲邊界條件對第二次挫屈挫屈負荷的影響。為了探討不同斷面及翹曲邊界條件對固端梁之第二次挫屈挫屈負荷的影響，本例題考慮了 10 個 Case，為了說明上方便，將其稱為 A1-A10，其中 A1-A5 為圓形斷面(圖七之斷面(a))，A6 為矩形斷面(圖七之斷面(b))，A7 為十字形斷面(圖七之斷面(c))，A8 為十字形 A 斷面(圖七之斷面(d))，A9 與 A10 則為 I 形斷面(圖七之斷面(e))，各 Case 的斷面性質列於表七-表九中。本例題擬探討具相同 β 及 γ 之不同斷面的第二次挫屈挫屈負荷，但設計具相同 β 及 γ 之不同斷面相當繁瑣，且不一定存在，所以本節取有相同 γ 之不同斷面 A3-A8，利用 A6-A8

斷面之 β 值、A3-A5 之 EI_y 值及 $\beta = \frac{EI_y}{GJ}$ 算出 A3-A5 斷面的扭轉剛度 GJ 的

值，再由 A3-A5 之 J 值可算出對應的 G 值，但該 G 值在真實的等向性材料中也許不存在。A3-A5 的斷面剛度，除了扭轉剛度外，都是取圓形斷面的剛度。本例題平衡迭代收斂的容許誤差為 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 。表十與表十一為本例題的結果。表十為不同翹曲邊界條件的第二次挫屈挫屈位移，表十一為 WR 邊界條件的第二次挫屈位移、端點反力及力矩。表十中， $I_{\omega} = 0$ 表示分

析時不考慮翹曲剛度，由表十可看出 $I_{\omega}=0$ 時，WR 與 WF 的第二次挫屈的挫屈位移差異很小；A1-A5 之 $I_{\omega}=0$ ，所以考慮與不考慮翹曲剛度的結果是一樣的；除了 A9、A10 外，WR 與 WF 的第二次挫屈的挫屈位移差異都很小，這應是 A9、A10 有較大翹曲一扭轉剛度比 α 。由表十與表十一亦可看出 β 及 γ 對第二次挫屈的挫屈位移及挫屈反力有很大的影響， β 及 γ 越小， Δ_{cr2}/L_T 的值越大；A3 與 A6、A4 與 A7、A5 與 A8 之第二次挫屈的無因次挫屈位移及無因次挫屈反力幾乎相同，似乎不同斷面有相同之 β 及 γ 時，若 α 不太大，即使 α 及翹曲邊界條件不同，其第二次挫屈的挫屈位移及挫屈反力幾乎相同，所以本章以後探討第二次挫屈的例題時，僅考慮 WR 翹曲邊界條件，且僅考慮 β 及 γ 的影響。

例題四：不同矩形斷面梁之第二次挫屈挫屈負荷

由例題二及三可以發現矩形斷面梁之第二次挫屈挫屈位移會隨斷面參數比 a/b 增加而增加，本例題擬進一步探討 a/b 對第二次挫屈挫屈負荷的影響。本例題的斷面為圖七之斷面(b)，高度 $b = 1 \text{ mm}$ ，長度 $L_T = 1600 \text{ mm}$ ，楊氏係數 $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ，剪力模數 $G = 7.9 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ，寬度有十種情況，分別是 $a(\text{mm}) = 1、1.01、\sqrt{2}、1.5、2、2.5、2.6、2\sqrt{2}、3、10$ ，其斷面性質列於附錄 C 中。本例題平衡迭代收斂的容許誤差為 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 。表十二與圖四十三、圖四十四為本例題分析的結果。表十二為不同矩形斷面

之第二次挫屈挫屈的挫屈位移、端點反力及力矩，由表十二可以發現第二次挫屈挫屈位移隨 a/b 增加而增加；當 $a/b \geq 2.6$ 時，第二次挫屈挫屈位移 $\Delta_{cr2}/L_T \geq 0.85$ 。如前所述， $\Delta/L_T \geq 0.85$ 時，梁已互相接觸，所以 $a/b \geq 2.6$ 時，表中的第二次挫屈位移僅供參考，實際上應不存在。由表十二亦可以發現第二次挫屈挫屈位移隨 β 、 γ 減少而增加，這與例題四之結果的趨勢是一致的。圖四十三與圖四十四為 $a/b = 1$ 、 $\sqrt{2}$ 、 2 、 2.5 時之挫屈模態，由圖四十三與圖四十四可以看出當 a/b 越大時，挫屈模態的 X_2^G 方向位移分量之分佈曲線變化越大，而挫屈模態的繞 X_1^G 方向轉角分量之分佈曲線變化相對變小，但挫屈模態的形狀大致相同。

例題五：不同十字形 A 斷面之第二次挫屈挫屈負荷

由例題四發現 β 、 γ 同時減少時，第二次挫屈位移會增加。本例題擬探討 β 、 γ 同時增加時，對第二次挫屈位移的影響。本例題的斷面為圖七之斷面(d)，本例題考慮了七種情況，分別是 $a(mm) = 0.7$ 、 1 、 1.5 、 2 、 2.5 、 3 、 3.02924 ， $b = 1mm$ ， $t = 0.2mm$ ， $n = 2$ ，長度 $L_T = 1600mm$ ，楊氏係數 $E = 2 \times 10^5 N/mm^2$ ，剪力模數 $G = 7.9 \times 10^4 N/mm^2$ ，其斷面性質列於附錄 E 中，本例題平衡迭代收斂的容許誤差為 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 。表十三為本例題分析的結果，由表十三可以發現第二次挫屈的挫屈位移隨 β 、 γ 增加而減少，由表十二和表十三可發現當 $\beta \geq 1$ 時，即使 γ 的值很小， Δ_{cr2}/L_T 仍小於 0.85 ，即仍會發生第二次挫屈。

例題六：不同 γ 與 β 之固端梁之二次挫屈位移

本例題擬探討 γ 固定時， Δ_{cr2}/L_T 與 β 的關係曲線。本例題考慮了四個 γ ，分別是 $\gamma=1$ 、 0.5 、 0.25 及 0.125 。如前所述，設計具相同 γ 不同 β 之斷面相當繁瑣，且不一定存在，所以本例題將取一具選定之 γ 的斷面，利用該斷面之 EI_y 值、 $\beta = \frac{EI_y}{GJ}$ 及 β 值($0.5 \leq \beta \leq 1000$)，算出斷面的扭轉剛度 GJ 的值。 $\gamma=1$ 時，本例題考慮了十字形 A 斷面(圖七之斷面(d))，其斷面參數 $a=3.02924\text{ mm}$ ， $b=1\text{ mm}$ ， $t=0.2\text{ mm}$ ， $n=2$ 。 $\gamma=0.5$ 、 0.25 及 0.125 時，其斷面皆採用矩形斷面(圖七之斷面(b))，其斷面參數 a 分別為 $\sqrt{2}\text{ mm}$ 、 2 mm 、 $2\sqrt{2}\text{ mm}$ ， b 皆為 1 mm 。本例題皆採用長度 $L_T=1600\text{ mm}$ ，楊氏係數 $E=2 \times 10^5\text{ N/mm}^2$ ，剪力模數 $G=7.9 \times 10^4\text{ N/mm}^2$ ，平衡迭代收斂的容許誤差為 $e_{tol}=1 \times 10^{-6}$ 。表十四及圖四十五-圖四十七為本例題分析的結果。如前所述， Δ_{cr2}/L_T 大於 0.85 的情況，實際上應不會發生，由表十四及圖四十五可知，本例題考慮的四個 γ ，當 $\beta > 0.9$ 時皆會發生第二次挫屈，且相同 β 下， γ 越小，第二次挫屈挫之屈位移越大，圖四十五中本文 $\gamma=1$ 的結果與文獻[19]的結果非常接近，文獻[19]的結果是由文獻[19]的圖量測而得。文獻[19]提到當 $\gamma=1$ ， $\beta=\infty$ ， $\Delta_{cr2}/L_T=0.371$ ，由表十四可知 $\beta=1000$ ，本文的結果是 $\Delta_{cr2}/L_T=0.371592$ ，兩者是一致的。圖四十六、圖四十七為 $\gamma=1$ 、 0.5 、 0.25 及 0.125 時 $\beta=2.5$ 之挫屈模態，由圖四十六可以看出當 γ 越小時梁的挫屈模態的 X_2^G 方向位移分量之分佈曲線變化越大，但挫屈模態的形狀大致相

同，由圖四十七可以看出挫屈模態的繞 X_1^G 方向轉角分量之分佈曲線於 $X=0.3-0.7$ 間，其形狀有相當的變化。

4.3 挫屈梁受側向負荷之幾何非線性分析

本節中所探討的挫屈梁與 4.2 節中的挫屈梁定義相同，但本節中，如圖四十八所示，先將挫屈梁的兩端都固定，然後，如圖四十九所示，在挫屈梁中點 C 施加側向的位移負荷 w 。本節中僅考慮如圖四十八所示之矩形斷面梁，其長度為 L_T ，斷面寬為 a ，高為 b 。令 δ 為挫屈梁受軸向壓縮 Δ 時，中點 C 的初始側向高度，在圖十九及表二-表五中可以找到 δ 與 Δ 的關係。探討挫屈梁受側向負荷之非線性行為的文獻很多，但都為二維的分析，即僅考慮面內(in-plane)的變形及挫屈。本節將分析不同軸向壓縮 Δ (或拱起高度 δ) 的挫屈梁， C 點受到側向集中位移負荷時的三維非線性挫屈及挫屈後行為。為了稱呼上方便，本節稱挫屈梁受側向位移負荷時，其主要平衡路徑上的第一及第二個分歧點為第一次挫屈及第二次挫屈，令 w_{crI} 、 F_{crI} 為第 I 次挫屈位移、挫屈負荷之非線性有線元素法的數值解。

例題七：挫屈梁受側向負荷之三維非線性挫屈及挫屈後行為分析

本例題探討如圖四十八及四十九所示一矩形斷面之挫屈梁於端點施加 Δ 的位移負荷，當 C 點拱起高度達 δ 時，將端點固定，於 C 點施加一個側向的位移負荷 w 。本例題之斷面及材料常數如下： $a=2mm$ ， $b=1mm$ ，長度

$L_T=1600mm$ ，楊氏係數 $E=2\times 10^5 N/mm^2$ ，剪力模數 $G=7.9\times 10^4 N/mm^2$ 。本例題平衡迭代收斂的容許誤差為 $e_{tol}=1\times 10^{-6}$ 。表十五與圖五十-圖八十七為本例題的結果。表十五為不同軸向壓縮 Δ 的挫屈梁，中點 C 的初始側向高度 δ 、主平衡路徑上的第 I ($I=1, 2$) 次挫屈位移 w_{crI} 及對應的挫屈模態的種類。對應於不同 Δ 之挫屈模態有三種，本文中依 Δ 增加時，挫屈模態發生的順序，稱其為挫屈模態 A、B、C。圖五十、圖五十一為挫屈模態 A，該模態為一面內挫曲模態；圖五十二、圖五十三為挫屈模態 B，該模態為一繞 X_1^G 軸旋轉之面外挫屈；圖五十四、圖五十五為挫屈模態 C，該模態為一繞通過梁中心點 C 且平行 X_3^G 的軸旋轉之面外挫屈。圖五十六為此三種挫屈模態之挫屈位移 w_{cr}/L_T -軸向壓縮 Δ/L_T 曲線。由表十五及圖五十六可知，當 $\Delta/L_T \leq 0.14406$ ，挫屈梁會先發生面內挫屈，即挫屈模態 A，其挫屈位移 w_{cr}/L_T 隨 Δ/L_T 增加而增加；當 $0.14438 \leq \Delta/L_T \leq 0.7805$ ，挫屈梁會先發生繞 X_1^G 旋轉之面外挫屈，即挫屈模態 B，其挫屈位移 w_{cr}/L_T 也隨 Δ/L_T 增加而增加；當 $\Delta/L_T \geq 0.78056$ 則先發生繞通過梁中心點 C 且平行 X_3^G 的軸旋轉之面外挫屈，即挫屈模態 C，其挫屈位移 w_{cr}/L_T 隨 Δ/L_T 增加而減小。本節中詳細探討了 $\Delta/L_T=0.03125、0.3125、0.8$ 的挫屈梁受側向的位移負荷 w 之挫屈及挫屈後行為。圖五十七-圖六十二為 $\Delta/L_T=0.03125$ 之挫屈梁的分析結果，圖五十七為梁中心點 C 在 X_3^G 方向反力 FL_T^2/EI_y - C 點 X_3^G 方向的位移 w/L_T 曲線，圖中分歧點前的實線為挫屈前的主要路徑、虛線為挫屈後

之主要路徑，分歧點後的實線為次要路徑。由圖五十七可知挫屈後中心點 C 的反力會隨著位移的增加而減小，所以 $\Delta/L_T \leq 0.14406$ 之挫屈梁挫屈後是不穩定的。圖五十八為挫屈後，梁中心點 C 在 X_3^G 方向的位移 $w/L_T = 2.4275 \times 10^{-3}$ ， 2.7481×10^{-3} ， 4.1025×10^{-3} ， 14.7088×10^{-3} 時之變形圖，圖五十九為 $w/L_T = 0.0598$ 時之變形的立體圖，由圖五十八、五十九可知挫屈後的變形是非對稱的。圖六十-圖六十二為端點 A 反力、反力矩- C 點在 X_3^G 方向的位移 w/L_T 曲線，由圖六十與圖六十一可知挫屈前端點反力 F_{AX} 、 F_{AZ} 隨著 w/L_T 增加而增加，挫屈後其值繼續增加但上升緩慢，尤其是 F_{AX} 幾乎停滯。由圖六十二可知挫屈前其端點 A 反力矩 M_{AY} 隨 w/L_T 增加而減小，挫屈後其值繼續下降最後轉為負值。圖六十三-圖七十四為 $\Delta/L_T = 0.3125$ 之挫屈梁的分析結果。圖六十三為梁中心點 C 在 X_3^G 方向的反力 FL_T^2/EI_y - C 點在 X_3^G 方向的位移 w/L_T 曲線，圖中分歧點前的實線為挫屈前的主要路徑、虛線為挫屈後之主要路徑，分歧點後的實線為次要路徑。由圖六十三可知挫屈後中心點 C 反力會隨著位移的增加而減小，所以 $0.14438 \leq \Delta/L_T \leq 0.7805$ 之挫屈梁，挫屈後也是不穩定的。圖六十四-圖六十六為梁中心點 C 在 X_3^G 方向的位移 $w/L_T = 6.4019 \times 10^{-3}$ 、 11.4944×10^{-3} 、 29.5669×10^{-3} 、 59.7994×10^{-3} 之變形圖，圖六十七為 $w/L_T = 0.0598$ 時之變形的立體圖，圖六十八-圖七十二為端點 A 的反力、反力矩- C 點 X_3^G 的方向位移 w/L_T 曲線，由圖六十八與圖六十九可知挫屈前的端點反力 F_{AX} 、 F_{AZ} 隨

著 w/L_T 增加而增加，挫屈後端點 A 之 F_{AX} 隨 w/L_T 增加而增加，但端點 A 之 F_{AZ} 的大小隨 w/L_T 增加而減小，由圖七十-圖七十二可知挫屈前端點 A 的反力矩只有 M_{AY} ，其值隨 w/L_T 增加而減小。挫屈後 M_{AX} 與 M_{AZ} 隨著 w/L_T 增加而增加， M_{AY} 則隨 w/L_T 增加而減小，最後變成相反方向的力矩。圖七十三與圖七十四為 C 、 D 、 E 點的側向位移與 C 點 X_3^G 方向的位移 w/L_T 曲線。圖七十五-圖八十七為 $\Delta/L_T = 0.8$ 之分析結果。圖七十五為中心點 C 在 X_3^G 方向的反力 FL_T^2/EI_y - C 點在 X_3^G 方向的位移 w/L_T 曲線，圖中分歧點前的實線為挫屈前的主要路徑、虛線為挫屈後之主要路徑，分歧點後的實線為次要路徑。由圖七十五可知挫屈後中心點 C 的反力會隨著位移的增加而增加，所以 $\Delta/L_T \geq 0.78056$ 之挫屈梁，挫屈後是穩定的。圖七十六-圖七十八為中心點 C 在 X_3^G 方向的位移 $w/L_T = 4.4613 \times 10^{-3}$ 、 4.8194×10^{-3} 、 5.6106×10^{-3} 、 6.8288×10^{-3} 之變形圖，圖七十九為 $w/L_T = 6.8288 \times 10^{-3}$ 之變形的立體圖。由圖七十六-圖七十九與圖二十五-圖二十八可以發現， $\Delta/L_T = 0.8$ 之挫屈梁，挫屈後，在 $w/L_T = 6.8288 \times 10^{-3}$ 的形狀與固端梁受軸向位移負荷，在第二次挫屈後， $\Delta/L_T = 0.8225$ 時的形狀相似。圖八十-圖八十五為端點 A 的反力、反力矩- C 點在 X_3^G 方向的位移 w/L_T 曲線，由圖八十-圖八十二可知挫屈前其端點反力 F_{AX} 與 F_{AZ} 隨著 w/L_T 的增加而增加，挫屈後 F_{AZ} 繼續增加， F_{AX} 的值則隨 w/L_T 增加而下降， F_{AY} 在挫曲前為 0，挫屈後隨 w/L_T 的增加而增加。由圖八十三到圖八十五可知挫屈前端點 A 反力矩只有 M_{AY} ，其值

隨 w/L_T 增加而減小。挫屈後 M_{AY} 繼續隨 w/L_T 增加而下降，而 M_{AX} 與 M_{AZ} 則隨著 w/L_T 的增加而增加。圖八十六與圖八十七為 D 、 E 點的側向位移— C 點在方向的位移 w/L_T 曲線，由圖八十六可知其 D 點與 E 點之 X_2^G 方向的位移，在挫曲前為 0，在挫屈後，大小相同但方向相反，由圖八十七可知 D 、 E 點之 X_3^G 方向的位移在挫曲前後都相同。



第五章 結論

本文用共旋轉有限元素法探討不同斷面之固端梁受端點軸向位移負荷的挫屈及挫屈後的行為，還有探討挫屈梁中心點受側向集中位移負荷之非線性挫屈及挫屈後的行為。

本文在當前的元素座標上，以尤拉梁正確的變形機制、工程應變、虛功原理與有限元素法、非線性梁理論的一致線性化 (consistent linearization)，推導一梁元素。本研究採用基於牛頓法及定弧長法的增量迭代法求解非線性平衡方程式，以系統的切線剛度矩陣的行列式值是否為零作為挫屈的判斷準則。

由本研究推導的結果及分析例題的數值結果，可以得到以下的結論；

1. 本研究用工程應變推導的梁元素(E 元素)和文獻上用 Green strain 推導的梁元素(G 元素)，在元素節點內力和剛度矩陣的高次項，有些微小的差異。分析固端梁受端點扭角引起的端點軸力時，用 E 元素得到的軸力比用 G 元素得到的軸力大，且扭角越大兩者結果的差異也越大，但何者較接近真正的情況，需用實驗來驗證。
2. 用 E 元素和 G 元素分析固端梁端點受軸向壓縮位移的挫屈及挫屈後行為時，兩種元素的結果差異很小，但 G 元素的數目較少時，有時不能正確的反應出系統切線剛度之行列式值的正負。本研究主要用 E 元素分析固

3. 不同斷面的固端梁端點受軸向壓縮位移，在介於第一次挫屈後及第二次挫屈前，具有穩定且相同的無因次次要平衡路徑。當無因次壓縮位移 $\Delta/L_T \geq 0.85$ 時，固端梁在該穩定的次要平衡路徑上會互相接觸，所以大於 0.85 的無因次挫屈位移是不存在的。在第二次挫屈後之固端梁是不穩定的。

4. 受軸向壓縮位移的固端梁，若翹曲—扭轉剛度比 $\alpha = \frac{EI_{\omega}}{GJL_T^2}$ 不大時，兩端的邊界條件為自由翹曲(Warping free)或抑制翹曲(Warping restraint)對其第二次挫屈位移影響很小。

5. 若不同斷面之固端梁有相同的撓曲—扭轉剛度比 $\beta = \frac{EI_{\min}}{GJ}$ 及撓曲—撓曲剛度比 $\gamma = \frac{EI_{\min}}{EI_{\max}}$ ，則其受軸向壓縮位移的無因次第二次挫屈位移

Δ_{cr2}/L_T ($0.371 \leq \Delta_{cr2}/L_T \leq 0.85$)，可以視為相同。 β ($0.5 \leq \beta \leq \infty$) 相同時， γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) 越小， Δ_{cr2}/L_T 越大； γ 相同時， β 越小， Δ_{cr2}/L_T 越大。

本研究的 $\Delta_{cr2}/L_T - \beta$ 曲線，可用來判斷第二次挫屈是否發生及決定第二次挫屈位移的大小。

6. 受不同軸向壓縮位移 Δ ($\Delta_{cr1}/L_T \leq \Delta/L_T < \Delta_{cr2}/L_T$) 而挫屈之固端梁，即拱起高度為 δ 的挫屈梁，中心點受到側向集中位移負荷而再度挫屈時，

$$\Delta_{cr2}/L_T$$

$$\Delta/L_T$$

$\leq \Delta/L_T \leq 0.7805$ ，挫屈模態的形式為繞 X_1^G 旋轉之面外挫屈(挫屈模態 B)，其挫屈位移 w_{cr}/L_T 亦隨 Δ/L_T 增加而增加；當 $\Delta/L_T \geq 0.7805$ ，挫屈模態的形式為繞通過梁中心點 C 且平行 X_3^G 的軸旋轉之面外挫屈(挫屈模態 C)，其挫屈位移 w_{cr}/L_T 隨 Δ/L_T 增加而減少。除了第三種挫屈外，挫屈梁受到側向集中位移負荷時，挫屈後皆是不穩定的。 Δ_{cr2}/L_T 不同的挫屈梁受到側向集中位移負荷時，亦應有類似的行為。



參考文獻

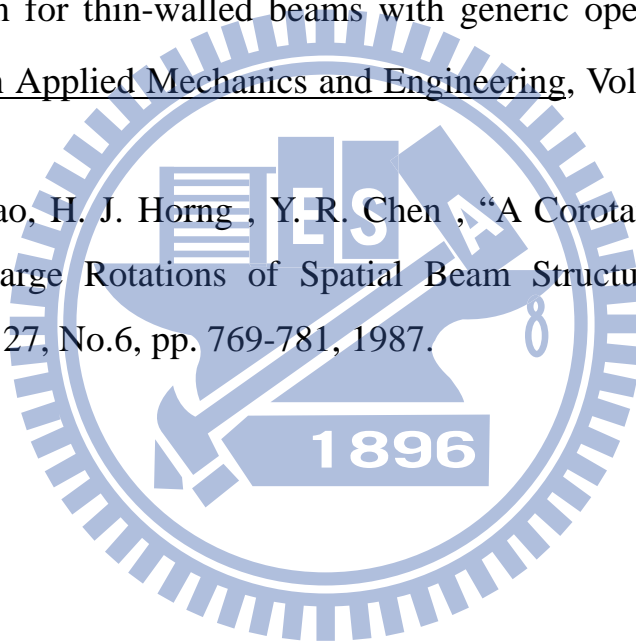
- [1] 蔡明旭, “挫屈梁在側向負荷下的幾何非線性分析”, 國立交通大學機械工程研究所博士論文, 臺灣, 新竹, 2011.
- [2] Nayfeh, A. H., and Emam, S. A., “Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams”, Nonlinear Dynamics, Vol. 54, No. 4, pp. 395–408, 2008.
- [3] Tseng, W. Y., and Dugundji, J., “Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation”, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, No. 2, pp. 467-476, 1971.
- [4] W. Y. Tseng, J. Dugundji, “Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation”, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, No. 2, pp. 467-476, 1971.
- [5] W. Y. Poon, C. F. Ng, Y. Y. Lee, “Dynamic stability of a curved beam under sinusoidal loading”, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 216, No. G4, pp. 209-217, 2002.
- [6] E. Quévy, L. Buchaillet, P. Bigotte, D. Collard, “self-assembling and actuation of electrostatic micro-mirrors”, European Solid-State Device Research Conference (ESSDERC 2000), pp. 412–415, 2000.
- [7] E. Quevy, L. Buchaillet, D. Collard, “3-D self-assembling and actuation of electrostatic microstructures”, IEEE Trans. Electron Devices, Vol. 48, No. 8, pp. 1833–1839, 2001.
- [8] E. Quévy, L. Buchaillet, P. Bigotte, D. Collard, “Large stroke actuation of continuous membrane for adaptive optics by 3D self-assembled microplates”, Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 95, No. 2, pp. 183-195, 2002.

- [9] D. Addressi, W. Lacarbonara, A. Paolone, “Free in-plane vibrations of highly buckled beams carrying a lumped mass”, Acta Mechanica, Vol. 180, No. 1-4, pp. 133– 156, 2005.
- [10] J. Casals-Terre, A. Fargas-Marques, A. M. Shkel, “Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams”, Journal Of Microelectromechanical Systems, Vol. 17, No. 5, pp. 1082– 1093, 2008.
- [11] B. A. Samuel, A. V. Desai, M. A. Haque, “Design and modeling of a MEMS pico-Newton loading/sensing device”, Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 127, No. 1, pp. 155-162, 2006.
- [12] Patricio, P., Adda-Bedia, M., and Ben Amar, M., “An elastica problem: instabilities of an elastic arch” Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 124, pp. 285–295, 1998.
- [13] A. B. Pippard, “The elastic arch and its modes of instability”, European Journal of Physics, Vol. 11, pp. 359–365, 1990.
- [14] J. Qiu, J. H. Lang, A. H. Slocum, “A curved-beam bistable mechanism”, Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 13, No. 2, pp. 137– 146, 2004.
- [15] W. Fang, J. A. Wickert, “Postbuckling of micromachined beams”, Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 4, No. 3, pp. 116–122, 1994.
- [16] S. Park, D. Hah, “Pre-shaped buckled-beam actuators: Theory and experiments”, Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 148, No. 1, pp. 186–192, 2008.
- [17] Y. Gerson, S. Krylov, B. Ilic, D. Schreiber, “Large displacement low voltage multistable micro actuator” 21st IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems - MEMS '08, pp. 463–466, 2008.

- [18] 林運融, “挫曲梁之靜態與動態分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2010.
- [19] Y. Miyazaki, K. Kondo, “Analytical solution of spatial elastica and its application to kinking problem”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, No. 27, pp. 3619-3636, 1997.
- [20] G. H. M. van der Heijden, S. Neukirch, V. G. A. Goss, J. M. T. Thompson, “Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 45, No. 1, pp. 161-196, 2003.
- [21] V. G. A. Goss, G. H. M. van der Heijden, J. M. T. Thompson, S. Neukirch, “Experiments on snap buckling, hysteresis and loop formation in twisted rods”, Experimental Mechanics, Vol. 45, No. 2, pp. 101-111, 2005.
- [22] W. Y. Lin, K. M. Hsiao, “Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, No. 45, pp. 6023-6052, 2001.
- [23] 許碩修, 雙對稱薄壁梁在軸力與不均勻彎矩作用下的側向扭轉挫屈分析, 交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2002.
- [24] 黃楚璋, “三維挫屈梁之非線性分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2010.
- [25] 陳致中, “梁在軸力及彎矩作用下之挫曲研究”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2004.
- [26] M. H. Tsai, C. W. Chang, K. M. Hsiao, “Nonlinear analysis of planar beams

under displacement loading”, Proceeding of The First South-East European Conference on Computational Mechanics, SEECCM-06, Kragujevac, Serbia and Montenegro, 2006.

- [27] K. M. Hsiao, Corotational total Lagrangian formulation for three-dimensional beam element, AIAA Journal, Vol. 30 pp. 797-804, 1992.
- [28] H. Goldstein, Classical Mechanics (Addison-Wesley, Reading, MA, 1980).
- [29] T. J. Chung, Continuum Mechanics (Prentice-Hall N.J., 1988).
- [30] K. M. Hsiao, H. H. Chen, W. Y. Lin, “Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with generic open section”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, pp. 2334–2370, 2006.
- [31] K. M. Hsiao, H. J. Horng, Y. R. Chen, “A Corotational Procedure That Handles Large Rotations of Spatial Beam Structures”, Computers and Structures, 27, No.6, pp. 769-781, 1987.



表一 例題二之挫屈負荷

Case	γ	β	$\alpha(10^{-8})$	Number of elements	Element type	$\frac{\Delta_{cr1}}{L_T}(10^{-5})$	$\frac{P_{cr1}L_T^2}{EI_y}$	$\frac{\Delta_{cr2}}{L_T}$	$\frac{P_{cr2}L_T^2}{EI_y}$
1(WF)	1	1	0	50	E	2.74165	39.47959	0.67106	60.85989
					G	2.74175	39.47945	0.67046	60.89015
				100	E	2.74165	39.47959	0.66781	60.77418
					G	2.74175	39.47945	0.66788	60.77464
				300	E	2.74165	39.47959	0.66681	60.74805
					G	2.74175	39.47945	0.66711	60.73980
1(WR)	1	1	0	50	E	2.74164	39.47956	0.67127	60.87108
				100	E	2.74164	39.47956	0.66830	60.80080
				300	E	2.74164	39.47956	0.66707	60.76202
2	1	1.4250	0	300	E	2.74163	39.47953	0.55488	55.49602
3	0.25	0.9226	4.39424	200	E	0.12851	39.47834	0.81843	69.95264
					G	0.12851	39.47834	0.81841	69.95627
				400	E	0.12851	39.47834	0.81814	69.93985
					G	0.12851	39.47834	0.81814	69.93997
4	0.1295	2.3620	15.9537	400	E	0.19036	39.47857	0.71009	63.09502

表二 Case1 端點 B 反力(反力矩)、C 點位移與軸向位移關係表

Δ / L_T	δ / L_T	$-U_C / L_T$	PL_T^2 / EI_y	$M_{Bx}L / EI_y$	$M_{By}L / EI_y$	$M_{Bz}L / EI_y$
0.1×10^{-5}	0	0.5×10^{-6}	1.44000	0	0	0
* 0.27416×10^{-4}	0	0.13708×10^{-4}	39.47956	0	0	0
0.73328×10^{-2}	0.54288×10^{-1}	0.36664×10^{-2}	39.62428	0	-1.07556	0
0.68318×10^{-1}	0.16277	0.34159×10^{-1}	40.88129	0	-3.32721	0
0.17619	0.25206	0.88095×10^{-1}	43.34052	0	-5.46224	0
0.27001	0.30159	0.13501	45.76915	0	-6.90184	0
0.36960	0.33940	0.18480	48.70853	0	-8.26590	0
0.47264	0.36742	0.23632	52.23651	0	-9.59628	0
0.61315	0.39163	0.30658	58.09775	0	-11.37639	0
** 0.66707	0.39724	0.33353	60.76202	0	-12.06841	0
0.66747	0.39706	0.33374	60.68796	0.27558	-12.05641	0.46128
0.71427	0.37751	0.35713	50.81136	2.97029	-10.70659	4.36101
0.72524	0.37304	0.36262	47.94680	3.31000	-10.37867	4.67407
0.76518	0.35764	0.38259	35.90109	4.33569	-9.18023	5.11996
0.82539	0.33965	0.41269	16.76837	5.42197	-7.59837	4.24817
0.87297	0.33133	0.43649	6.66617	5.91471	-6.81314	2.96799
0.90328	0.32782	0.45164	3.11010	6.09635	-6.52967	2.16297
0.91925	0.32623	0.45963	1.90765	6.16214	-6.43169	1.76368
0.92333	0.32584	0.46166	1.66065	6.17616	-6.41143	1.66490
0.92537	0.32565	0.46269	1.54473	6.18283	-6.40190	1.61569

*：第一次挫屈

**：第二次挫屈

表三 Case2 端點 B 反力(反力矩)、C 點位移與軸向位移關係表

	Δ/L_T	δ/L_T	$-U_C/L_T$	PL_T^2/EI_y	$M_{Bx}L/EI_y$	$M_{By}L/EI_y$	$M_{Bz}L/EI_y$
	0.1×10^{-5}	0	0.5×10^{-6}	1.44000	0	0	0
*	0.27416×10^{-4}	0	0.13708×10^{-4}	39.47953	0	0	0
	0.73328×10^{-2}	0.54288×10^{-1}	0.36664×10^{-2}	39.62428	0	-1.07556	0
	0.68318×10^{-1}	0.16277	0.34159×10^{-1}	40.88129	0	-3.32721	0
	0.14686	0.23248	0.73431×10^{-1}	42.63943	0	-4.95646	0
	0.27001	0.30159	0.13501	45.76915	0	-6.90184	0
	0.30271	0.31539	0.15136	46.68948	0	-7.36263	0
	0.33593	0.32797	0.16797	47.66830	0	-7.81681	0
	0.47264	0.36742	0.23632	52.23651	0	-9.59628	0
**	0.55488	0.38335	0.27744	55.49602	0	-10.63717	0
	0.60894	0.36824	0.30447	48.80439	1.68990	-9.58826	4.54561
	0.66217	0.35312	0.33109	39.20359	2.47265	-8.48464	5.75906
	0.69554	0.34386	0.34777	31.28378	2.89681	-7.76925	5.95926
	0.73479	0.33391	0.36740	20.32381	3.35237	-6.94691	5.65211
	0.78743	0.32449	0.39371	6.25203	3.85475	-6.06516	4.42823
	0.79431	0.32372	0.39716	4.81930	3.90701	-5.98422	4.23004
	0.80132	0.32304	0.40066	3.49904	3.95657	-5.91149	4.02660
	0.80846	0.32246	0.40423	2.29905	4.00332	-5.84734	3.81958
	0.81574	0.32197	0.40787	1.22464	4.04719	-5.79202	3.61059
	0.81667	0.32192	0.40833	1.09934	4.05247	-5.78573	3.58441

*：第一次挫屈

**：第二次挫屈

表四 Case3 端點 B 反力(反力矩)、C 點位移與軸向位移關係表

	Δ/L_T	δ/L_T	$-U_C/L_T$	PL_T^2/EI_y	$M_{Bx}L/EI_y$	$M_{By}L/EI_y$	$M_{Bz}L/EI_y$
*	0.12851×10^{-5}	0	0.64255×10^{-6}	39.47834	0	0	0
	0.33699×10^{-1}	0.11563	0.16849×10^{-1}	40.15645	0	-2.32157	0
	0.19770	0.26500	0.98850×10^{-1}	43.87122	0	-5.81291	0
	0.26485	0.29929	0.13242	45.62749	0	-6.82789	0
	0.33494	0.32762	0.16747	47.63862	0	-7.80375	0
	0.46966	0.36675	0.23483	52.12687	0	-9.55867	0
	0.59776	0.38968	0.29888	57.38567	0	-11.18096	0
	0.71785	0.40079	0.35892	63.53656	0	-12.73254	0
**	0.81814	0.40309	0.40907	69.93985	0	-14.09608	0
	0.81816	0.40308	0.40908	69.92013	0.16570	-14.09417	0.13588
	0.82859	0.39635	0.41430	57.57630	3.65791	-12.90857	2.89696
	0.83828	0.39209	0.41914	49.57063	4.37067	-12.22559	3.30872
	0.83925	0.39173	0.41963	48.89362	4.41445	-12.17123	3.32516
	0.84558	0.38965	0.42279	44.89025	4.63159	-11.86163	3.36963
	0.85029	0.38833	0.42514	42.31907	4.73634	-11.67414	3.35119
	0.86083	0.38592	0.43041	37.54199	4.86399	-11.35261	3.21544
	0.87272	0.38387	0.43636	33.37273	4.90331	-11.10619	2.97580
	0.88074	0.38277	0.44037	31.10462	4.89313	-10.98914	2.78812
	0.89262	0.38146	0.44631	28.36203	4.84433	-10.86869	2.49256
	0.90760	0.38018	0.45380	25.70616	4.74600	-10.78253	2.11036

*：第一次挫屈

**：第二次挫屈

表五 Case4 端點 B 反力(反力矩)、C 點位移與軸向位移關係表

	Δ / L_T	δ / L_T	$-U_C / L_T$	PL_T^2 / EI_y	$M_{Bx} L / EI_y$	$M_{By} L / EI_y$	$M_{Bz} L / EI_y$
*	0.19036×10^{-5}	0	0.95182×10^{-6}	39.47857	0	0	0
	0.47266×10^{-1}	0.13634	0.23633×10^{-1}	40.43691	0	-2.75667	0
	0.17631	0.25215	0.88155×10^{-1}	43.34321	0	-5.46459	0
	0.46034	0.36458	0.23017	51.78583	0	-9.44003	0
	0.68179	0.39844	0.34090	61.53951	0	-12.25987	0
**	0.71009	0.40036	0.35505	63.09502	0	-12.63026	0
	0.71239	0.39626	0.35620	57.74497	1.58832	-12.06293	2.87694
	0.71987	0.38508	0.35993	43.35863	2.68366	-10.65308	4.86820
	0.72615	0.37798	0.36307	34.31449	2.95202	-9.86167	5.31118
	0.72935	0.37503	0.36468	30.56046	3.00723	-9.55733	5.37285
	0.73111	0.37357	0.36555	28.71113	3.02373	-9.41311	5.37797
	0.73298	0.37214	0.36649	26.89014	3.03326	-9.27500	5.36651
	0.73497	0.37075	0.36749	25.10493	3.03620	-9.14356	5.33896
	0.73709	0.36939	0.36855	23.36292	3.03291	-9.01932	5.29591
	0.74986	0.36341	0.37493	15.55125	2.93683	-8.52021	4.87649
	0.78432	0.35746	0.39216	6.41934	2.54160	-8.15482	3.57967
	0.78772	0.35729	0.39386	5.98456	2.50324	-8.15214	3.46648
	0.79092	0.35717	0.39546	5.61977	2.46752	-8.15243	3.36302
	0.82252	0.35735	0.41126	3.58152	2.13243	-8.24716	2.48262
	0.89221	0.36093	0.44610	3.21512	1.46772	-8.63328	1.17290

*：第一次挫屈

**：第二次挫屈

表六 挫屈梁受端點軸向位移負荷在主要平衡路徑的 δ/L_T 、端點 B 之反力、反力矩(例題二，Case3)

Δ/L_T	δ/L_T	PL_T^2/EI_y	$M_{BY}L_T/EI_y$
0.1	0.19492	41.57015	4.05149
0.2	0.26632	43.92889	5.84952
0.3	0.31431	46.61165	7.32530
0.4	0.34871	49.69310	8.66430
0.5	0.37331	53.27308	9.94359
0.6	0.38997	57.48820	11.20940
0.7	0.39973	62.53031	12.49766
0.8	0.40313	68.67728	13.84303
0.85	0.40253	72.28782	14.54917



表七 Case A1-A5 之材料及斷面常數

Case	A1	A2	A3	A4	A5
$E(N/mm^2)$	57×10^3	40×10^3	2×10^5	2×10^5	2×10^5
$G(10^3 N/mm^2)$	20	20	*	*	*
$I_y(10^{-2} mm^4)$	4.90874	4.90874	4.90874	4.90874	4.90874
$I_z(10^{-2} mm^4)$	4.90874	4.90874	4.90874	4.90874	4.90874
$J(10^{-2} mm^4)$	9.81748	9.81748	9.81748	9.81748	9.81748
$A(10^{-1} mm^2)$	7.85398	7.85398	7.85398	7.85398	7.85398
$I_4(10^{-2} mm^6)$	1.4317	1.4317	1.4317	1.4317	1.4317
$I_\omega(mm^6)$	0	0	0	0	0
$\Omega_{yz}(mm^6)$	0	0	0	0	0
γ	1	1	1	1	1
β	1.425	1	1.501	33.61	7.245
α	0	0	0	0	0

* $G = \frac{EI_y}{\beta J}$, A3 與 A6, A4 與 A7, A5 與 A8 有相同的 β

$L_T = 300mm$, $r = 0.5mm$

表八 Case A6-A8 之斷面常數(A6 正方形斷面 ,A7 十字形斷面 ,A8 十字形 A 斷面)

Case	A6	A7	A8
斷面參數	$a = 1mm$ $b = 1mm$	$b = 7mm$ $d = 7mm$ $t = 0.7mm$	$a = 3.02924mm$ $b = 1mm$ $t = 0.2mm$ $n = 2$
$I_y (mm^4)$	0.0833333	20.1884	2.31910
$I_z (mm^4)$	0.0833333	20.1884	2.31910
$J (mm^4)$	0.140577	1.52063	0.810362
$A (mm^2)$	1	9.31	3.82924
$I_4 (mm^6)$	0.0388889	297.415	11.4362
$I_\omega (mm^6)$	1.344×10^{-4}	1.6332	0.130731
$\Omega_{yz} (mm^6)$	0	8.1701×10^{-4}	0.146259
γ	1	1	1
β	1.501	33.61	7.245
α	9.45470×10^{-10}	1.06213×10^{-6}	1.59537×10^{-7}

$$E = 2 \times 10^5 N / mm^2$$

$$G = 7.9 \times 10^4 N / mm^2$$

$$L_T = 1600mm$$

表九 Case A9-A10 之斷面常數(I 形斷面)

Case	A9	A10
	$d = 1.498$	$d = 1.022$
斷面參數 (mm)	$b = 1.5565$	$b = 1.008$
	$t_f = 0.119$	$t_f = 0.068$
	$t_w = 0.0745$	$t_w = 0.037$
$I_y (10^{-2} mm^4)$	18.6415	3.33888
$I_z (10^{-2} mm^4)$	7.48330	1.16113
$J (10^{-4} mm^4)$	19.2106	2.26258
$A (10^{-1} mm^2)$	4.63646	1.69870
$I_4 (10^{-2} mm^6)$	18.3200	1.44823
$I_\omega (10^{-3} mm^6)$	35.2681	2.64917
$\Omega_{yz} (10^{-3} mm^6)$	35.0107	2.63682
γ	0.401433	0.347759
β	98.6178	129.921
α	3.84113×10^{-5}	4.63158×10^{-5}

$$L_T = 1100mm (A9)$$

$$L_T = 800mm (A10)$$

$$E = 2 \times 10^5 N / mm^2$$

$$G = 7.9 \times 10^4 N / mm^2$$

表十 抑制翹曲及自由翹曲之挫屈梁受端點軸向位移負荷 Δ 之二次挫屈位移

Case	γ	β	α	Δ_{cr2}/L_T		$\Delta_{cr2}/L_T (I_\omega = 0)$	
				WR	WF	WR	WF
A1	1	1.425	0	0.554880	0.554691	0.554880	0.554691
A2	1	1	0	0.667070	0.666757	0.667070	0.666757
A3	1	1.501	0	0.542806	0.542630	0.542806	0.542630
A4	1	33.61	0	0.377102	0.377098	0.377102	0.377098
A5	1	7.245	0	0.399096	0.399073	0.399096	0.399073
A6	1	1.501	9.45470×10^{-10}	0.542729	0.542598	0.542729	0.542598
A7	1	33.61	1.06213×10^{-6}	0.377096	0.377084	0.377088	0.377084
A8	1	7.245	1.59537×10^{-7}	0.399082	0.399052	0.399069	0.399052
A9	0.40143	98.6178	3.84113×10^{-5}	0.475027	0.468059	0.466934	0.466464
A10	0.34776	129.921	4.63158×10^{-5}	0.473791	0.465999	0.464384	0.463867

WR: Warping restraint

WF: Warping free

表十一 挫屈梁受端點軸向位移負荷 Δ 之挫屈位移,端點反力及力矩(WR)

Case	γ	β	Δ_{cr2}/L_T	P_{cr2}^*	M_{Ycr2}^*
A1	1	1.425	0.554880	55.496017	10.637170
A2	1	1	0.667070	60.762019	12.068410
A3	1	1.501	0.542806	54.989076	10.484523
A4	1	33.61	0.377102	48.947346	8.3647304
A5	1	7.245	0.399073	49.662864	8.6522495
A6	1	1.501	0.542729	54.986797	10.483904
A7	1	33.61	0.377096	48.947725	8.3646816
A8	1	7.245	0.399082	49.662796	8.6523013
A9	0.40143	98.6178	0.475027	52.325646	9.6268650
A10	0.34776	129.921	0.473791	52.279780	9.6111960

$$P_{cr2}^* = P_{cr2} L_T^2 / EI_y, \quad M_{Ycr2}^* = M_{Ycr2} L_T / EI_y$$

表十二 矩形斷面之固端梁受端點軸向位移之第二次挫屈位移,端點反力及力矩 (例題四)

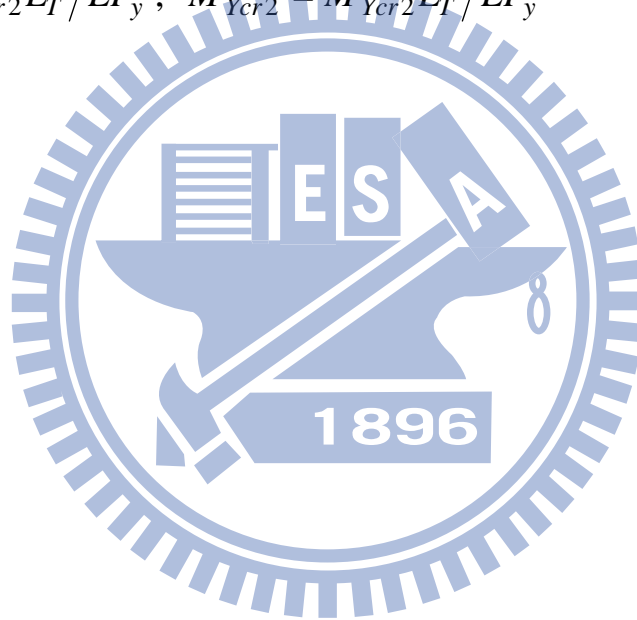
a/b	γ	β	Δ_{cr2}/L_T	P_{cr2}^*	M_{Ycr2}^*
1	1	1.5008	0.542729	54.986797	10.483904
1.01	0.9803	1.4860	0.552238	55.385181	10.604126
$\sqrt{2}$	0.5	1.1209	0.739723	64.820396	13.023208
1.5	0.4444	1.0777	0.757627	65.915031	13.263634
2	0.25	0.9226	0.818136	69.939968	14.096104
2.5	0.16	0.8460	0.846596	72.028677	14.500219
2.6	0.1479	0.8353	0.850560	72.330655	14.557242
$2\sqrt{2}$	0.125	0.8143	0.858257	72.925007	14.668491
3	0.1111	0.8012	0.863059	73.301368	14.738276
10	0.01	0.6755	0.909114	77.141066	15.423142

$$P_{cr2}^* = P_{cr2} L_T^2 / EI_y, \quad M_{Ycr2}^* = M_{Ycr2} L_T / EI_y$$

表十三 十字形 A 斷面之固端梁受端點軸向位移之第二次挫屈位移,端點反力及力矩 (例題五)

$a(mm)$	γ	β	Δ_{cr2}/L_T	P_{cr2}^*	M_{Ycr2}^*
0.7	0.0147	1.0454	0.829051	70.725062	14.250047
1	0.04	1.4395	0.781862	67.463952	13.593102
1.5	0.1295	2.3620	0.710093	63.094945	12.630249
2	0.2997	3.6205	0.636072	59.199351	11.669726
2.5	0.5735	5.2094	0.546675	55.151359	10.533761
3	0.9724	7.1232	0.411019	50.061078	8.8071320
3.02924	1	7.2451	0.399081	49.662755	8.6522844

$$P_{cr2}^* = P_{cr2} L_T^2 / EI_y, \quad M_{Ycr2}^* = M_{Ycr2} L_T / EI_y$$



表十四 不同 γ 與 β 之固端梁之第二次挫屈位移

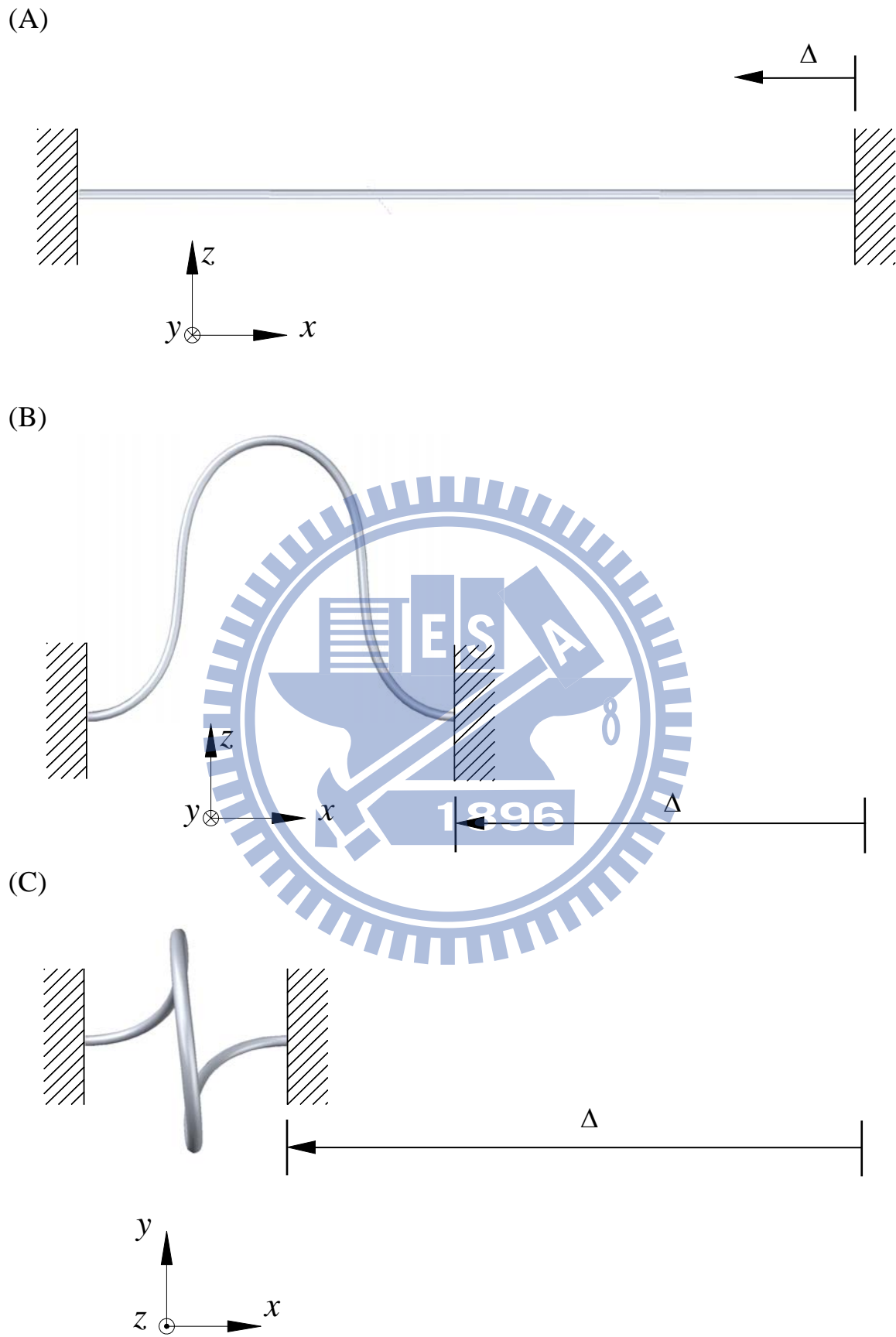
β	Δ_{cr2}/L_T				
	$\gamma=1$	$\gamma=0.5$	$\gamma=0.25$	$\gamma=0.125$	$\gamma=0.001$
0.5	1	1	1	1	1
0.6	0.914691	0.925045	0.930892	0.934401	0.935049
0.7	0.835580	0.868618	0.883983	0.892266	0.899623
0.8	0.767554	0.825634	0.849691	0.861952	0.874036
0.9	0.711761	0.792160	0.823290	0.838636	0.854149
1	0.666973	0.765478	0.802194	0.819920	0.837987
2	0.490291	0.646393	0.702282	0.728188	0.755470
3	0.444615	0.604758	0.662662	0.689514	0.719188
4	0.424200	0.582051	0.639354	0.665991	0.696958
5	0.412670	0.567143	0.623259	0.649393	0.681344
6	0.405264	0.556296	0.611128	0.636708	0.669511
7	0.400112	0.547908	0.601472	0.626507	0.660095
8	0.396320	0.541126	0.593498	0.618016	0.652333
9	0.393413	0.535474	0.586728	0.610766	0.645789
10	0.391113	0.530657	0.580863	0.604454	0.640164
20	0.381042	0.503010	0.546021	0.566667	0.608148
40	0.376172	0.480288	0.516570	0.534730	0.584428
80	0.373776	0.461195	0.492050	0.508443	0.568344
100	0.373300	0.455763	0.485173	0.501138	0.564580
500	0.371782	0.425907	0.448291	0.463015	0.550764
1000	0.371592	0.417288	0.438102	0.453184	0.548805
10000	0.371421	0.400766	0.421280	0.439457	0.546981
20000	0.371414	0.398477	0.419658	0.438405	0.546880

表十五 挫屈梁受中心點側向位移之三種挫屈模態之挫屈位移、挫屈負荷

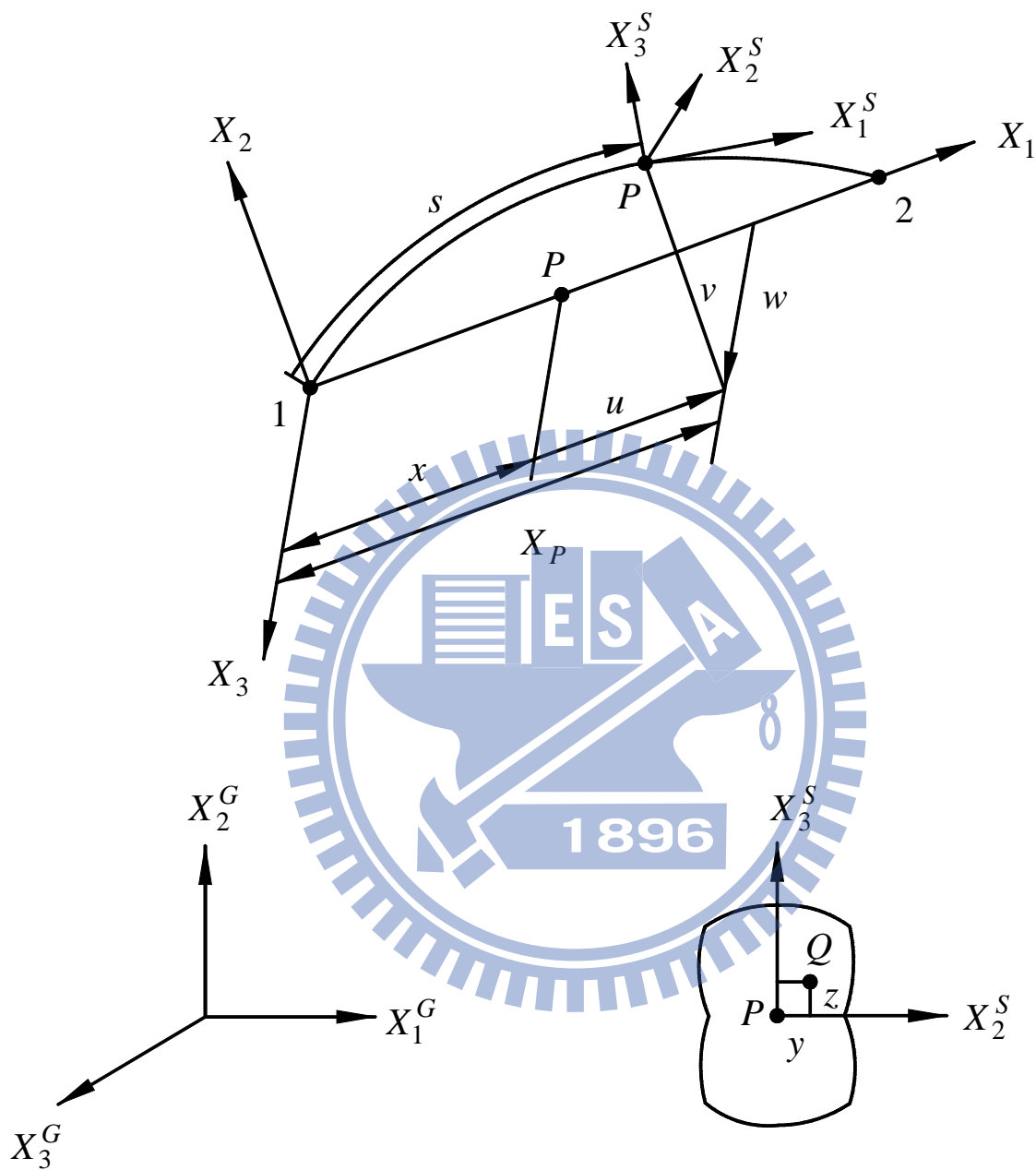
Δ/L_T	δ/L_T	first buckling			secondary buckling		
		$w_{cr1}/L_T (10^{-3})$	$F_{cr1}L_T^2/EI_y$	Mode	$w_{cr2}/L_T (10^{-2})$	$F_{cr2}L_T^2/EI_y$	Mode
6.25×10^{-4}	0.01590	0.344543	3.23283	A	-	-	-
0.00313	0.03555	0.743279	7.25351	A	-	-	-
0.00625	0.05023	1.05002	10.28222	A	-	-	-
0.03125	0.11143	2.41377	23.40152	A	0.579470	45.11482	B
0.06250	0.15601	3.55375	33.84917	A	0.600503	50.90923	B
0.09375	0.18913	4.53880	42.43243	A	0.602065	53.10910	B
0.12500	0.21611	5.47348	50.18785	A	0.602976	54.25426	B
0.14063	0.22800	5.93619	53.89100	A	0.604009	54.65270	B
0.14375	0.23027	6.02879	54.62167	A	0.604265	54.72328	B
0.14406	0.23050	6.03805	54.69479	A	0.604292	54.7305	B
0.14438	0.23072	6.04318	54.73718	B	0.604735	54.76775	A
0.14469	0.23095	6.04348	54.74425	B	0.605663	54.84063	A
0.14500	0.23117	6.04374	54.75101	B	0.606586	54.91321	A
0.18750	0.25901	6.09600	55.51325	B	0.734397	64.63855	A
0.25000	0.29239	6.21797	56.28278	B	0.934551	78.71701	A
0.31250	0.31925	6.37971	56.85441	B	1.15798	93.03945	A
0.37500	0.34113	6.57319	57.31617	B	1.41194	107.86730	A
0.43750	0.35896	6.79555	57.70556	B	1.69827	123.04641	A
0.53125	0.37931	7.18402	58.19715	B	2.13043	143.00399	A

表十五 挫屈梁受中心點側向位移之三種挫屈模態之挫屈位移、挫屈負荷(continued)

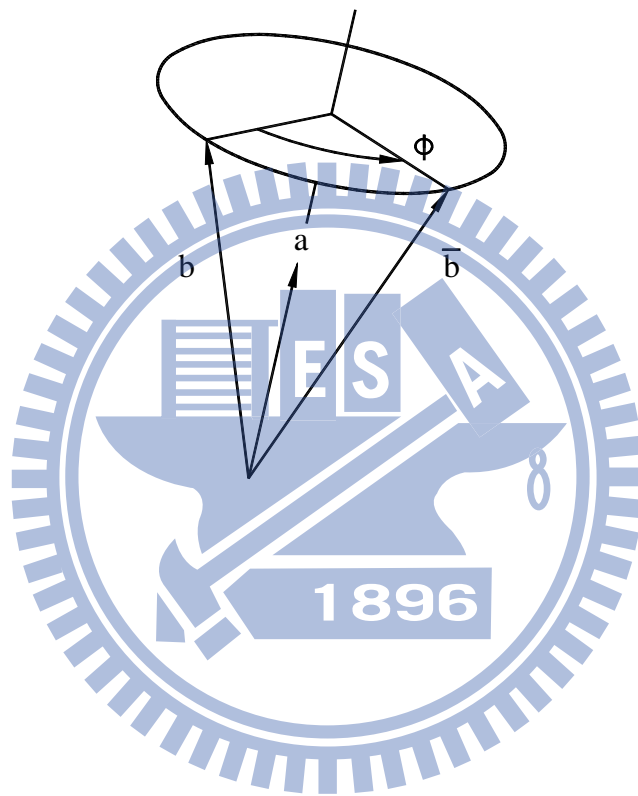
Δ/L_T	δ/L_T	first buckling			secondary buckling		
		$w_{cr1}/L_T (10^{-2})$	$F_{cr1}L_T^2/EI_y$	Mode	$w_{cr2}/L_T (10^{-2})$	$F_{cr2}L_T^2/EI_y$	Mode
0.54688	0.38203	0.725562	58.27061	B	2.18160	144.96048	A
0.56250	0.38457	0.732922	58.34197	B	2.21673	146.05684	A
0.57813	0.38694	0.740490	58.41117	B	2.23083	146.06180	A
0.59375	0.38914	0.748284	58.47873	B	2.22017	144.80006	A
0.60938	0.39117	0.756303	58.54465	B	2.18377	142.21620	A
0.62500	0.39303	0.764546	58.60829	B	2.12380	138.39835	A
0.76563	0.40266	0.850467	59.10403	B	1.14735	77.16795	C
0.78000	0.40295	0.860581	59.14589	B	0.872205	59.86758	C
0.78031	0.40295	0.860807	59.14696	B	0.865935	59.46545	C
0.78050	0.40295	0.860941	59.14758	B	0.861543	59.1836	C
0.78056	0.40295	0.860910	59.14297	C	0.860984	59.1475	B
0.78063	0.40296	0.859656	59.06241	C	0.861031	59.14789	B
0.78125	0.40297	0.847071	58.25347	C	0.861479	59.14973	B
0.80000	0.40313	0.443588	31.49471	C	0.875129	59.20172	B
0.81250	0.40313	0.144108	10.49366	C	0.852960	57.31574	A



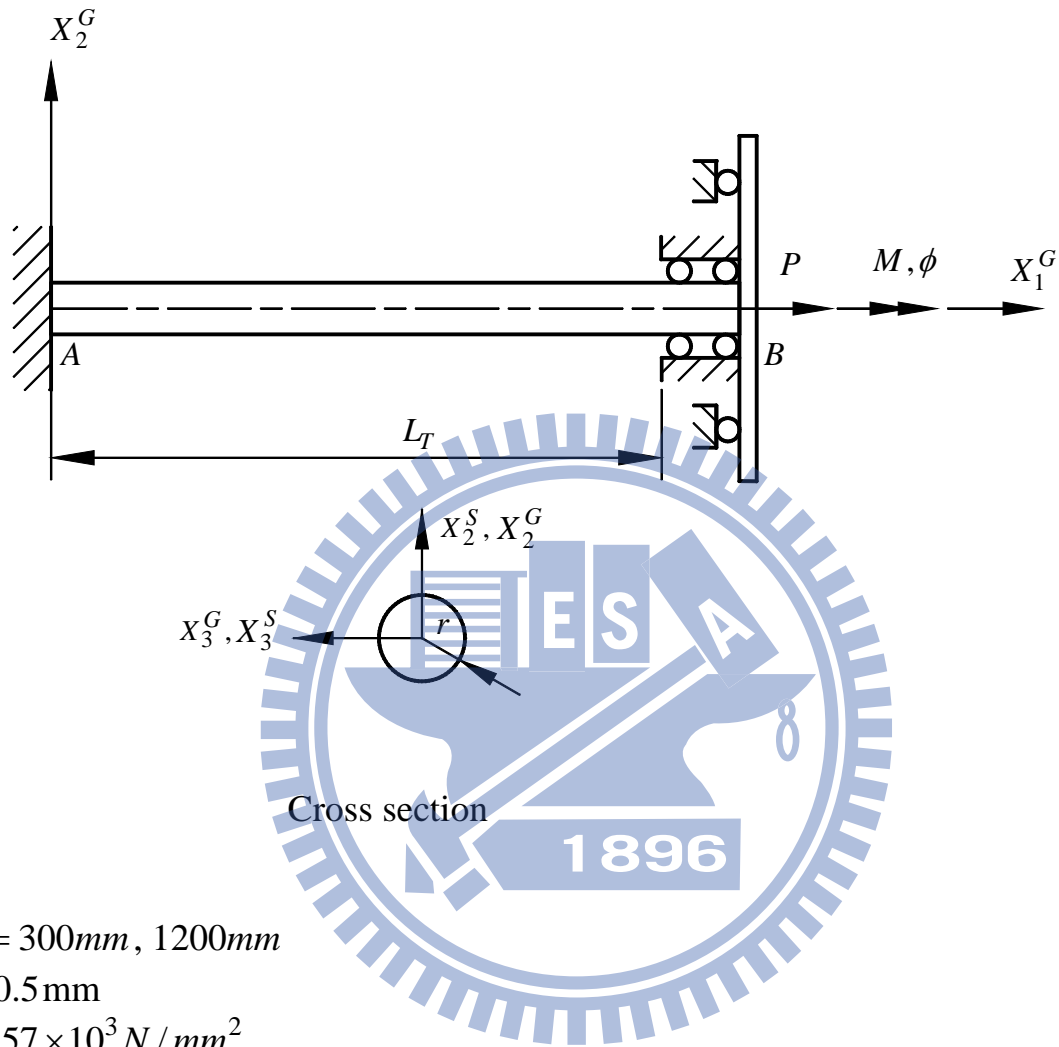
圖一 固端梁受軸向壓縮之示意圖(a)壓縮前、(b)一次挫屈後、(c)二次挫屈後



圖二 總體座標、元素座標與元素截面座標



圖三 旋轉向量



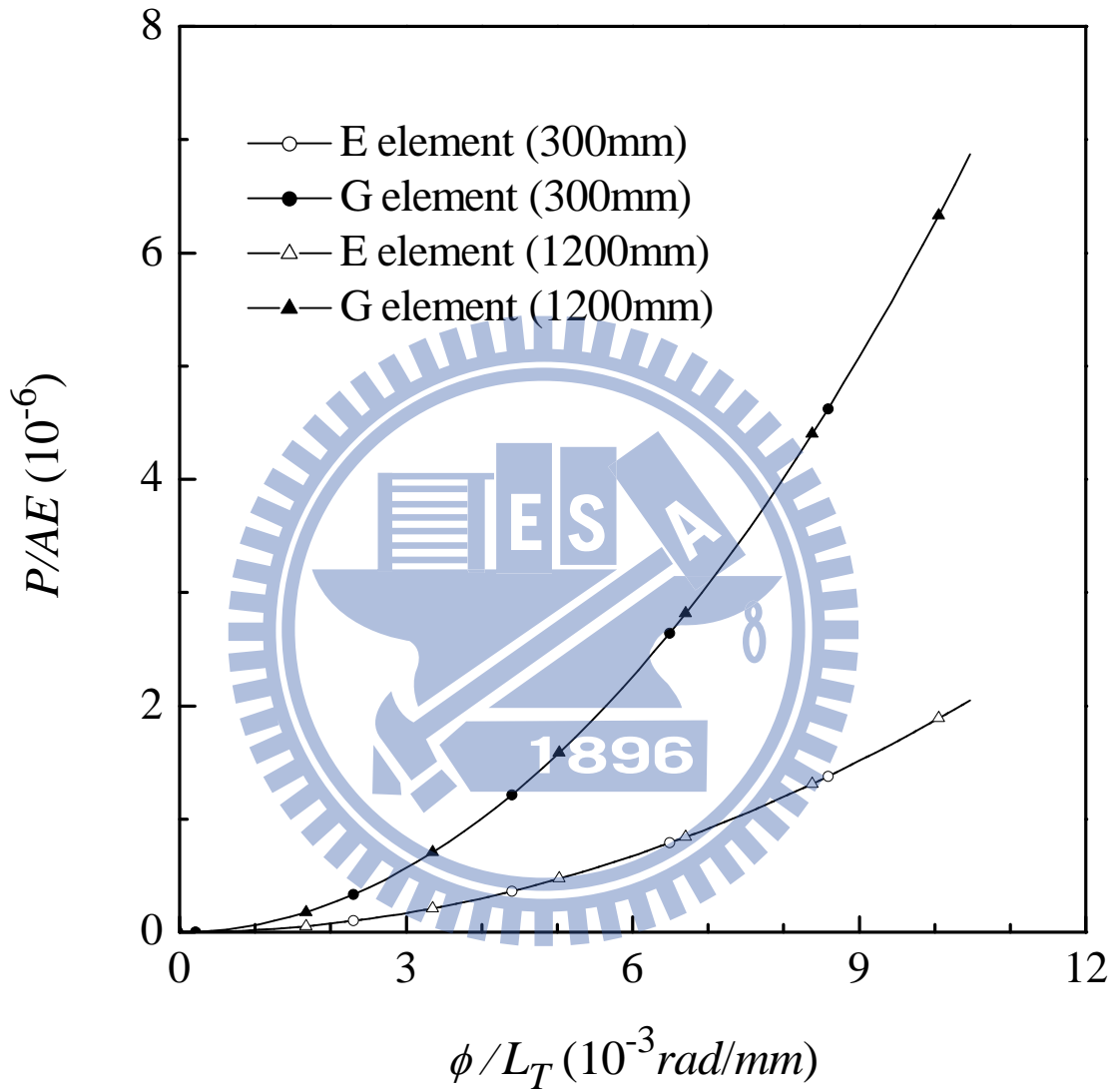
$$L_T = 300\text{mm}, 1200\text{mm}$$

$$r = 0.5\text{mm}$$

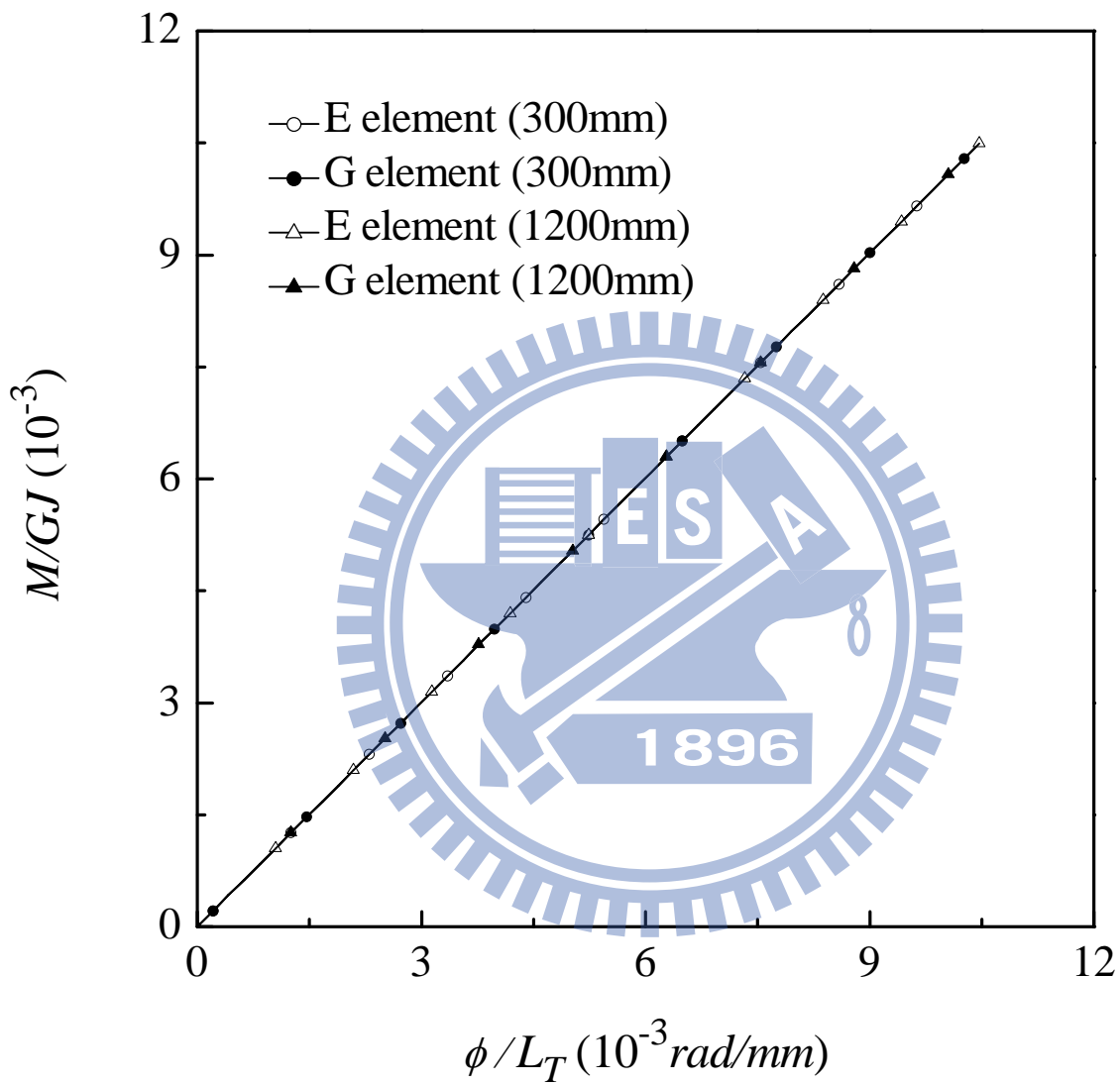
$$E = 57 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$G = 20 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

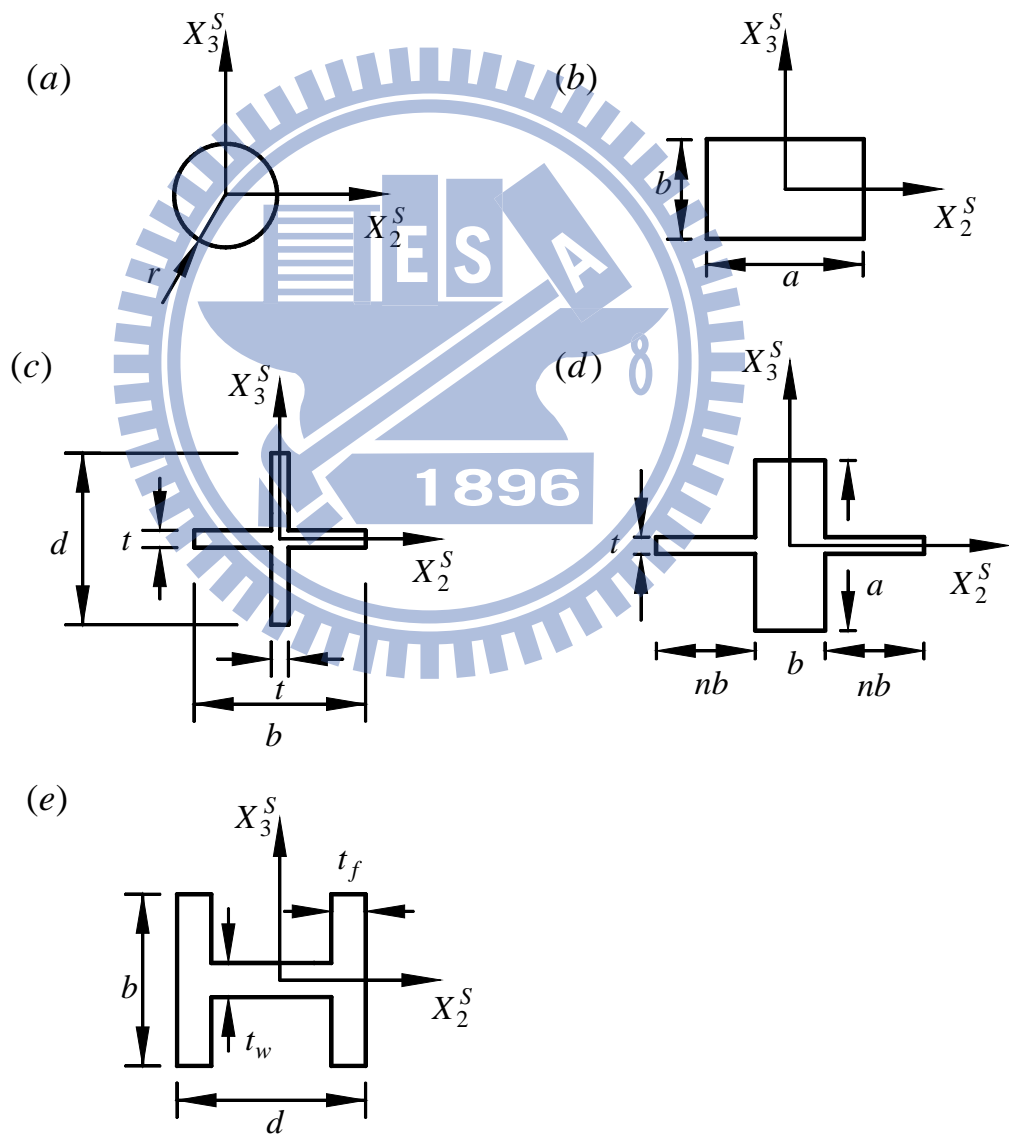
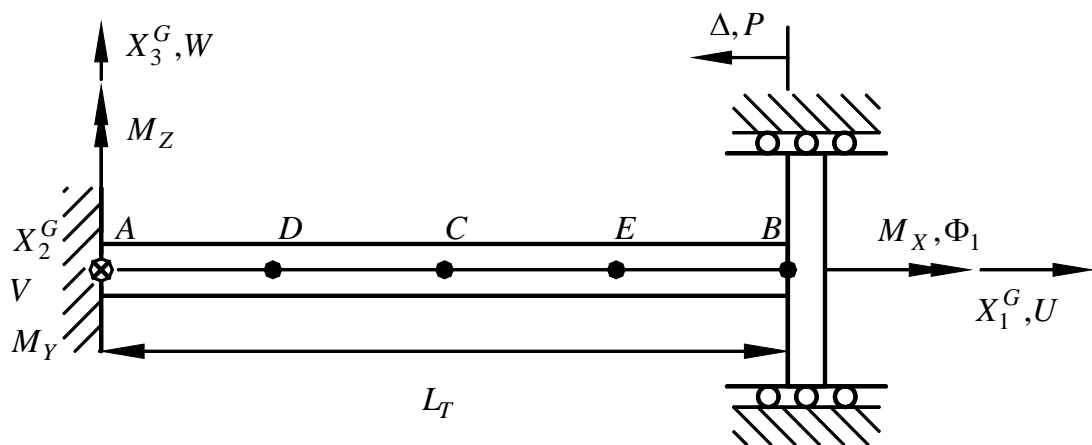
圖四 固端梁 B 端承受一扭轉角 ϕ (例題一)



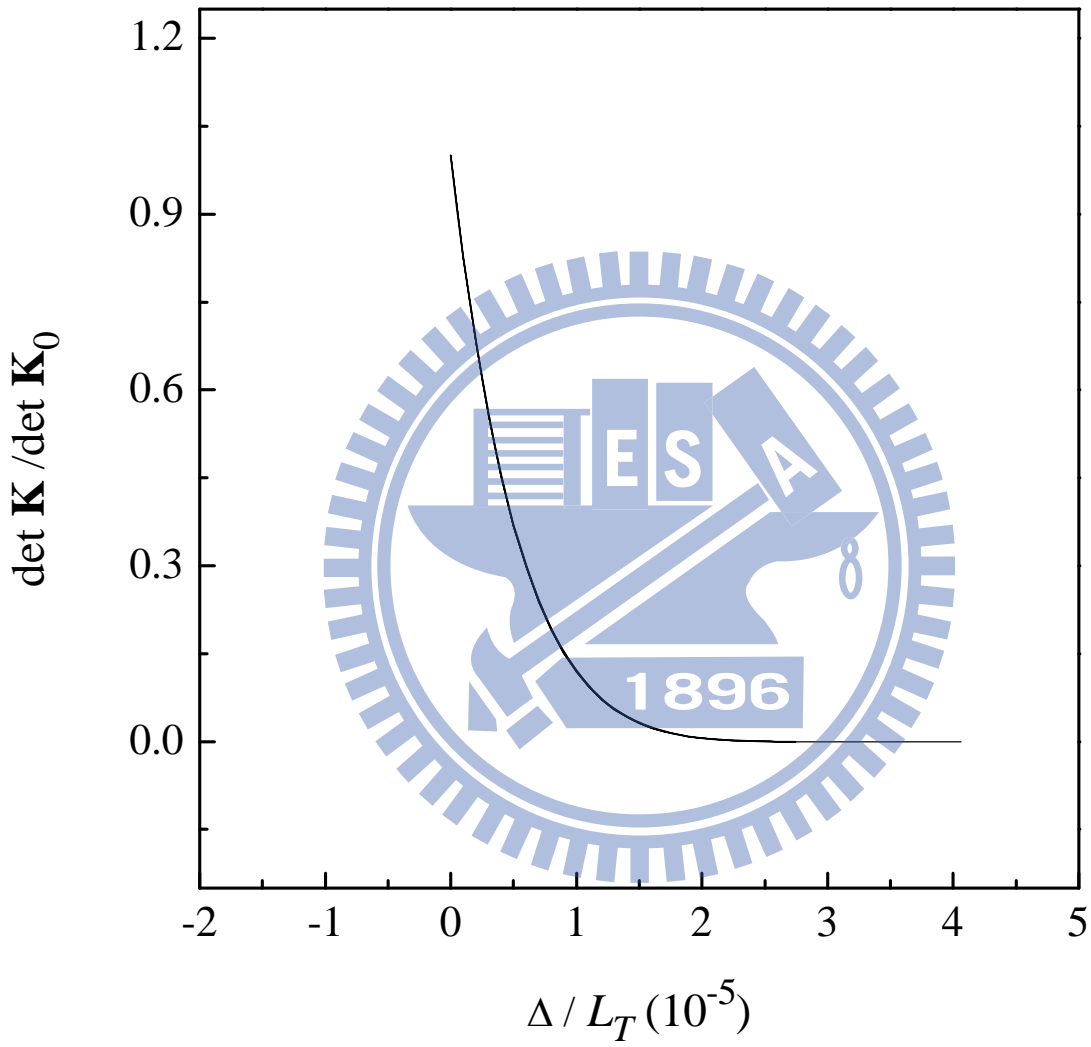
圖五 例題一的端點反力 P/AE - 扭轉角 ϕ/L_T 之關係圖



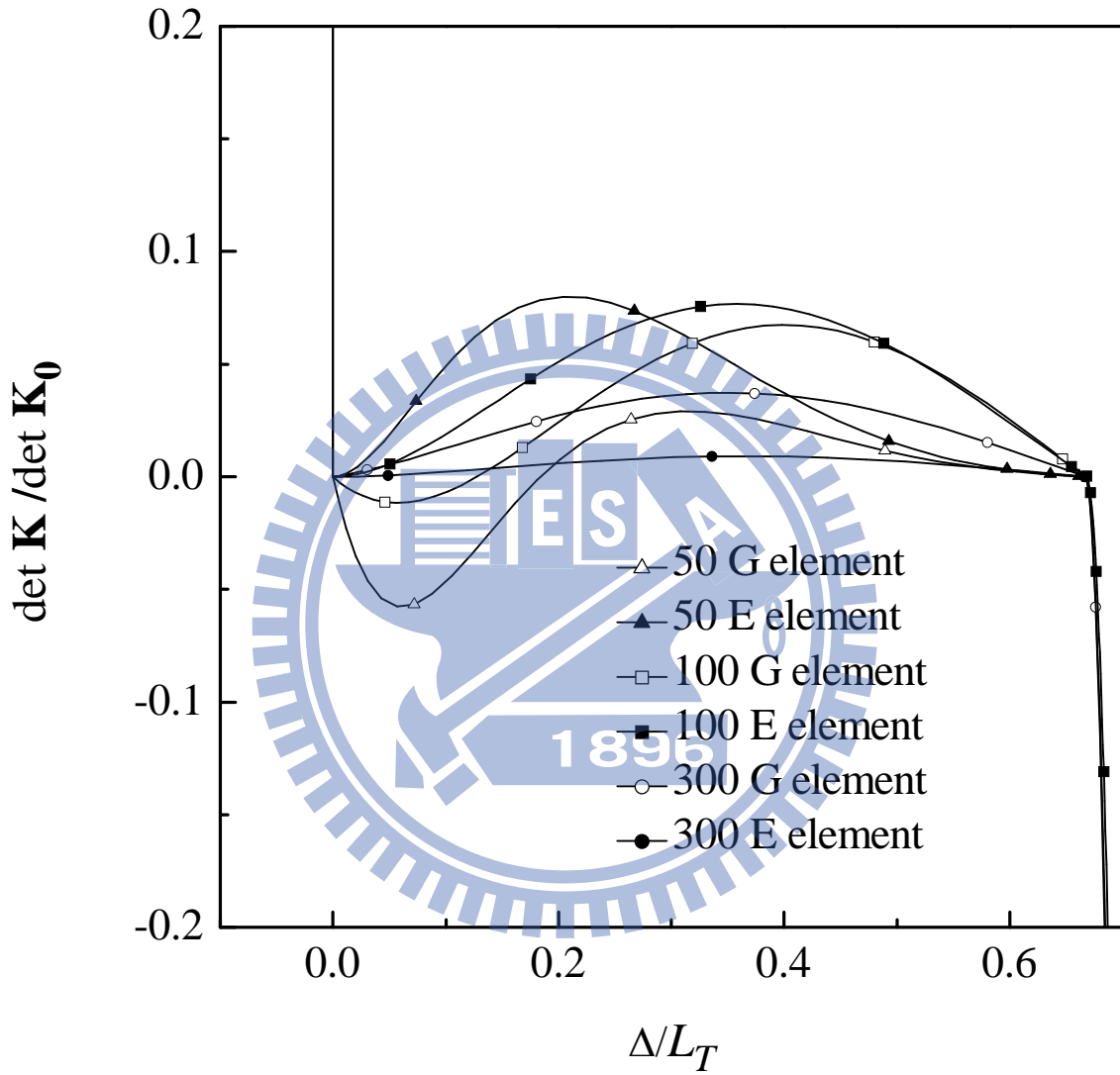
圖六 例題一的端點反力扭矩 M/GJ - 扭轉角 ϕ/L_T 之關係圖



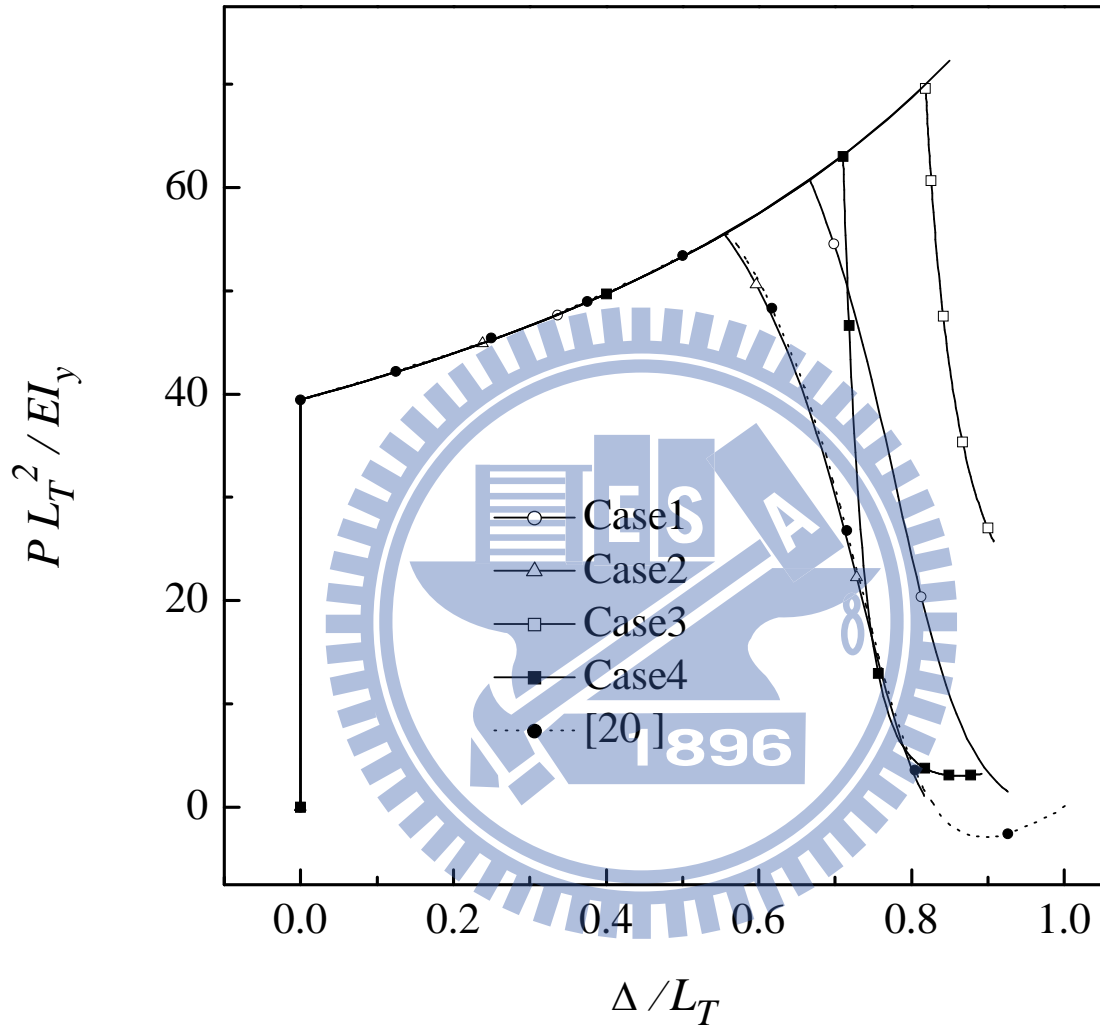
圖七 固端梁受端點軸向壓縮位移



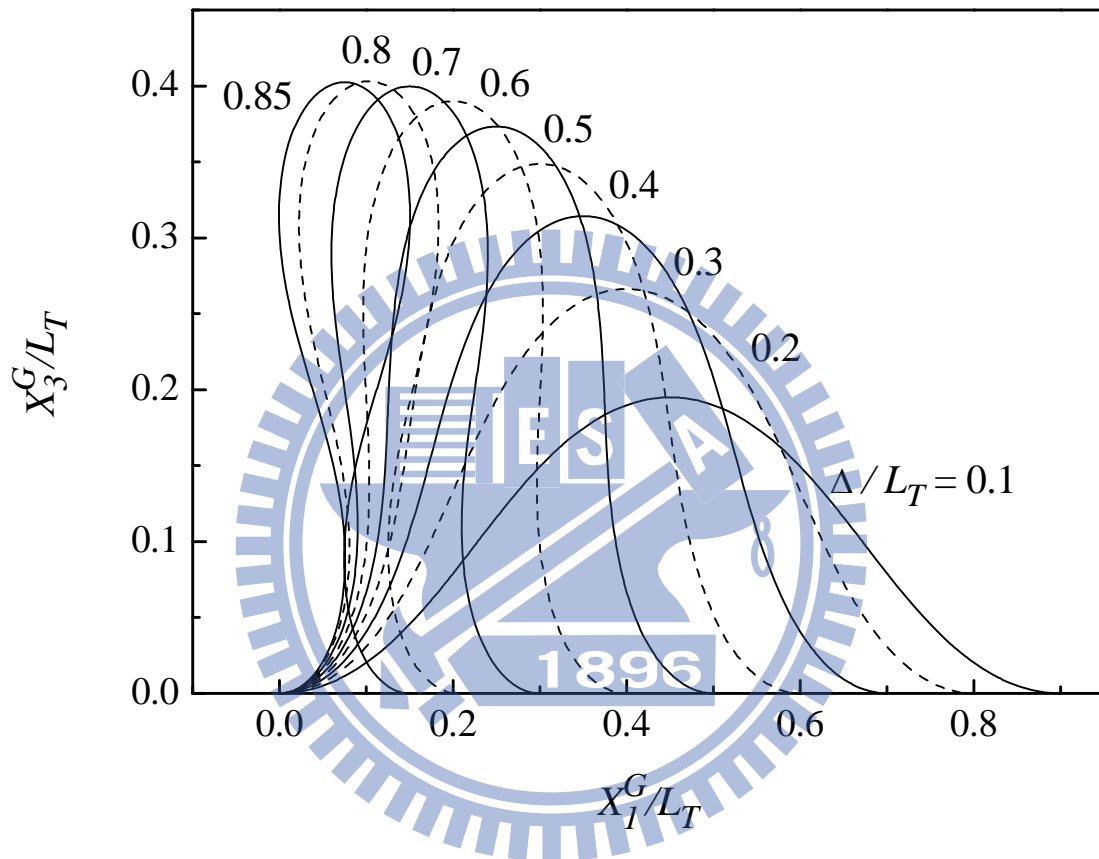
圖八 例題二 Case1(WF)之 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線



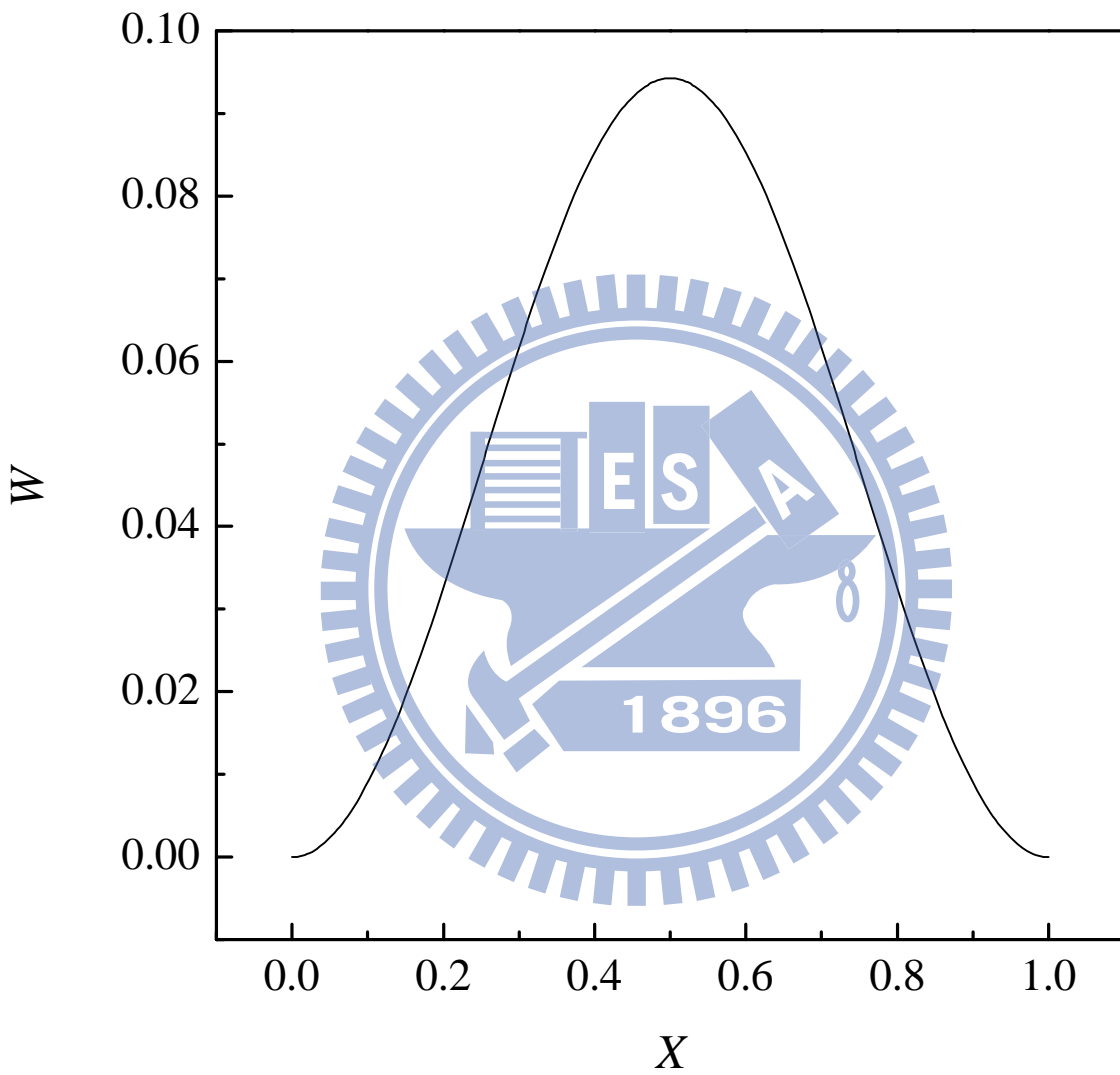
圖九 例題二 Case1(WF)之 $\det \mathbf{K} / \det \mathbf{K}_0$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線



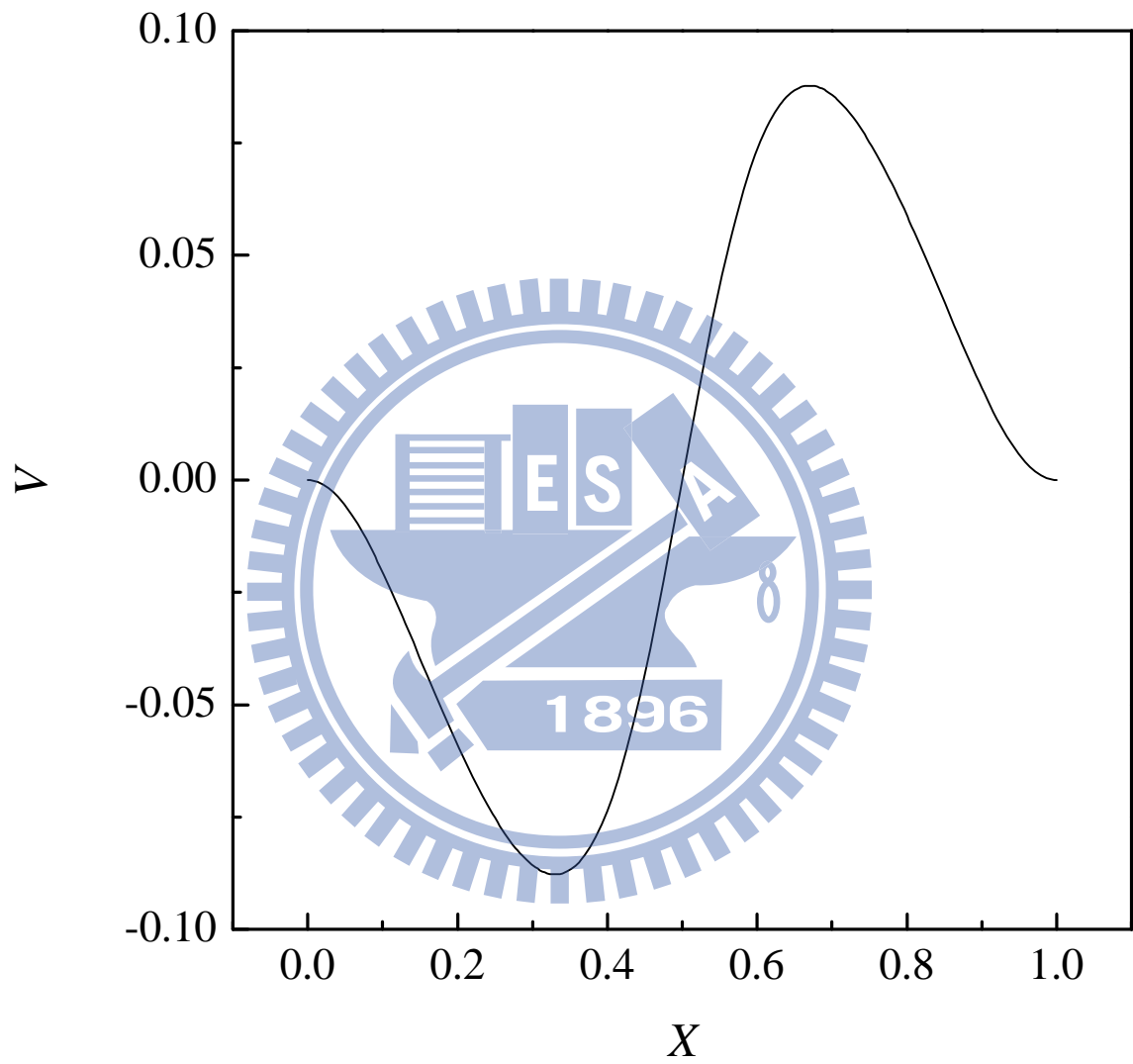
圖十 固端梁之端點 B 在 X_1^G 方向之無因次反力 PL_T^2/EI_y -無因次軸向位移 Δ/L_T 曲線(例題二)



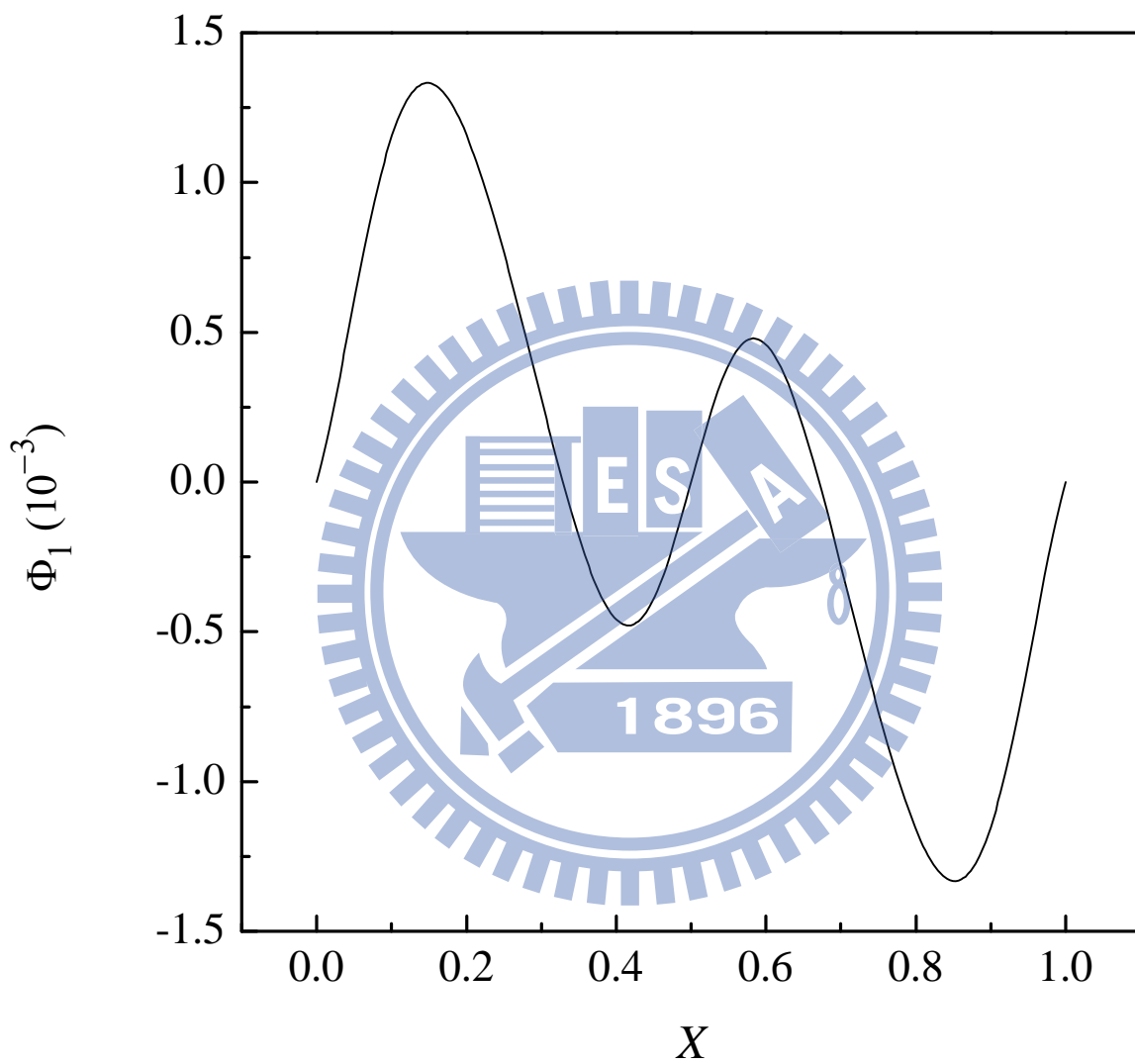
圖十一 挫屈梁受端點軸向位移之主要平衡路徑的變形圖(例題二)



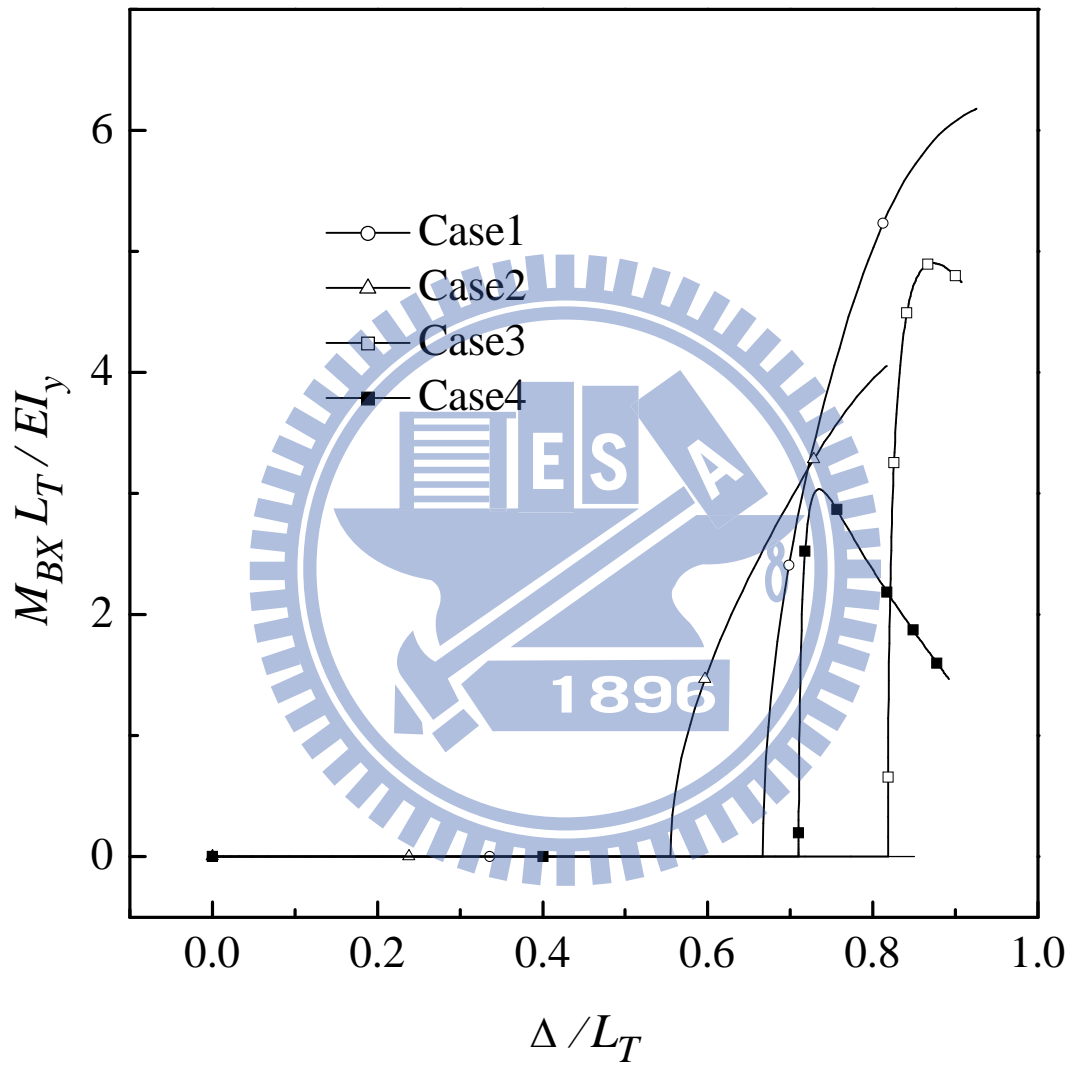
圖十二 例題二 Case1 第一次挫屈挫屈模態(X_3^G 方向的位移分量)



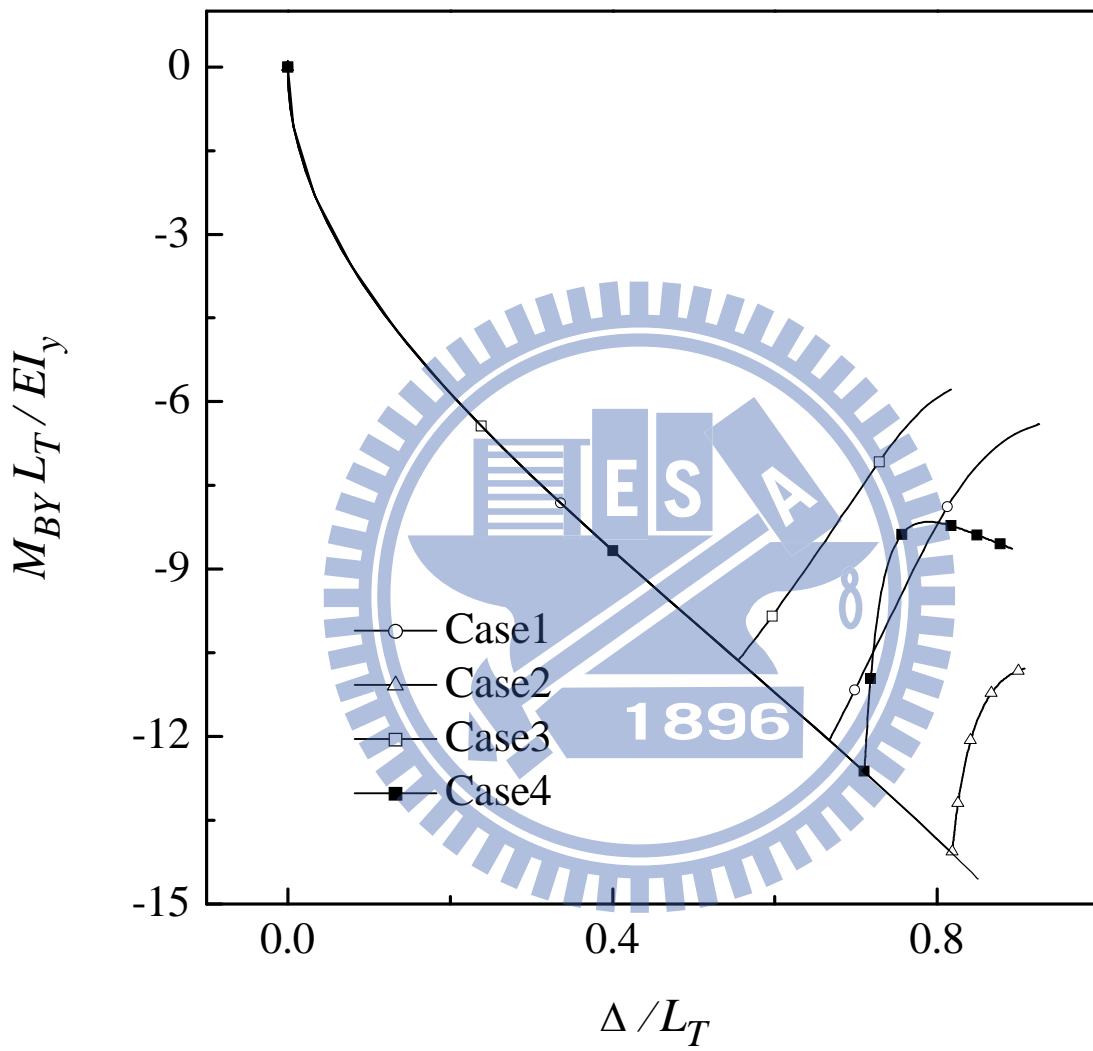
圖十三 例題二 Case1 第二次挫屈挫屈模態(X_2^G 方向的位移分量)



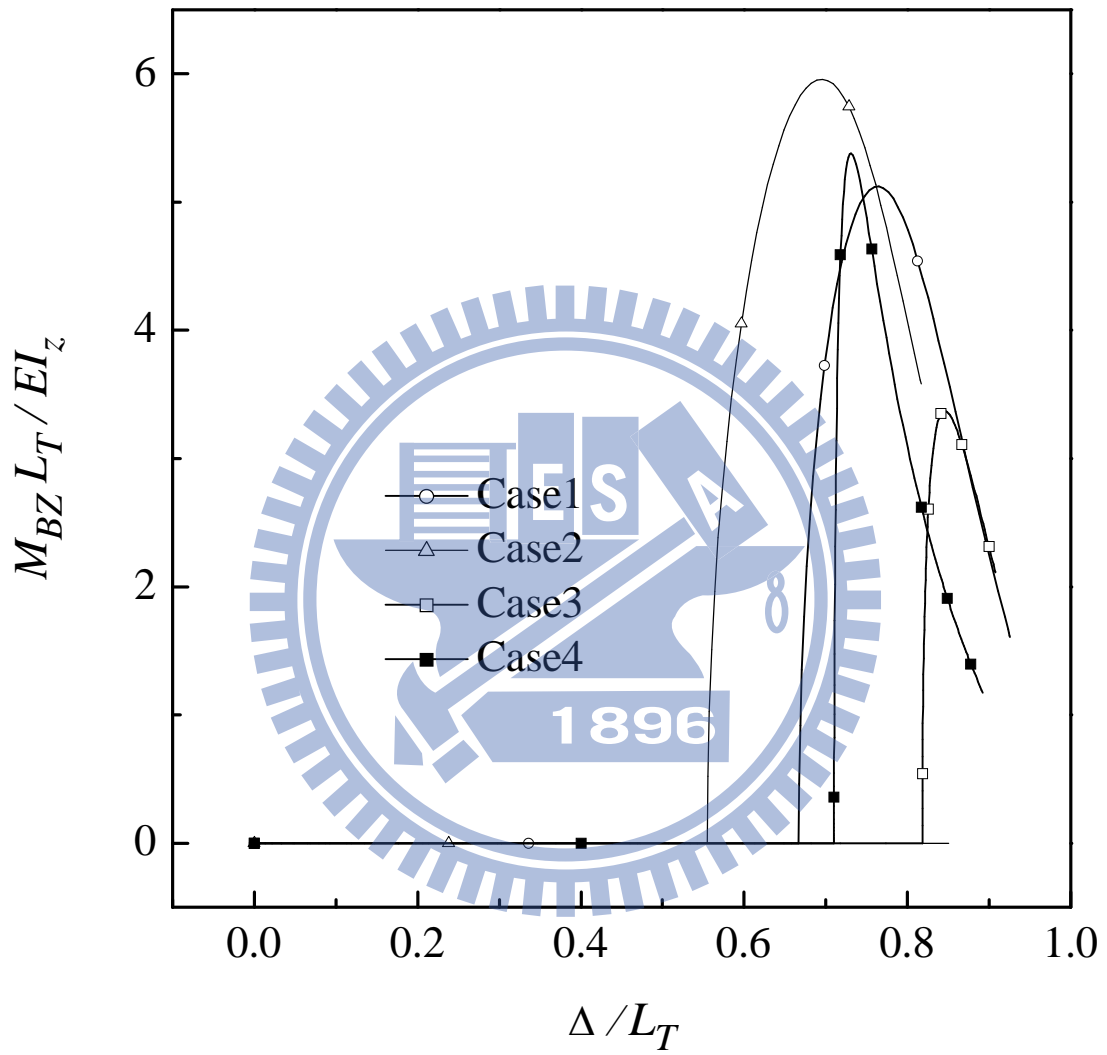
圖十四 例題二 Case1 第二次挫屈挫屈模態(繞 X_1^G 軸方向的旋轉分量)



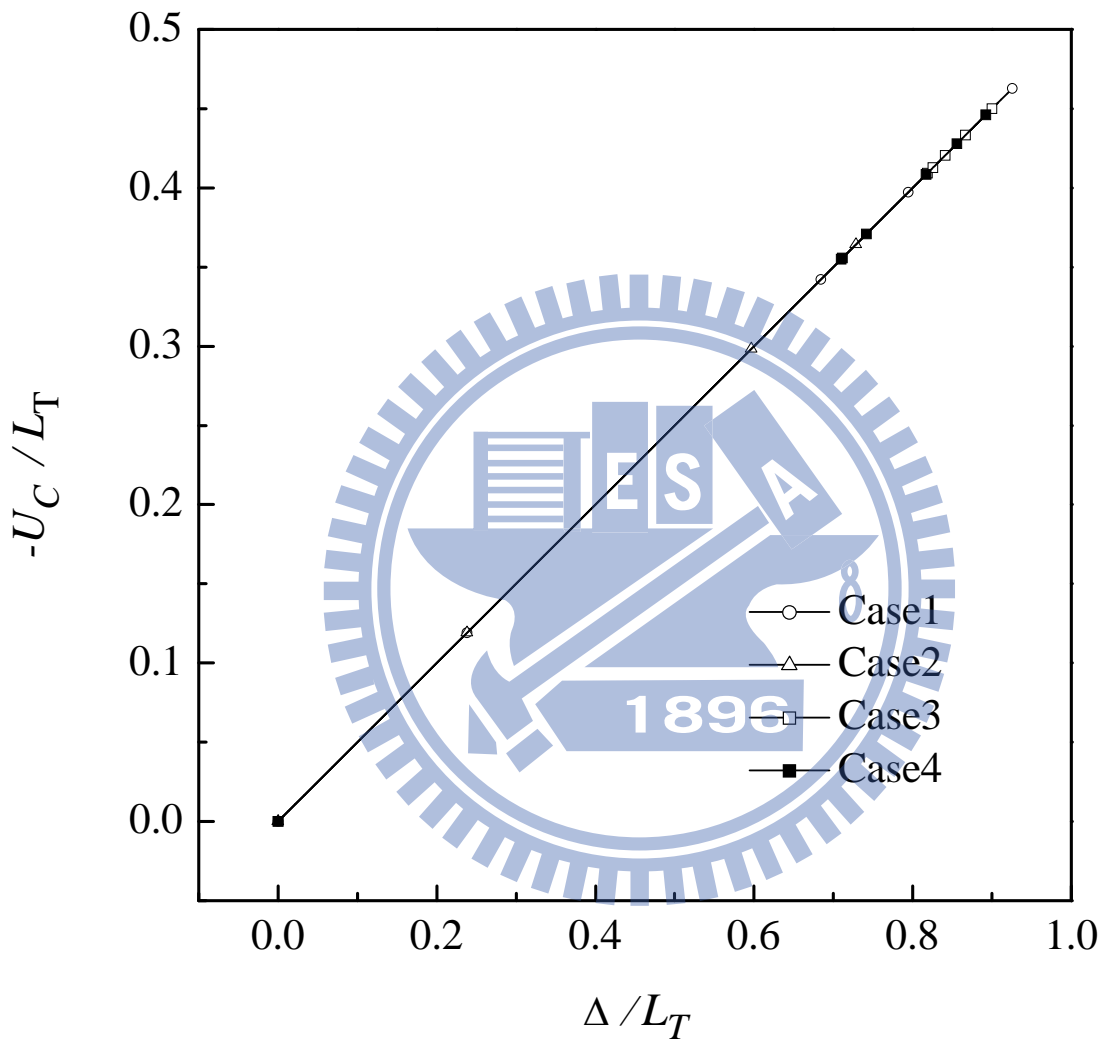
圖十五 固端梁端點 B 在 X_1^G 方向之反力矩 $M_{BX} L_T / EI_y$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線(例題二)



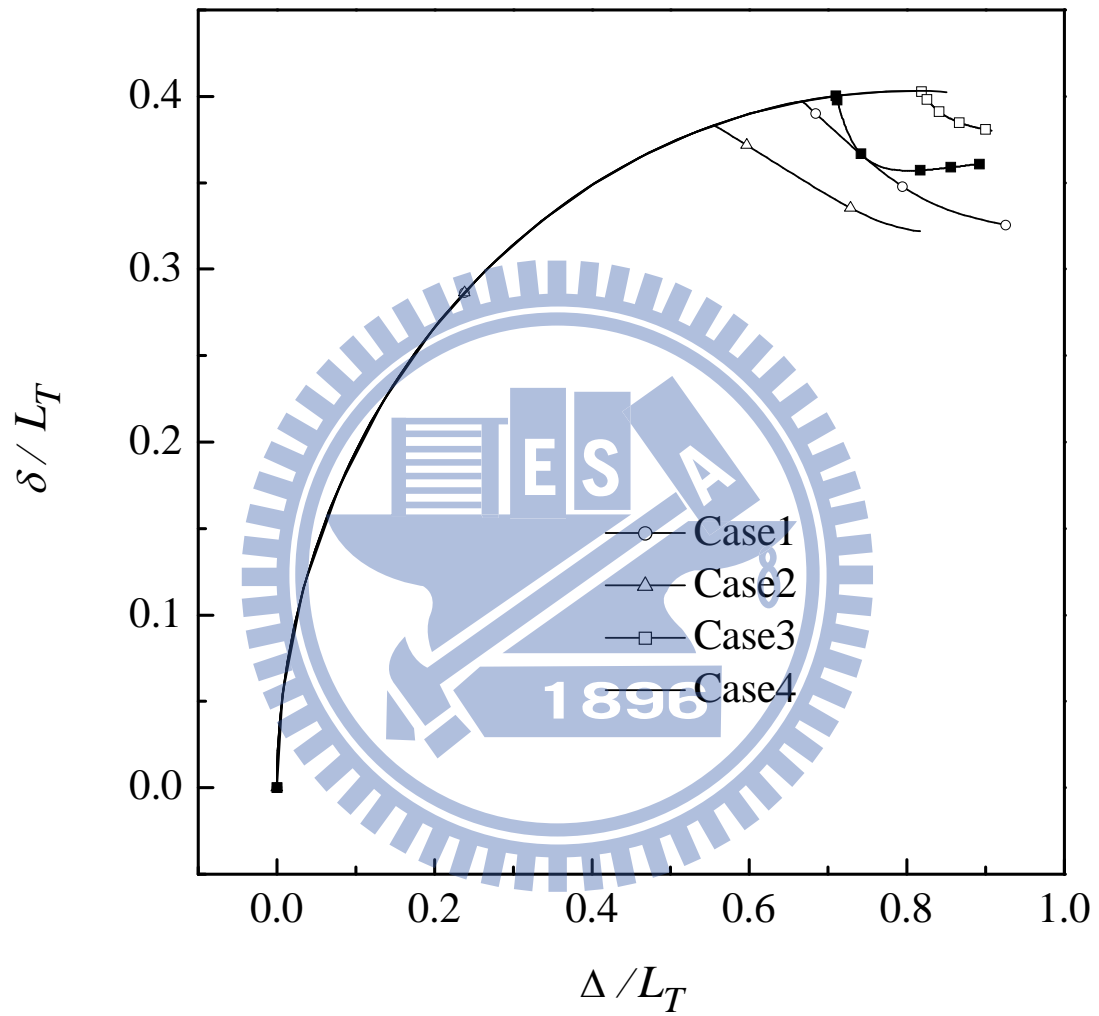
圖十六 固端梁端點 B 在 X_2^G 方向之反力矩 $M_{BY} L_T / EI_y$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線(例題二)



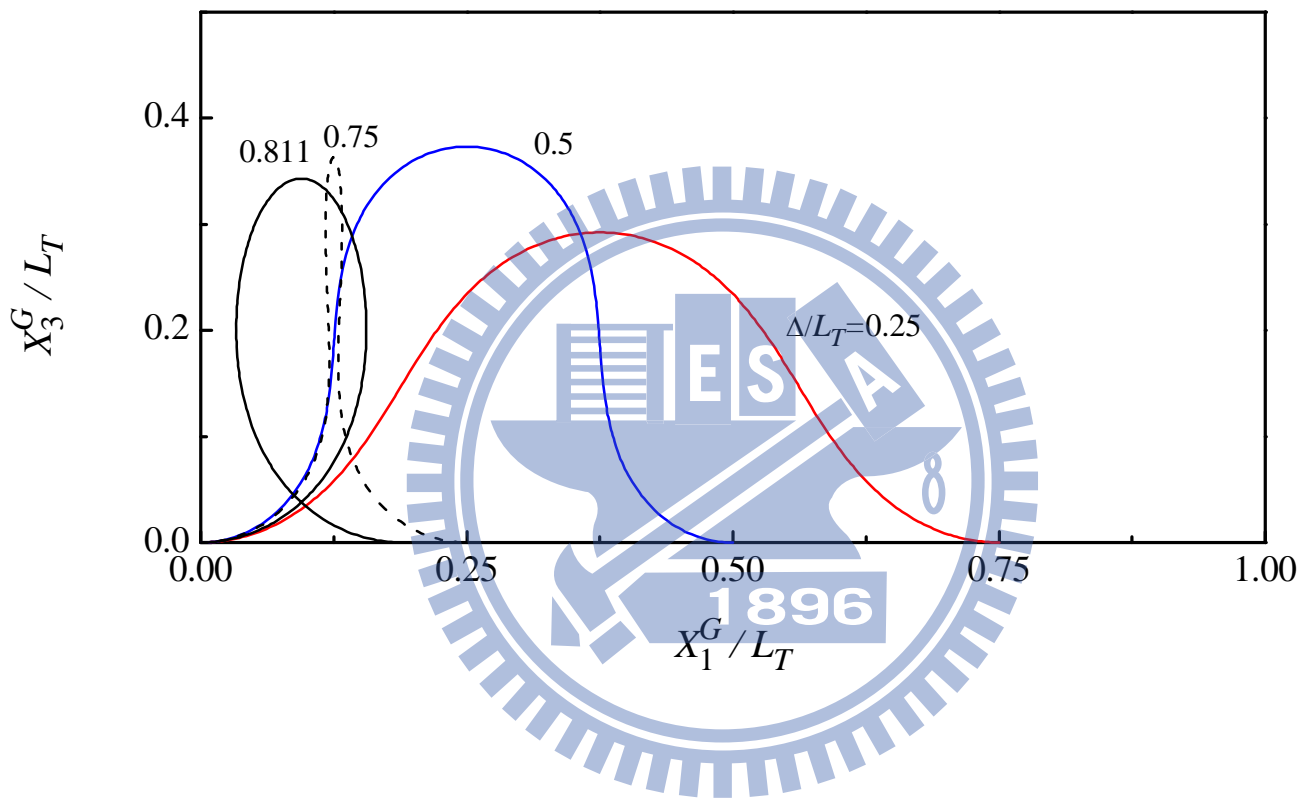
圖十七 固端梁端點 B 在 X_3^G 方向之反力矩 $M_{BZ} L_T / EI_y$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線(例題二)



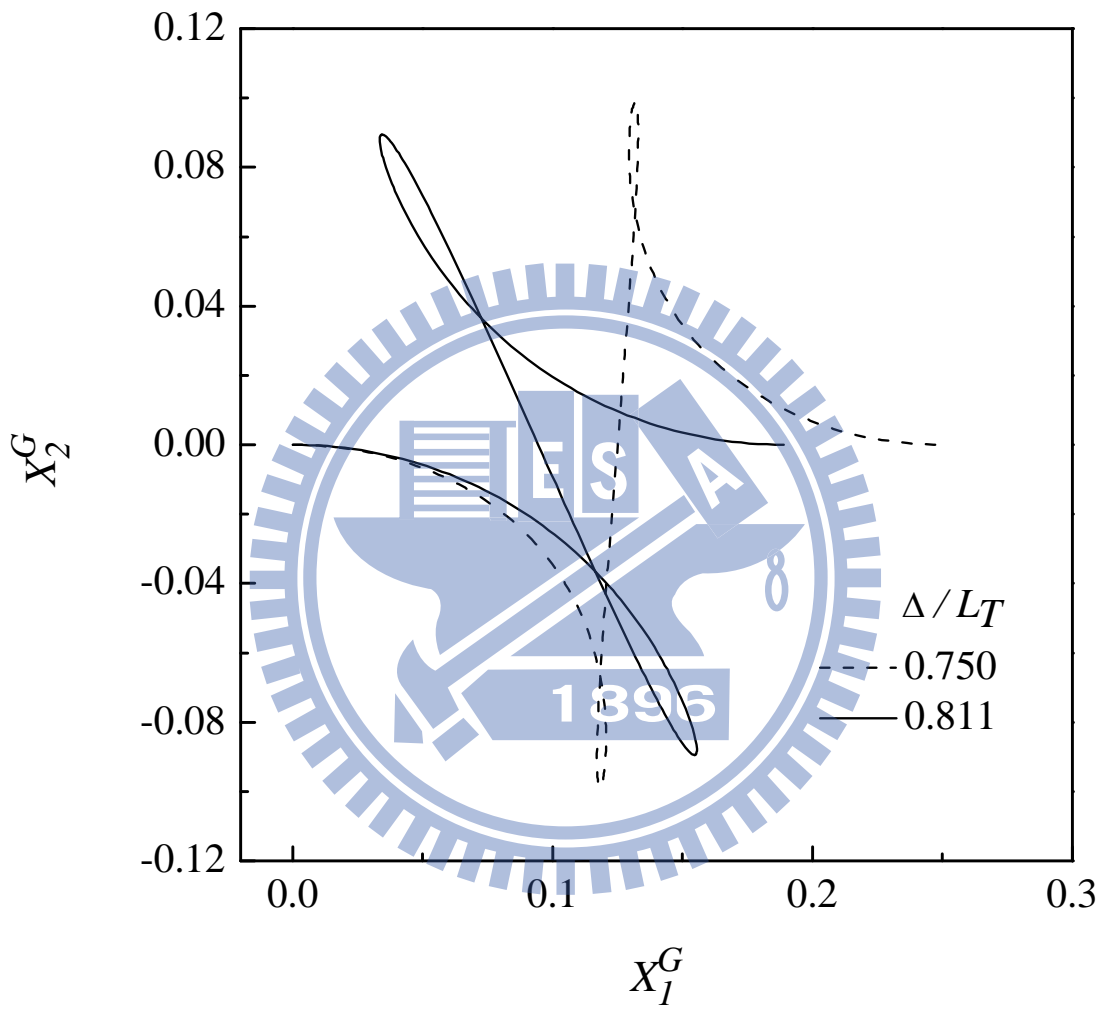
圖十八 梁中心點 C 在 X_1^G 方向之 $-U_C / L_T$ - 軸向位移 Δ / L_T 曲線(例題二)



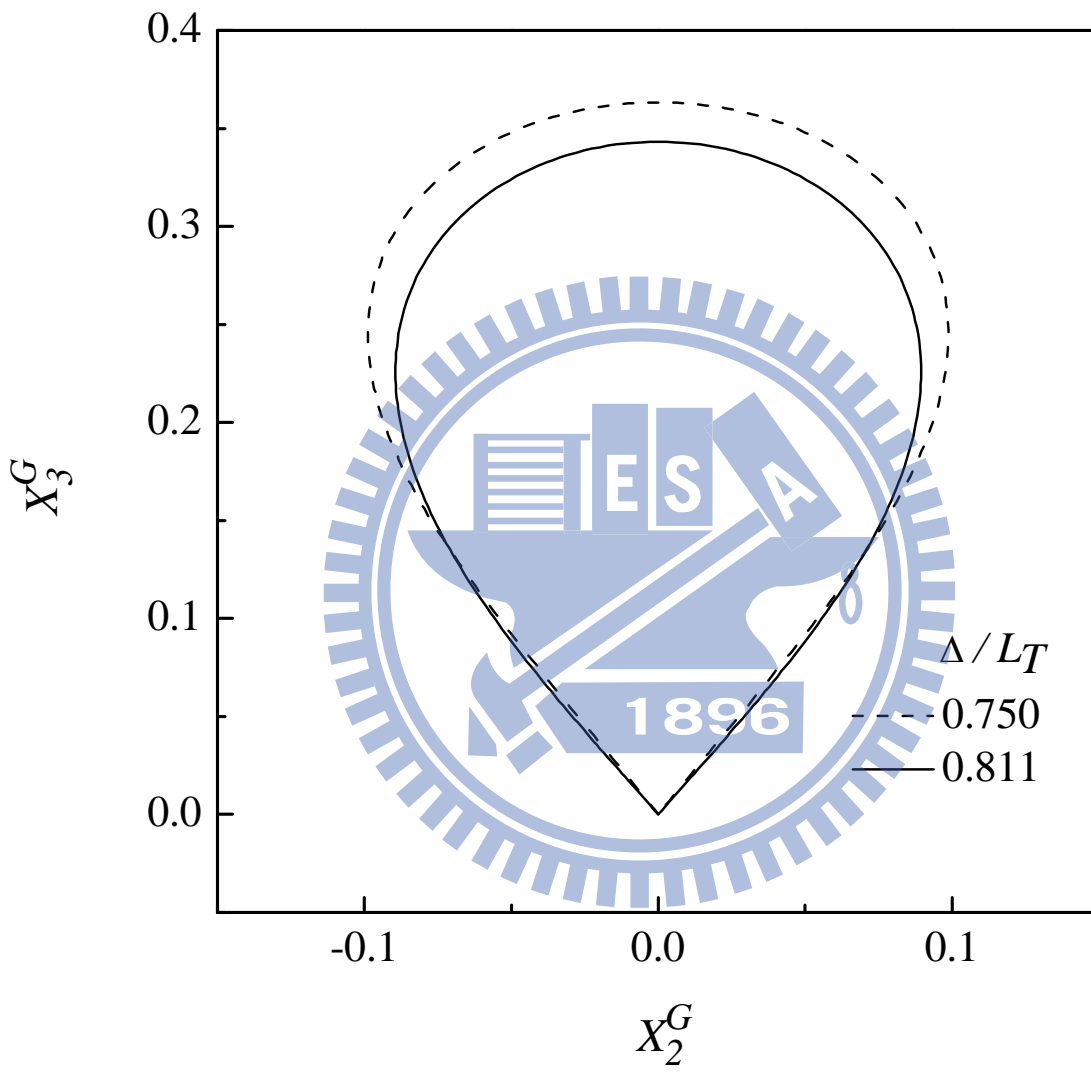
圖十九 梁中心點 C 在 X_3^G 方向之側向位移 δ/L_T - 軸向位移 Δ/L_T 曲線(例題二)



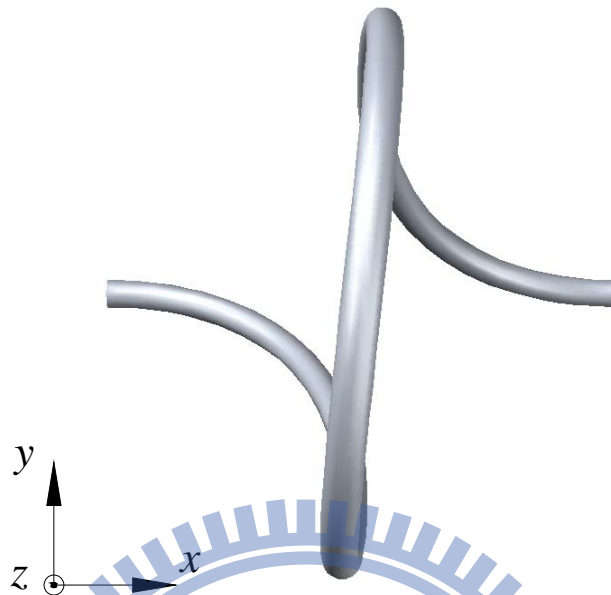
圖二十 例題二 Case1 之變形圖(前視圖)



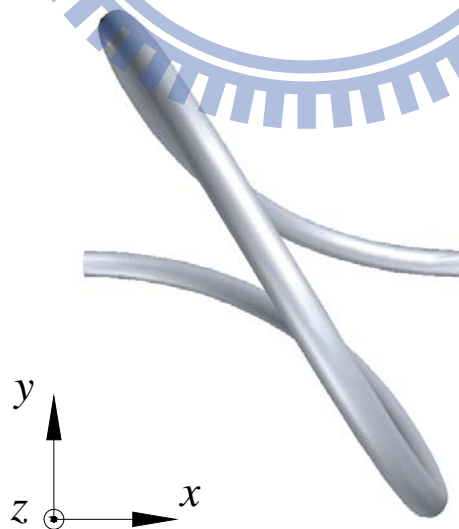
圖二十一 例題二 Case1 之變形圖(上視圖)



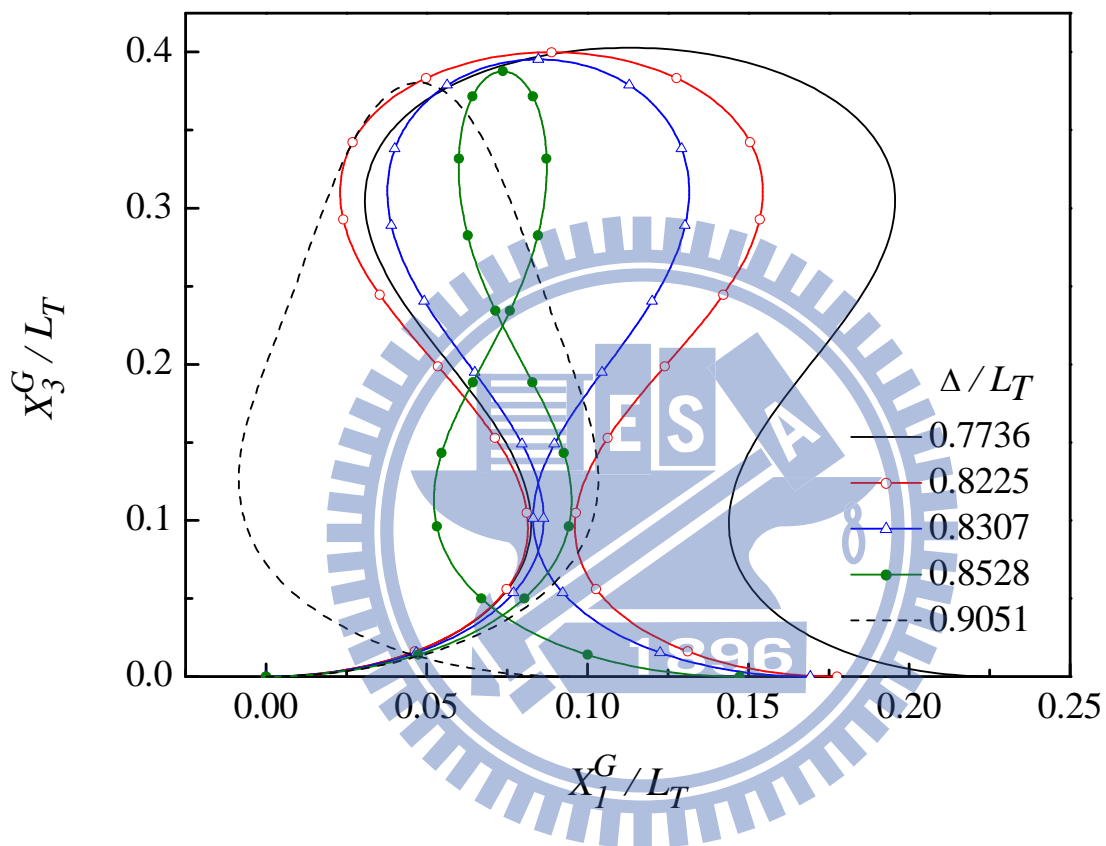
圖二十二 例題二 Case1 之變形圖(側視圖)



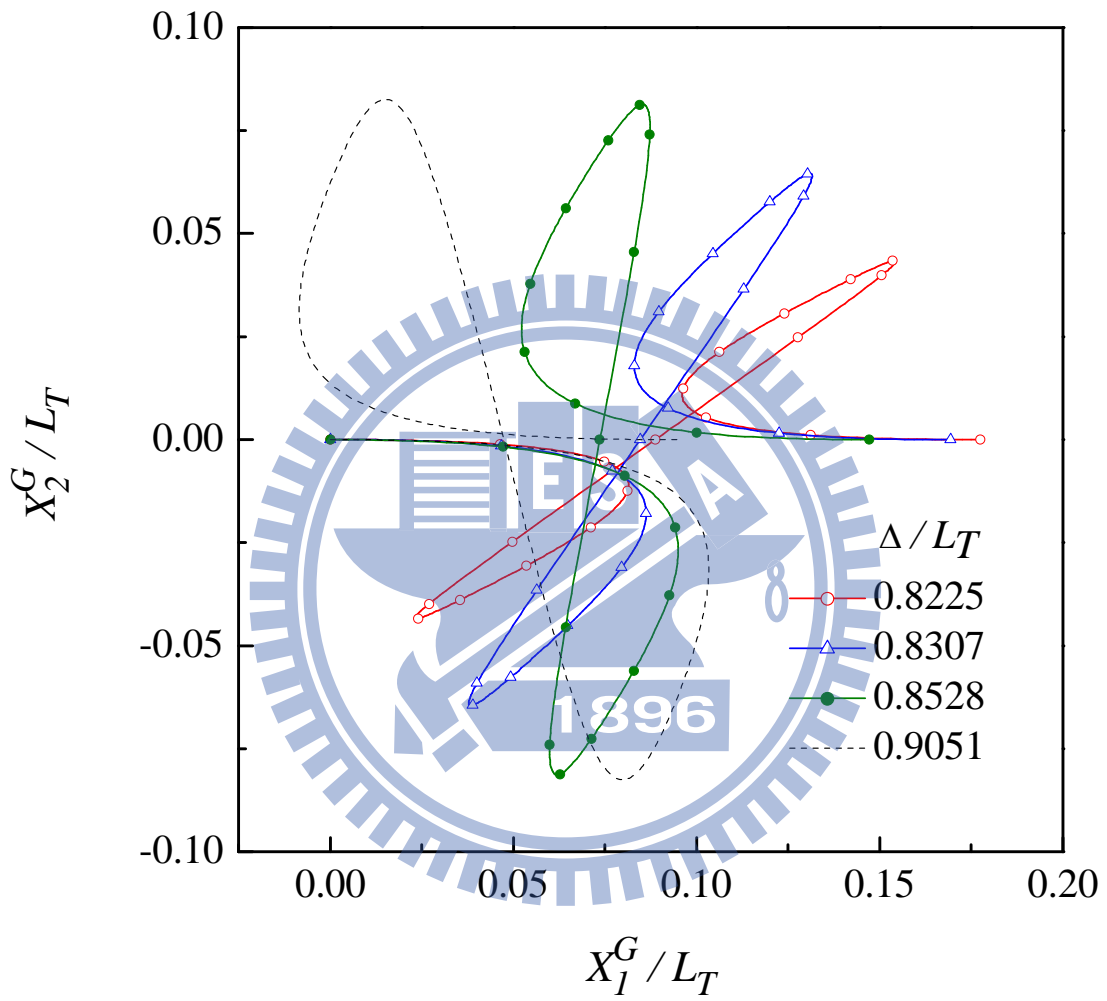
圖二十三 例題二 Case1 變形之立體圖($\Delta/L_T = 0.75$)



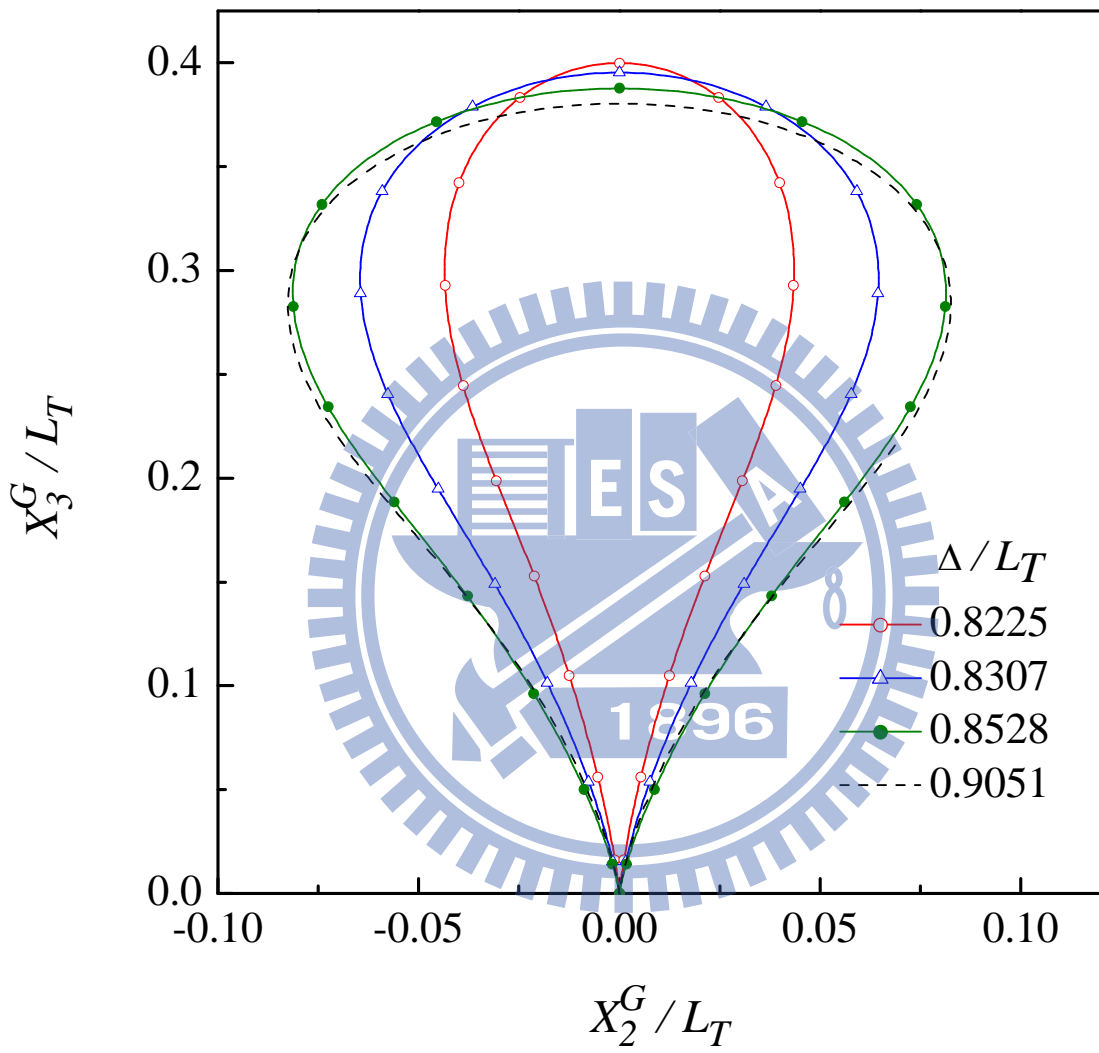
圖二十四 例題二 Case1 變形之立體圖($\Delta/L_T = 0.811$)



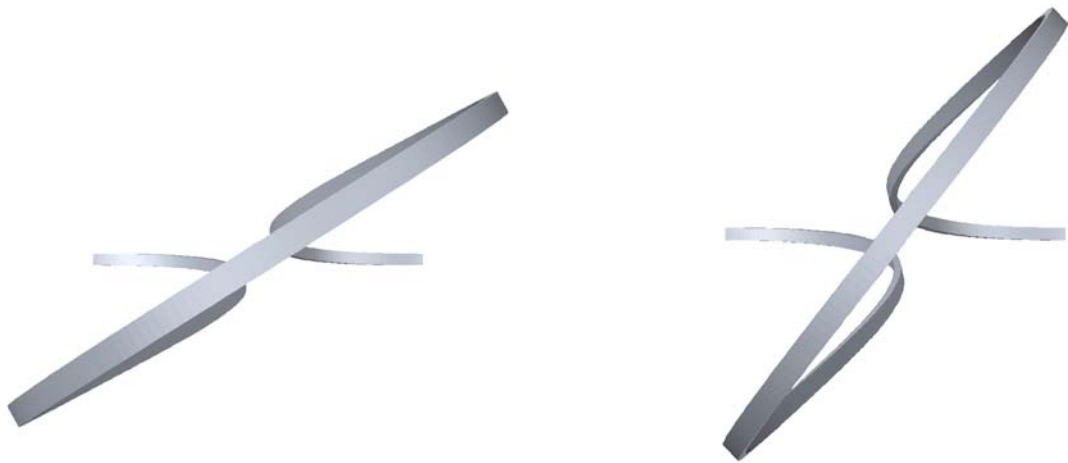
圖二十五 例題二 Case3 之變形圖(前視圖)



圖二十六 例題二 Case3 之變形圖(上視圖)

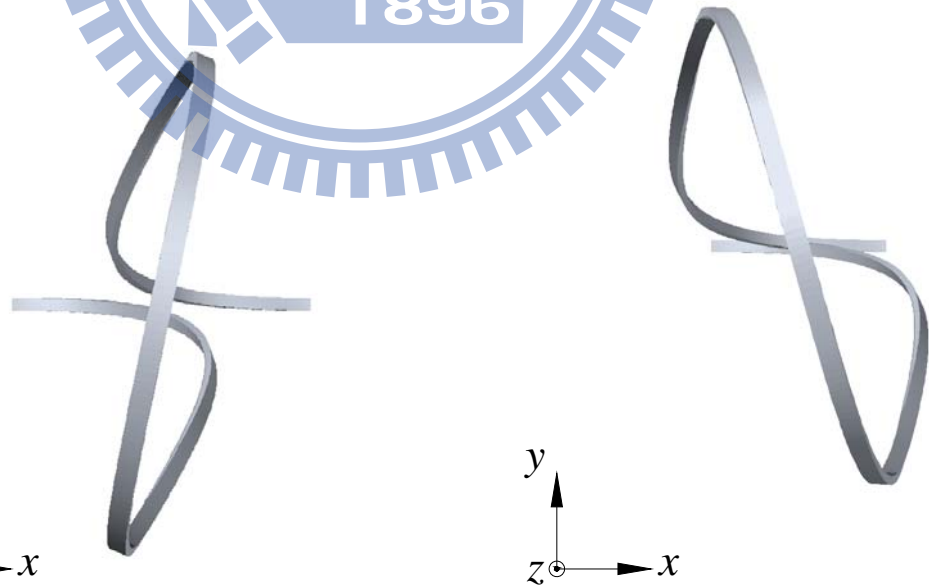


圖二十七 例題二 Case3 之變形圖(側視圖)



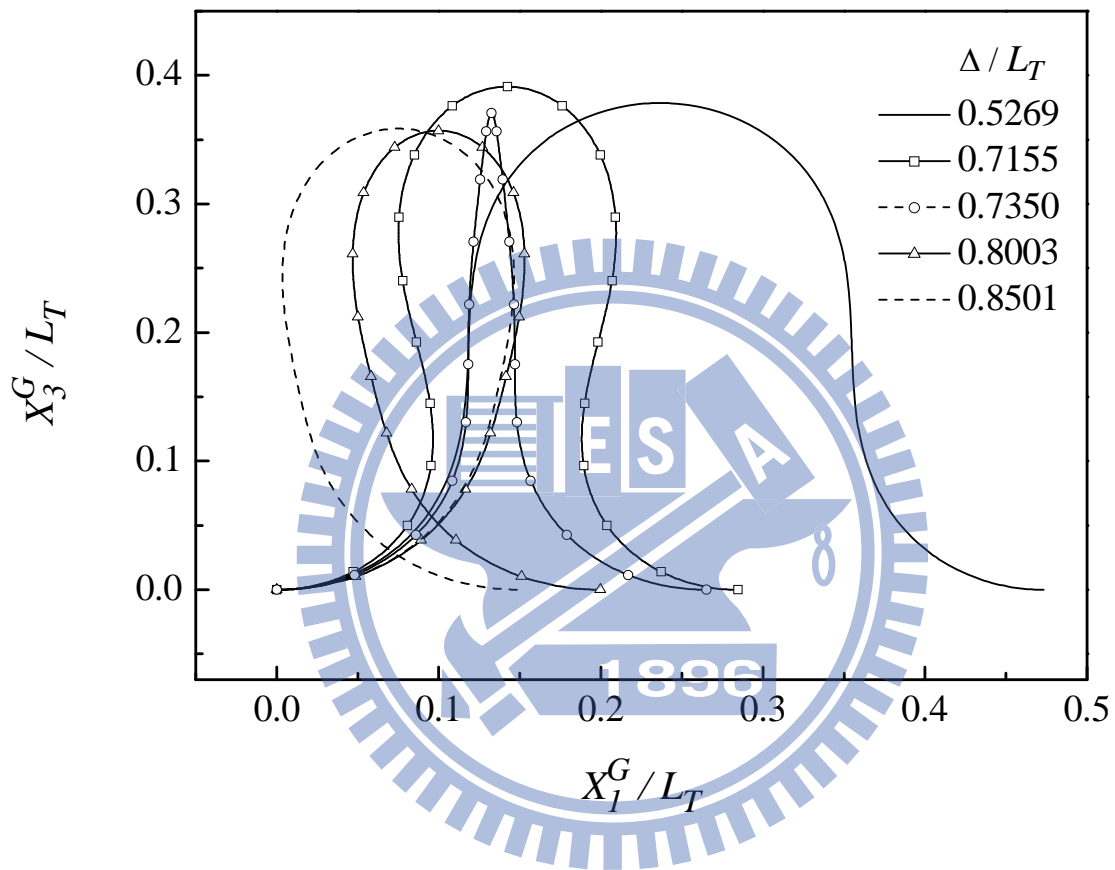
圖二十八 例題二 Case3 變形
之立體圖($\Delta/L_T = 0.8225$)

圖二十九 例題二 Case3 變形
之立體圖($\Delta/L_T = 0.8307$)

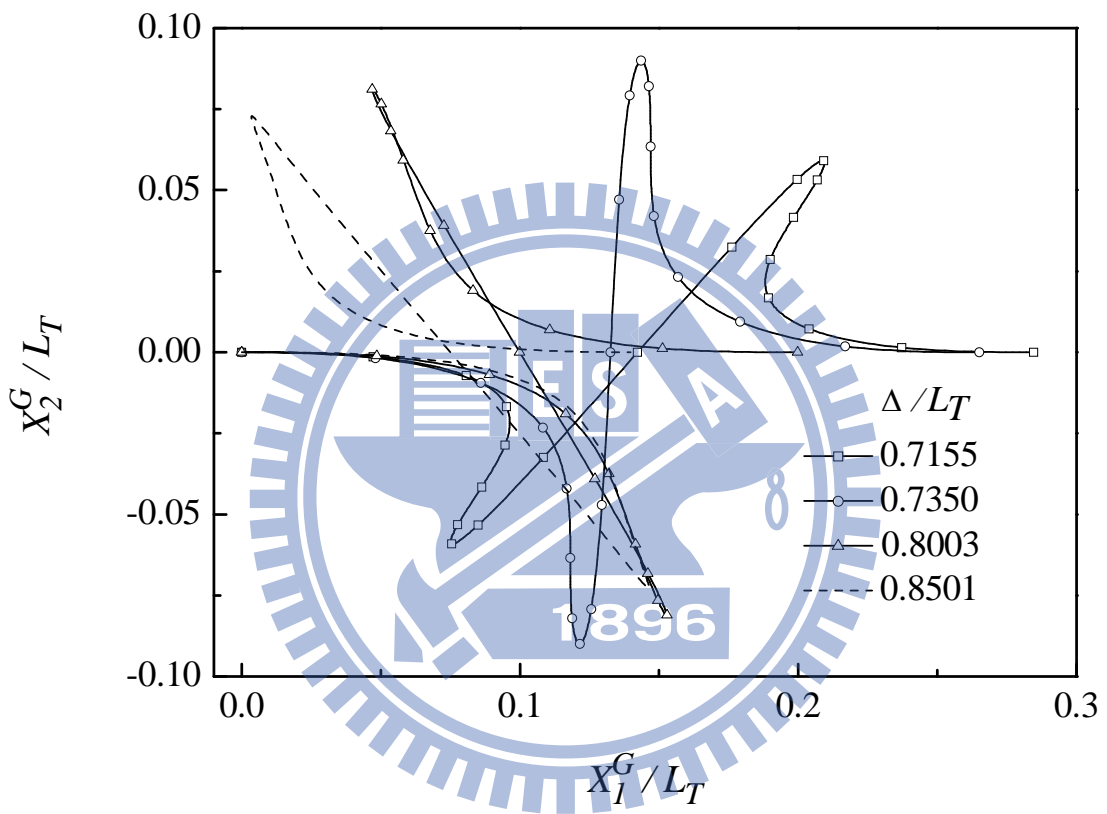


圖三十 例題二 Case3 變形
之立體圖($\Delta/L_T = 0.8528$)

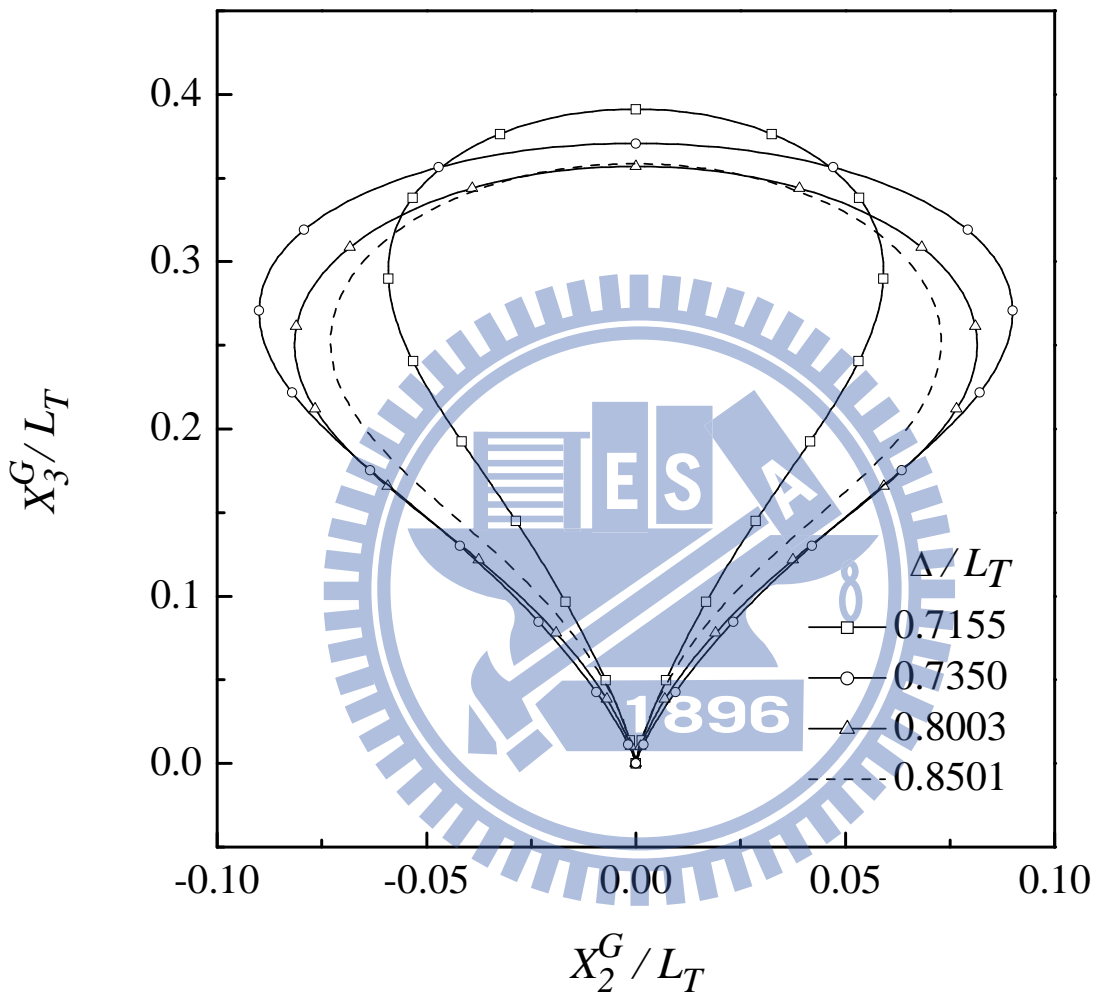
圖三十一 例題二 Case3 變形
之立體圖($\Delta/L_T = 0.9051$)



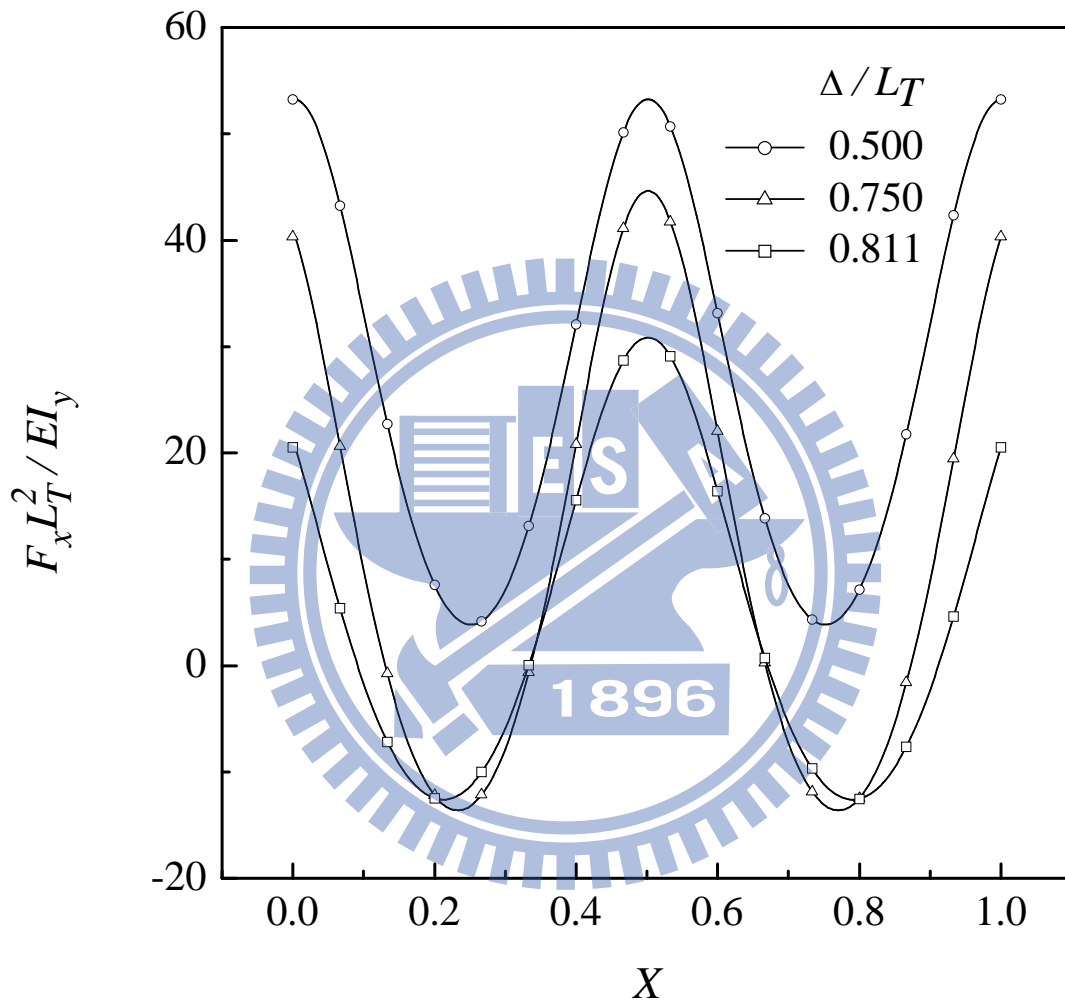
圖三十二 例題二 Case4 之變形圖(前視圖)



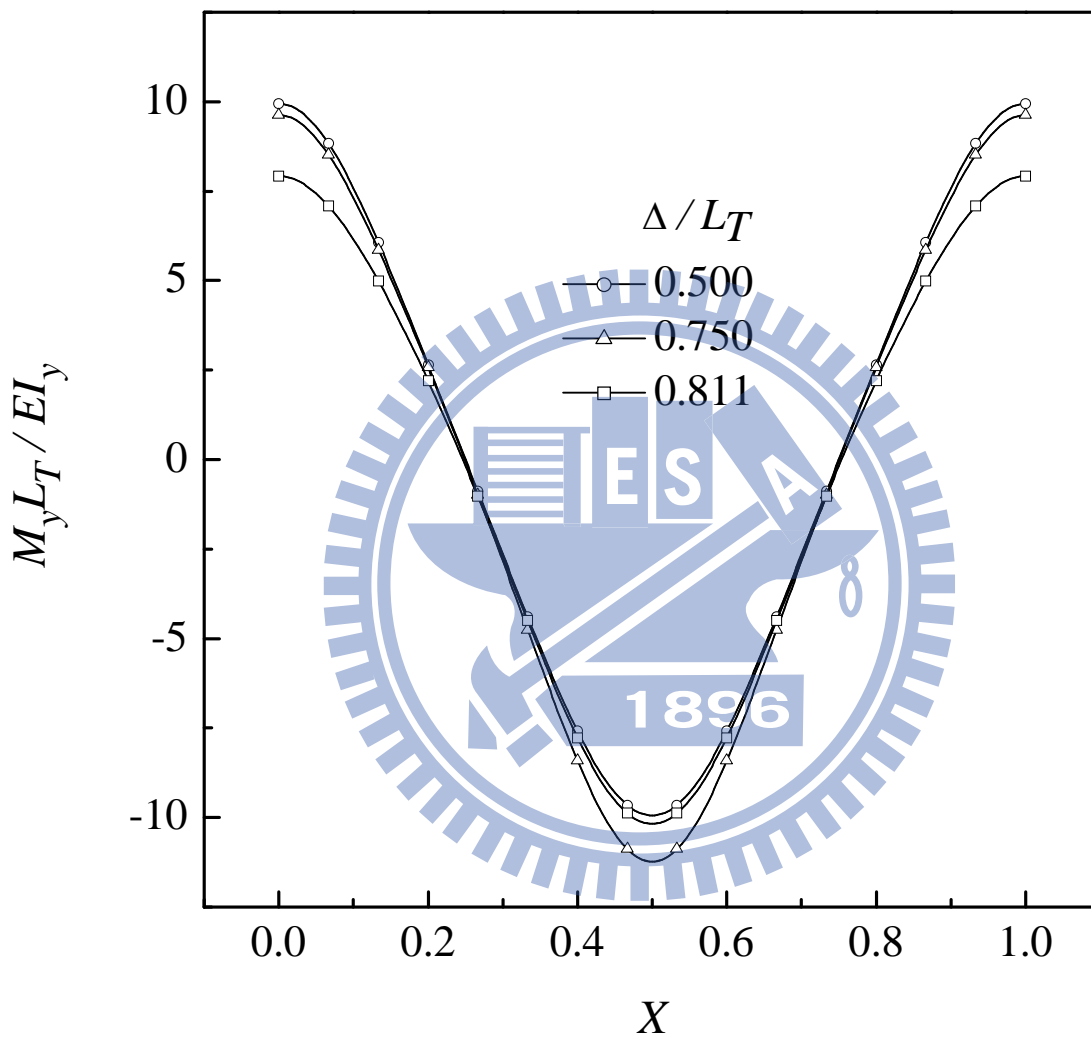
圖三十三 例題二 Case4 之變形圖(上視圖)



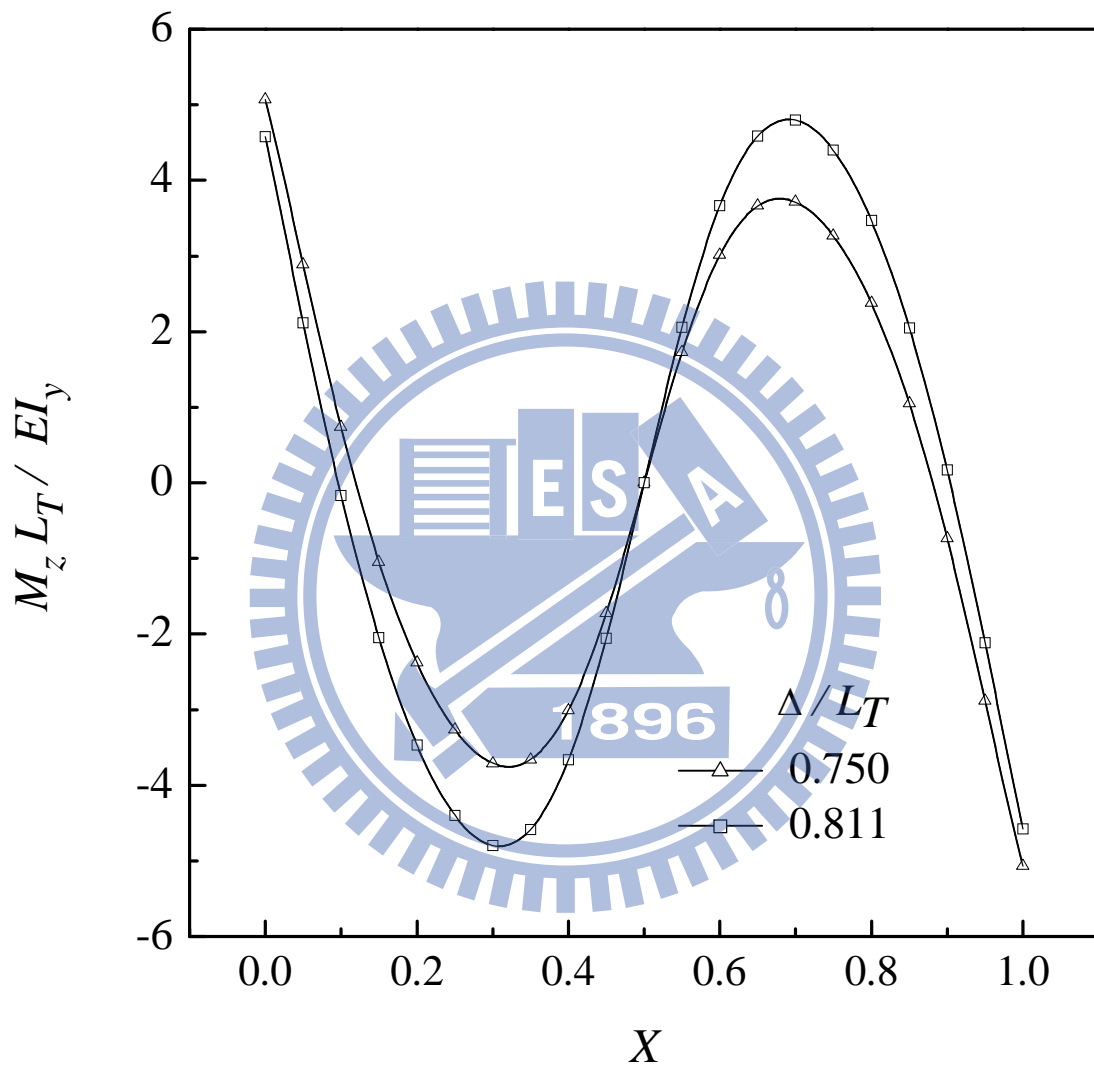
圖三十四 例題二 Case4 之變形圖(側視圖)



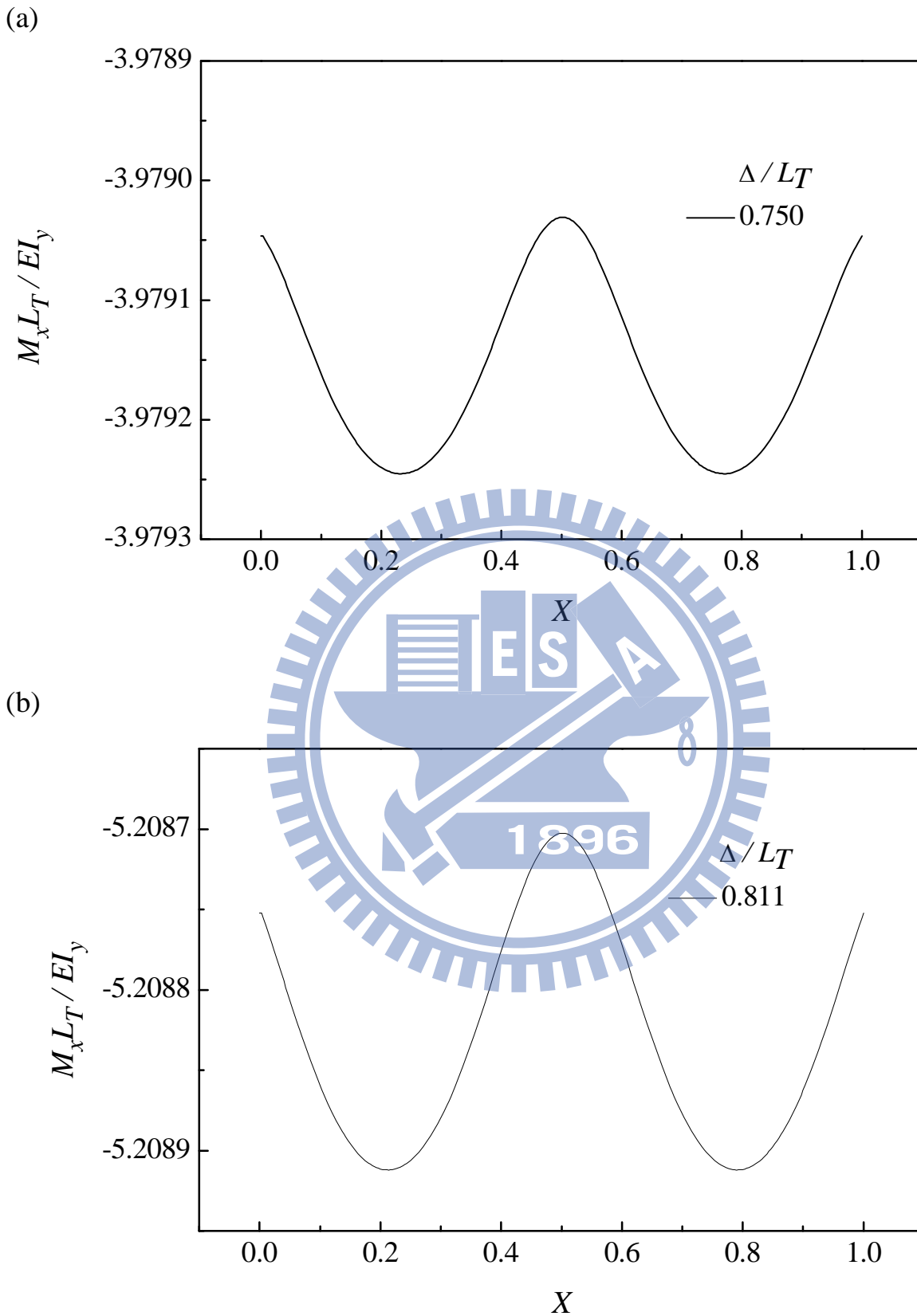
圖三十五 Case1 之斷面正向壓力 $F_x L_T^2 / EI_y$ 一梁軸 X 曲線(例題二)



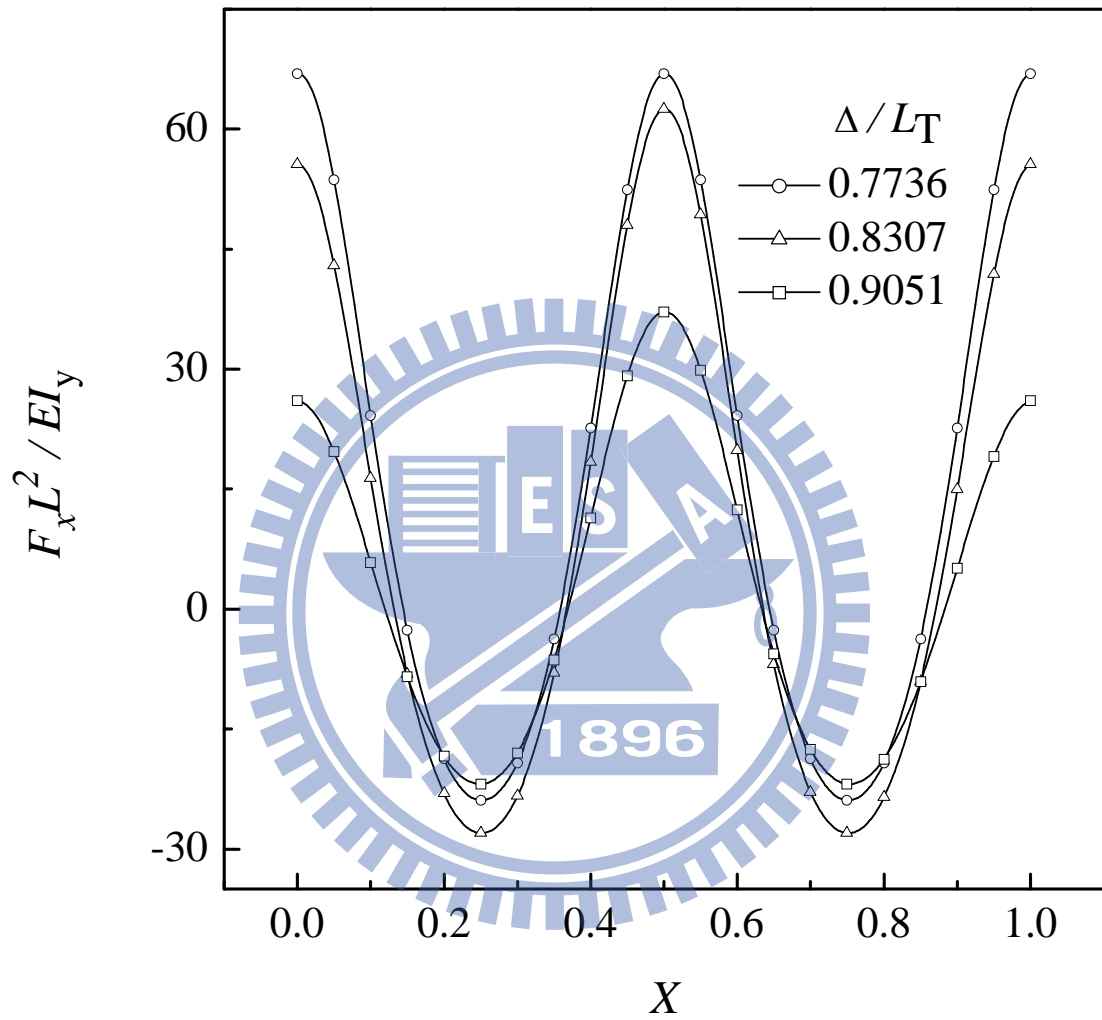
圖三十六 Case1 在斷面主軸 X_2^S 方向之彎矩 $M_y L_T / EI_y - X$ 曲線(例題二)



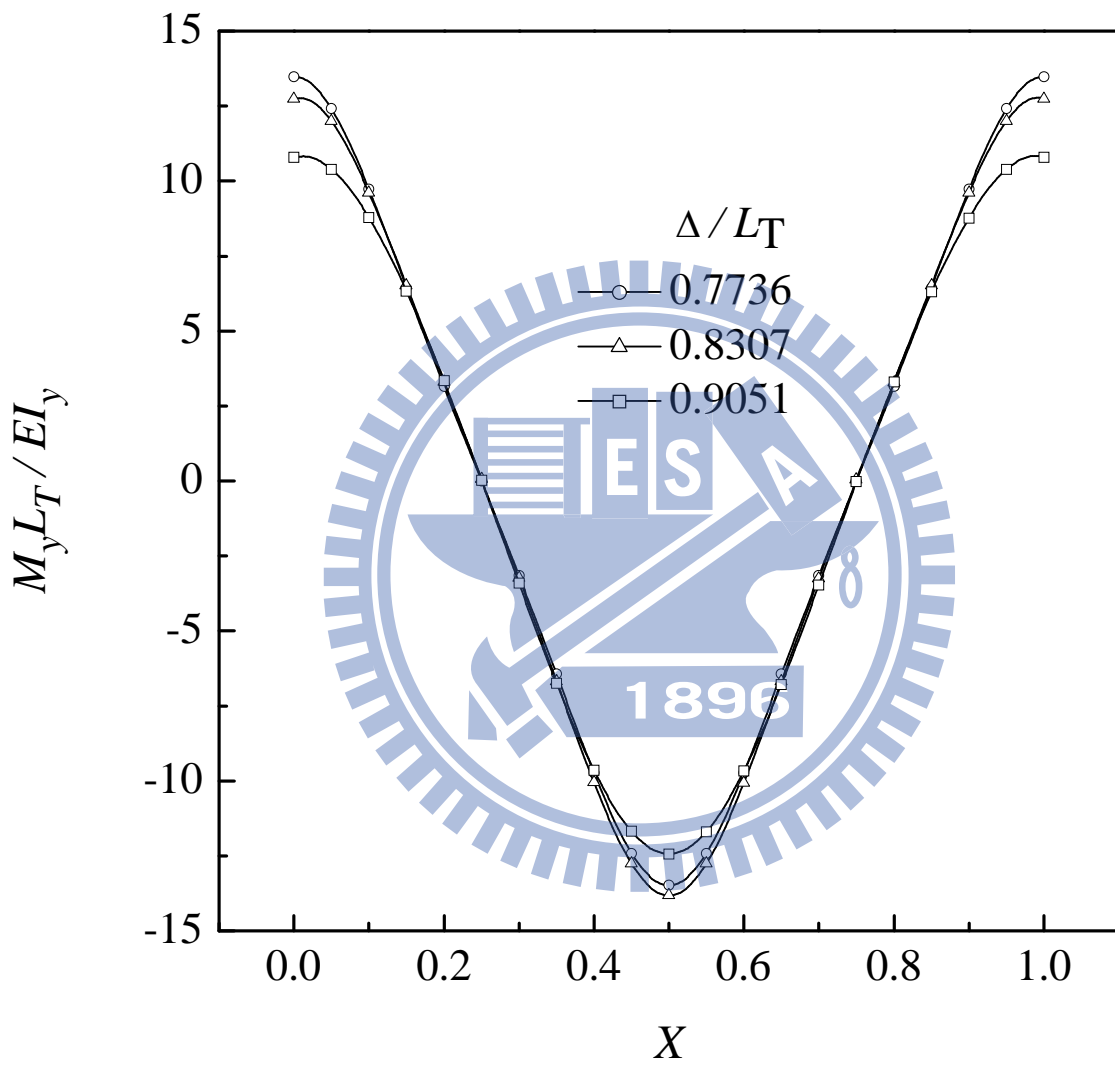
圖三十七 Case1 在斷面主軸 X_3^S 方向之彎矩 $M_z L_T / EI_y - X$ 曲線(例題二)



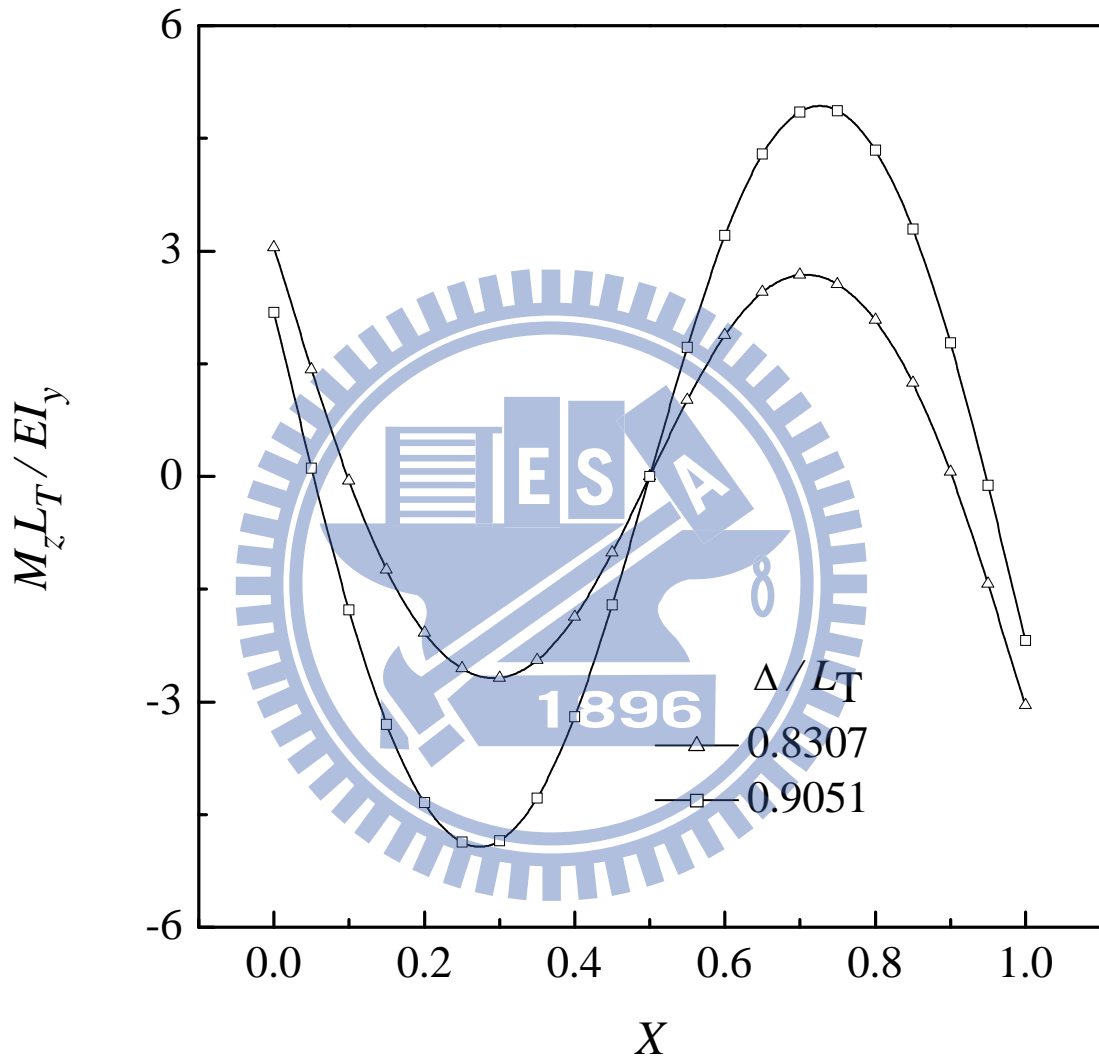
圖三十八 Case1 在斷面主軸 X_1^S 方向之彎矩 $M_x L_T / EI_y - X$ 曲線(例題二)



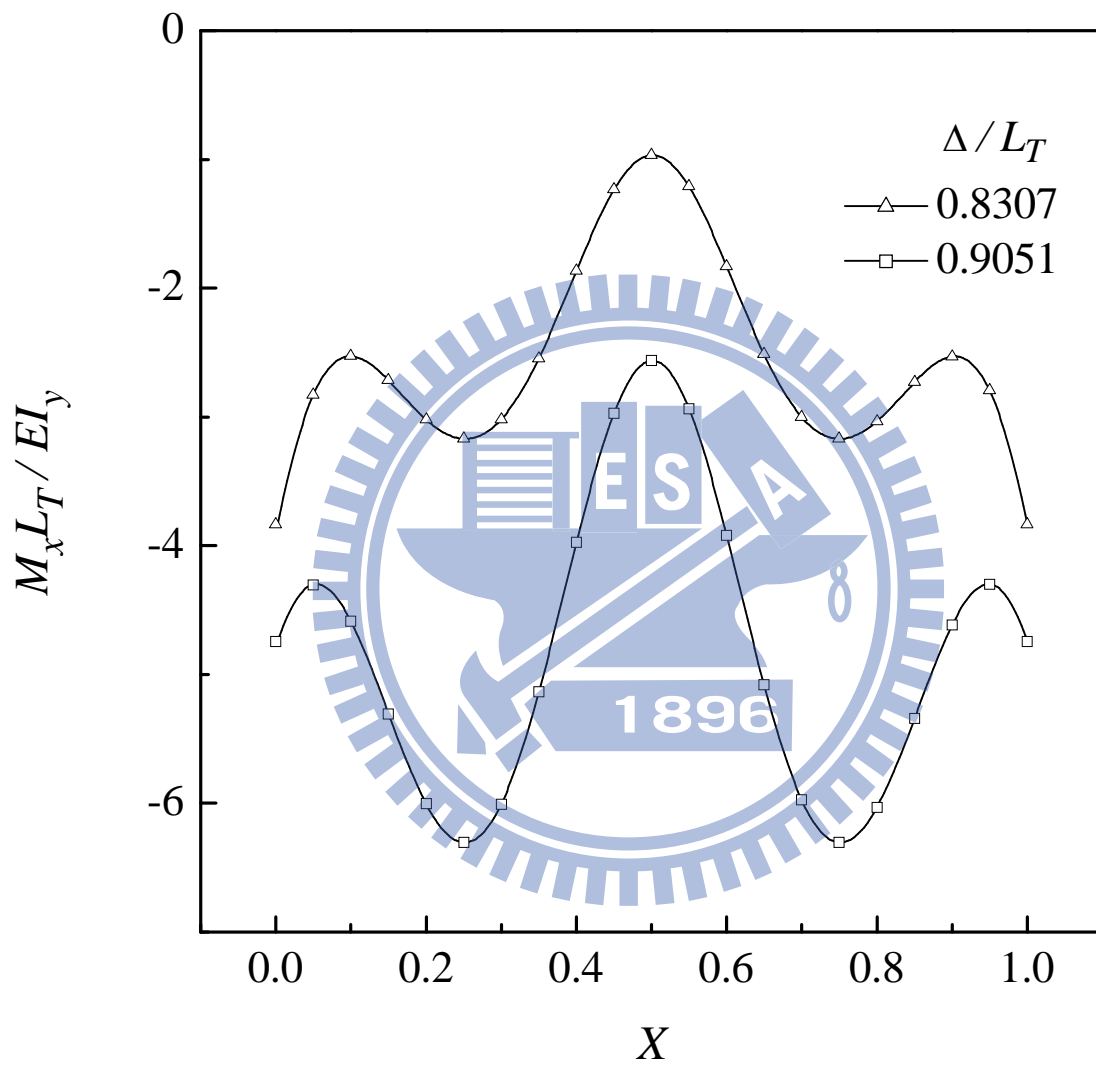
圖三十九 Case3 之斷面正向壓力 $F_x L_T^2 / EI_y$ - 梁軸 X 曲線(例題二)



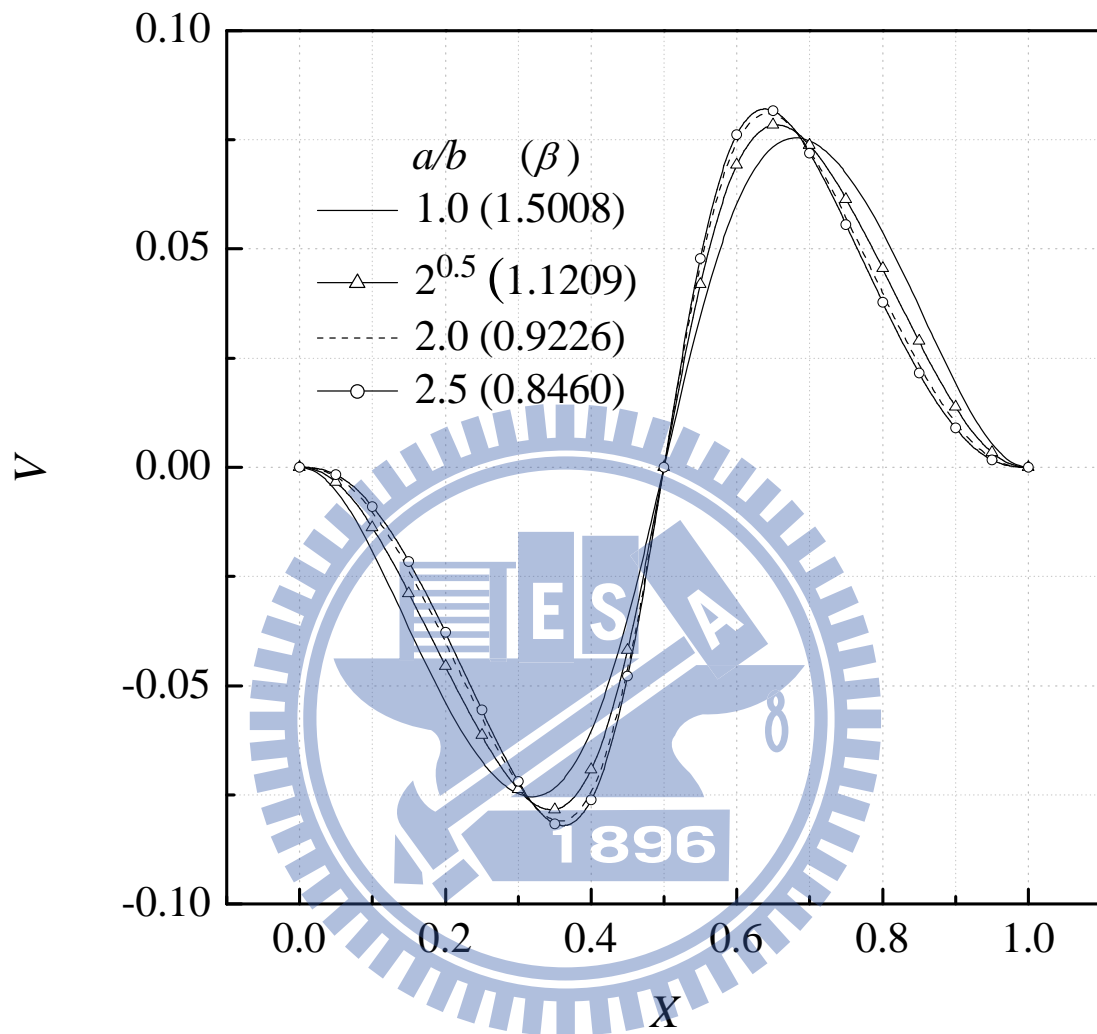
圖四十 Case3 在斷面主軸 X_2^S 方向之彎矩 $M_y L_T / EI_y - X$ 曲線(例題二)



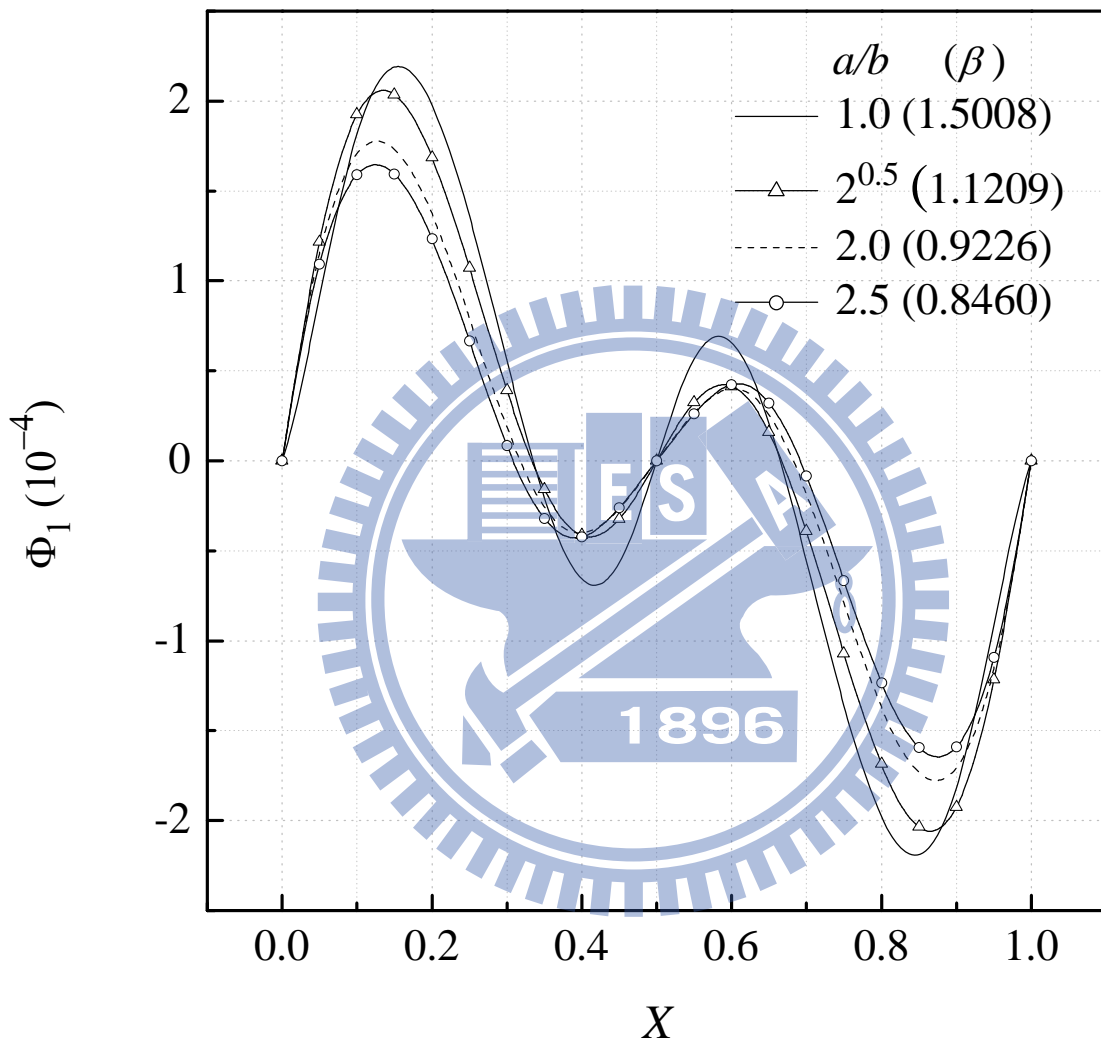
圖四十一 Case3 在斷面主軸 X_3^S 方向之彎矩 $M_z L_T / EI_y - X$ 曲線(例題二)



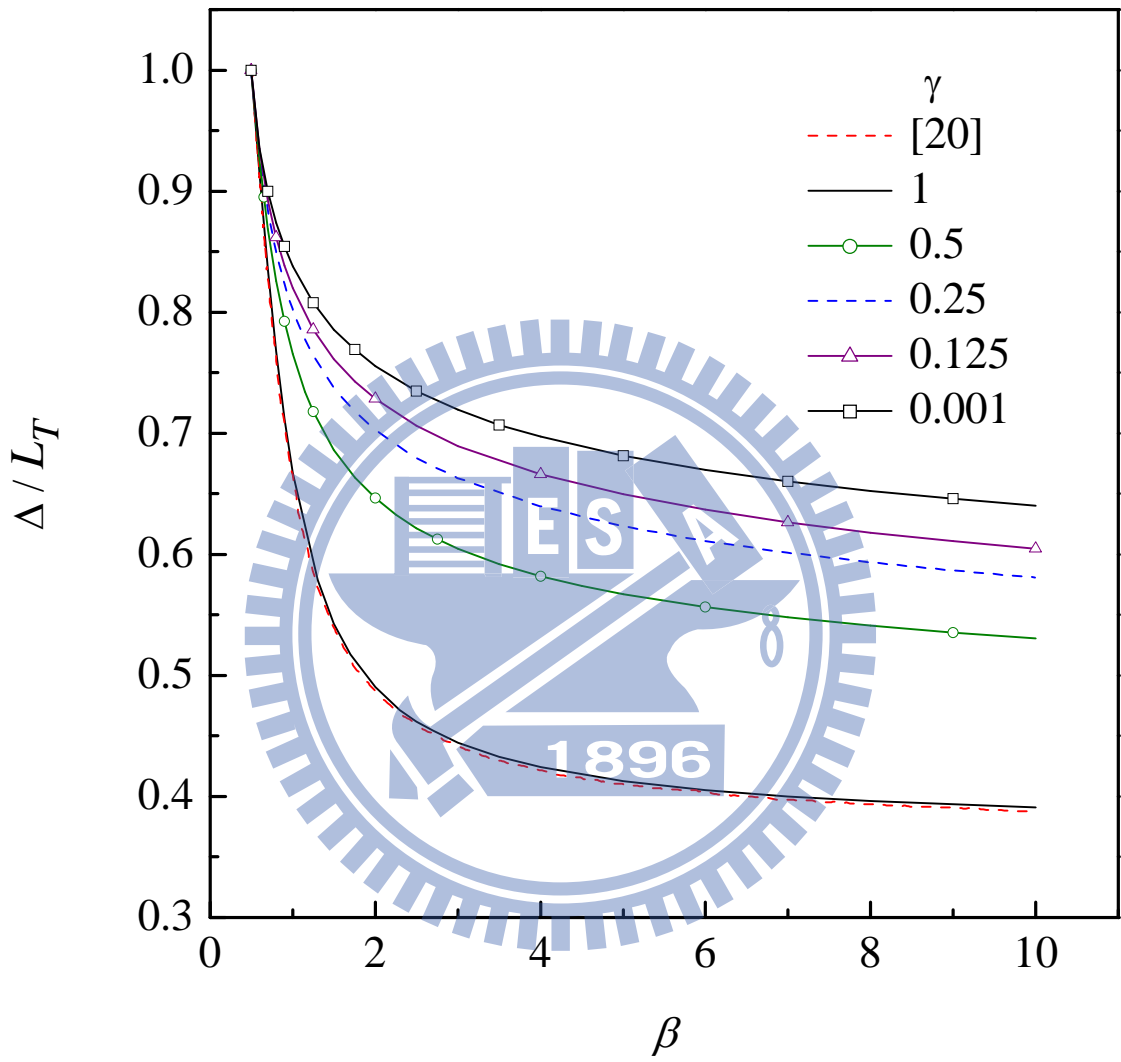
圖四十二 Case3 在斷面主軸 X_1^S 方向之彎矩 $M_x L_T / EI_y - X$ 曲線(例題二)



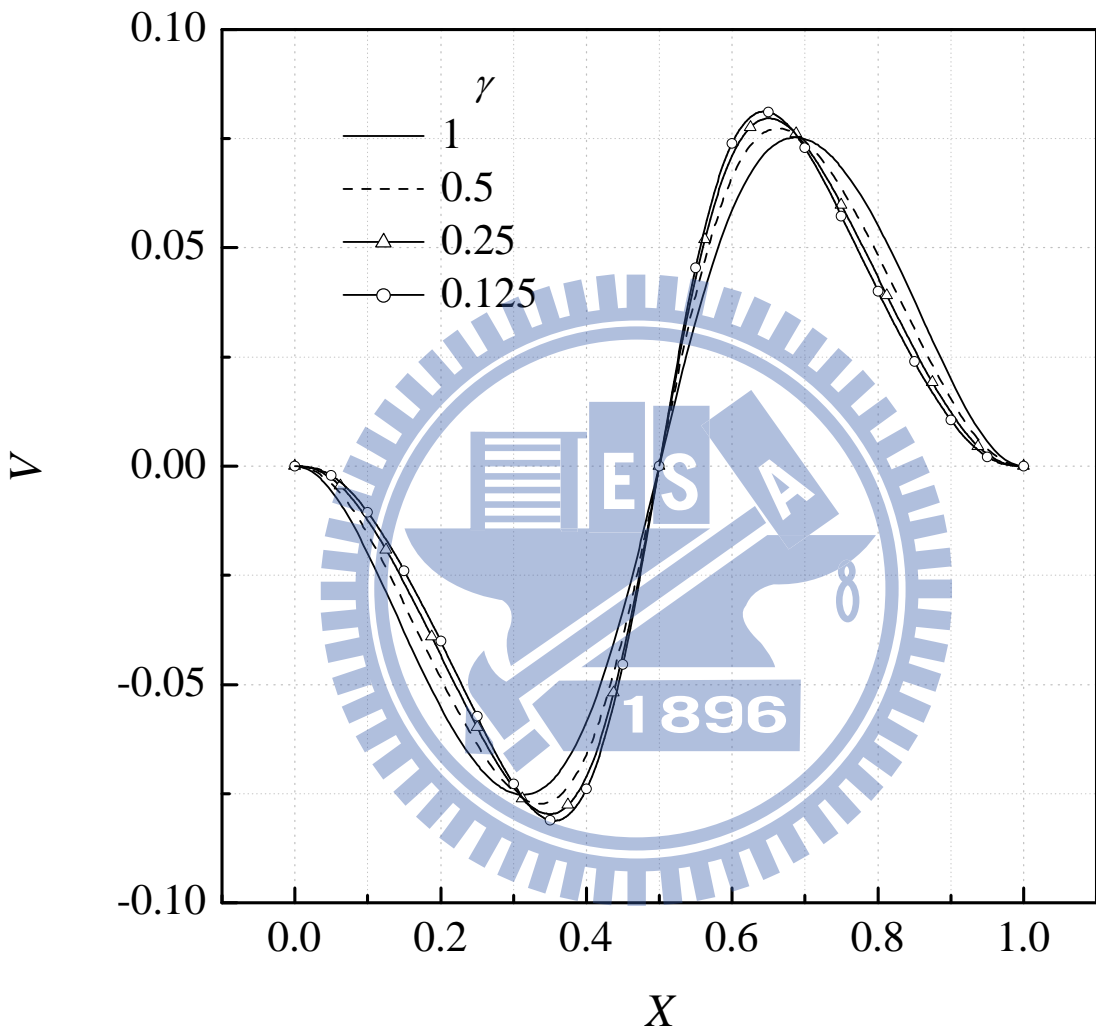
圖四十三 不同長寬比之矩形斷面的第二次挫屈模態(V,例題四)



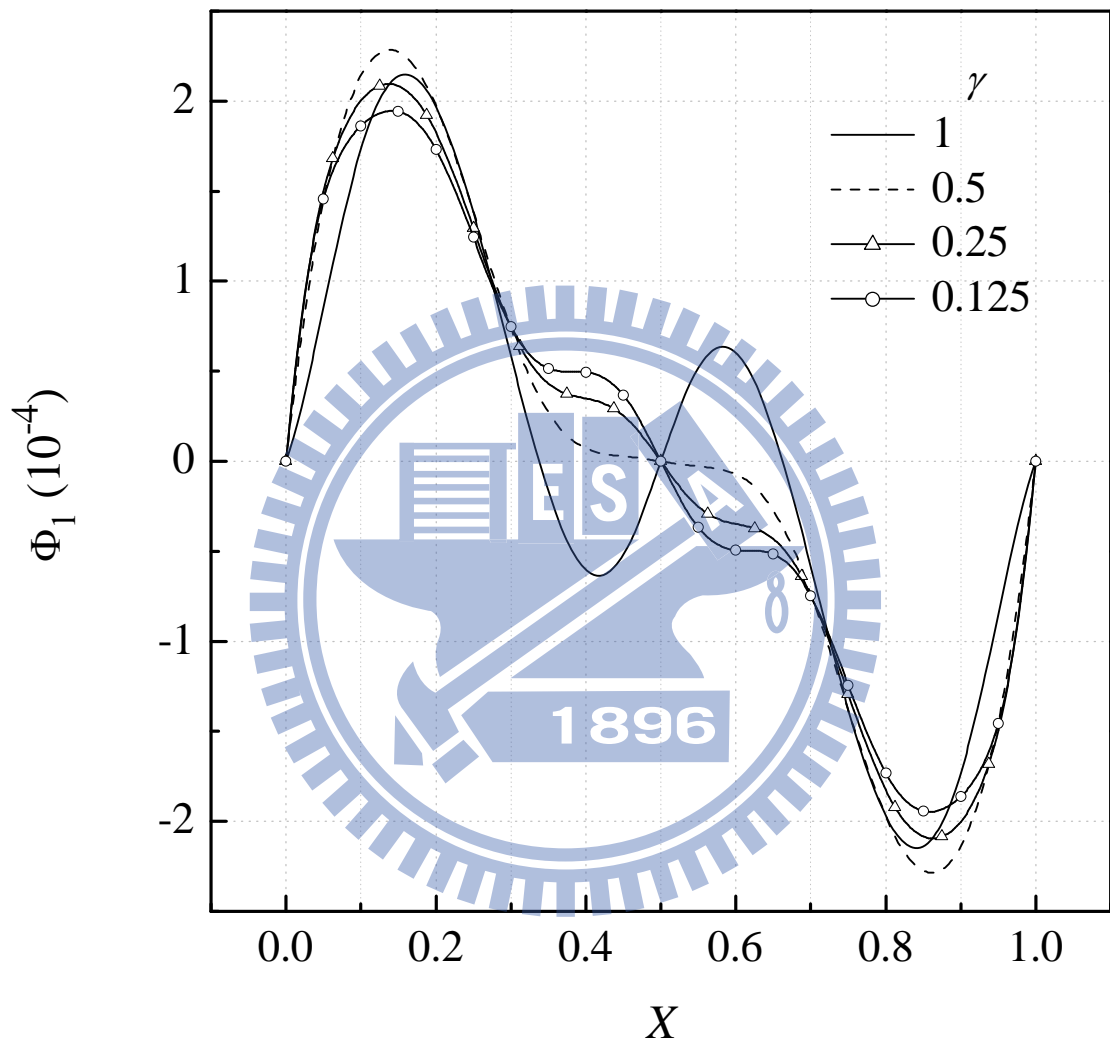
圖四十四 不同長寬比之矩形斷面的第二次挫屈模態(Φ_1 ,例題四)



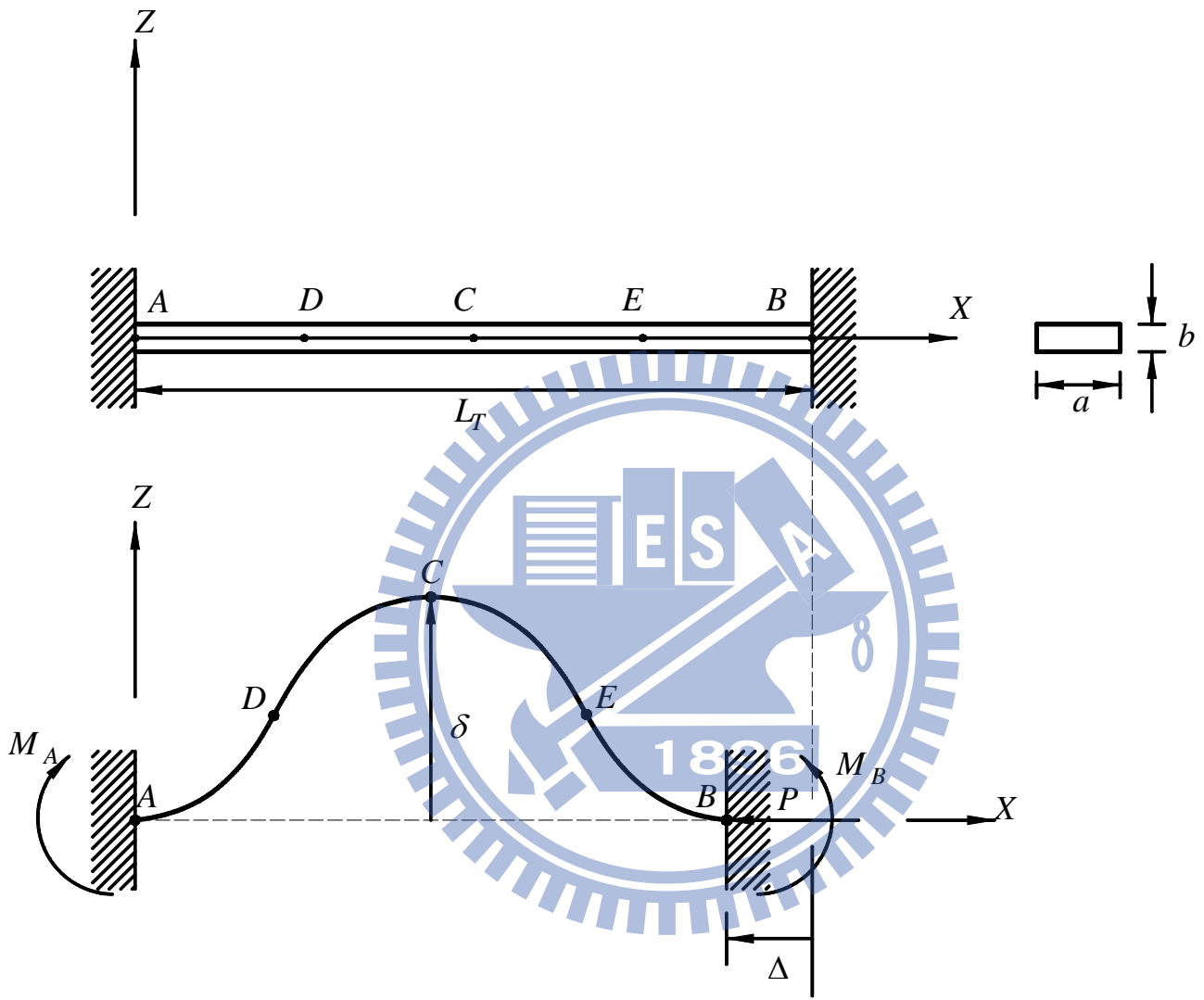
圖四十五 不同 γ 之二次挫屈所需軸向位移 Δ/L_T -剛度比 β 曲線圖(例題六)



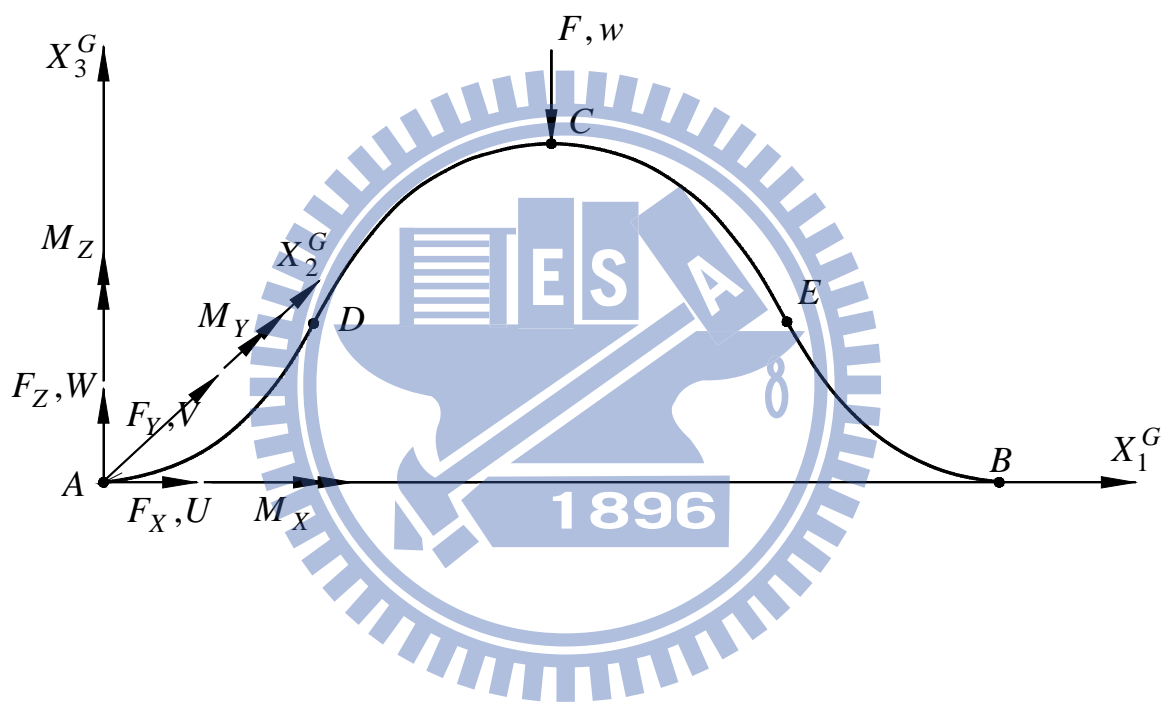
圖四十六 例題六之第二次挫屈模態($V, \beta = 2.5$)



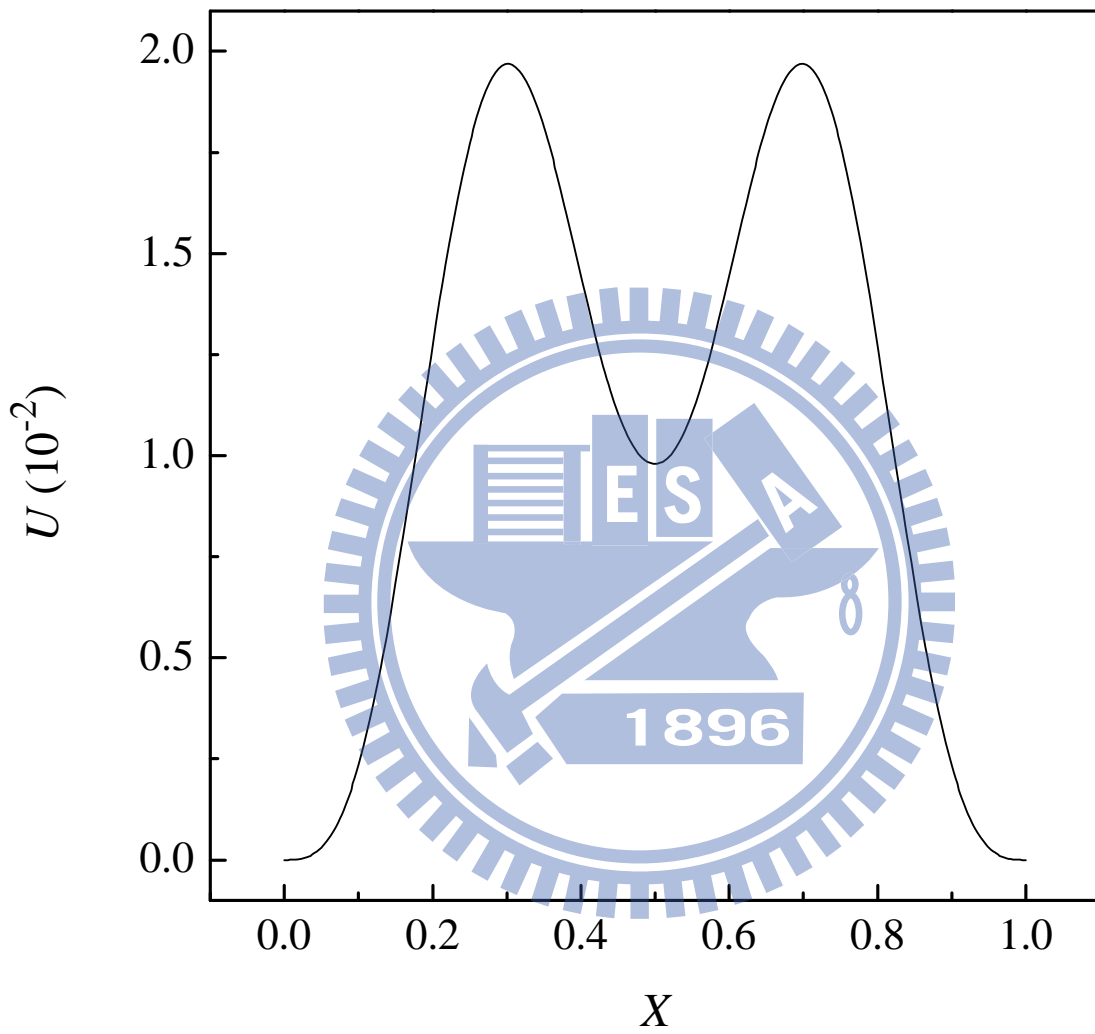
圖四十七 例題六之第二次挫屈模態(Φ_1 , $\beta = 2.5$)



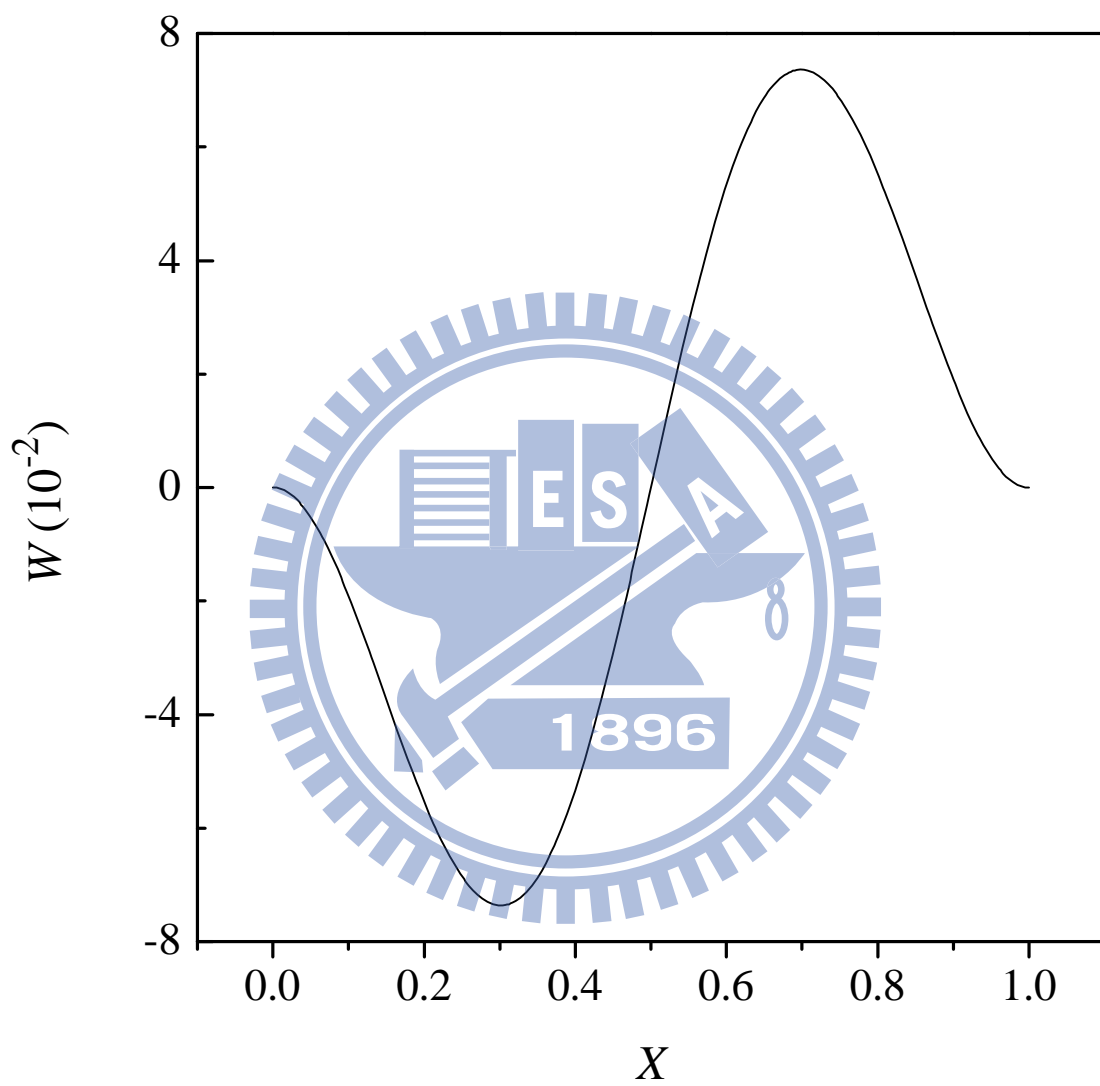
圖四十八 固端梁受軸向壓縮及側向挫屈示意圖



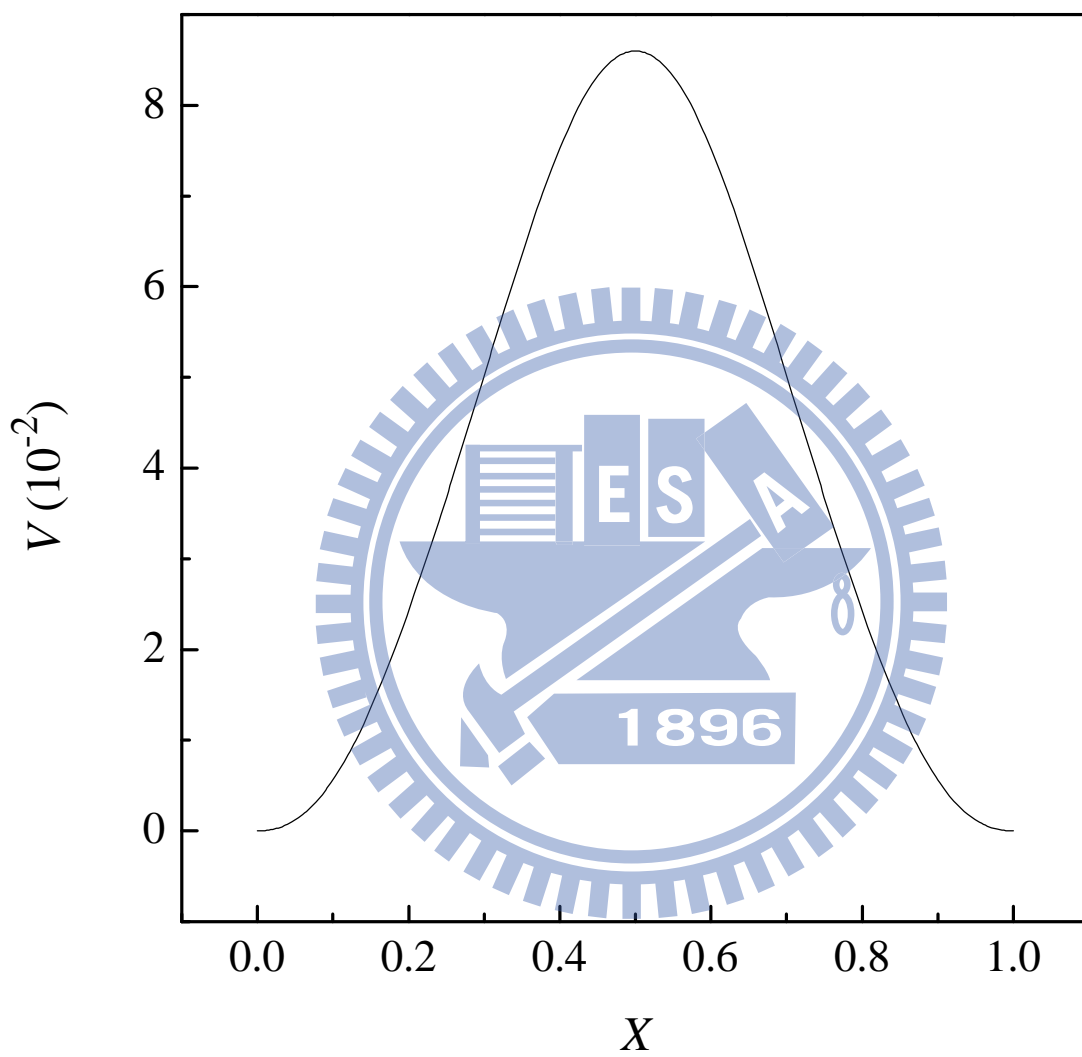
圖四十九 挫屈梁受中心點側向位移



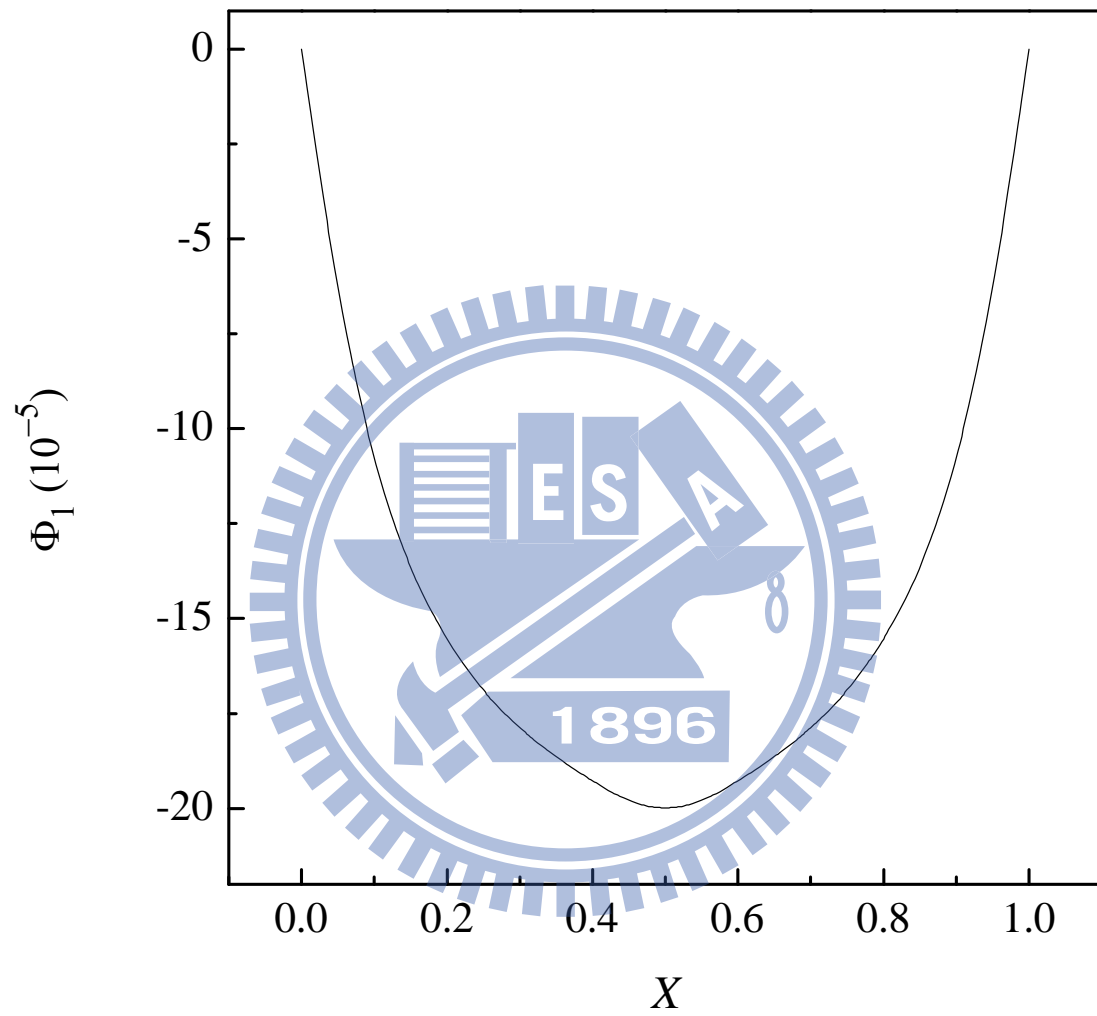
圖五十 例題七之挫屈模態 A(X_1^G 方向的位移分量, $\Delta/L_T = 0.03125$)



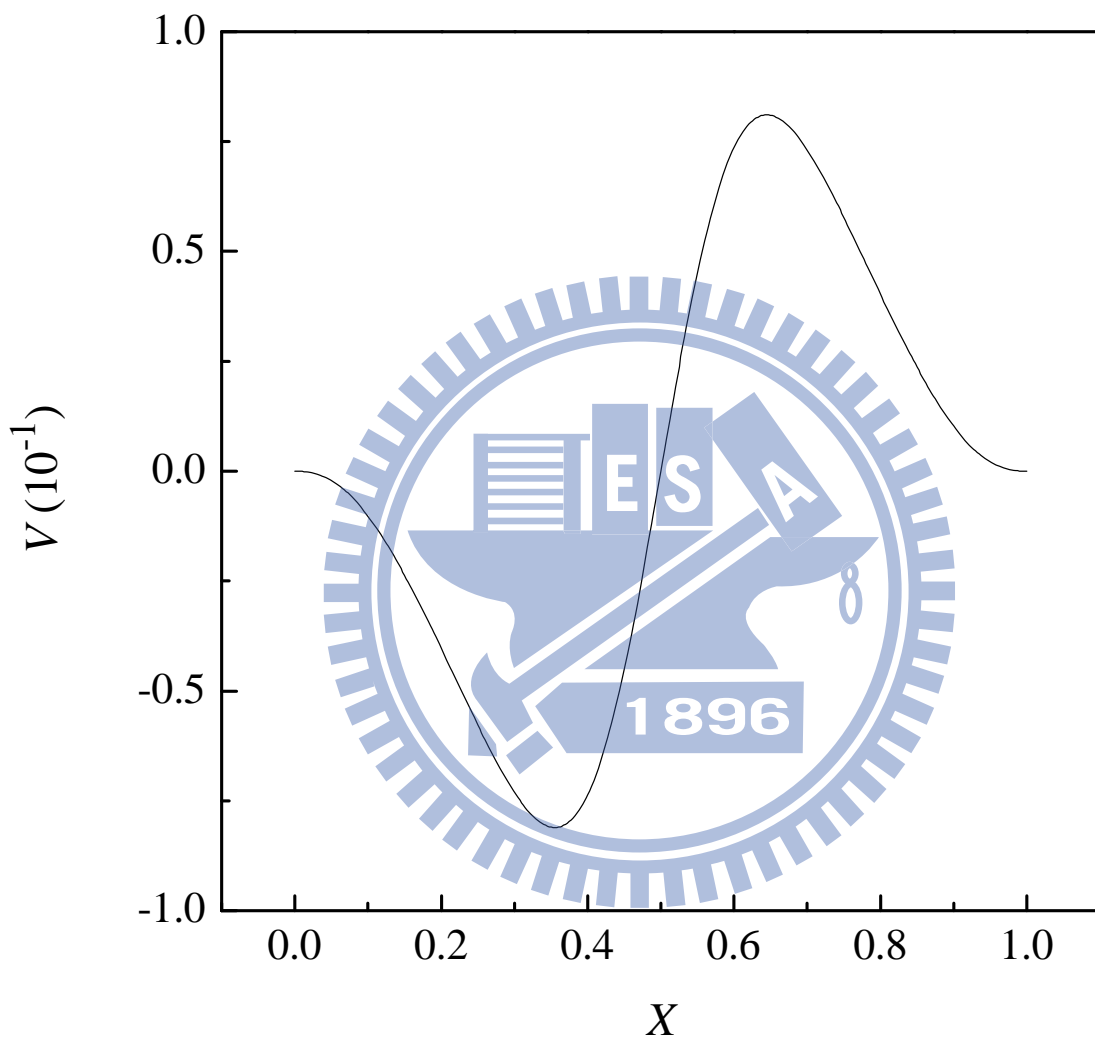
圖五十一 例題七之挫屈模態 $A(X_3^G$ 方向的位移分量， $\Delta/L_T = 0.03125$)



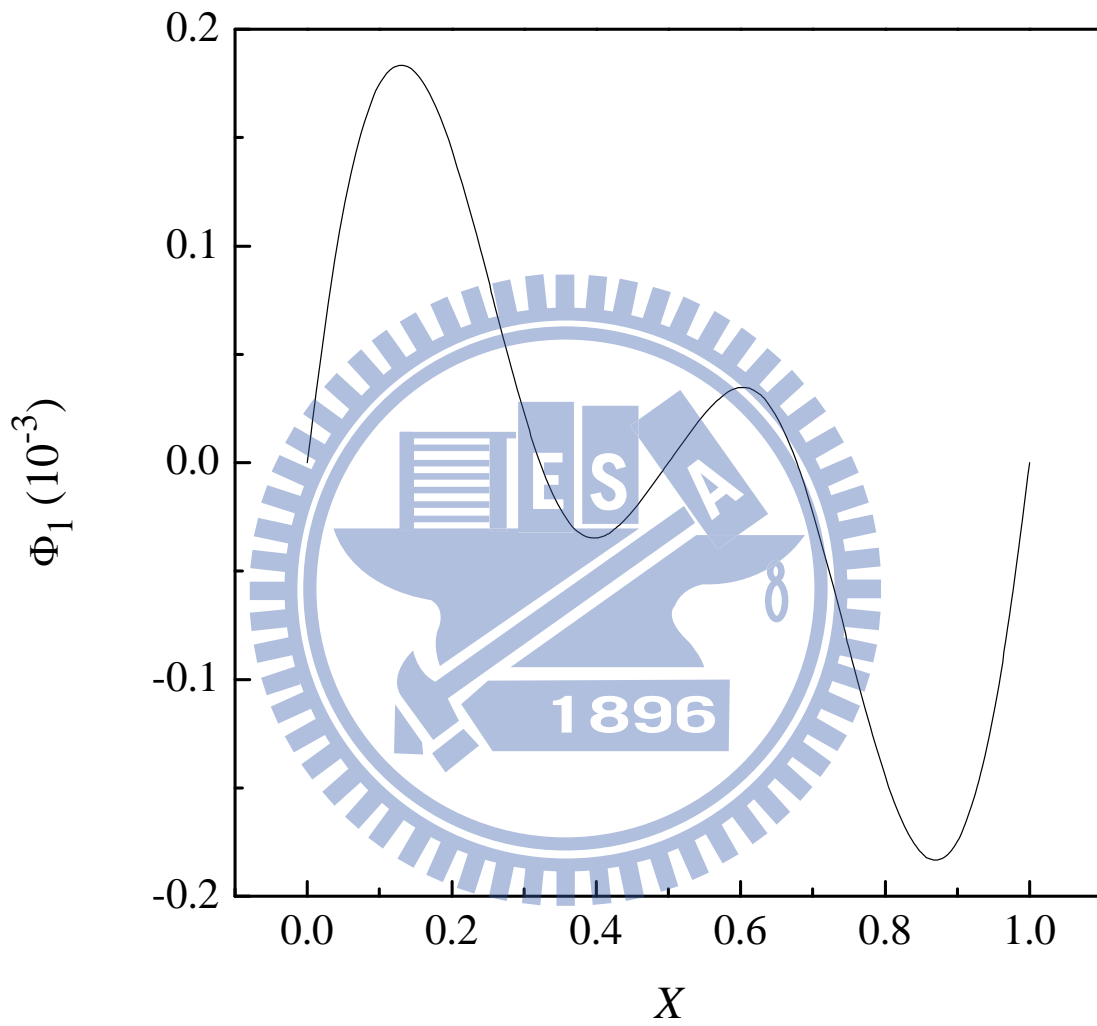
圖五十二 例題七之挫屈模態 $B(X_2^G$ 方向的位移分量， $\Delta/L_T = 0.3125$)



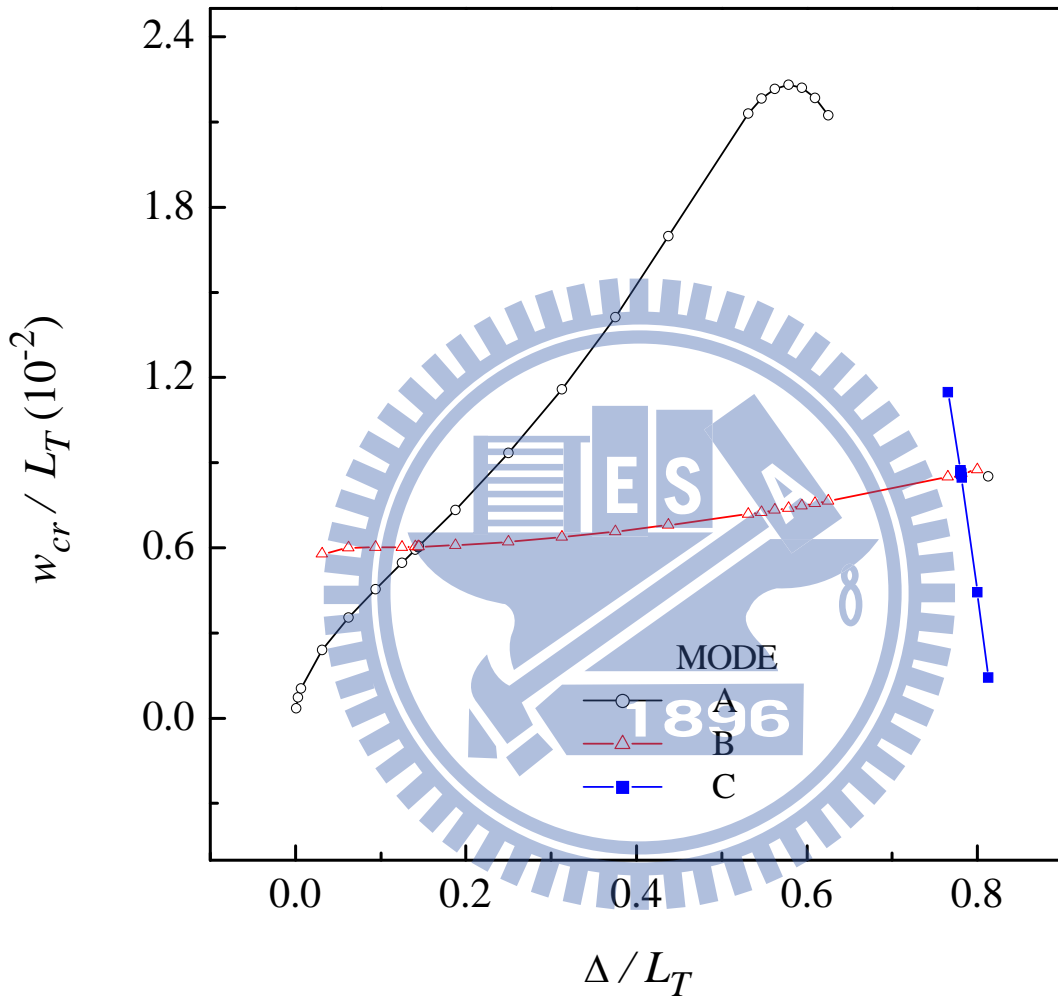
圖五十三 例題七之挫屈模態 B(繞 X_1^G 軸方向的旋轉分量， $\Delta/L_T = 0.3125$)



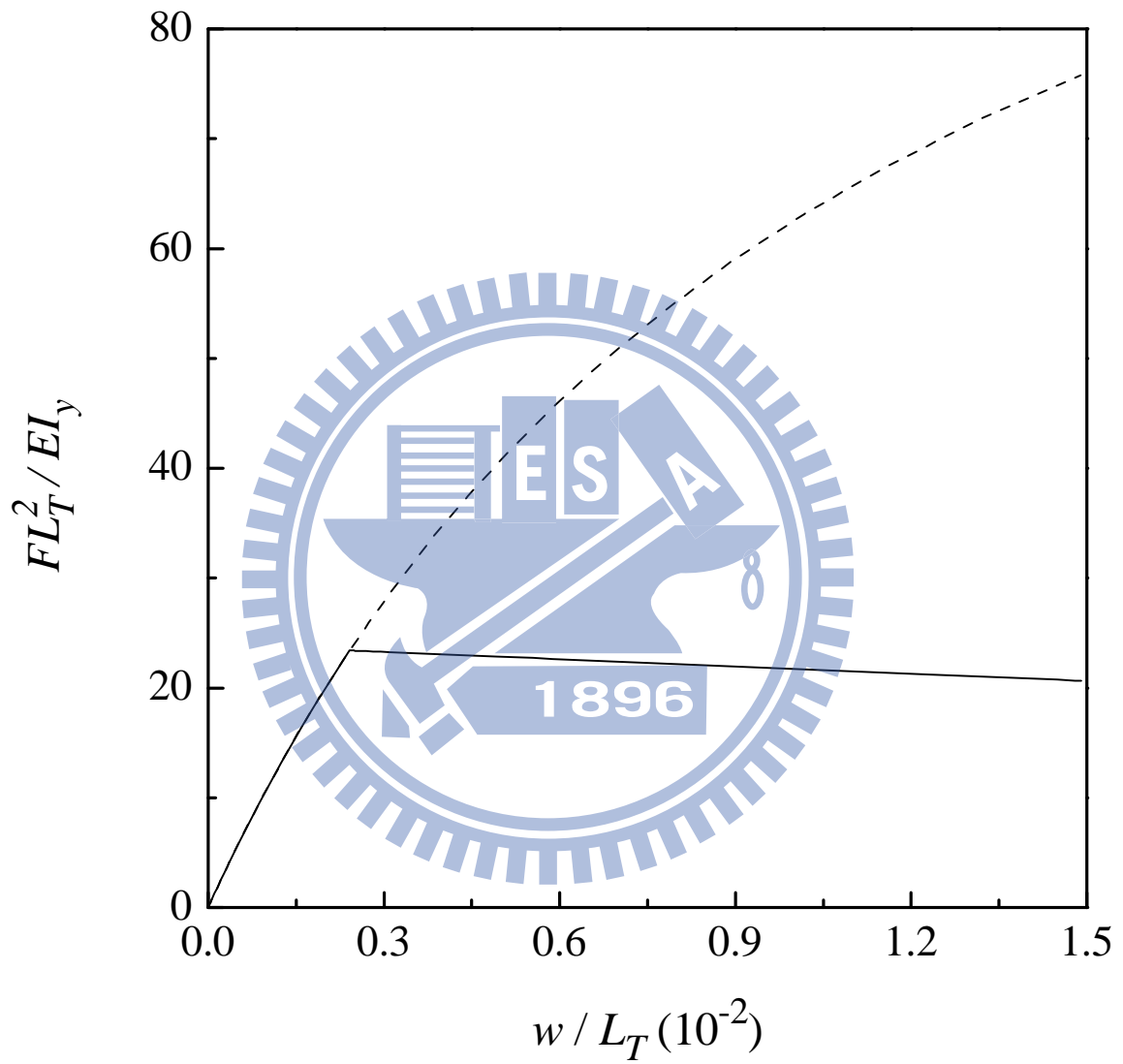
圖五十四 例題七之挫屈模態 $C(X_2^G$ 方向的位移分量， $\Delta/L_T = 0.8$)



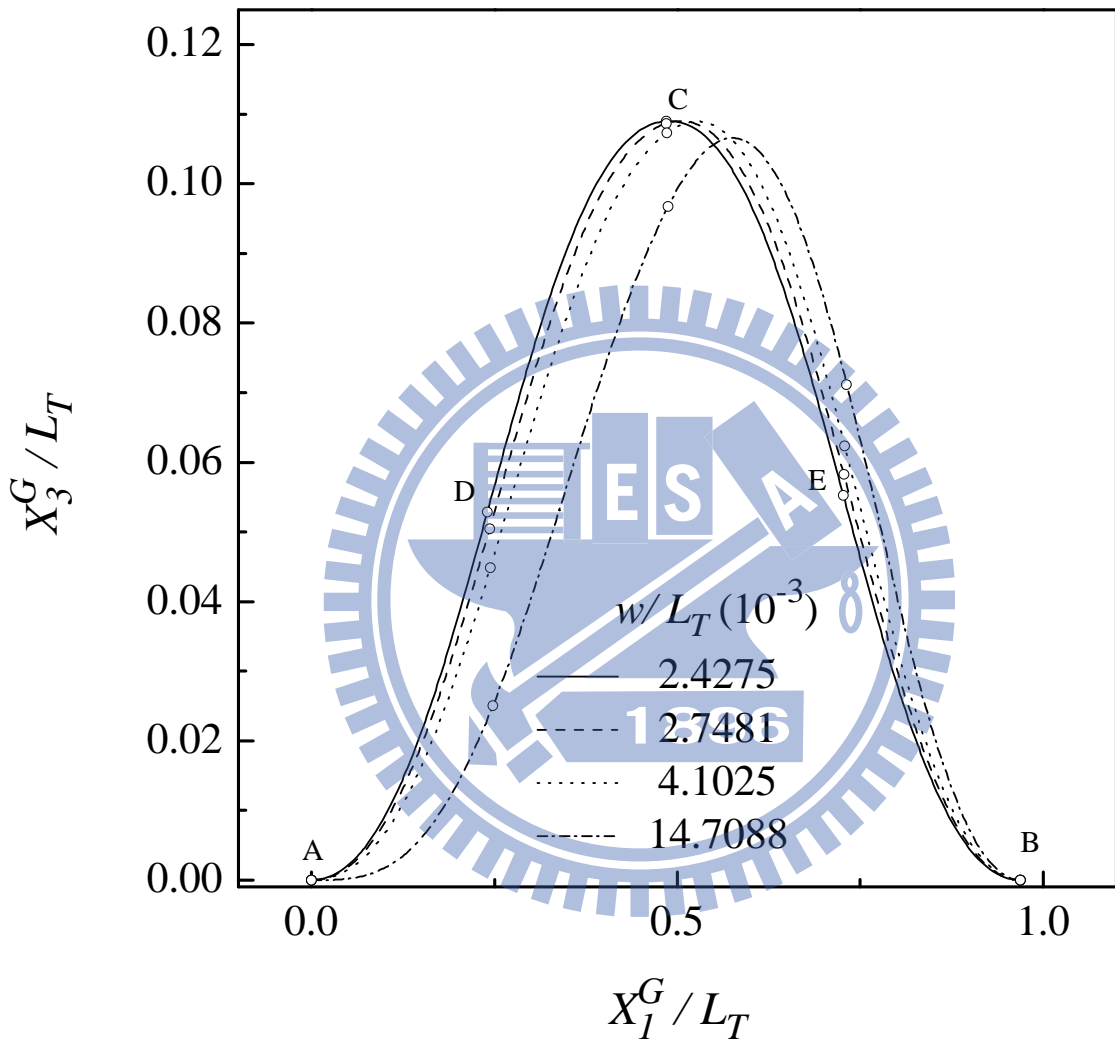
圖五十五 例題七之挫屈模態 C(繞 X_1^G 軸方向的旋轉分量， $\Delta/L_T = 0.8$)



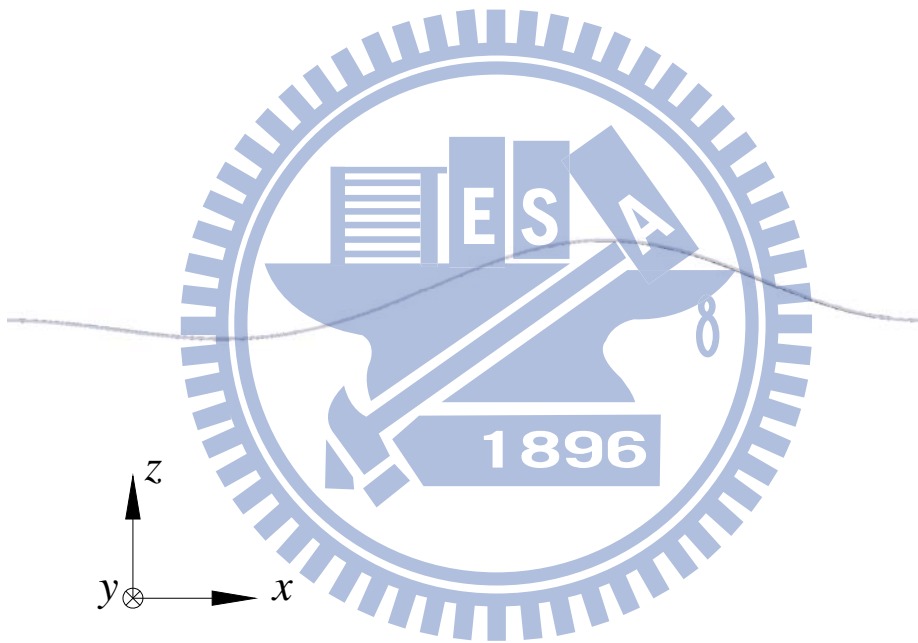
圖五十六 挫屈梁受側向位移負荷 w_{cr} / L_T -軸向壓縮 Δ / L_T 曲線(例題七)



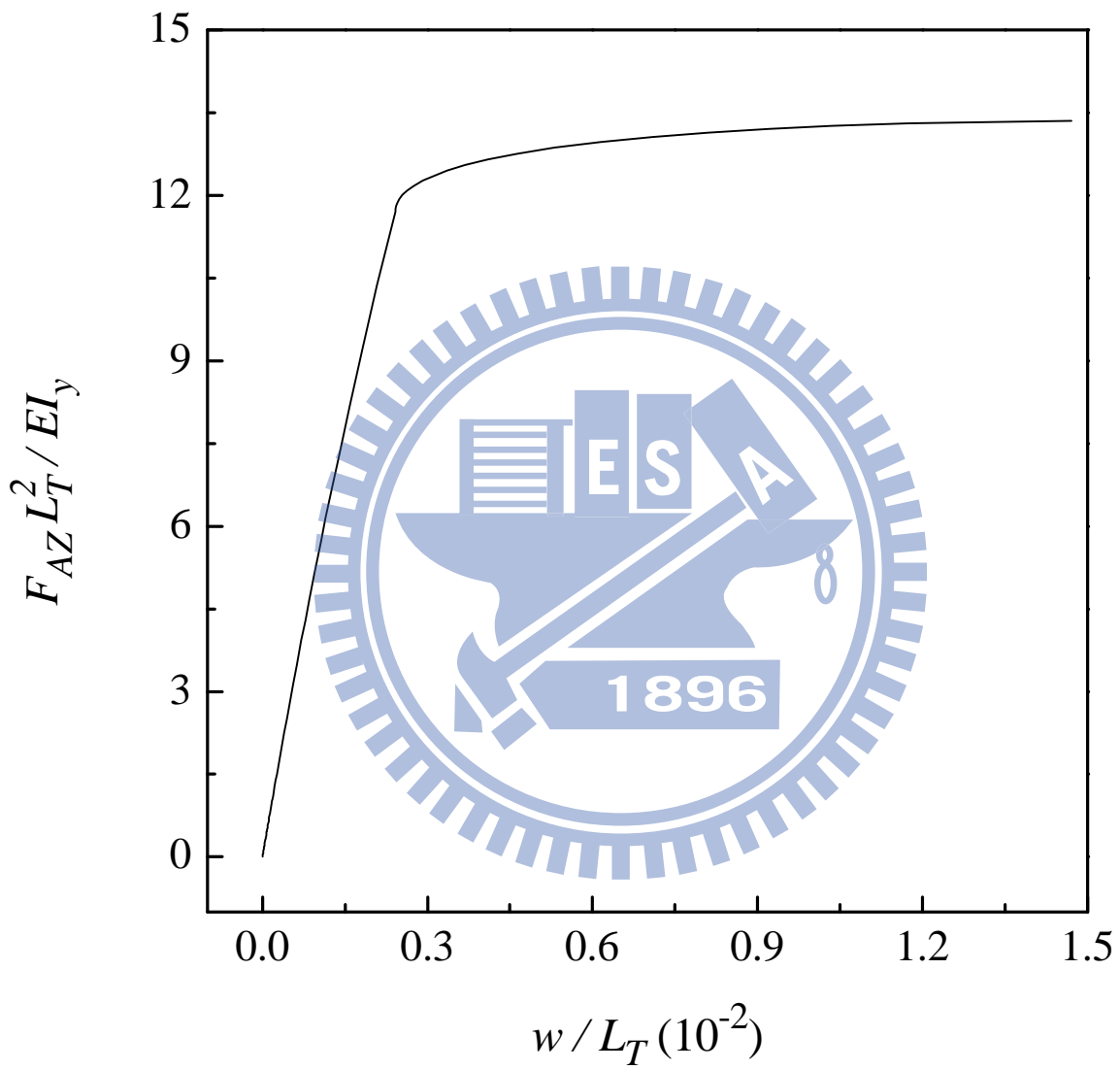
圖五十七 挫屈梁中心點 C 在 X_3^G 方向反力 $FL_T^2 / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.03125$ ，例題七)



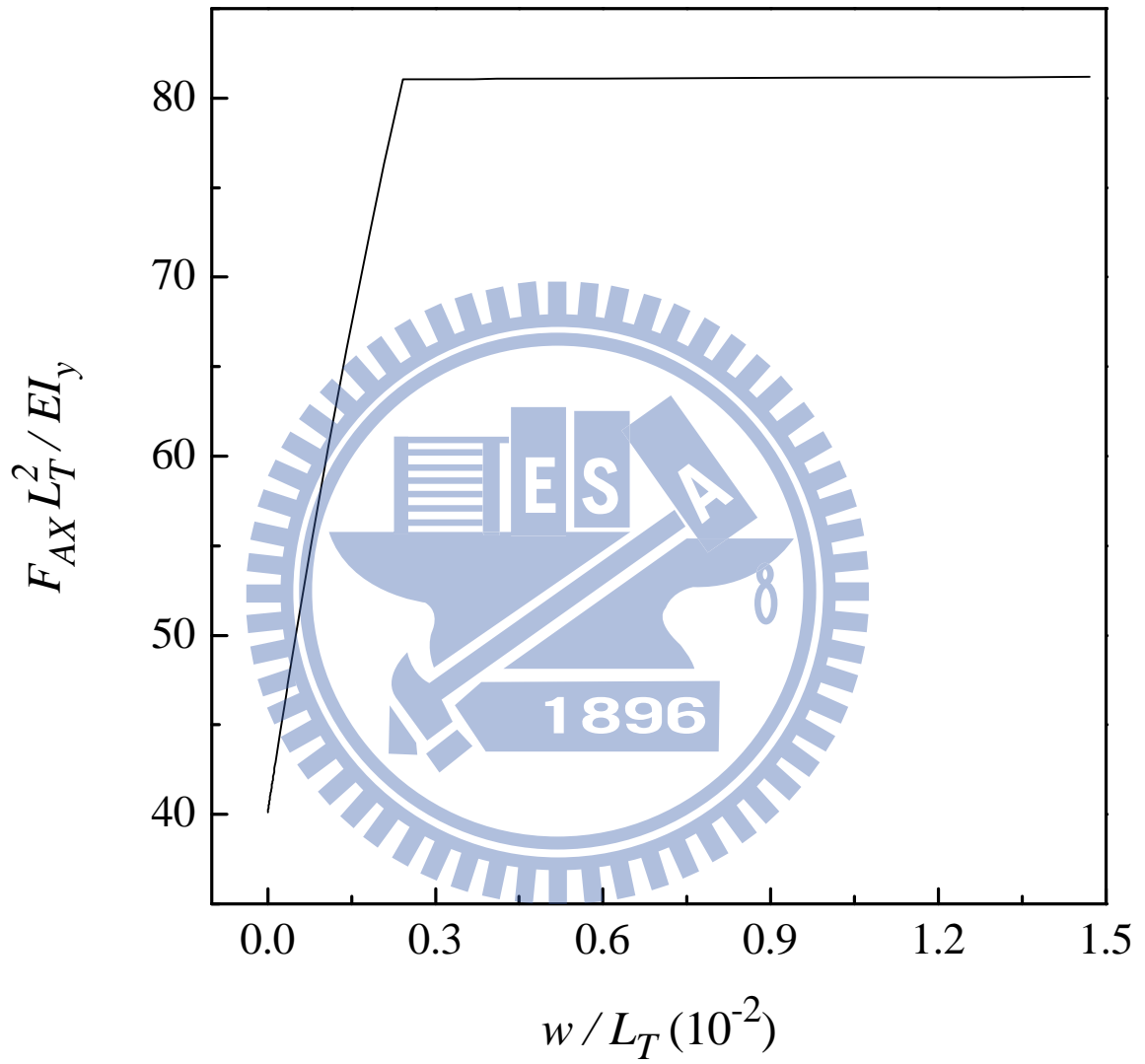
圖五十八 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta / L_T = 0.03125$ ，例題七)



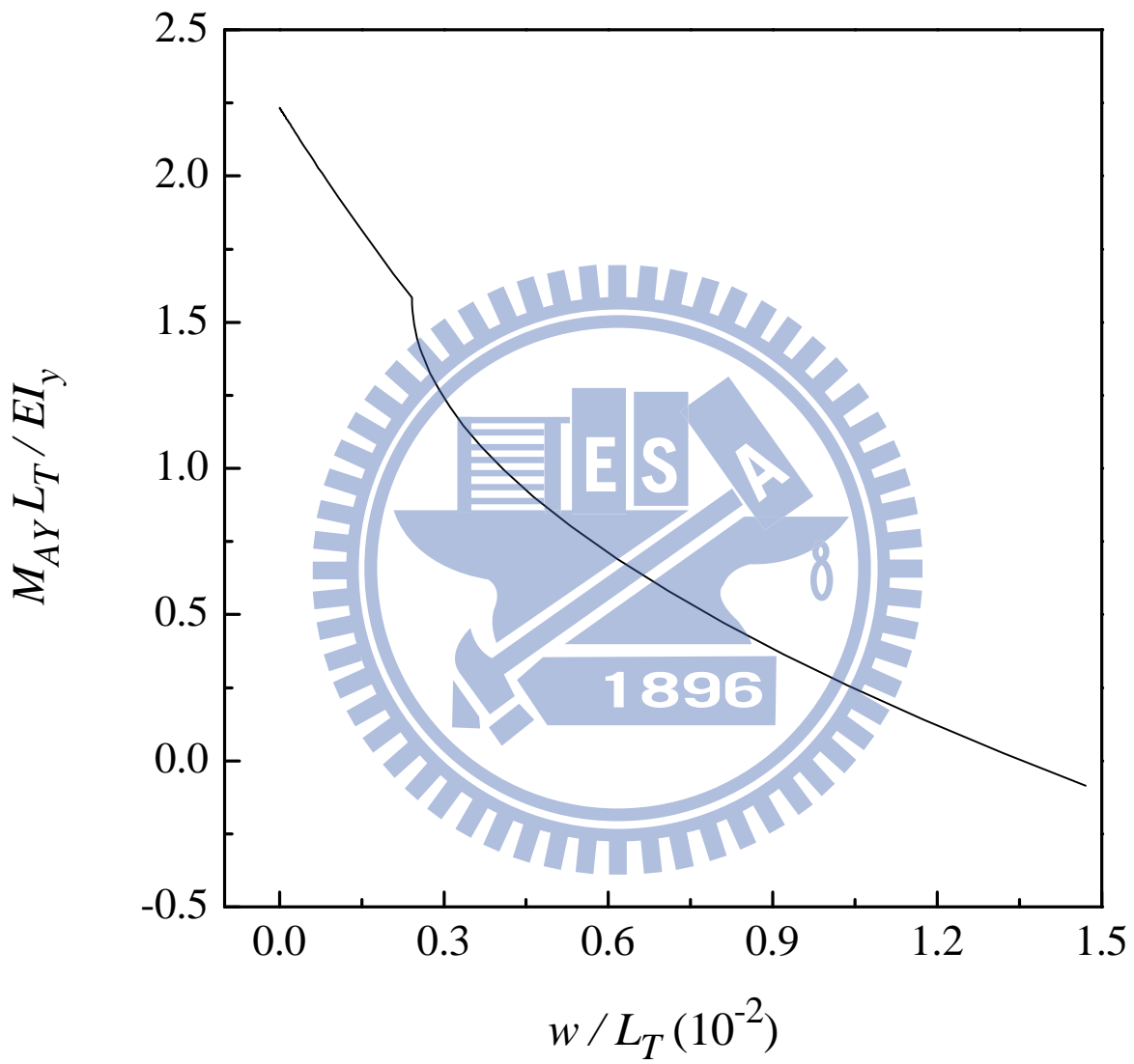
圖五十九 例題七 $\Delta/L_T = 0.03125$ 變形之立體圖 ($w/L_T = 0.0598$)



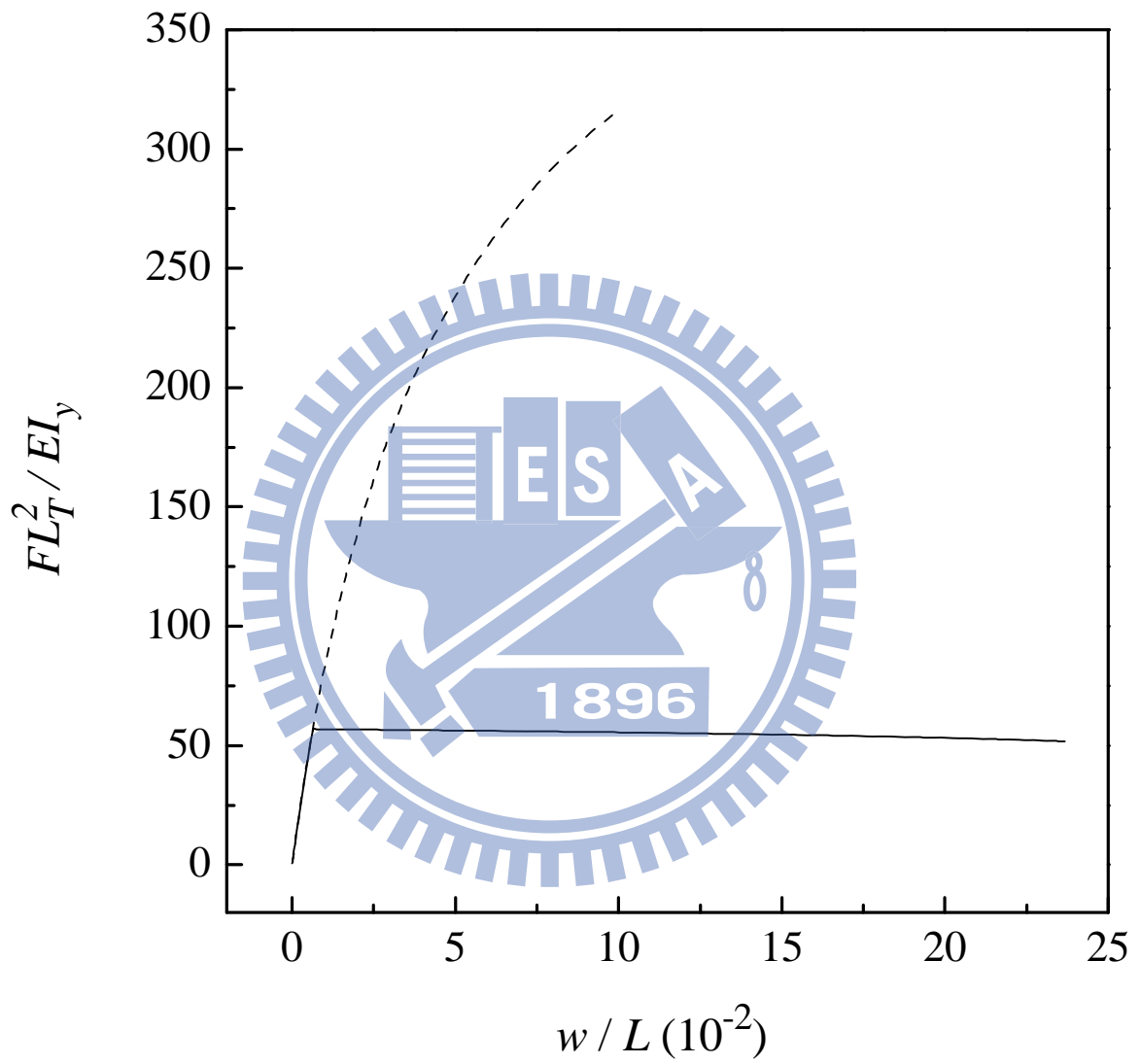
圖六十 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力 $F_{AZ} L_T^2 / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.03125$ ，例題七)



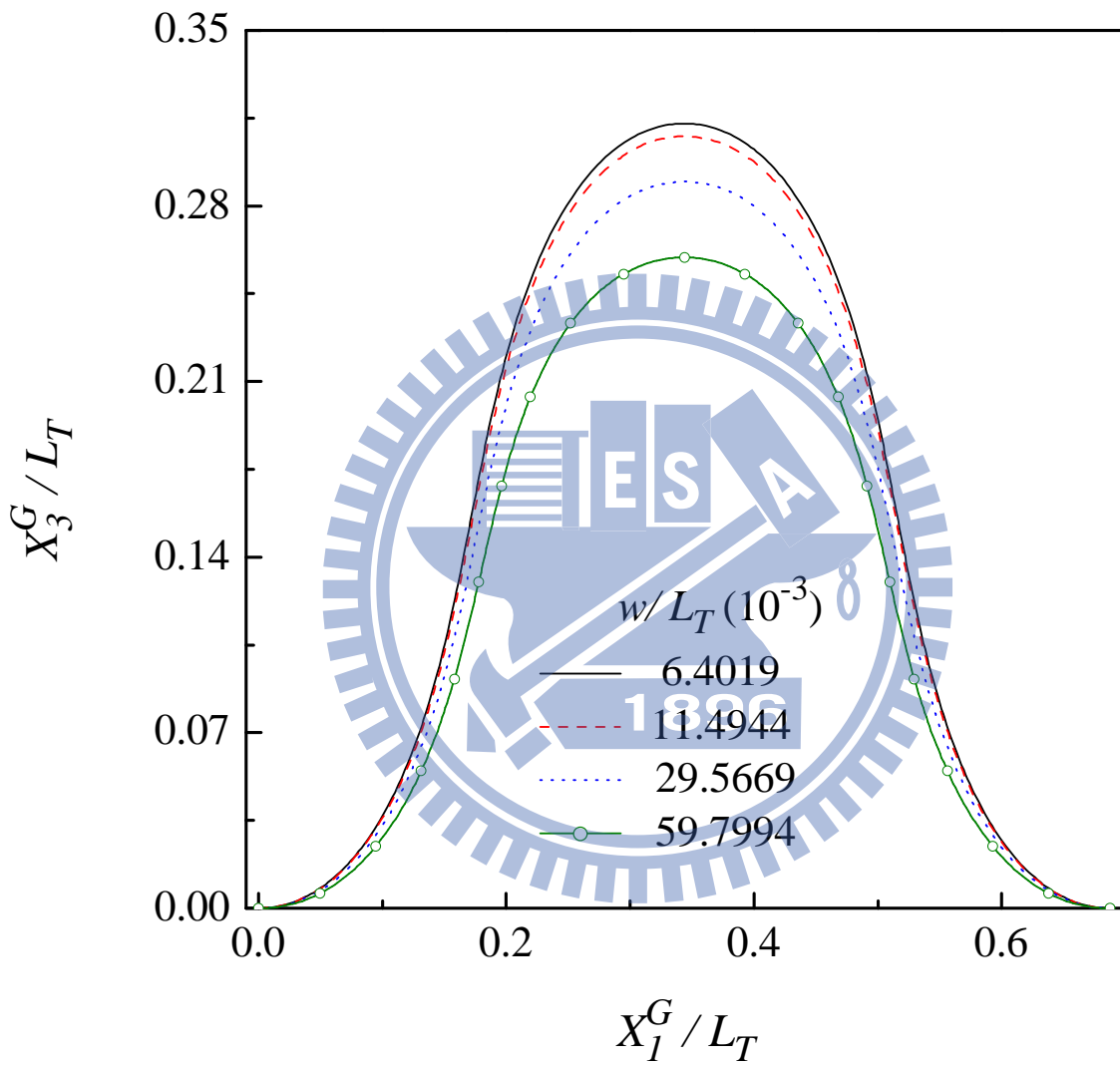
圖六十一 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力 $F_{AX} L_T^2 / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.03125$ ，例題七)



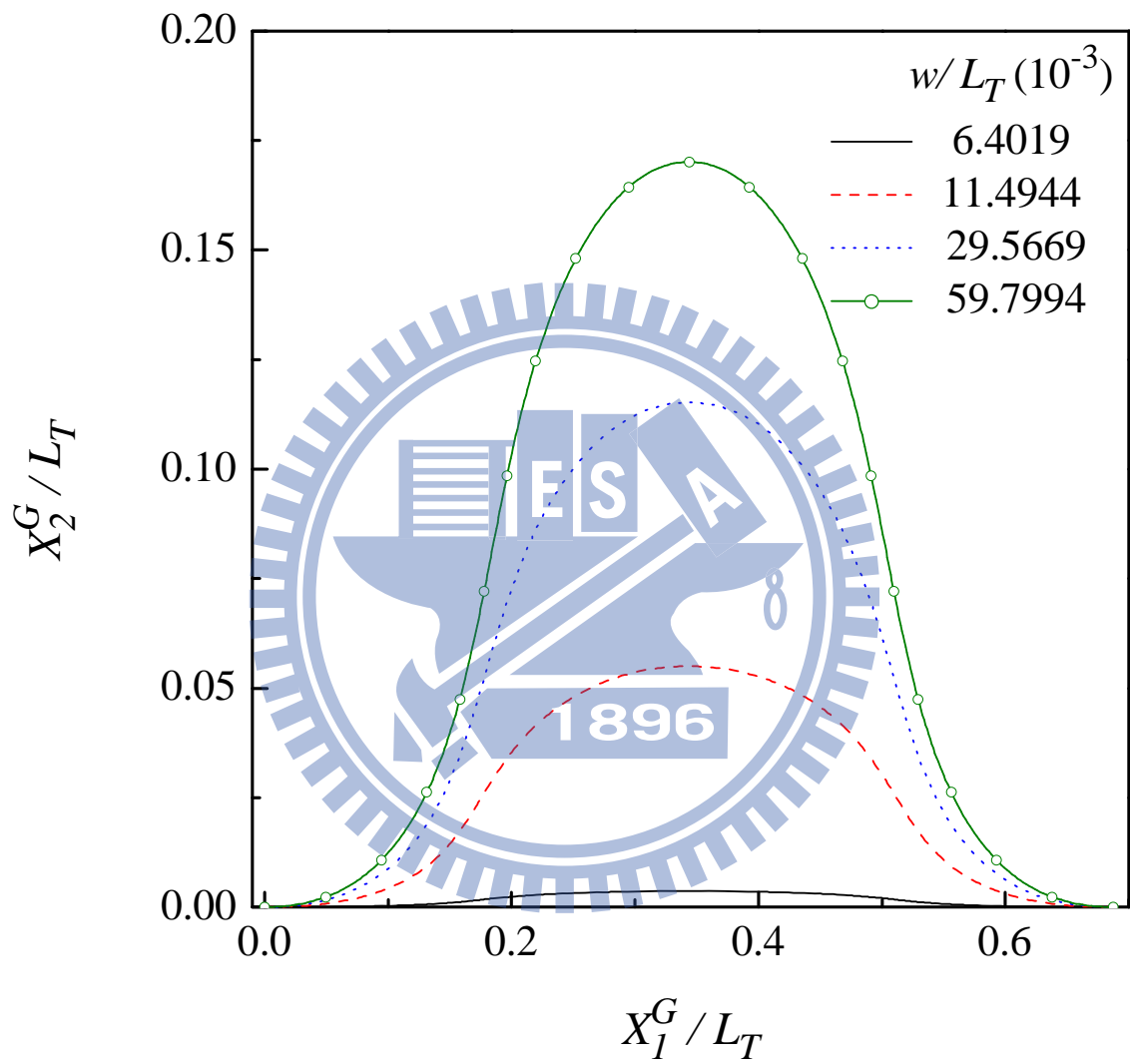
圖六十二 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力矩 $M_{AY}L_T/EI_y - w/L_T$
 ($\Delta/L_T = 0.03125$ ，例題七)



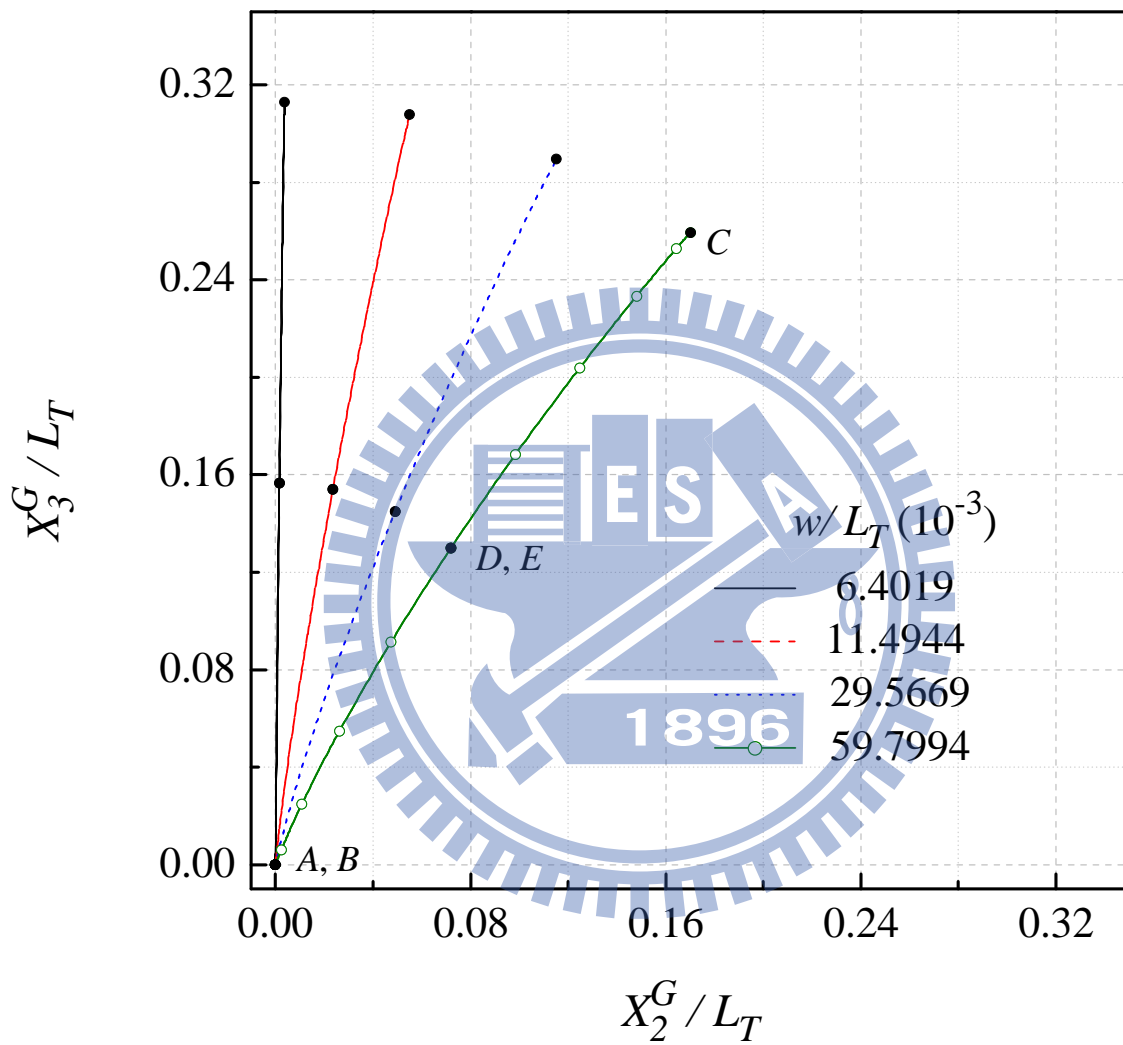
圖六十三 挫屈梁中心點 C 在 X_3^G 方向反力 $FL_T^2/EI_y - w/L_T$ 曲線
 ($\Delta/L_T = 0.3125$ ，例題七)



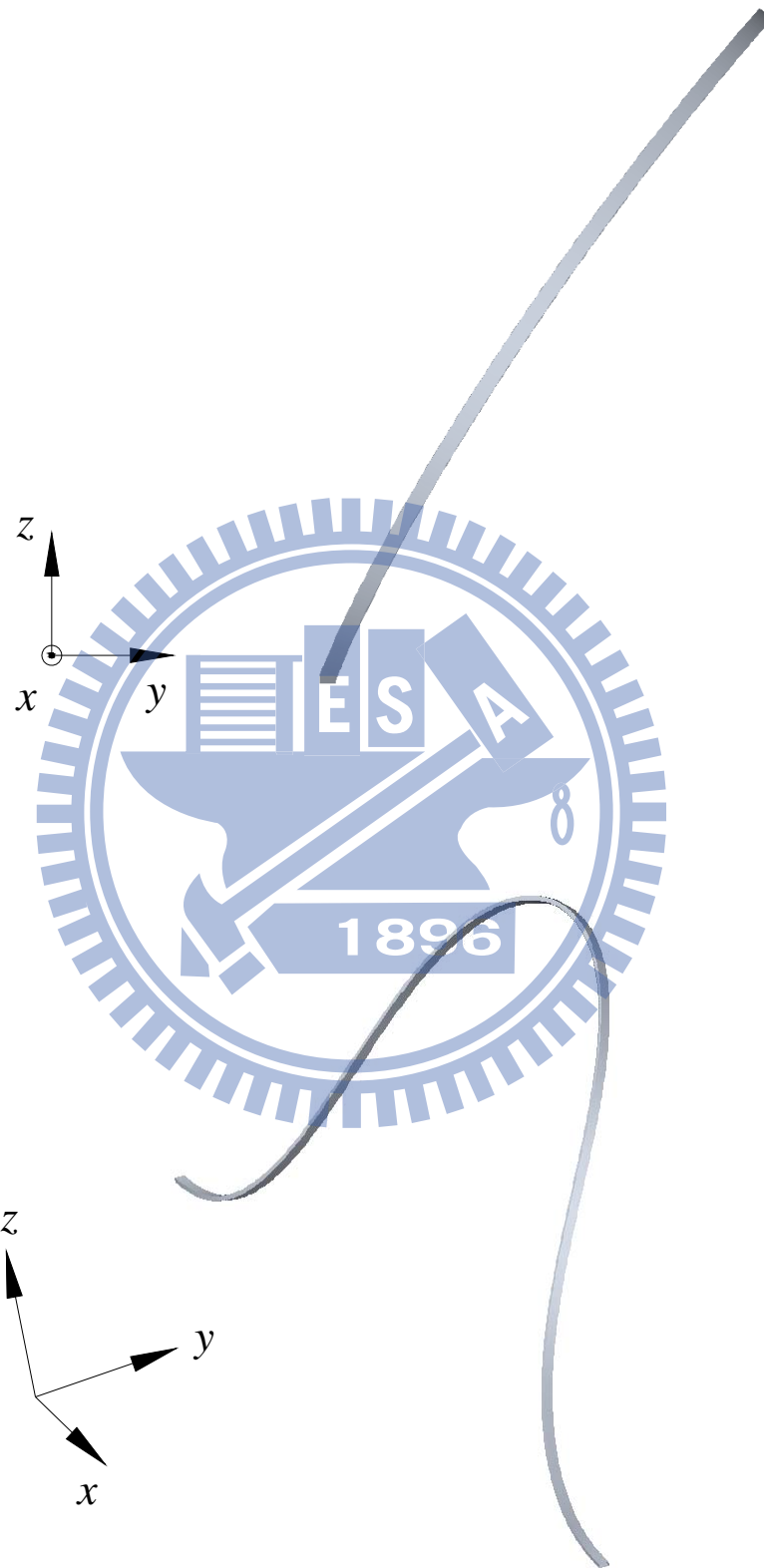
圖六十四 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta / L_T = 0.3125$ ，前視圖，例題七)



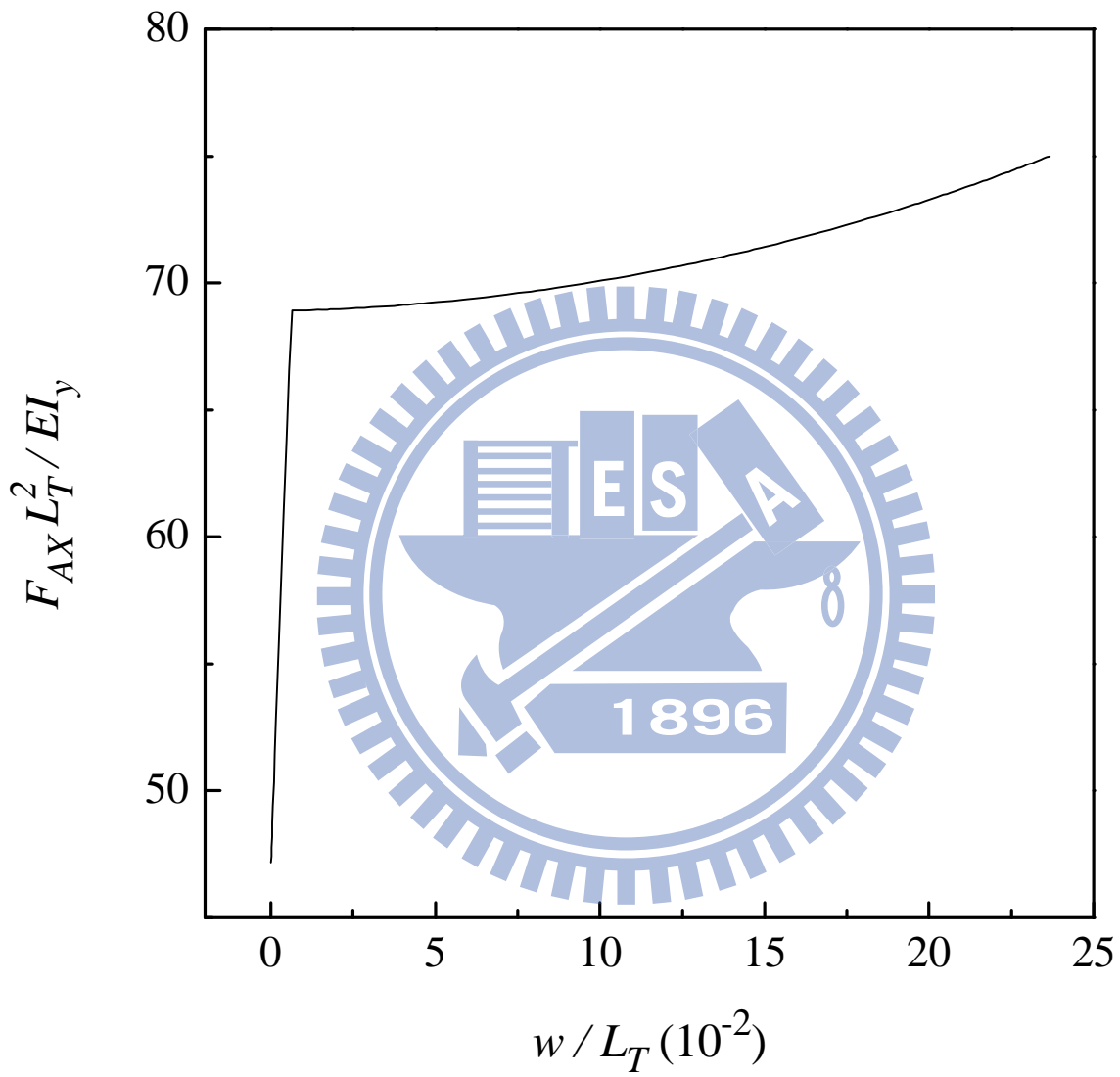
圖六十五 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.3125$ ，上視圖，例題七)



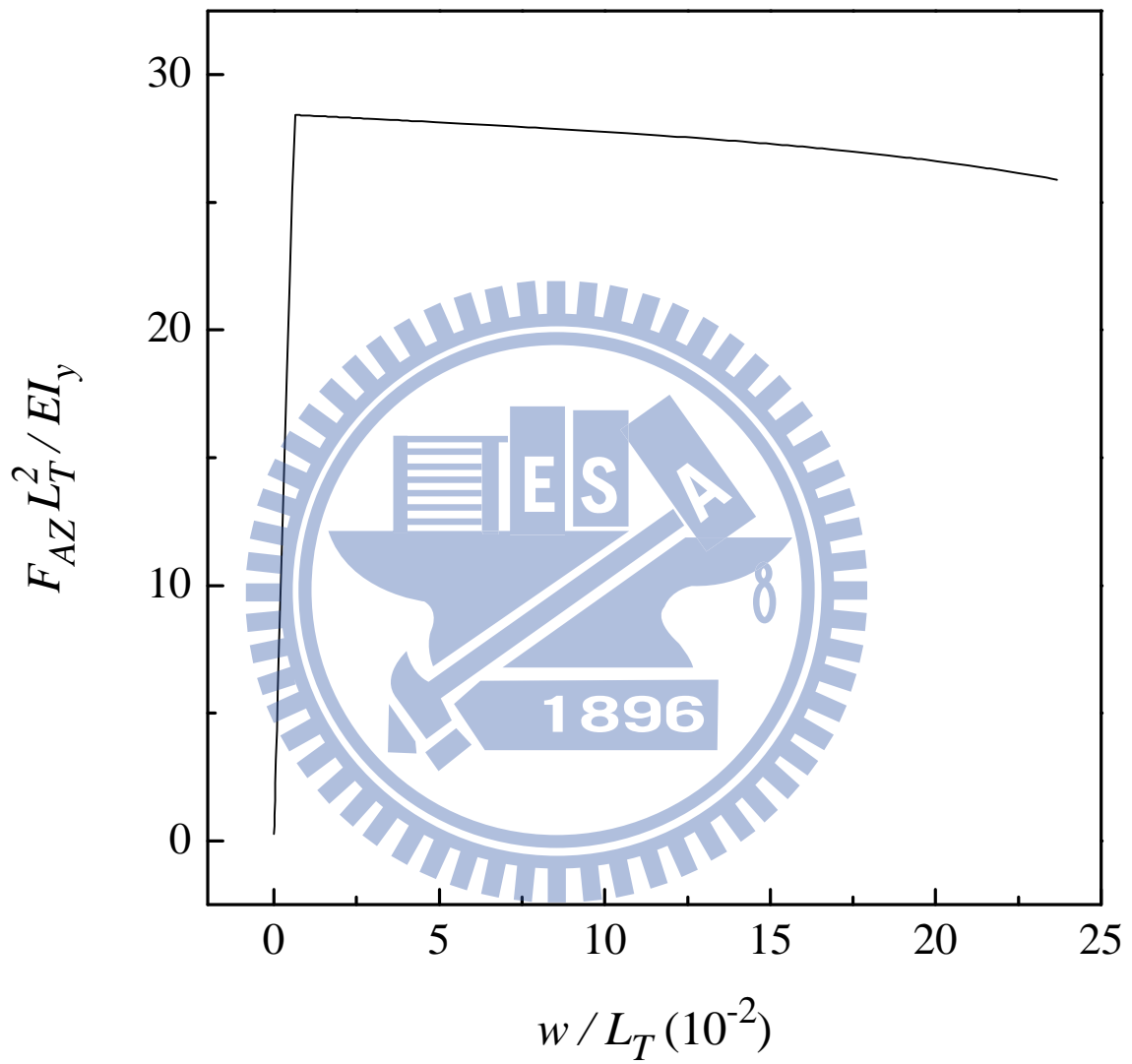
圖六十六 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.3125$ ，側視圖，例題七)



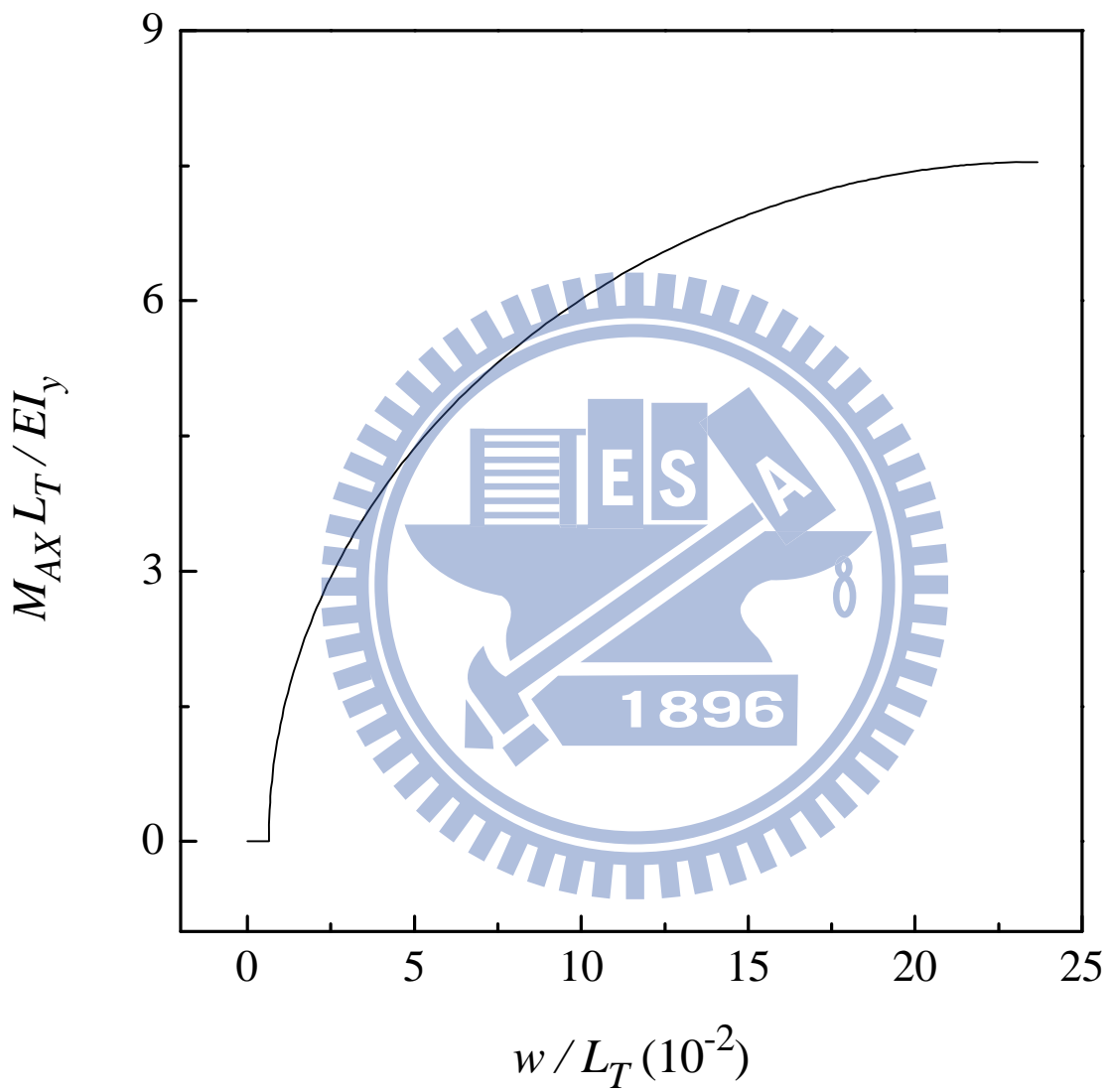
圖六十七 例題七 $\Delta/L_T = 0.3125$ 變形之立體圖 ($w/L_T = 0.0598$)



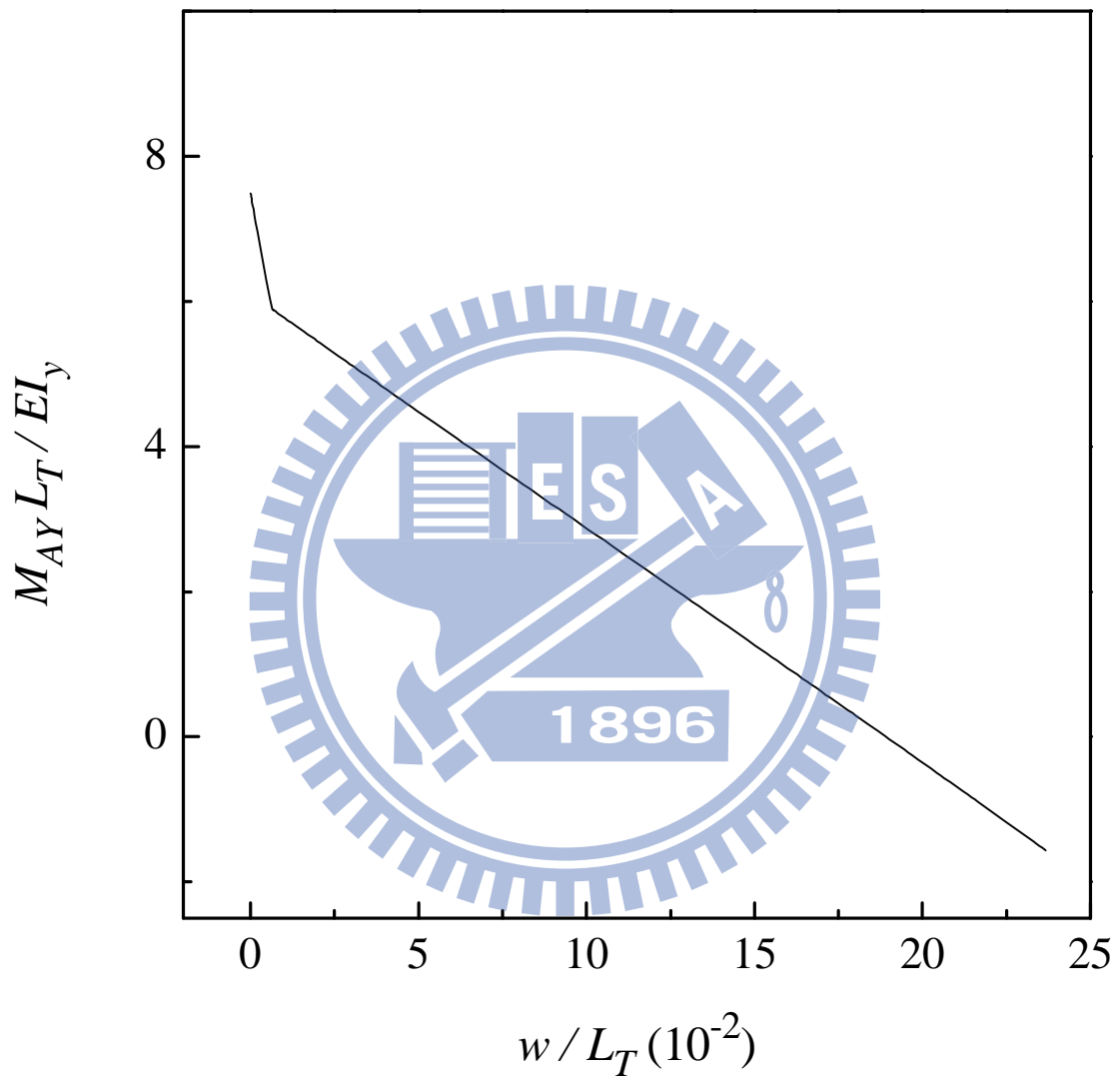
圖六十八 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力 $F_{AX} L_T^2 / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.3125$ ，例題七)



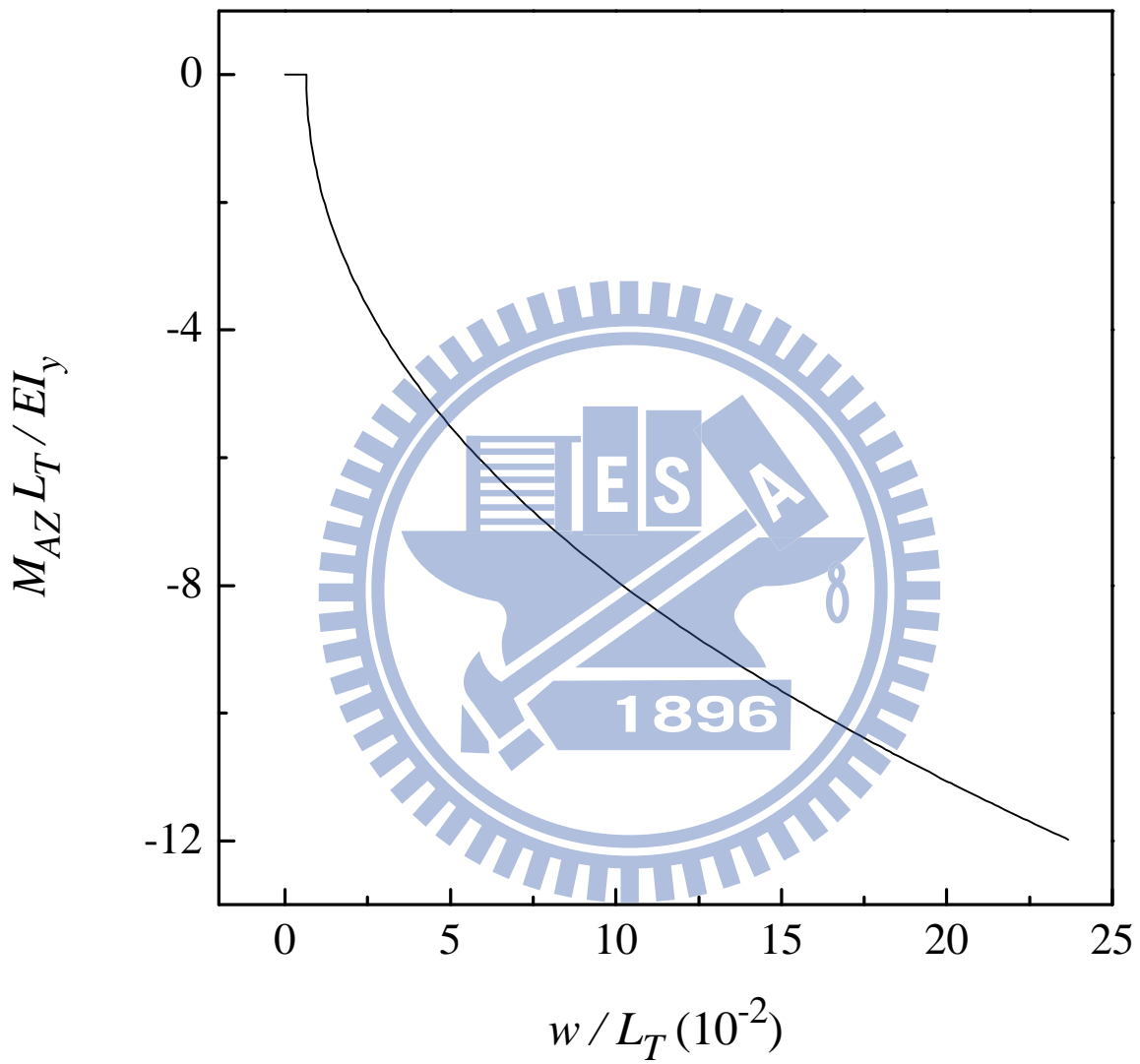
圖六十九 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力 $F_{AZ} L_T^2 / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.3125$, 例題七)



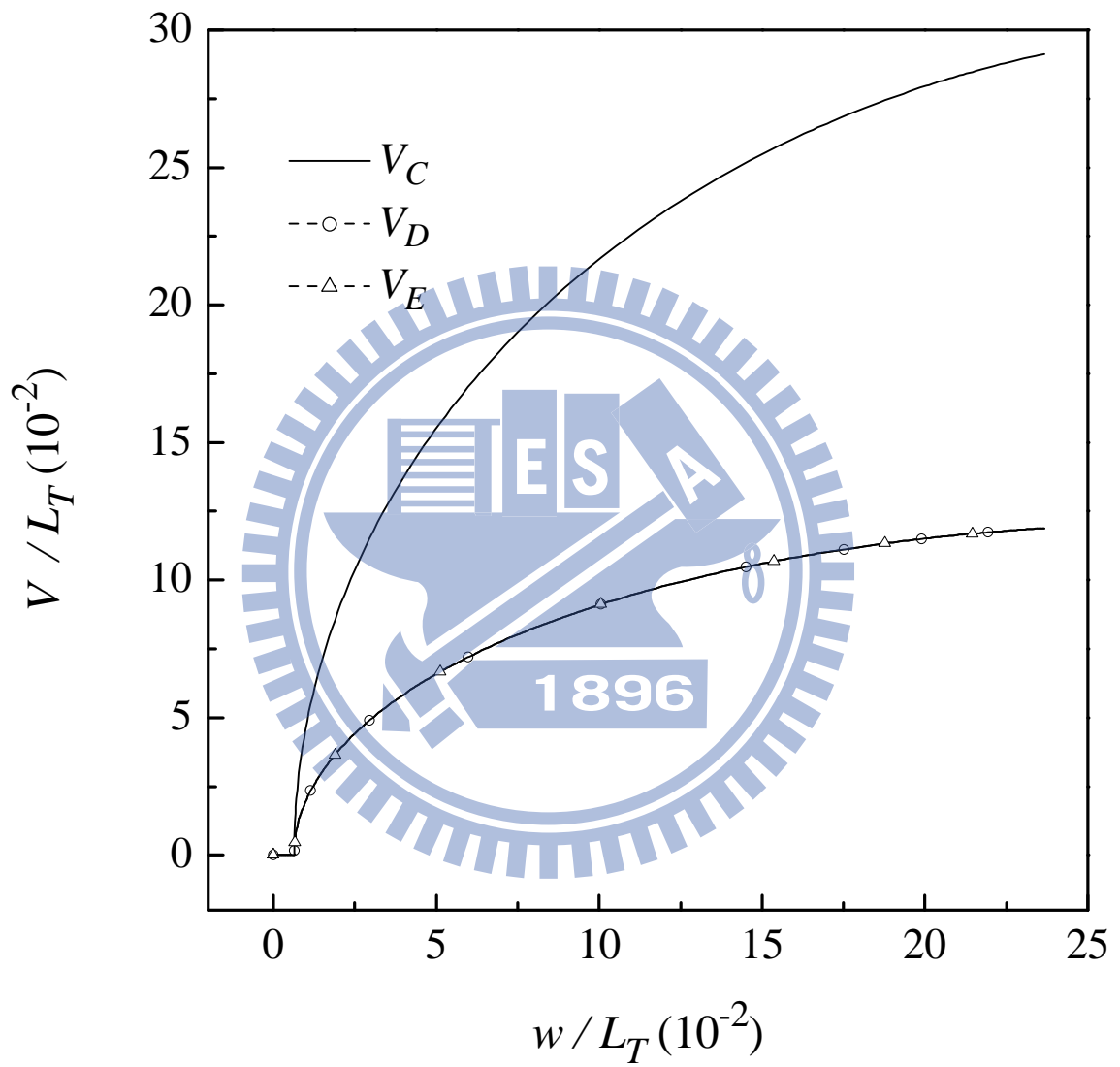
圖七十 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力矩 $M_{AX} L_T / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.3125$ ，例題七)



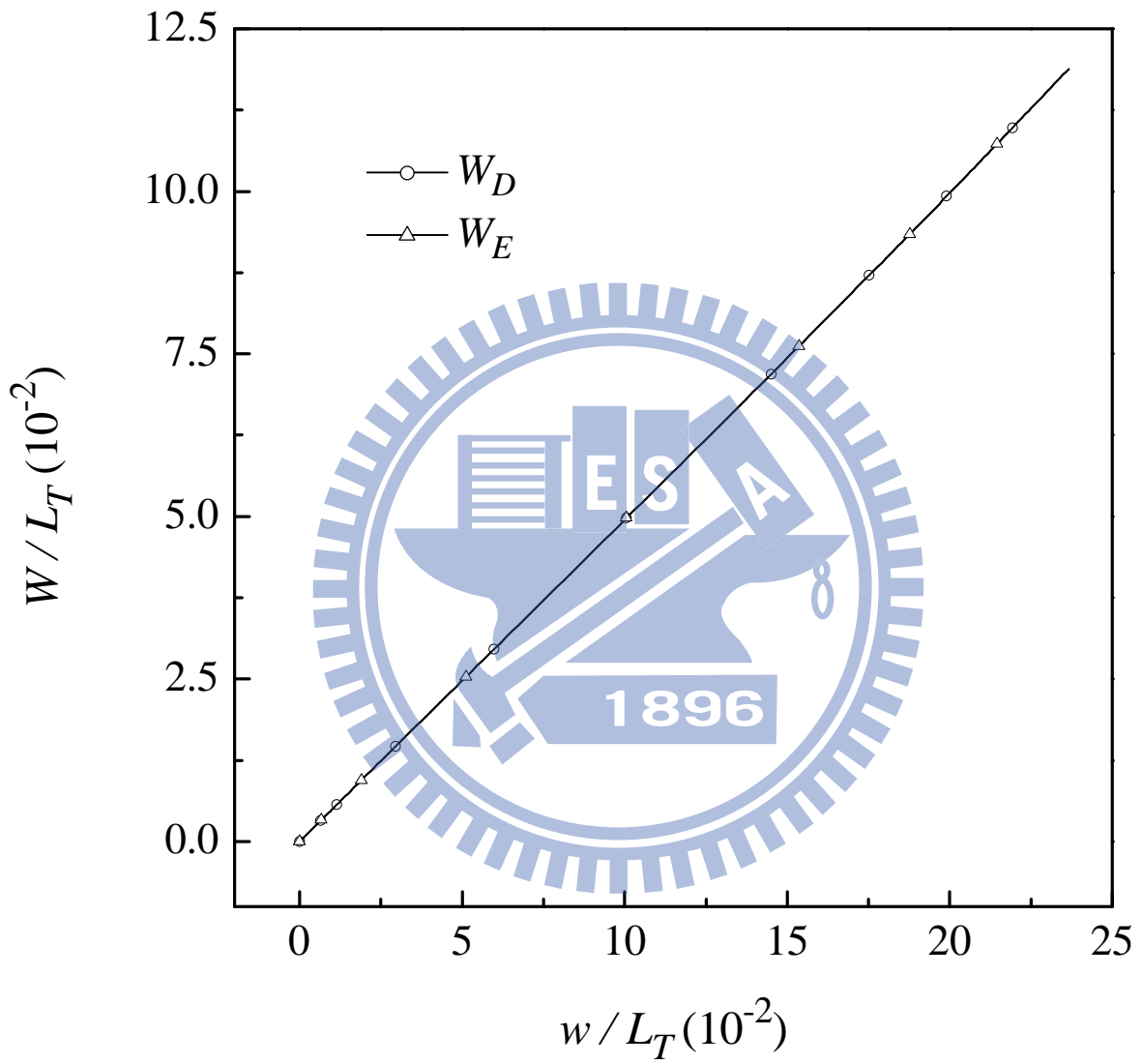
圖七十一 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力矩 $M_{AY}L_T/EI_y - w/L_T$ 曲線
 ($\Delta/L_T = 0.3125$ ，例題七)



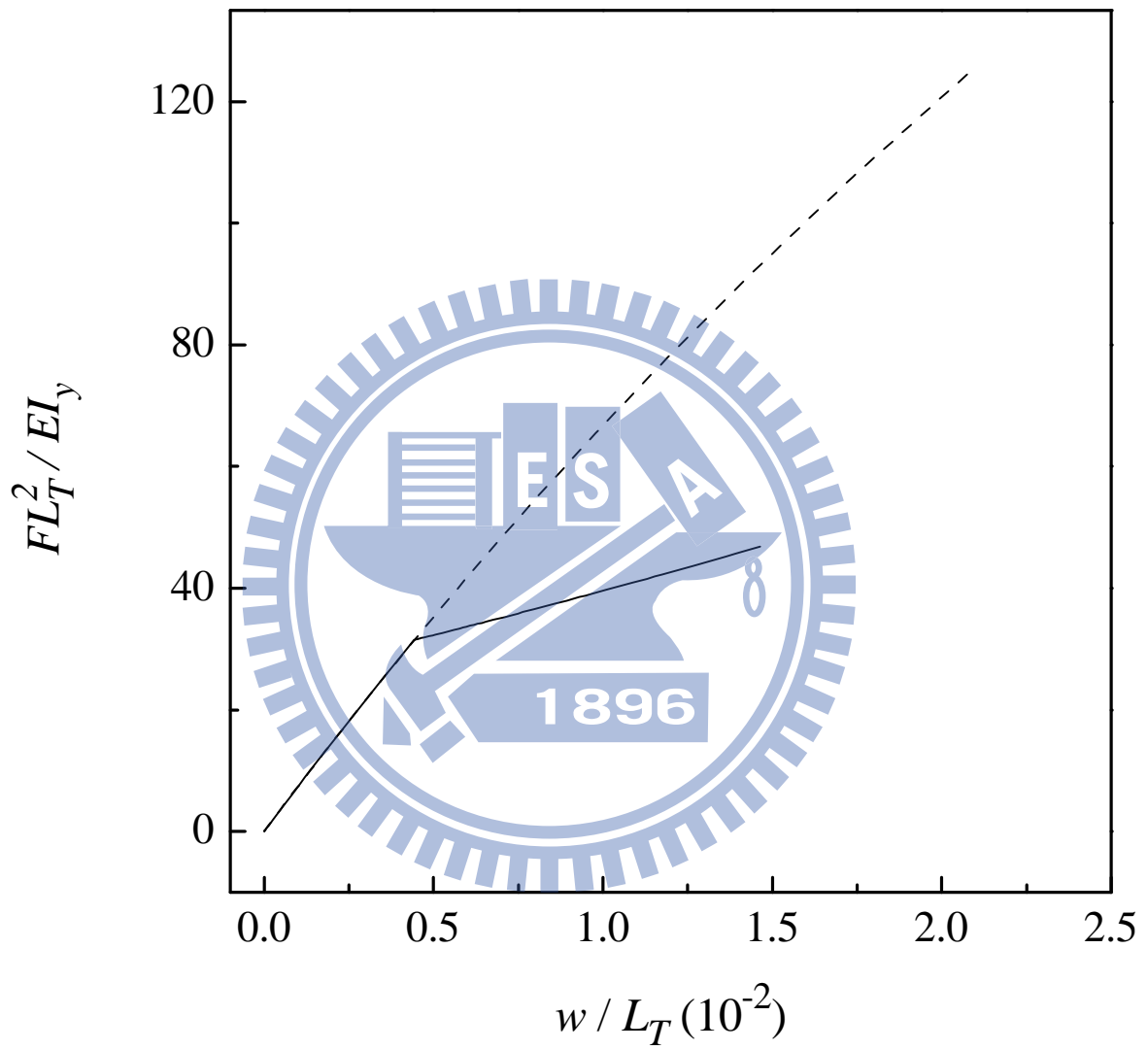
圖七十二 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力矩 $M_{AZ} L_T / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.3125$ ，例題七)



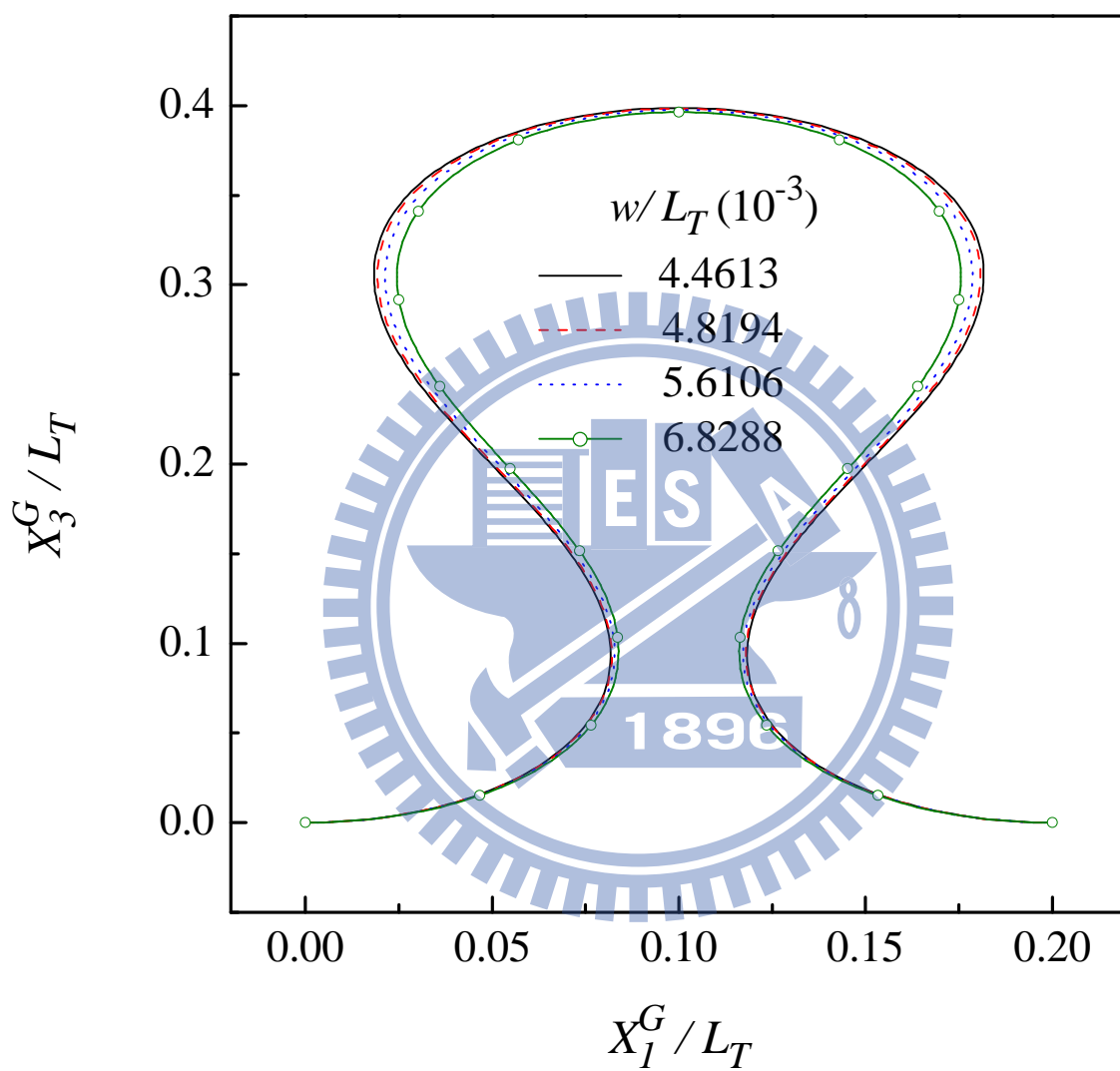
圖七十三 挫屈梁 C 、 D 、 E 點 X_2^G 方向的位移- w/L_T 曲線($\Delta/L_T = 0.3125$, 例題七)



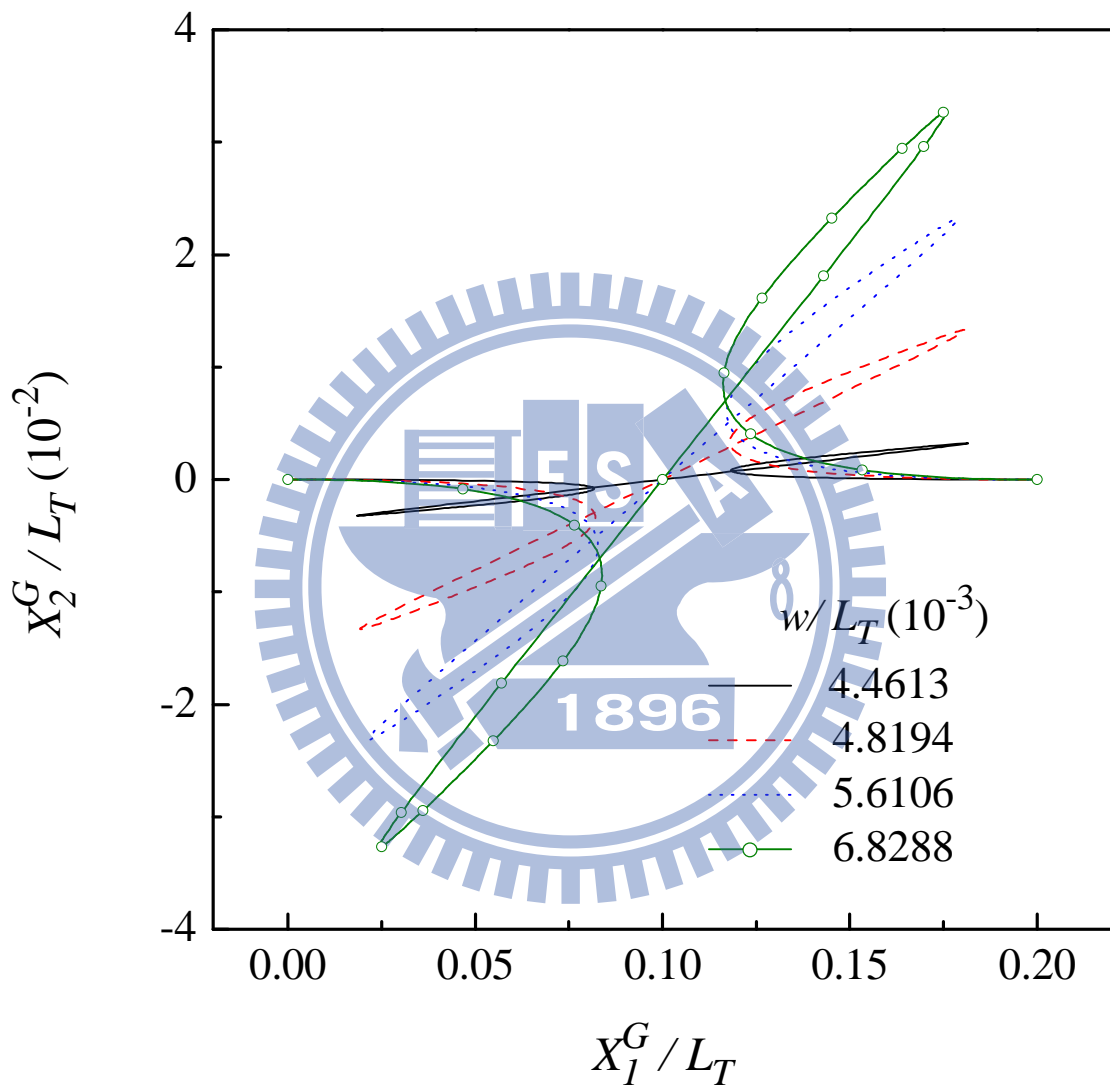
圖七十四 挫屈梁 C 、 D 、 E 點 X_3^G 方向位移- w/L_T 曲線($\Delta/L_T = 0.3125$ ，例題七)



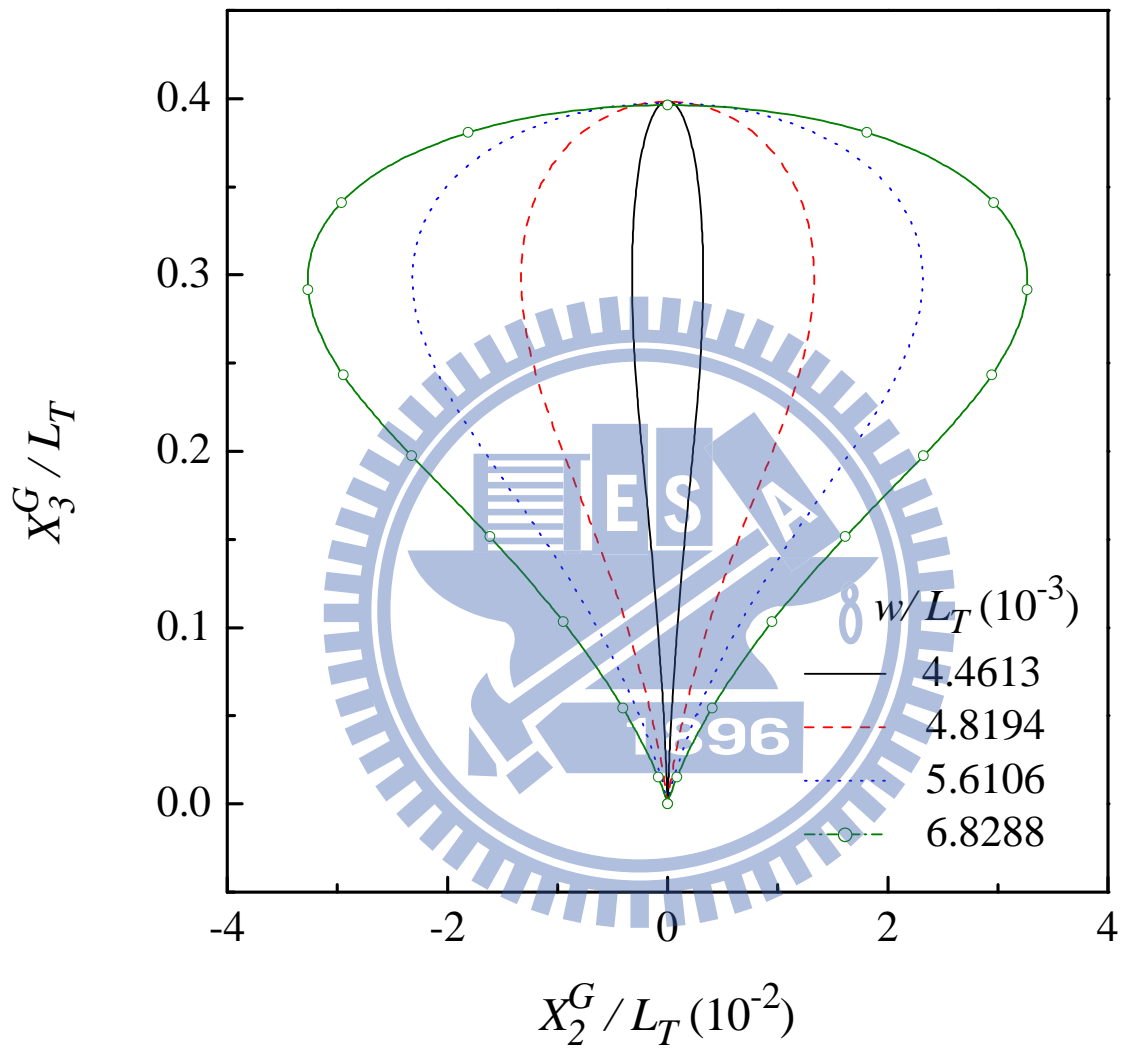
圖七十五 挫屈梁中心點 C 在 X_3^G 方向反力 $FL_T^2 / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.8$, 例題七)



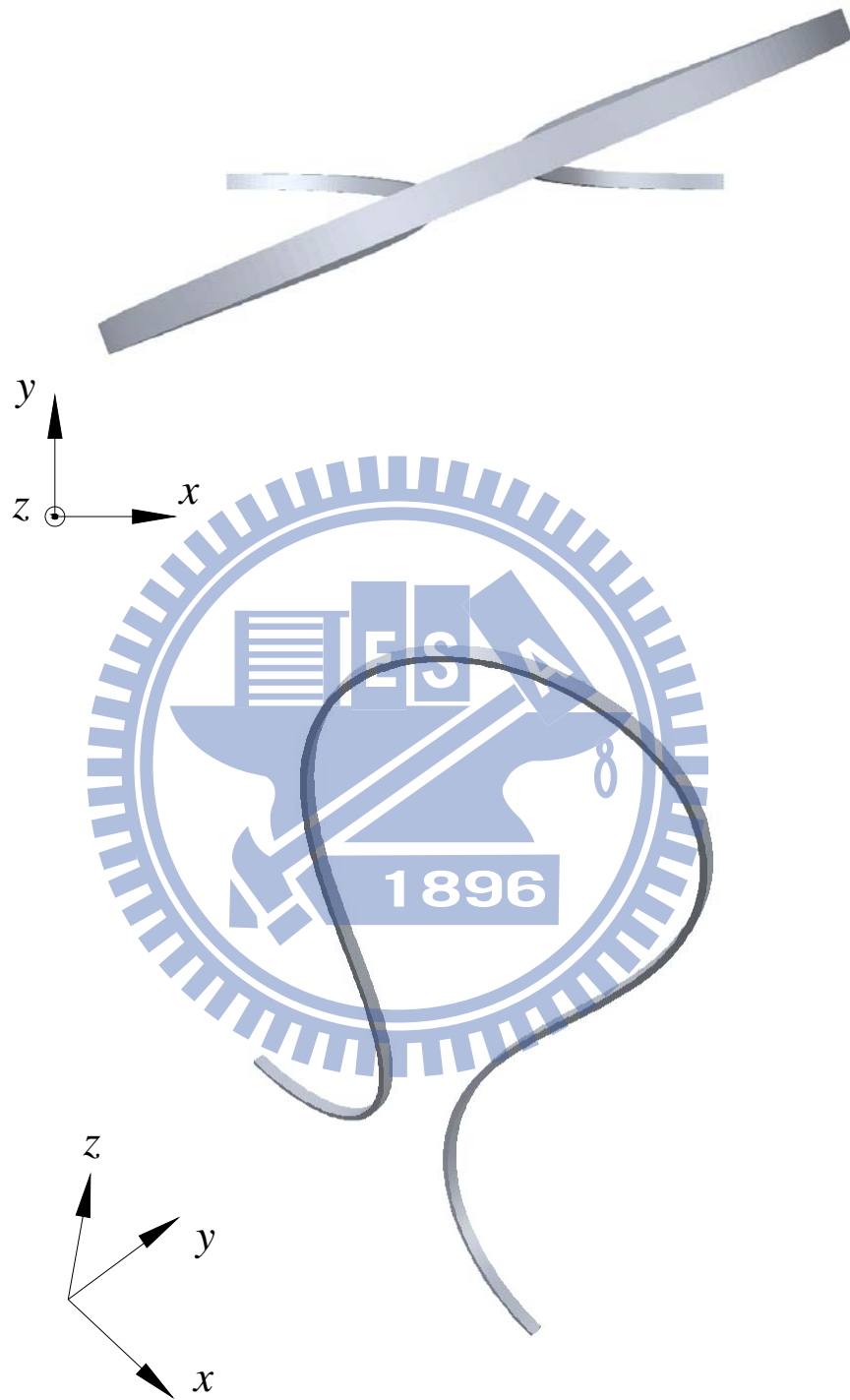
圖七十六 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta/L_T = 0.8$ ，前視圖，例題七)



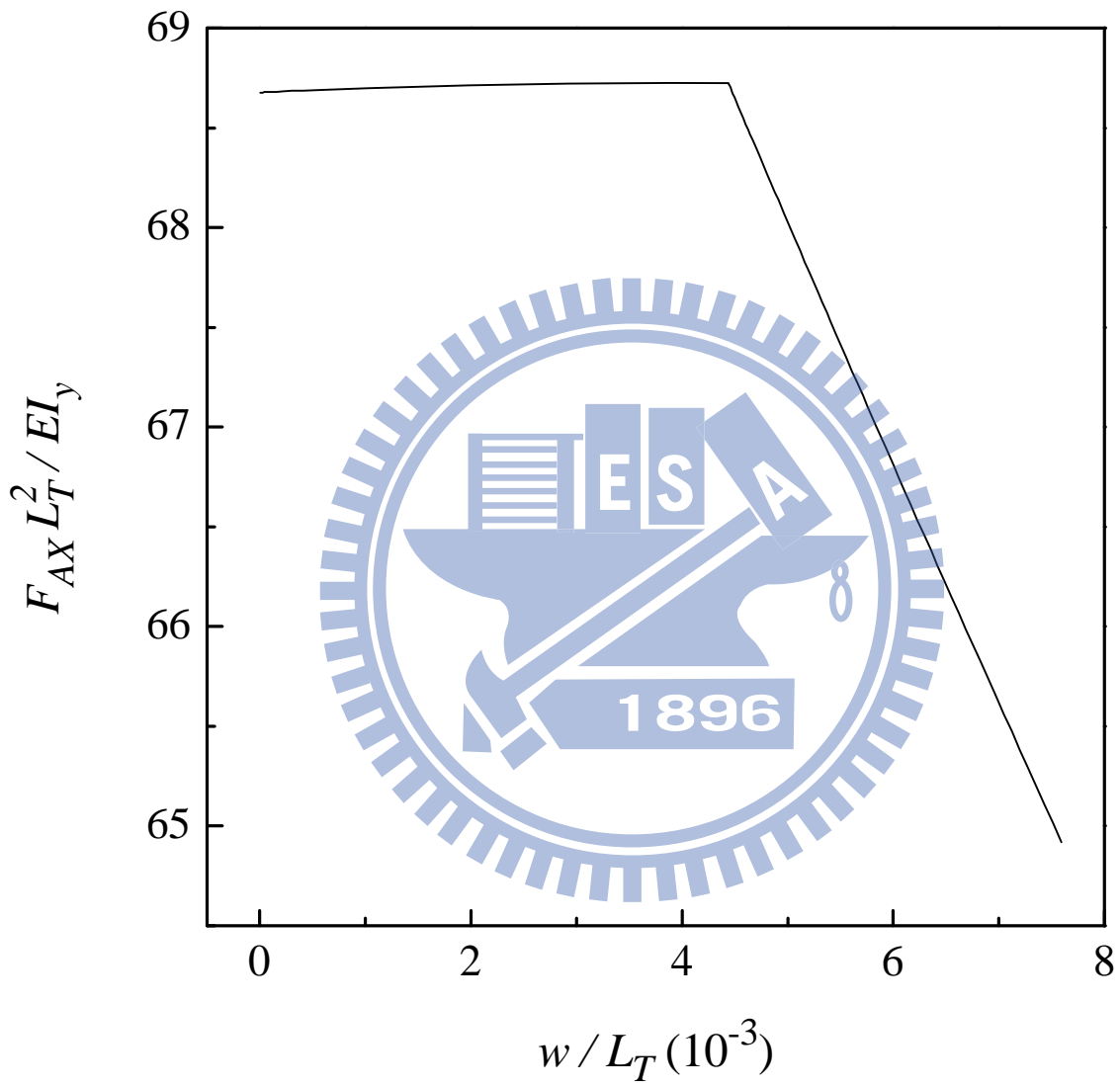
圖七十七 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta / L_T = 0.8$ ，上視圖，例題七)



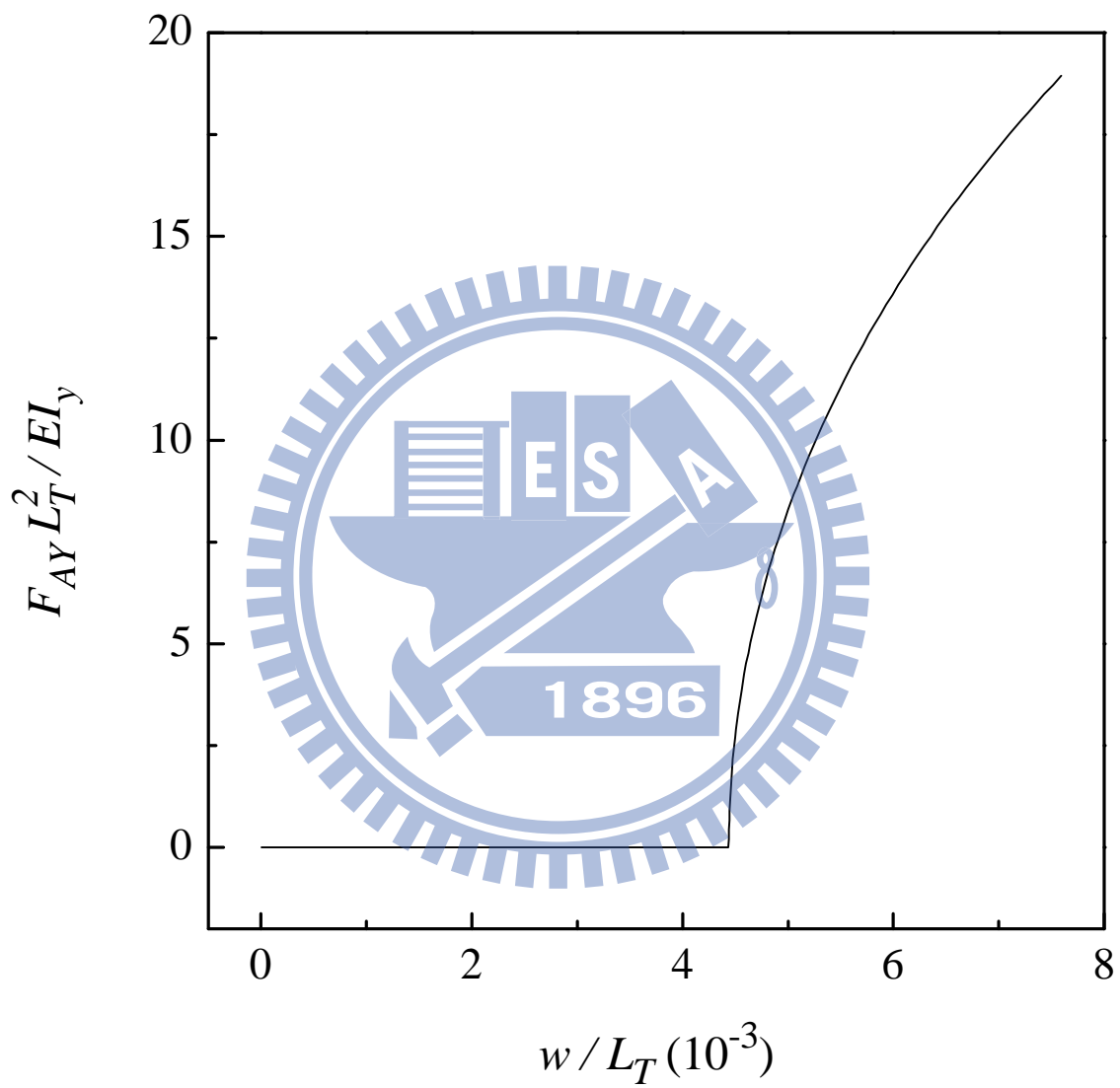
圖七十八 挫屈梁受側向位移負荷的變形圖($\Delta / L_T = 0.8$ ，側視圖，例題七)



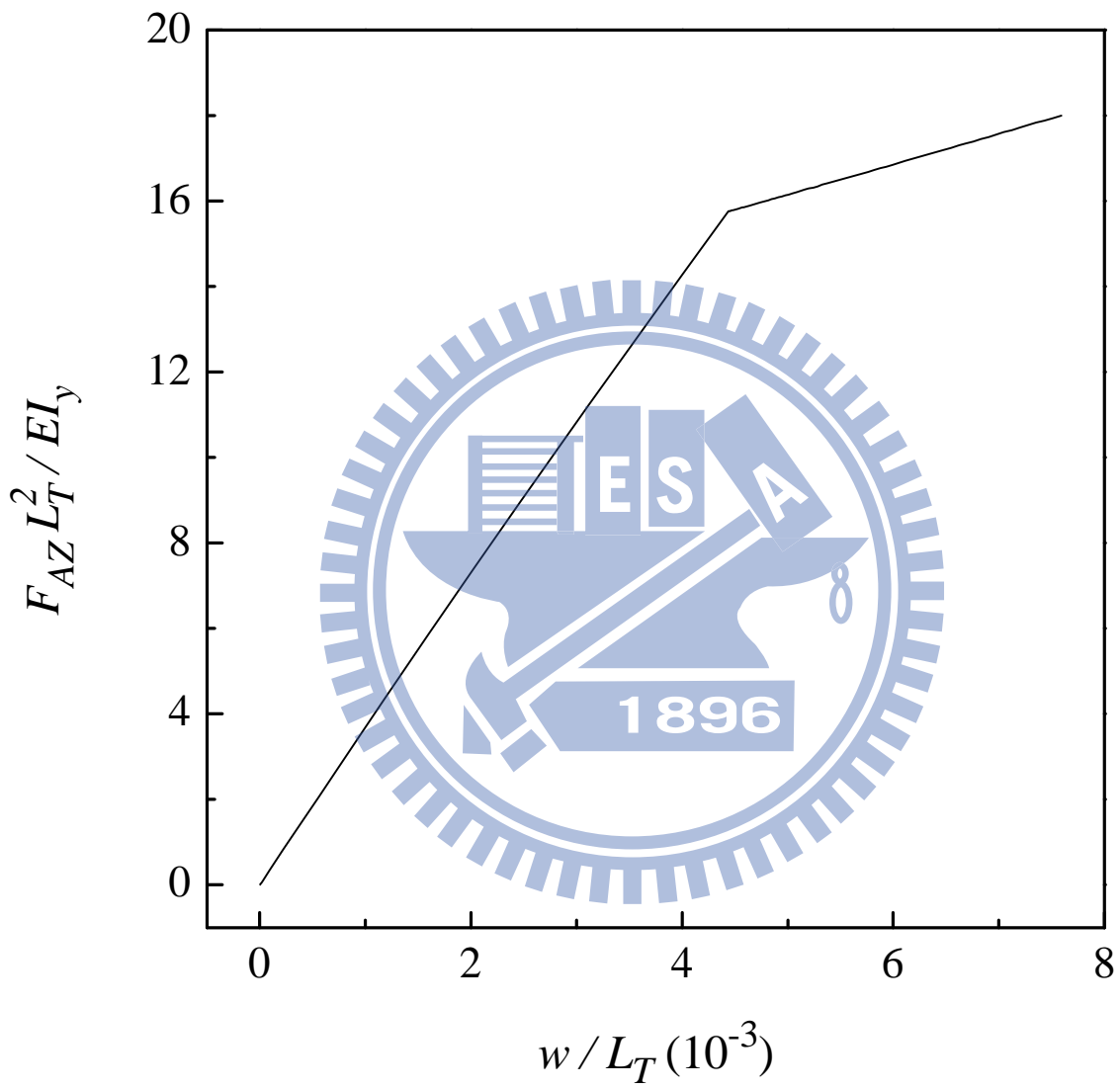
圖七十九 例題七 $\Delta/L_T = 0.8$ 變形之立體圖 ($w/L_T = 6.8288 \times 10^{-3}$)



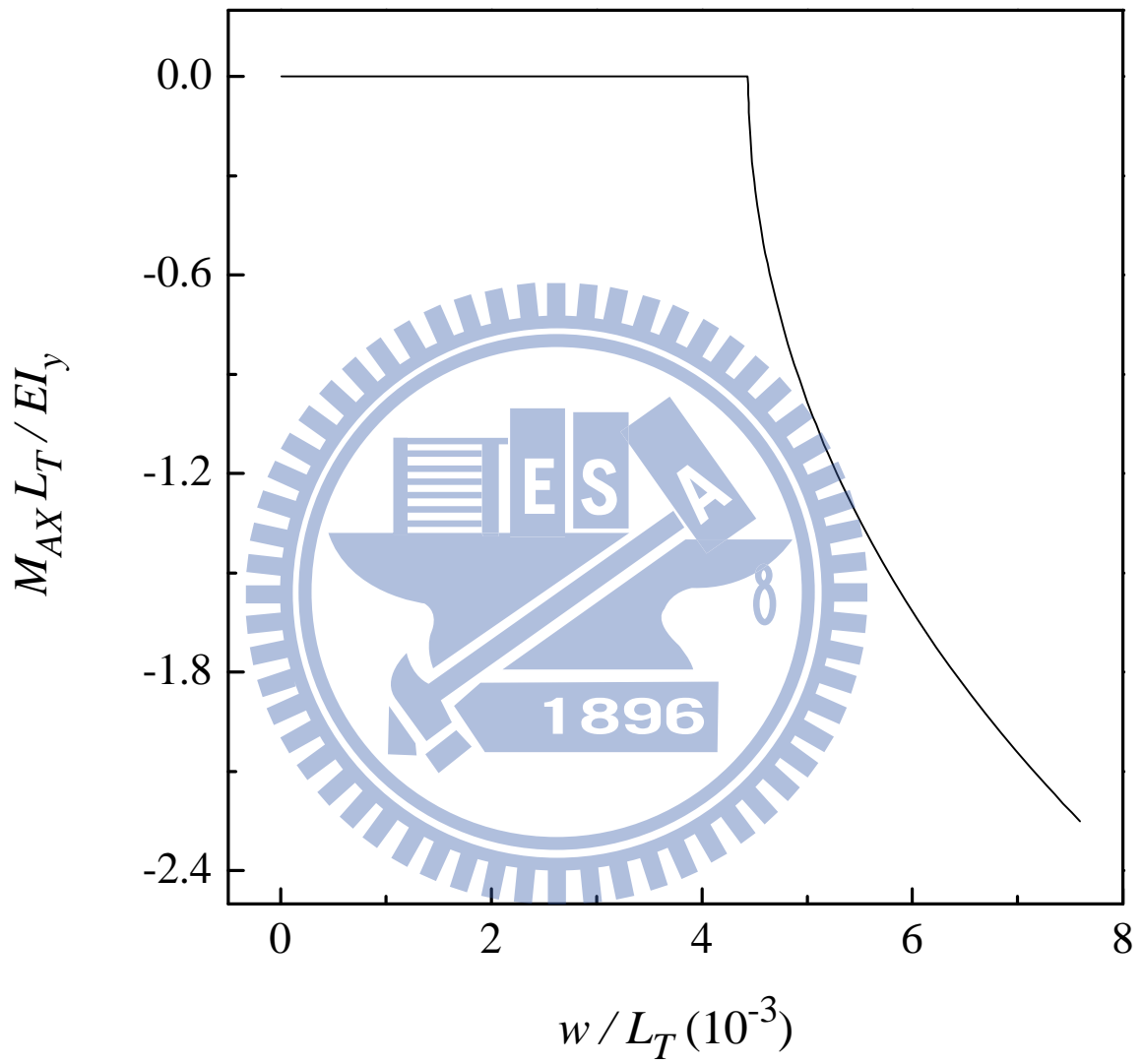
圖八十 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力 $F_{AX} L_T^2 / EI_y$ - w / L_T 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.8$, 例題七)



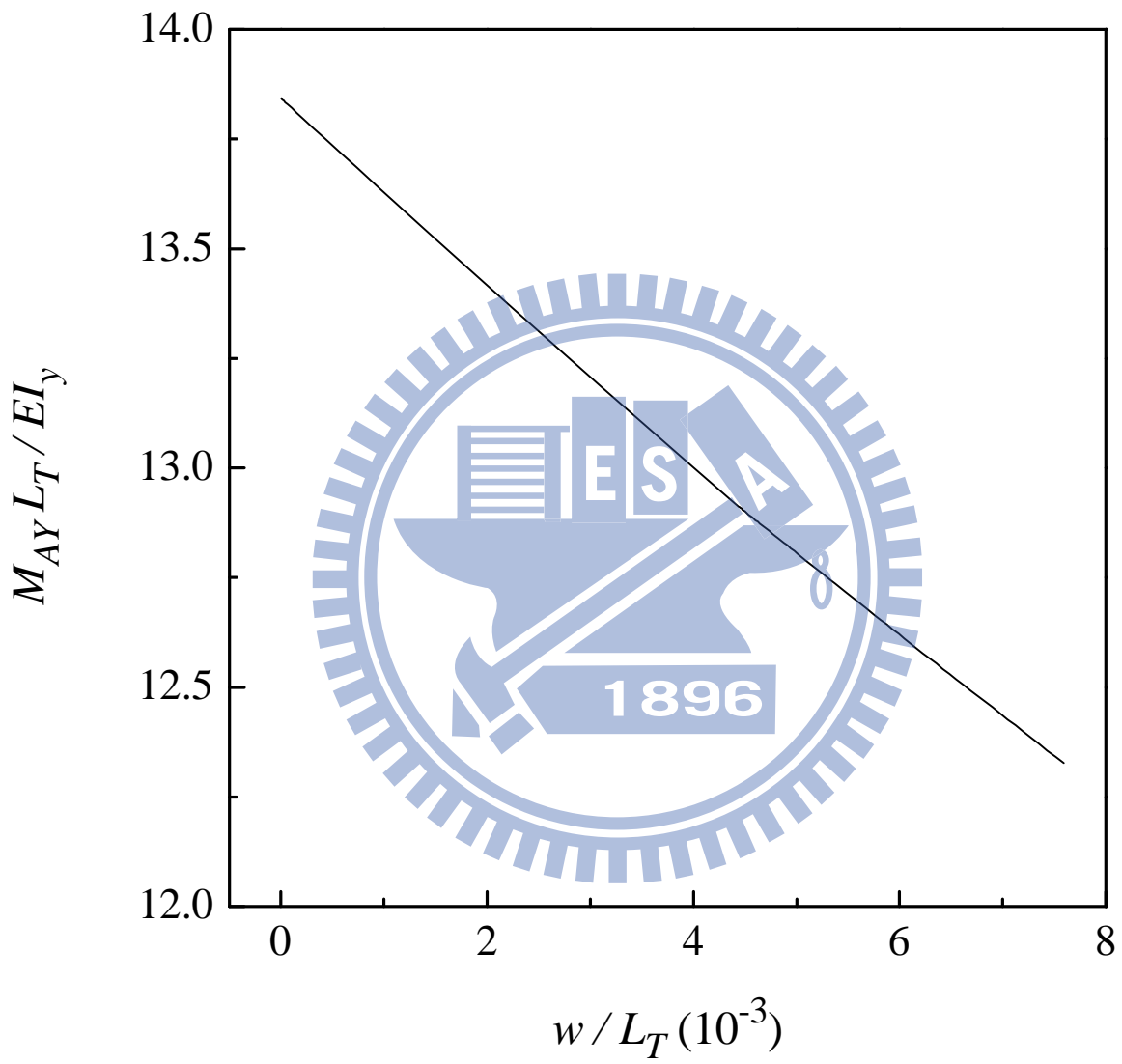
圖八十一 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力 $F_{AY} L_T^2 / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.8$, 例題七)



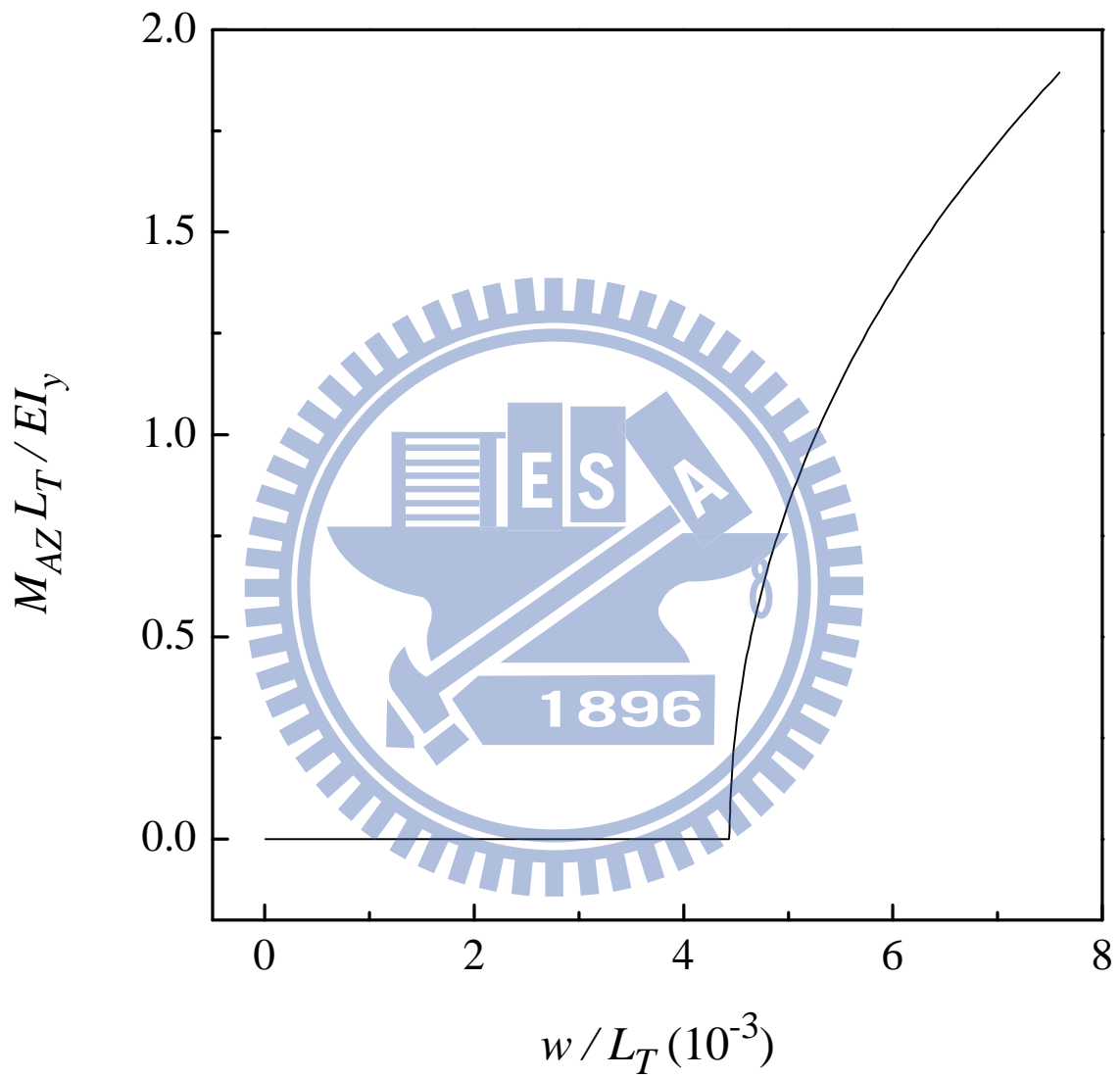
圖八十二 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力 $F_{AZ} L_T^2 / EI_y$ - w / L_T 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.8$, 例題七)



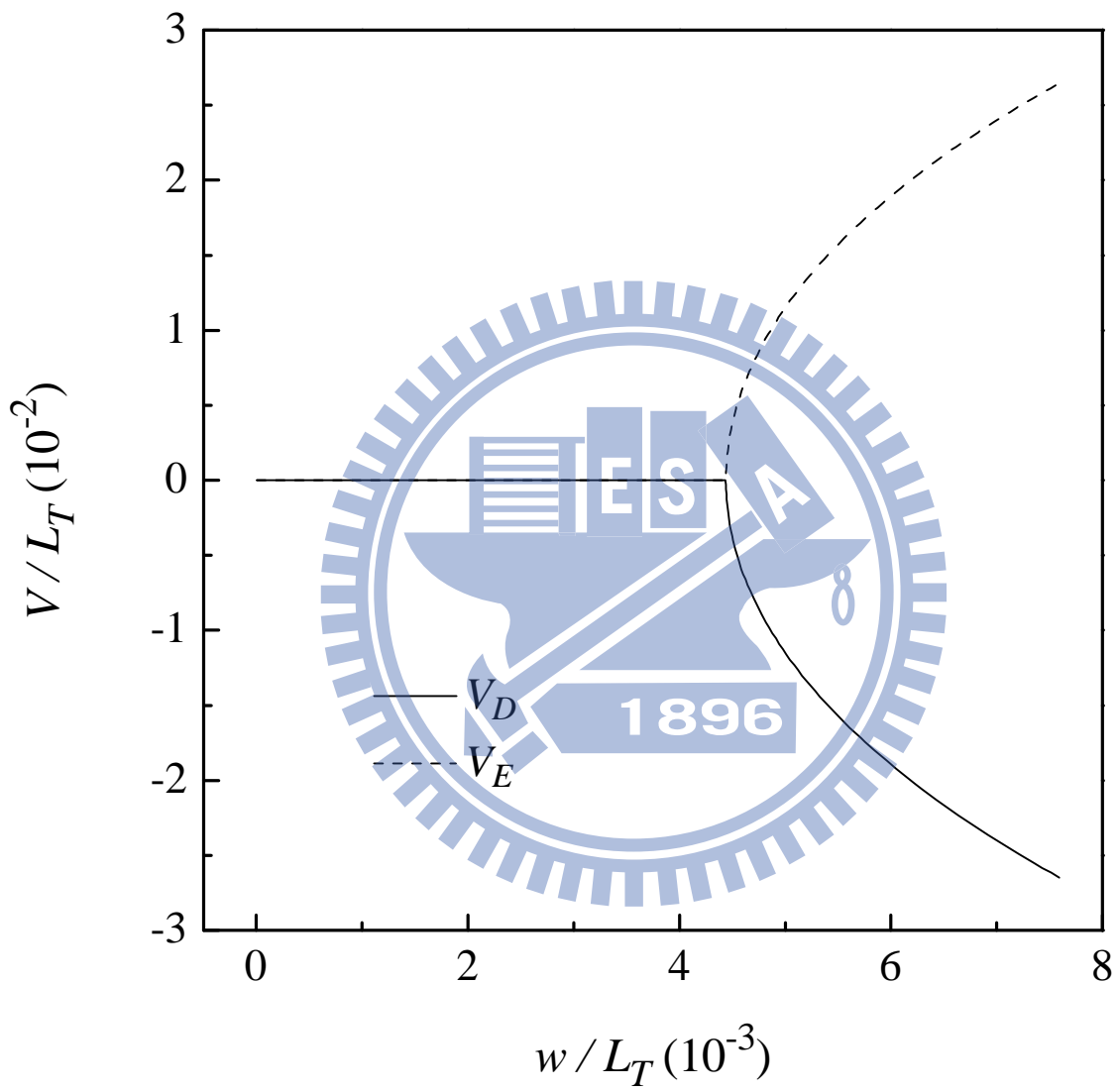
圖八十三 挫屈梁端點 A 在 X_1^G 方向反力矩 $M_{AX} L_T / EI_y - w / L_T$ 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.8$, 例題七)



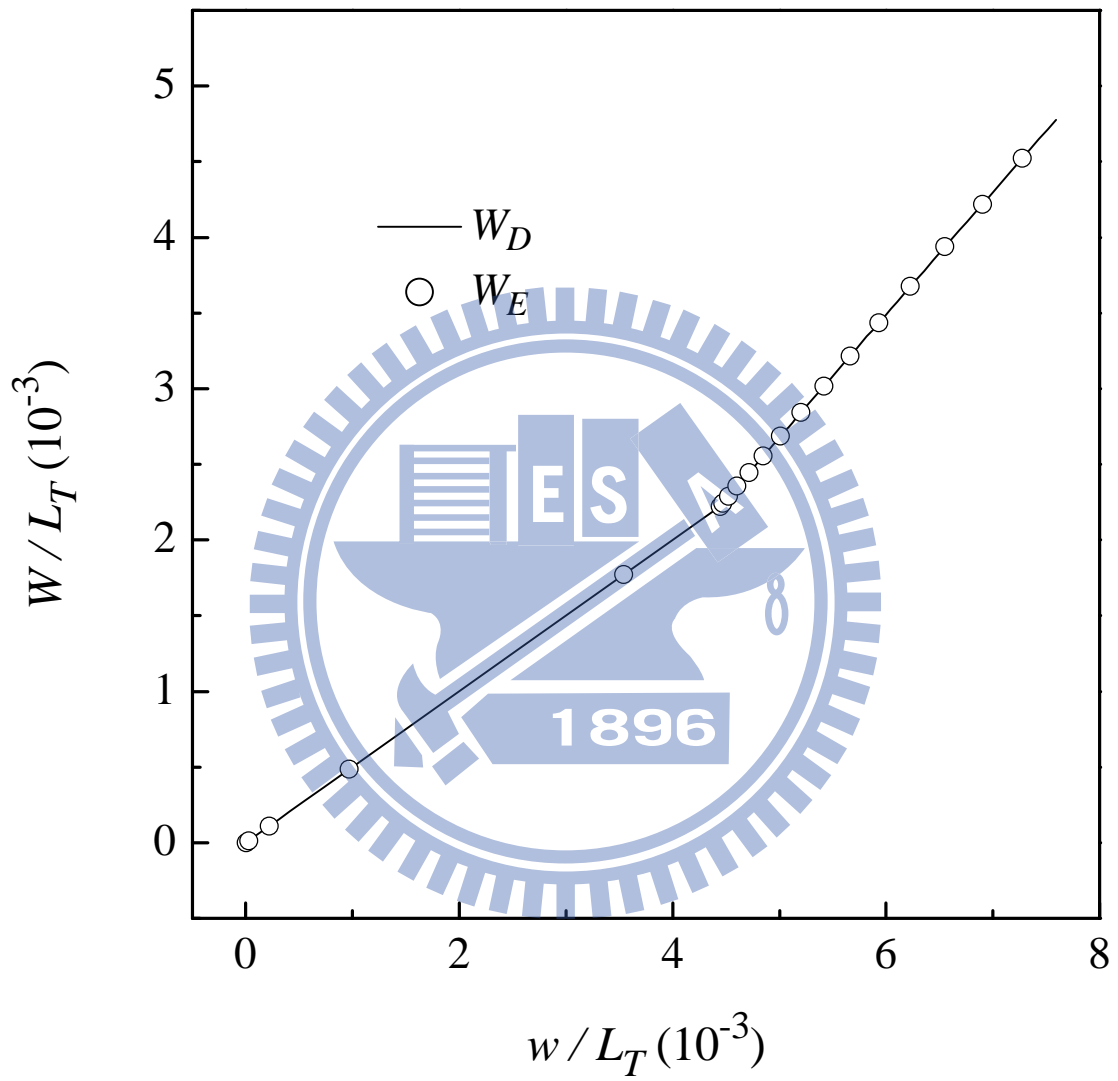
圖八十四 挫屈梁端點 A 在 X_2^G 方向反力矩 $M_{AY}L_T/EI_y$ - w/L_T 曲線
 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七)



圖八十五 挫屈梁端點 A 在 X_3^G 方向反力矩 $M_{AZ} L_T / EI_y$ - w / L_T 曲線
 ($\Delta / L_T = 0.8$, 例題七)



圖八十六 挫屈梁 C 、 D 、 E 點 X_2^G 方向位移- w/L_T 曲線($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七)



圖八十七 挫屈梁 C 、 D 、 E 點 X_3^G 方向位移- w/L_T 曲線 ($\Delta/L_T = 0.8$, 例題七)

附 錄 A G 元素之節點內力及剛度矩陣

文獻[22]採用(2.5.4)式之 Green Strain 推導之 G 元素之節點內力向量：

$$\mathbf{f}_a^\theta = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AEL\varepsilon_0(1 + \frac{3}{2}\varepsilon_0) + \frac{1}{2}EI_p \int \theta_{1,x}^2 dx + \frac{1}{2}EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2}EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2}EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx] \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = EI_z(1 + \varepsilon_0) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + f_{12} \mathbf{G}_b + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \theta_1 w_{,xx} dx + \frac{1}{2}GJ \int (\mathbf{N}_b'' \theta_{1,x} w_{,x} - \mathbf{N}_b' \theta_{1,x} w_{,xx}) dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} w_{,xx} dx \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{f}_c^\theta = EI_y(1 + \varepsilon_0) \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx + f_{12} \mathbf{G}_c + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \theta_1 v_{,xx} dx + \frac{1}{2}GJ \int (\mathbf{N}_c'' \theta_{1,x} v_{,xx} - \mathbf{N}_c' \theta_{1,x} v_{,xx}) dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \theta_{1,xx} v_{,xx} dx \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{f}_d^\theta = [GJ + EI_p \varepsilon_0] \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x} dx + EI_\omega(1 + 3\varepsilon_0) \int \mathbf{N}_d'' \theta_{1,xx} dx + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_d' v_{,xx} w_{,xx} dx + \frac{1}{2}GJ \int \mathbf{N}_d' (w_{,x} v_{,xx} - v_{,x} w_{,xx}) dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_d'' v_{,xx} w_{,xx} dx + \frac{1}{2}EK_I \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x}^3 dx \quad (\text{A4})$$

上列各式的積分範圍是由 0 至 L ，畫底線——之項為與本文中採用工程應變推導之元素節點內力不同之項，畫虛底線-----之項為元素較多時會趨近於零的項。

文獻[22]採用(2.5.4)式之 Green Strain 推導之元素切線剛度矩陣 \mathbf{k}_θ 可以由以下的子矩陣 \mathbf{k}_{ij}^θ ($i = a, b, c, d, j = a, b, c, d$) 用直接剛度法組合而成

$$\mathbf{k}_{aa}^\theta = \frac{AE}{L} (1 + 3\varepsilon_0) \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t$$

$$\mathbf{k}_{ab}^\theta = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a (AEG_b^t + EI_z \int \mathbf{N}_b''^t v_{,xx} dx)$$

$$\mathbf{k}_{ac}^\theta = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a (AEG_c^t + EI_y \int \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx)$$

$$\mathbf{k}_{ad}^{\theta} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a (EI_p \int \mathbf{N}_d'' \theta_{1,x} dx + 3EI_{\omega} \int \mathbf{N}_d'' \theta_{1,xx} dx)$$

$$\mathbf{k}_{bb}^{\theta} = EI_z (1 + \varepsilon_0) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b'' dx + f_{12} \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'' dx$$

$$\mathbf{k}_{bc}^{\theta} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c'' \theta_1 dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c'' \theta_{1,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c'' - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_c'') \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd}^{\theta} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d'' w_{,xx} dx + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d'' w_{,x} - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_d'') w_{,xx} dx$$

$$+ 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d'' w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{cc}^{\theta} = EI_y (1 + \varepsilon_0) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c'' dx + f_{12} \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c'' dx$$

$$\mathbf{k}_{cd}^{\theta} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d'' v_{,xx} dx + \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_c' \mathbf{N}_d'' v_{,xx} - \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d'') v_{,xx} dx$$

$$+ 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d'' v_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{dd}^{\theta} = [GJ + EI_p \varepsilon_0] \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'' dx + EI_{\omega} (1 + 3\varepsilon_0) \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d'' dx + \frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'' \theta_{1,x}^2 dx$$

上列各式的積分範圍是由 0 至 L ，畫底線——之項為與本文中採用工程應變推導之元素剛度矩陣不同之項，畫虛底線-----之項為元素較多時會趨近於零的項。

附錄 B E 元素及 G 元素之元素節點內力之比較

本附錄中 $()_E$ 及 $()_G$ 分別代表E元素及G元素之元素節點內力 $()$ 。

將(2.6.10)、(2.4.20)-(2.4.4)式分別代入(2.6.15)式及(A.1)式，並忽略元素較多時會趨近於零的二次項，可得

$$(f_{12})_E = -(f_{11})_E = \frac{1}{L}[AEL\varepsilon_0 + (\frac{1}{2}EI_p - GJ)]\int\theta_{1,x}^2 dx \quad (B1a)$$

$$- 2\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0)EI_y \int w_{,xx}^2 dx - 2\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0)EI_z \int v_{,xx}^2 dx]$$

$$(f_{12})_G = (-f_{11})_G = \frac{1}{L}[AEL\varepsilon_0(1 + \frac{3}{2}\varepsilon_0) + \frac{1}{2}EI_p]\int\theta_{1,x}^2 dx \quad (B1b)$$

$$+ \frac{3}{2}EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2}EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2}EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx]$$

$$(f_{21})_E = (-f_{22})_E = EI_z(1 - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{6v'_1 + 6v'_2}{L^2}\right) = \frac{1}{\ell}(m_{31} + m_{32})_E \quad (B2a)$$

$$(f_{21})_G = (-f_{22})_G = EI_z(1 + \varepsilon_0)^2 \left(\frac{6v'_1 + 6v'_2}{L^2}\right) = \frac{1}{\ell}(m_{31} + m_{32})_G \quad (B2b)$$

$$(f_{31})_E = (-f_{32})_E = EI_y(1 - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{6w'_1 + 6w'_2}{L^2}\right) = -\frac{1}{\ell}(m_{21} + m_{22})_E \quad (B3a)$$

$$(f_{31})_G = (-f_{32})_G = EI_y(1 + \varepsilon_0)^2 \left(\frac{6w'_1 + 6w'_2}{L^2}\right) = -\frac{1}{\ell}(m_{21} + m_{22})_G \quad (B3b)$$

$$(m_{21})_E = -EI_y(1 - \varepsilon_0) \left(\frac{4w'_1}{L} + \frac{2w'_2}{L}\right) \quad (B4a)$$

$$(m_{21})_G = -EI_y(1 + \varepsilon_0)^2 \left(\frac{4w'_1}{L} + \frac{2w'_2}{L}\right) \quad (B4b)$$

$$(m_{22})_E = -EI_y(1 - \varepsilon_0) \left(\frac{2w'_1}{L} + \frac{4w'_2}{L}\right) \quad (B5a)$$

$$(m_{22})_G = -EI_y(1 + \varepsilon_0)^2 \left(\frac{2w'_1}{L} + \frac{4w'_2}{L}\right) \quad (B5b)$$

$$(m_{31})_E = EI_z(1 - \varepsilon_0) \left(\frac{4v'_1}{L} + \frac{2v'_2}{L}\right) \quad (B6a)$$

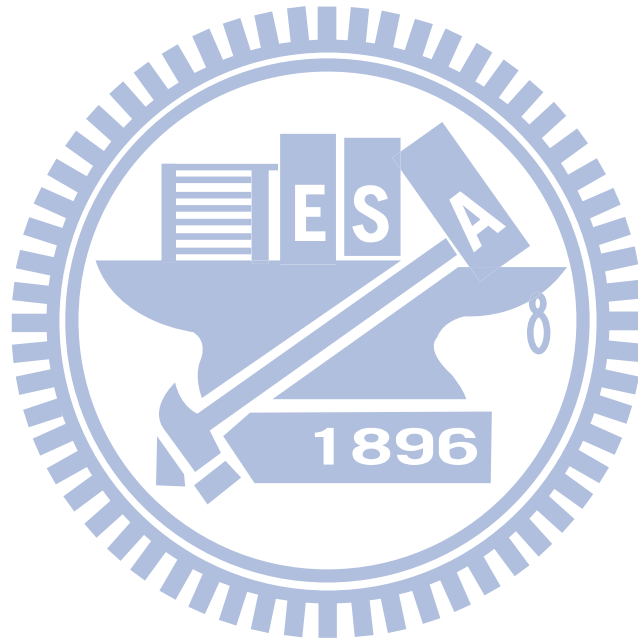
$$(m_{31})_G = EI_z(1 + \varepsilon_0)^2 \left(\frac{4v'_1}{L} + \frac{2v'_2}{L}\right) \quad (B6b)$$

$$(m_{32})_E = EI_z(1 - \varepsilon_0) \left(\frac{2v'_1}{L} + \frac{4v'_2}{L}\right) \quad (B7a)$$

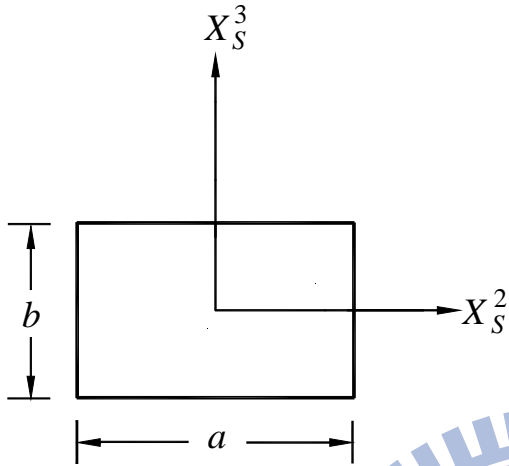
$$(m_{32})_G = EI_z(1 + \varepsilon_0)^2 \left(\frac{2v'_1}{L} + \frac{4v'_2}{L}\right) \quad (B7b)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}_d)_E &= (GJ + (EI_p - 2GJ)\varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} dx + EI_\omega \int \mathbf{N}''_d \theta_{1,xx} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x}^3 dx
\end{aligned} \tag{B8a}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}_d)_G &= [GJ + EI_p \varepsilon_o] \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} dx + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}''_d \theta_{1,xx} dx \\
&\quad + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}''_d v_{,xx} w_{,xx} dx + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x}^3 dx
\end{aligned} \tag{B8b}$$



附 錄 C 矩形斷面



翹曲函數 $\omega = yz - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(K_n y) \sinh(K_n z)}{(2n+1)^3 \cosh(K_n b/2)}$

$$A = ab$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_z = \frac{ba^3}{12}$$

$$J = \int_A (y^2 + z^2 + y\omega_{,z} - z\omega_{,y}) dA$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA$$

$$\alpha_{\omega yz} = \Omega_{yz} = \int \omega yz dA$$

$$I_4 = K_I = \alpha_{2y} + \alpha_{2z} + 2\alpha_{yz} = \int y^4 dA + \int z^4 dA + 2\int y^2 z^2 dA$$

$a(mm)$	1	1.01	$\sqrt{2}$	1.5	2
$I_y(mm^4)$	0.083333	0.084167	0.117851	0.125000	0.166667
$I_z(mm^4)$	0.083333	0.085858	0.235702	0.281250	0.666667
$J(mm^4)$	0.140577	0.143396	0.266184	0.293641	0.457363
$A(mm^2)$	1	1.01	1.41421	1.5	2
$I_4(mm^6)$	0.038889	0.040072	0.127672	0.160547	0.536111
$I_\omega(10^{-3}mm^6)$	0.134402	0.139157	2.48064	3.79037	20.3227
$\Omega_{yz}(10^{-4}mm^6)$	0	-0.698132	-64.2528	-88.4883	-327.827
γ	1	0.980296	0.5	0.444444	0.25
β	1.50075	1.48596	1.12087	1.07770	0.922551
$a(mm)$	2.5	2.6	$2\sqrt{2}$	3	10
$I_y(mm^4)$	0.208333	0.216667	0.235702	0.250000	0.833333
$I_z(mm^4)$	1.30208	1.46467	1.88562	2.25	83.3333
$J(mm^4)$	0.623413	0.656702	0.732784	0.789951	3.12325
$A(mm^2)$	2.5	2.6	2.82843	3	10
$I_4(mm^6)$	1.46897	1.76178	2.61237	3.45	1264.01
$I_\omega(mm^6)$	0.056884	0.067122	0.094619	0.119279	6.64291
$\Omega_{yz}(mm^6)$	-0.077432	-0.0893162	-0.120591	-0.148098	-6.78838
γ	0.16	0.147929	0.125	0.111111	0.01
β	0.846031	0.835269	0.814312	0.801204	0.675484

$$E = 57 \times 10^3 N/mm^2, \quad G = 20 \times 10^3 N/mm^2, \quad b = 1mm$$

$$\gamma = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}, \quad \beta = \frac{EI_{\min}}{GJ}$$

附 錄 D 十字斷面

翹曲函數

$$\omega = yz$$

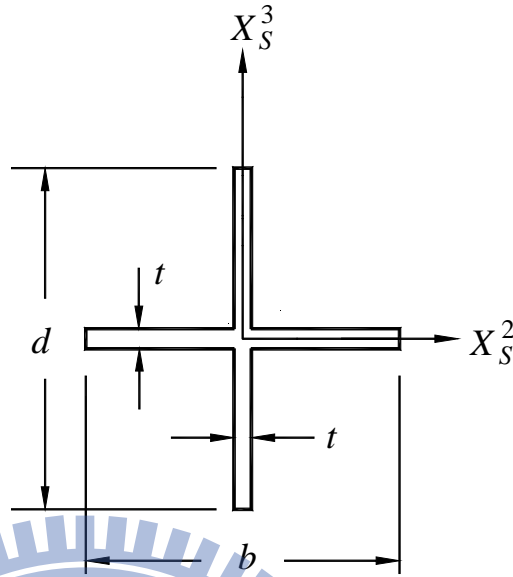
$$\text{for } \begin{cases} -0.5t \leq y \leq 0.5t \\ -0.5d \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

$$\omega = -yz$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq -0.5t \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$

$$\omega = -yz$$

$$\text{for } \begin{cases} 0.5t \leq y \leq 0.5b \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$



$$A = bt + dt - t^2$$

$$J = \int_A (y^2 + z^2 + y\omega_z - z\omega_y) dA = \frac{(b-t)t^3 + dt^3}{3}$$

$$I_y = \frac{bt^3 + dt^3 - t^4}{12}$$

$$I_z = \frac{dt^3 + tb^3 - t^4}{12}$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = \frac{t^3 d^3 + t^3 b^3 - t^6}{144}$$

$$K_I = I_4 = \alpha_{2y} + \alpha_{2z} + 2\alpha_{2yz} = \int y^4 dA + \int z^4 dA + 2 \int y^2 z^2 dA$$

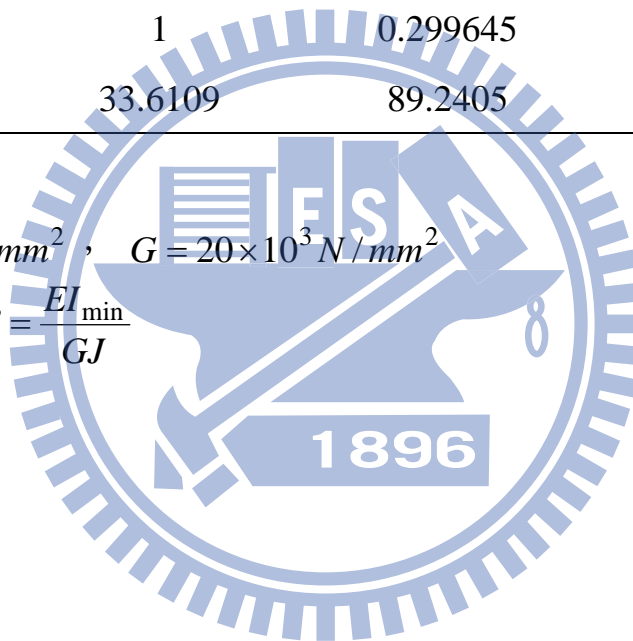
$$= \frac{dt^5 + tb^5 + td^5 + bt^5}{80} + \frac{t^3 d^3 + t^3 b^3}{72} - \frac{7t^6}{180}$$

$$\alpha_{yz\omega} = \int \omega yz dA = \frac{t^3 d^3 + t^6 - t^3 b^3}{144}$$

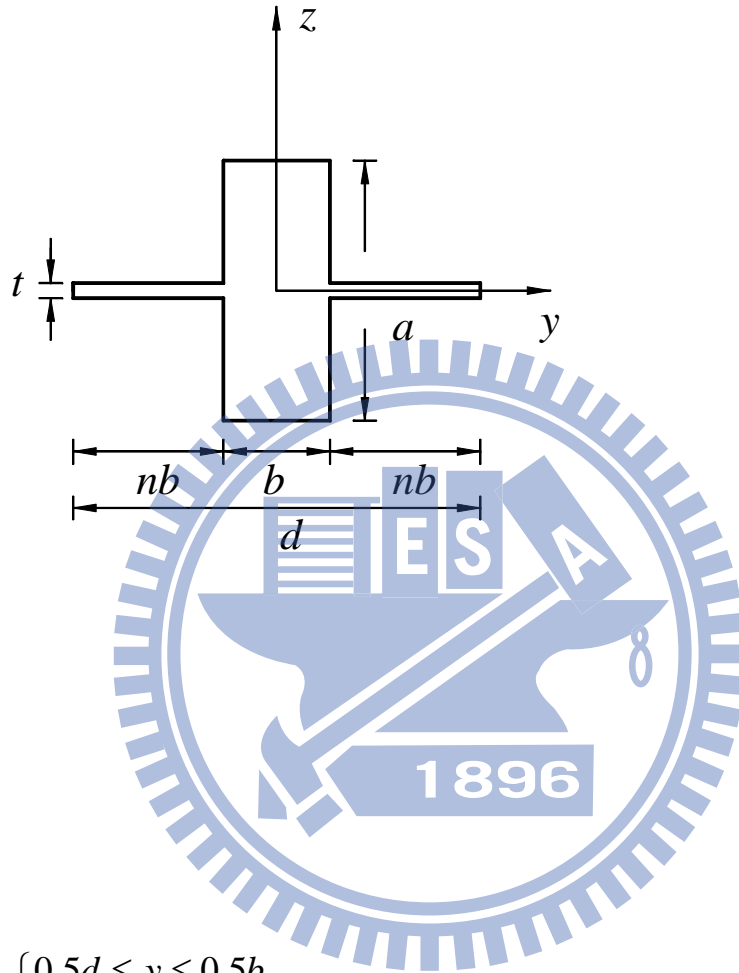
$b : d : t (mm)$	1:1:0.1	1.5:1:0.1	7:7:0.7
$I_y (10^{-2} mm^4)$	0.840833	0.845	20.1884
$I_z (mm^4)$	0.840833	0.0282	20.1884
$J (10^{-3} mm^4)$	0.633333	0.8	1.52063
$A (mm^2)$	0.19	0.24	9.31
$I_4 (mm^6)$	0.252799	0.0108032	297.415
$I_\omega (10^{-4} mm^6)$	0.138819	0.30375	1.6332
$\Omega_{yz} (10^{-4} mm^6)$	0.694444	-0.164861	8.1701×10^{-4}
γ	1	0.299645	1
β	33.6109	89.2405	33.6109

$$E = 57 \times 10^3 N/mm^2, \quad G = 20 \times 10^3 N/mm^2$$

$$\gamma = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}, \quad \beta = \frac{EI_{\min}}{GJ}$$



附 錄 E 十字形 A 斷面



$$t = ab$$

翹曲函數

$$\omega = -yz \quad \text{for} \begin{cases} 0.5d \leq y \leq 0.5b \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$

$$\omega = -yz \quad \text{for} \begin{cases} -0.5d \leq y \leq -0.5b \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$

$$\omega = yz - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(K_n y) \sinh(K_n z)}{(2n+1)^3 \cosh(K_n a/2)} \quad \text{for} \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ -0.5a \leq z \leq 0.5a \end{cases}$$

$$K_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}$$

$$A = ab + 2\alpha nb^2$$

$a(mm)$	0.7	1	1.5	2	2.5
$I_y(mm^4)$	0.03125	0.086	0.283917	0.669333	1.30475
$I_z(mm^4)$	2.125	2.15	2.19167	2.23333	2.27500
$J(mm^4)$	0.075676	0.151244	0.304308	0.468030	0.634079
$A(mm^2)$	1.5	1.8	2.3	2.8	3.3
$I_4(mm^6)$	7.83941	7.86268	7.98434	8.35990	9.29276
$I_\omega(10^{-2} mm^6)$	0.720357	0.702329	1.06793	2.72116	6.37733
$\Omega_{yz}(10^{-2} mm^6)$	-0.768903	-0.688889	0.195994	2.58938	7.05432
γ	0.014706	0.04	0.129544	0.299701	0.573516
β	1.04543	1.43954	2.36201	3.62053	5.20939

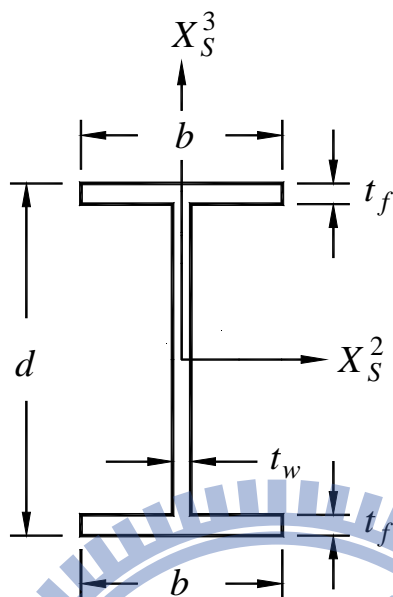
$a(mm)$	3	3.02924
$I_y(mm^4)$	2.25267	2.31910
$I_z(mm^4)$	2.31667	2.31910
$J(mm^4)$	0.800617	0.810362
$A(mm^2)$	3.8	3.82924
$I_4(mm^6)$	11.2738	11.4362
$I_\omega(mm^6)$	0.126168	0.130731
$\Omega_{yz}(mm^6)$	0.141209	0.146259
γ	0.972374	1
β	7.1232	7.2451

$$E = 57 \times 10^3 N/mm^2, \quad G = 20 \times 10^3 N/mm^2$$

$$b = 1mm, \quad t = \alpha b, \quad \alpha = 0.2, n = 2$$

$$\gamma = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}, \quad \beta = \frac{EI_{\min}}{GJ}$$

附 錄 F I 型斷面



翹曲函數：

Top flange

$$\omega = -y(z - d + t_f) \quad \text{for} \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ 0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

Web

$$\omega = yz \quad \text{for} \begin{cases} -0.5t_w \leq y \leq 0.5t_w \\ -0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

Bottom flange

$$\omega = -y(z + d - t_f) \quad \text{for} \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ -0.5d \leq z \leq -0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

	$d = 1.498$	$d = 1.022$
斷面參數	$b = 1.5565$	$b = 1.008$
(mm)	$t_f = 0.119$	$t_f = 0.068$
	$t_w = 0.0745$	$t_w = 0.037$
$I_y (mm^4)$	0.186415	0.0333888
$I_z (mm^4)$	0.0748330	0.0116113
$J (mm^4)$	0.00192106	0.000226258
$A (mm^2)$	0.463646	0.169870
$I_4 (mm^6)$	0.183200	0.0144823
$I_\omega (mm^6)$	0.0352681	0.00264917
$\Omega_{yz} (mm^6)$	0.0350107	0.00263682
γ	0.401433	0.347759
β	98.6178	129.921

$$E = 57 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, \quad G = 20 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}, \quad \beta = \frac{EI_{\min}}{GJ}$$