

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

發展微觀黏著-滑動模型

以探討奈米碳管複合材料之阻尼性質

Development of Micromechanical Stick-slip Model to Characterize
the Damping Behaviors of Carbon Nanotube Composites

研究生：劉少淇

指導教授：蔡佳霖 博士

中華民國一百零一年八月

發展微觀黏著-滑動模型以探討奈米碳管複合材料之阻尼性質

Development of Micromechanical Stick-slip Model to Characterize the
Damping Behaviors of Carbon Nanotube Composites

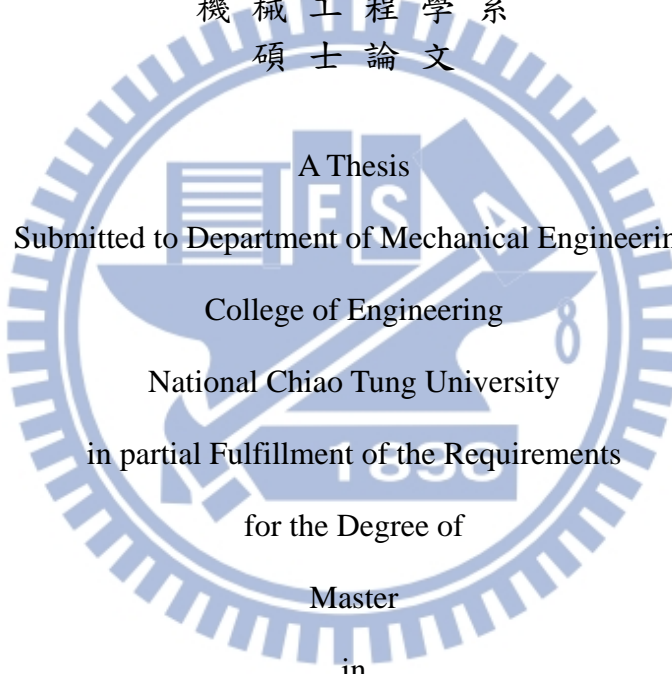
研 究 生：劉少淇

Student：Shou-Chi Liu

指導教授：蔡佳霖

Advisor：Jia-Lin Tsai

國立交通大學
機械工程學系
碩士論文

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem with a gear-like outer border. Inside the circle, there is a stylized building and the year '1896'. The text 'A Thesis' is positioned above the emblem, and 'Submitted to Department of Mechanical Engineering' is written across the middle. Below the emblem, the text 'College of Engineering' and 'National Chiao Tung University' are centered. Further down, it says 'in partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master in'.

Mechanical Engineering

August 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 百 零 一 年 八 月

發展微觀黏著-滑動模型 以探討奈米碳管複合材料之阻尼性質

學生：劉少淇

指導教授：蔡佳霖

國立交通大學機械工程系碩士班

摘 要

本研究主要目的為發展微觀黏著-滑動模型以探討奈米碳管複合材料 (Carbon nanotube composite) 之振動阻尼性質。在解析模型中，藉由考慮奈米碳管與周圍基材產生滑動摩擦之現象來描述複合材料能量消散機制。此外，在本研究中亦探討奈米碳管長徑比、界面間之鏈結強度以及摩擦力對複合材料阻尼行為的影響。根據過去的研究指出，複合材料會因施加之循環負載量改變使阻尼行為也隨之改變，故探討施加之循環負載量對複合材料阻尼性質之影響亦為本研究之重點。

除了發展微觀力學模型之外，本研究也利用有限元素分析來驗證解析模型預測之正確性。為了模擬奈米碳管複合材料接觸摩擦行為，建立有限元素模型並在碳管與周圍基材間鋪設接觸元素。此外，透過比較界面間的剪切應力與界面強度的步驟，來估計複合材料中因施加载重產生之碳管滑移長度。其後，解析模型結果將會與有限元素模型進行驗證與比較。此外，解析模型結果亦與文獻中之實驗數據進行比較與討論。

Development of Micromechanical Stick-slip Model to Characterize the Damping Behaviors of Carbon Nanotube Composites

Student : Shou-Chi Liu

Advisor : Jia-Lin Tsai

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

This research aims to develop a micromechanical stick-slip model to investigate the damping property of carbon nanotube composites. By considering the slip-friction behavior between the CNTs and surround matrix, the energy dissipation mechanism in the composites was characterized in the analytical model. In addition, the effect of aspect ratio of CNTs, interfacial bonding strength, and interfacial friction on the damping behavior of composites were also accounted for in the study. It is noted that the amount of applied cyclic loading on the composites is also an essential factor on the damping behavior, which was also included in the investigation.

In addition to the development of micromechanical model, the corresponding finite element analysis was employed to validate the accuracy of the model predictions. A cylindrical FEM model with embedded contract element on the interface between the CNTs and surrounding matrix was created to simulate the contact friction behavior of the CNTs composites. Furthermore, the slip length of the CNTs in the composites in terms of the applied loading was evaluated by comparing the interfacial stress to the interfacial strength through

the iteration process. The analytical results and finite element results were then compared with each other. Moreover, the experimental data was also included in the model prediction.



誌謝

在交大兩年的碩士的生活，承蒙指導教授 蔡佳霖博士於學生碩士班求學期間不遺餘力的用心指導，使我無論在學術面的精進或是對於研究精神的建立，都有相當大的幫助。此外，感謝世華學長、政文學長、菁穗學姐在我初入實驗室時的帶領，並感謝所有實驗室伙伴能夠在少淇需要幫助時候，給予支持以及幫助，最後特別感謝嵩群、彥錕一路上的互相扶持及陪伴。

在此，要特別感謝我的家人，對我百般包容以及支持，使少淇在碩士班求學期間能夠無後顧之憂專心在學業上，謝謝外婆總是在我回家的時候，給我最多的疼愛以及鼓勵，少淇永遠謹記在心。最後，感謝佩綺在我最艱難的時候，給我鼓勵以及陪伴。

如今學生生涯告一段落，感謝一路使我成長茁壯的人，謝謝你們。

劉少淇 謹識于

新竹

中華民國 101 年 8 月

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iv
目錄	v
表目錄	vii
圖目錄	viii
第一章 序論	1
1.1 研究動機	1
1.2 研究背景與文獻回顧	1
1.3 研究目標與方法	10
第二章 微觀力學模型	12
2.1 模型介紹	12
2.2 模型建立方法	13
2.3 碳管上應力、剪應力與基材上之應力	14
2.4 損失因子(Loss factor)計算方法	25
第三章 以有限元素法模擬受拉伸之奈米碳管複合材料	34
3.1 奈米碳管複合材料之有限元素模型	34

3.2 損失因子計算方法.....	37
第四章 結果與討論.....	42
4.1 有限元素模型驗證.....	42
4.2 解析模型與有限元素模型比較.....	45
4.3 解析模型參數影響.....	47
4.4 解析模型與文獻結果之比較.....	50
第五章 結論與未來展望.....	58
5.1 結論.....	58
5.2 未來展望.....	59
參考文獻.....	61
附錄.....	65
附錄 1 第一階段碳管應力推導.....	65
附錄 2 已滑開區域徑向正向力推導.....	68
附錄 3 第二階段 C 區碳管應力推導.....	70
附錄 4 已滑開區域長度計算程式碼.....	72
附錄 5 複合材料損失因子計算程式碼.....	76
附表.....	88
附圖.....	96

表目錄

表 4.1 材料參數列表 1.....	88
表 4.2 界面剪切強度列表.....	89
表 4.3 基材與碳管交界面之剪切應力((a)Model 1 (b)Model 2 (c)Model 3)..<	90
表 4.4 已滑開碳管壁上之平均剪切應力收斂性測試結果.....	91
表 4.5 損失因子收斂性測試結果.....	91
表 4.6 平均徑向之正向應力與施加外應力關係((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)	92
表 4.7 參數列表 2[1]	93
表 4.8 材料參數列表 3[5]	93
表 4.9 材料參數列表 4[4]	94
表 4.10 材料參數列表 5[18].....	94
表 4.11 材料參數列表 6[26].....	95

圖目錄

圖 2.1 Liu[18]模型碳管束與套筒示意圖	96
圖 2.2 Liu[18]模型受均佈拉應力作用	96
圖 2.3 模型受均佈拉應力作用	97
圖 2.4 第一階段整體複合材料示意圖	97
圖 2.5 整體複合材料自由體圖	98
圖 2.6 奈米碳管力平衡示意圖	98
圖 2.7 第二階段整體複合材料示意圖	99
圖 2.8 第二階段B區域碳管自由體圖	99
圖 2.9 複合材料之自由體圖	100
圖 2.10 波松效應與界面間之正向力示意圖	100
圖 3.1 八分之一複材模型	101
圖 3.2 複材模型截面之網格	101
圖 3.3 邊界條件示意圖((a)模型下視圖 (b)模型側視圖)	102
圖 3.4 基材與碳管界面尚未破壞之半模型	103
圖 3.5 基材與碳管界面發生部份破壞之半模型	103
圖 3.6 有限元素模型建立流程圖	104
圖 3.7 將高斯積分點結果複製至節點上	104

圖 3.8 碳管與基材交界面最上緣元素示意圖.....	105
圖 3.9 未滑開碳管與基材交界面最上緣元素示意圖.....	105
圖 3.10 元素鋪設示意圖.....	106
圖 3.11 碳管與基材邊界滑動.....	106
圖 3.12 已滑開碳管最外層元素示意圖.....	107
圖 4.1 碳管上緣之網格((a) model 1 (b) model 2 (c) model 3)	108
圖 4.2 已破壞區域與鏈結區域交界處之網格((a) model 1 (b) model 2 (c) model 3).....	109
圖 4.3 已滑開碳管壁上之平均剪力-基材與碳管相對位移量之關係圖	110
圖 4.4 外應力與已滑開碳管長度關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$).....	111
圖 4.5 外應力與相對滑動長度關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$).....	112
圖 4.6 外應力與滑開區域碳管壁上之總剪力關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$).....	113
圖 4.7 當外應力為 35MPa 時，碳管壁上剪切應力在已滑開碳管區域分佈圖 ((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$).....	114
圖 4.8 已滑開碳管區域剪切應力分佈圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$).....	116
圖 4.9 外應力與滑動所消耗之能量關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$).....	117
圖 4.10 外應力與整體複材之總應變能關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)	118
圖 4.11 比較因滑動所產生之損失因子以及基材材料之損失因子.....	119
圖 4.12 外應力與整體複材之阻尼損失因子關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)	120

圖 4. 13 碳管長度與損失因子關係圖	121
圖 4. 14 複材幾何隨體積比改變示意圖((a)複材隨體積比改變基材突出厚度 (b)複材隨體積比改變基材半徑).....	122
圖 4. 15 碳管體積比與損失因子關係圖	123
圖 4. 16 已滑開界面摩擦係數與損失因子關係圖	123
圖 4. 17 基材與碳管界面鏈結強度與損失因子關係圖	124
圖 4. 18 計算複材等效楊式模數((a)將 B 區域等效為一均質材料(b)將 A、B 區域等效為一均質材料)	125
圖 4. 19 解析模型與文獻實驗[1]比較結果	126
圖 4. 20 解析模型與文獻實驗[5]比較結果	126
圖 4. 21 解析模型與文獻實驗及模擬[4]比較結果	127
圖 4. 22 解析模型與文獻解析模型[18]比較結果	127
圖 4. 23 解析模型與文獻解析模型[26]比較結果	128
圖 4. 24 解析模型相對位移量與碳管長徑比關係圖	128
圖 A. 1 厚壁筒受內外壓示意圖	129

第一章 序論

1.1 研究動機

複合材料(Composites)具有高度剛性、高強度、質量輕、耐高溫、抗腐蝕等特性，近年來備受重視，並且在許多方面更替了傳統的金屬或是陶瓷材料，已被廣泛地運用於不同工程領域上如航太工業、汽車工業、電子封裝及運動用品等。而許多補強材料(Reinforcement)與高分子基材(Polymer matrix)的組合已陸續被研發以及應用，近十年來，由於奈米科技的蓬勃發展，各種材料皆以奈米尺寸為目標，藉由分散技術將奈米尺寸的補強材料散佈於基材中，此類材料被稱之為奈米複合材料(Nanocomposites)。高分子複合材料中具有高阻尼(High damping)性能的基材以及異質的補強材料來消耗振動中的能量，而常見的奈米補強材料有球狀的(Spherical)奈米粉體、板狀(Platelet)的石墨以及管狀(Tube)的碳管等，藉由奈米補強材料的添加，可使基材在物理性質以及化學性質上有明顯的增益，此類材料已成為學術界、工業界熱門的研究發展方向。

1.2 研究背景與文獻回顧

在過去研究奈米碳管複合材料阻尼性質(Damping behavior)之文獻中 [1-7]，藉由拉伸試驗(Tensile test)、拉伸壓縮試驗(Tension and compression test)、自由振動試驗(Free vibration test) 以及外力振動試驗(Force vibration

test)，量測複合材料之儲存模數 E' (Storage modulus)、損失模數 E'' (Loss modulus)以及損失因子(Loss factor)，並探討在頻率及應變量等因素改變之下，奈米碳管複合材料之阻尼性質變化。此外，動態黏彈機械分析(Dynamic mechanical analysis, DMA)也常被應用至量測阻尼性質[8-17]，並探討在溫度、頻率及應變量等不同機制改變下，複合材料的阻尼性質之變化。在文獻回顧中，著重在加入奈米纖維或管狀補強材料後對阻尼性質的影響，首先回顧對複合材料改變應變量之實驗文獻，接著說明對複合材料改變溫度之實驗文獻，最後介紹關於奈米碳管複材之模擬文獻。

Suhr等人[1]在聚碳酸酯(Polycarbonate)基材中加入1.5wt%單壁奈米碳管，在拉伸範圍為1.2%之下進行動態黏彈機械分析，發現隨著試片拉伸之應變量增加，純樹脂之損失模數並不改變，但奈米碳管複合材料之損失模數上升，最大值時約為原本之3倍。

Dai和Liao[2]在樹脂基材中加入奈米碳管，在不同剪應變量下進行動態黏彈機械分析，發現奈米碳管複合材料隨著剪應變量增加，純樹脂損失因子改變量並不大，但奈米碳管複材隨之上升，在複材達到最大值之剪應變量下，提高為純樹脂之20倍，其後當應變量繼續上升，損失因子反而下降產生明顯之峰值。

Ogasawara等人[3]在聚醚醚酮(Poly-ether-ether-ketone, PEEK)中加入多壁奈米碳管，在室溫下進行懸臂樑振動試驗(Cantilever beam vibration test)，

發現隨著多壁奈米碳管的含量增加至15%，損失模數在最大值時比起純樹脂增加約1.2倍。此外，控制應變量範圍在0.5%內，隨著振幅增加，當試片上下緣之應變量提升，複材損失模數之最大值為初始值之3.5倍。

Zhou等人[4]在環氧樹脂中加入了單壁奈米碳管，在室溫下進行懸壁樑振動試驗，發現隨著振動的振幅增加，阻尼比(Damping ratio)也隨之增加，其最大值提升至6.5倍，其後振幅繼續增加，但阻尼比反而下降產生明顯之峰值。並且也發現阻尼性質會隨著單壁奈米碳管的含量提升，在碳管含量為1wt%的複合材料中，其阻尼比最大值較碳管含量為0.5wt%之複合材料高出2倍。

Koratkar等人[5]在雙酚A-聚碳酸酯(Bisphenol-A-polycarbonate)中加入了未改質以及氧化(Oxidized)改質之單壁奈米碳管，在室溫下進行動態黏彈機械分析，發現加入2wt%之改質碳管時，整體複材的損失模數最高，其最大值分別高出加入1wt%之改質碳管、1wt%之未改質碳管以及純樹脂2.3倍、4倍以及11.5倍。此外，控制應變量範圍在1.2%內，加入2wt%之改質碳管複合材料，隨著拉伸應變量的增加，損失模數隨之上升，其最大值比起未拉伸之複合材料增加至11倍。

Khan等人[6]在環氧樹脂中加入0.5%以及1%之多壁奈米碳管，在室溫下振幅在10mm至40mm之間進行懸壁樑振動試驗，隨著振幅上升，阻尼比也隨之上升，其最大值提升至初始之1.2倍，此外，當最大振幅固定在40mm

時，加入1%奈米碳管之複合材料其阻尼比，約為加入0.5%碳管之複合材料以及純樹脂的1.3倍以及1.5倍。

由以上文獻發現，奈米碳管複合材料會因受力變形後，應變量增加而產生更好之阻尼性質。Rajoria和Jalili[7]使用黏著滑動 (Stick-slip) 理論來對碳管複合材料其阻尼性質隨拉伸應變大幅增加的現象加以解釋，其中增加的阻尼性質來自於奈米碳管與基材的交界面因應變量增加所產生的滑動現象以及界面之間的剪切應力消耗了更多的能量所造成。此外，當奈米碳管與基材間的鏈結若越弱時，受到相同外力作用時會產生更大的相對滑動距離，進而消耗更多的能量，所以能得到更好的阻尼性質。當碳管與基材間的鏈結較強時，滑動需要更大的剪切應力，所以改質後的碳管複合材料若有足夠的外力作用之下，可以得到更好的阻尼性質。

Ramanathan 等人[8]在聚甲基丙烯酸甲酯 (Poly-methyl methacrylate, PMMA) 中加入1wt%已改質以及未改質的單壁奈米碳管 (Single-walled carbon nanotube, SWNT)，在室溫至170°C的範圍內進行動態黏彈機械分析，發現隨著溫度增加，純樹脂試片、已改質以及未改質之單壁奈米碳管複合材料之損失因子快速上升，至玻璃轉換溫度 (Glass transformation temperature) 時達到最高點，均約為純樹脂室溫時的10倍。

Mitchell 等人[9]在聚甲基丙烯酸甲酯中加入0.014wt%的單壁奈米碳管，在-150°C~100°C的溫度範圍內進行動態黏彈機械分析，隨著溫度的增加，損

失因子上升至3倍，且加入碳管後之損失因子比起純樹脂高出1.2倍。

Fisher等人[10]在聚碳酸脂中加入含量為1wt%以及2wt%之多壁奈米碳管(Multi-walled carbon nanotube, MWCNT)，在室溫至180°C的溫度範圍內進行動態黏彈機械分析，發現隨著溫度增加，損失模數上升約15倍，另外也發現，在溫度約為70°C時，含量為1wt%之複合材料其損失模數約為純樹脂的2倍。

Jang等人[11]在環氧樹脂(Epoxy)中，添加奈米級碳纖維(Carbon nanofiber, CNF)與微米級二氧化矽(Silicon dioxide, SiO₂)球型顆粒，奈米級碳纖維半徑及長度尺寸分別界於200-500nm及10-40μm之間，球型顆粒半徑約等於12μm。在-50°C~130°C之間進行動態黏彈機械分析，發現隨著補強材料含量增加能提升複合材料的阻尼性質，在室溫下添加物含量為3wt%(Weight fraction)的二氧化矽與3wt%的碳纖維時，與純環氧樹脂相較下提高阻尼損失因子高達15.6%，並且得到加入管狀的補強材普遍可以得到比加入球狀顆粒

□-ong等人[12]在聚合物(Polymer)基材中加入

Gong等人[12]在聚合物(Polymer)基材中加入1wt%之奈米碳管，並在-60°C~100°C間進行動態黏彈機械分析，發現奈米碳管複合材料之玻璃轉換溫度從63°C大幅提升至88°C，並且損失因子比起純樹脂高出1.6倍。

Thostenson和Chou[13]在聚苯乙烯(Polystyrene)中加入5wt%多壁奈米碳管，並利用擠壓的技術將奈米碳管在基材中排列成軸向(Aligned)，與隨機分

散的奈米碳管複合材料在0~120°C間，進行拉伸動態黏彈機械分析。發現隨著溫度上升，損失模數上升至6倍。

Gojny和Schulte[14]在樹脂中加入了0.05~0.75wt%之多壁奈米碳管，在-120°C~160°C之間進行動態機械熱分析(Dynamic-mechanic thermal analysis, DMTA)，並比較氨基改質以及無改質之多壁奈米碳管複合材料之差異。發現隨著溫度上升，損失模數上升，此外隨著含量增加，損失模數也會跟著上升，分別在無改質碳管含量為0.25wt%以及改質碳管含量為0.1wt%時損失的能量為最大，均約為純樹脂之8.5倍。

Ramamurthy等人[15]在聚苯胺(Polyaniline, PANI)基材中加入多壁奈米碳管，在100°C~250°C之間進行動態機械熱分析，發現溫度上升以及含量提升，在含量為1wt%時損失因子達到最大，約為室溫時的20倍以及同溫度時純樹脂之1.8倍。

Xiong等人[16]在聚氨酯(Polyurethane, PU)基材中加入多壁奈米碳管，在-100°C~50°C之間進行動態機械熱分析，發現在多壁奈米碳管含量為2wt%時，損失因子高出純樹脂約10倍，且玻璃轉換溫度由-5.4°C提升至6.2°C。

Ma等人[17]在環氧樹脂中加入硅酮(Silane)改質多壁奈米碳管以及未改質之多壁奈米碳管，在室溫至170°C進行動態黏彈機械分析，發現隨著溫度的提升，整體複合材料之損失因子也隨之提升，在到達玻璃轉換溫度時，在加入0.5%之未改質碳管時，有最好的阻尼性質，約為室溫時之20倍。另

外發現加了0.5%未改質碳管比起加入0.05%之改質碳管的阻尼性質高出1.5倍。

由以上文獻皆可以發現在玻璃轉換溫度時，複合材料會因基材間的流動性提高，而損失更多的能量，損失模數因此而快速升高，產生更好的阻尼性質，且加入奈米碳管後，在玻璃轉換溫度時，整體複合材料之阻尼性質也比純樹脂來得略高。比較兩部份之實驗文獻，發現奈米碳管複合材料若施加外力，使碳管與基材間產生摩擦現象，複合材料之阻尼性質對比於純樹脂基材將呈倍數成長，但相較之下，若是在溫度改變之下，碳管複合材料比起純樹脂所提升的阻尼性質並不會太大。

在阻尼性質的研究上，除了動態黏彈機械分析以及各種試驗方法外，也有許多研究使用解析模型(Analytic solution)以及數值分析(Numerical analysis)方法來預測複合材料的阻尼性質[4, 18-26]。

在Zhou等人[4]的研究中，利用解析模型將碳管滑動所消耗的能量等效為一損失因子，將此損失因子當成已滑動碳管之材料性質，並與未滑動之碳管兩種材料添加至樹脂基材中，利用Mori-Tanaka模型計算整體複合材料之阻尼損失因子，發現當已滑動碳管所佔體積比提升，整體複合材料之阻尼性質也大幅度的提升。

Liu等人[18]在環氧樹脂中加入改質單壁奈米碳管束，並利用黏著-滑動的概念建立微觀力學模型，考慮內碳管與外層碳管之間以及外層碳管與基

材間的摩擦行為，討論施加外應力對阻尼性質之影響。發現加入碳管束之後的複合材料隨著拉伸應力增加，其損失因子提升6倍。並比較碳管軸向排列以及隨機排列的複合材料，發現軸向排列之奈米碳管複合材料，其阻尼性質約為隨機排列之奈米碳管複合材料之2倍。

Dunn[19]為了預測複合材料在各種形狀之補強材料隨機分佈下的阻尼性質，利用Mori-Tanaka之模型，針對球狀、板狀以及管狀補強材料進行模擬，並透過計算複合材料之儲存模數以及損失模數，探討阻尼性質的改變，其研究發現在補強材形狀為扁狀圓板時，阻尼性質最佳。

Brinson和Lin[20]針對以軟硬兩種材料製成之複合材料，以Mori-Tanaka模型以及有限元素(Finite element, FEM)模型來探討其阻尼性質隨振動頻率改變之影響，發現微觀力學模型與有限元素模型可以得到相同趨勢。並且討論當軟硬兩種材料之體積比改變，其儲存模數隨之變化，當較軟之材料體積比較高時，儲存模數較低，反之當較硬之材料體積比較高時，能得到較高之儲存模數。

Fisher和Brinson[21]在針對以三相材料(Three-phase)製成的複合材料之阻尼性質研究中，比較Mori-Tanaka模型與Benveniste模型[22]及有限元素模型之模擬結果，研究振動頻率對損失模數的影響，並且令補強材料性質維持不變，使用一軟一硬的黏彈材料當作基材以及交界面(Interface)。發現在基材的材料性質與補強材料相比為較軟時，兩數值模型的預測結果與有限

元素法模型的預測結果相當接近，若是交界面材料為最軟的情況之下，則準確度便出現分歧，並以Mori-Tanaka模型較為有效。

Finegan和Tibbetts[23]在聚丙烯(Polypropylene)中加入單向排列的氣相奈米碳纖維(Vapor grown carbon nanofiber)，並使用Halpin-Tsai微觀力學模型進行預測並且與動態黏彈機械分析結果進行比較。發現隨著碳管的體積比增加，儲存模數會隨之上升，此結果預測值與實驗值相當接近，但其整體複材之損失因子，卻隨體積比增加而下降，當長徑比(Aspect ratio)較大時，其下降幅度更大，換句話說，添加了短纖維之複材其阻尼性質較添加了長纖維來得好。

Liu和Brinson[24]在聚甲基丙烯酸甲酯中加入單壁奈米碳管，並綜合有限元素法以及Mori-Tanaka模型分析複合材料之阻尼性質，其模型包括樹脂基材、奈米碳管以及包覆著碳管之黏彈界面層三種材料，界面層之材料性質與基材相似，但其擁有更好的阻尼性質。研究發現當振動頻率增高以及溫度提升，會使界面層與基材流動性提升，對複合材料阻尼性質有相當大的影響，使得奈米碳管複合材料比起純樹脂擁有更好之阻尼性質。

Friebel等人[25]在多相材料的阻尼性質研究中，利用Mori-Tanaka模型將兩種材料等效為一複合材料，並預測其阻尼性質後，將此等效材料加入樹脂基材中，並分別使用Mori-Tanaka模型以及Voigt模型進行預測其整體複合材料之阻尼性質，並利用有限元素模型為基準進行比較。發現複合材料的

阻尼性質的確會因加入補強材料而得到改善，但是此兩步驟的預測方法，無法有效區分多相複合材料是數種材料混合而成或是添加物上有不同材料之界面層，導致預測結果與有限元素比較出現較大的誤差。

Dwaikat等人[26]在奈米碳管複合材料之阻尼性質研究上，利用經驗公式假設碳管與基材受到拉伸後所產生之相對位移量，並依據黏著-滑動之概念，發展微觀力學模型進行阻尼性質的預測。發現在固定的拉伸外力之下，隨著奈米碳管長徑比增加，阻尼損失因子會隨之上升，一旦長徑比過大，固定的拉伸外力所提供之能量不足以使碳管與基材間產生破壞，奈米碳管與基材間相對滑動之位移量減少，阻尼損失因子反而下降。

1.3 研究目標與方法

本研究主要目標為探討複合材料之阻尼性質隨拉伸外力改變之變化，並針對補強材含量、碳管長度、碳管與基材間之摩擦力以及鏈結強度等等因素，對複合材料阻尼性質的影響進行探討。並且經由複合材料中能量的消耗及應變能之變化，了解碳管與基材摩擦之力學現象以及其含義。

為了研究奈米碳管複合材料之阻尼性質，本研究利用微觀力學模型進行模擬，從複合材料各部份之應力計算，延伸至能量消耗以及應變能的預估，著重在奈米碳管與基材界面的摩擦現象對阻尼性質的影響，模型理論將會在第二章做詳細的描述與推導。為了驗證解析模型，進而在第三章中

建立有限元素模型與第二章之解析模型進行比較。第四章中，將針對有限元素模型驗證、有限元素模型與解析模型之比較、解析模型中各參數之影響、文獻之實驗結果與解析模型之比較以及文獻之微觀力學模型與解析模型之比較等部份加以討論，並說明其中的力學現象及之間的差異。

最後，在第五章將對所有的結果做概括性的總結，以及說明未來之研究方向以及需要繼續完成之工作。



第二章 微觀力學模型

在第一章中，回顧過去奈米碳管複合材料阻尼性質的研究，就先前的研究中可以歸納出，主要能量的消耗來自於基材本身的阻尼性質以及碳管與基材之間的摩擦。因此本研究在第二章建立解析模型，由能量的觀點計算奈米碳管複合材料之阻尼性質，其中著重在碳管對基材間摩擦所消耗的能量對整體複合材料阻尼性質的影響。

2.1 模型介紹

在過去的研究中[4, 18, 27-29]，為了研究施加外力與奈米碳管複合材料阻尼性質的關係，根據黏著滑動(Stick-slip)理論[30]，探討碳管與基材間所產生之摩擦現象，隨著外力逐漸增加將其模型分成數個階段進行討論。其模型在基材中加入碳管束如圖 2.1 所示，施加均勻拉伸應力於基材上如圖 2.2 所示。隨著拉伸應力逐漸增加，假設碳管與基材之間鏈結破壞之區域與拉伸應力成正比增加，並假設在此區域內之碳管，其上的剪應力與拉伸方向應力都保持定值。其後計算碳管與基材之間滑動所消耗的能量，進而得到整體複合材料之損失因子。而本章介紹的模型是根據以上的研究進行公式推導，將單根奈米碳管放入基材中如圖 2.3 所示，推導施加外力對奈米碳管複合材料阻尼性質的影響。在過去的研究中，假設基材之正向應力在徑向上皆為定值，其大小等於同斷面上碳管外緣之正向應力，且在碳管上之剪應力大小皆為碳管外緣之剪應力，此二假設在本研究中，為了更符合實

際情況，將根據 Tsai 和 Lu[31]在奈米碳管複合材料之分析，將沿半徑方向之基材應力表示為二次曲線分佈。此外，在過去的研究中，推導碳管與基材在已滑動區域的應力時，是藉由鏈結尚未破壞之公式進而計算其平均值，在本研究中認為此方式有所失真，故在此考慮碳管與基材間之鏈結已遭受外力破壞，進而推導界面間應力之分佈。此外，為了計算碳管與基材界面間的正向力，將模型考慮為厚壁圓筒，並利用彈性力學[32]之厚壁筒受內外壓之變形公式進行推導。

2.2 模型建立方法

此模型建立是將單根奈米碳管放入基材中，並假設碳管與基材皆為連續體，碳管形狀為實心圓柱如圖 2.3 所示，則碳管體積 V_t 與基材體積 V_m 分別表示為：

$$V_t = \pi r_t^2 L_t \quad (2.2.1)$$

$$V_m = \pi r_o^2 L - \pi r_i^2 L_t \quad (2.2.2)$$

其中， r_t 為奈米碳管半徑， L_t 為碳管的長度， r_o 、 r_i 及 L 分別為基材區域的外半徑、內半徑及長度，且 $r_i = r_t$ 。碳管在基材中為軸向排列。在碳管上下緣斷面與基材並無鏈結，換句話說，碳管上之應力完全由基材與碳管表

面之作用力所傳遞。在此假設碳管上之正向應力為均勻分佈，在基材區域之剪應力由碳管壁呈線性分佈至基材外側為零。而碳管上剪應力因其值相當微小，故只考慮碳管壁上之剪切應力。

2.3 碳管上應力、剪應力與基材上之應力

整體複合材料因受到外力拉伸，碳管與基材將會產生變形，隨著外力逐漸增加，可將其分成二個階段來做說明。第一階段為碳管與基材之間的鏈結尚未發生破壞，其擁有相同之拉伸應變量。第二階段為碳管與基材之間的鏈結由碳管上下緣處發生破壞，而隨著外力上升，破壞之界面區域逐漸延展並且產生相對的滑動。因模型之對稱性，故在此分析中只取一半之模型(half model)進行分析。

2.3.1 第一階段 碳管與基材尚未發生滑動

在第一階段中，將模型分成上部之基材以及與碳管同高度兩個區域考慮其應力狀況，如圖 2.4 所示。在 A 區之正向應力 σ_m^A 可以表示為：

$$\sigma_m^A = \sigma \quad (2.3.1)$$

其中， σ 為施加在複材上緣平面之均佈拉伸應力。在 B 區域中，由於基材區域剪應力隨半徑 r 由碳管壁上之剪應力線性下降至基材外緣為零，則可將基材區域剪應力 τ_m^B 表示為：

$$\tau_m^B = \frac{\tau_i^B (b + r_i - r)}{b} \quad (2.3.2)$$

其中， τ_i^B 為碳管壁上之剪應力， $b = r_o - r_i$ ， r 的範圍介於 r_o 與 r_i 之間。基材區域剪應力也可表示為剪力模數(Shear modulus)與剪應變乘積，再由軸方向位移與剪應變關係代換之後，可表示為：

$$\tau_m^B = G_m \gamma_m^B = G_m \frac{dw_m^B}{dr} \quad (2.3.3)$$

其中， G_m 與 γ_m^B 分別為基材之剪力模數以及剪應變， w_m^B 為基材 z 方向之位移。由方程式(2.3.2)與方程式(2.3.3)聯立後對基材區域之 r 方向積分，則將碳管壁上剪應力 τ_i^B 表示為：

$$\tau_i^B = \frac{2}{b} G_m (w_o^B - w_i^B) \quad (2.3.4)$$

其中 w_o^B 、 w_i^B 分別為基材外緣處 ($r = r_o$) 之 z 方向位移以及基材內緣處 ($r = r_i$) 之 z 方向位移。將方程式(2.3.4)代入方程式(2.3.2)：

$$\tau_m^B = \frac{2G_m}{b^2} (r_o - r)(w_o^B - w_i^B) \quad (2.3.5)$$

由方程式(2.3.3)與方程式(2.3.5)聯立後對基材區域之 r 方向積分，則可以將基材區域 z 方向之位移 w_m^B 表示為：

$$w_m^B = w_i^B + \frac{1}{b^2}[-2br_i - r_i^2 + 2r_o r - r^2](w_o^B - w_i^B) \quad (2.3.6)$$

又將方程式(2.3.6)對 z 方向進行一次微分後，方程式等號左右各乘上基材之楊氏係數 E_m ，則可以得到基材區域之應力 σ_m^B ：

$$\sigma_m^B = \sigma_i^B + \frac{1}{b^2}[-2br_i - r_i^2 + 2r_o r - r^2](\sigma_o^B - \sigma_i^B) \quad (2.3.7)$$

其中， σ_o^B 及 σ_i^B 分別為基材外緣處 ($r = r_o$) 之拉伸應力以及基材內緣處 ($r = r_i$) 之拉伸應力。基材區域又因為在碳管與基材之交界面處有相同之應變量，則藉由應力應變關係可以將基材最內緣之應力 σ_i^B 表示為：

$$\sigma_i^B = \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^B \quad (2.3.8)$$

其中， σ_t^B 為碳管之拉伸應力， E_t 及 E_m 分別為碳管及基材之楊氏模數。其後將方程式(2.3.8)代入方程式(2.3.7)後得到：

$$\sigma_m^B = \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^B + \frac{1}{b^2} [-2br_i - r_i^2 + 2r_o r - r^2] (\sigma_o^B - \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^B) \quad (2.3.9)$$

因方程式(2.3.9)中， σ_o^B 仍為未知函數，藉由整體複合材料之自由體圖(Free body diagram)，如圖 2.5 所示，可以列出平衡方程式：

$$\pi r_i^2 \sigma_t^B + \int_{r_i}^{r_o} \int_0^{2\pi} \sigma_m^B r d\theta dr = \sigma_o^B \pi r_o^2 \quad (2.3.10)$$

將方程式(2.3.9)代入方程式(2.3.10)，則可將基材最外緣應力 σ_o^B 表示為：

$$\sigma_o^B(z) = \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^B + \frac{6}{8br_i + 5b^2} [\sigma_o^B r_o^2 - \sigma_t^B r_i^2 - \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^B (b^2 + 2br_i)] \quad (2.3.11)$$

又由奈米碳管之自由體圖如圖 2.6 所示，列出碳管應力與剪應力之平衡方程式：

$$(\sigma_t^B + d\sigma_t^B - \sigma_t^B) \times \pi r_i^2 + 2\pi r_i dz \tau_t^B = 0 \quad (2.3.12)$$

經過移項整理後得到：

$$\frac{d\sigma_t^B}{dz} + \frac{2\tau_t^B}{r_i} = 0 \quad (2.3.13)$$

且在此複合材料中，假設碳管所受到的力完全由基材與碳管壁間之作用力傳遞，碳管並沒有直接受到外應力作用，則可以列出邊界條件：

$$\sigma_t(z = \pm \frac{L_t}{2}) = 0 \quad (2.3.14)$$

$$\tau_t(z = 0) = 0 \quad (2.3.15)$$

為了求解第一階段 B 區的碳管應力 σ_t^B 及剪應力 τ_t^B ，由方程式(2.3.4)、(2.3.8)、(2.3.11)、(2.3.13)以及邊界條件 (2.3.14)、(2.3.15)進行推導，詳細內容見附錄 1，則碳管上應應力 σ_t^B 及剪應力 τ_t^B 可表示為：

$$\sigma_t^B = \frac{k_2}{k_1} \cdot \sigma \cdot \left[1 - \frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda L_t / 2)} \right] \quad (2.3.16)$$

$$\tau_t^B = c_1 \cdot \sigma \cdot \left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda L_t / 2)} \right] \quad (2.3.17)$$

其中

$$\lambda^2 = 12 \left[\frac{k_1}{r_t(8b^2 r_t + 5b^3)(1 + \nu_m)} \right] \quad (2.3.18)$$

$$c_1 = \frac{r_i \lambda k_2}{r_i^2 + k_1} \quad (2.3.19)$$

$$k_1 = r_i^2 + \frac{E_m}{E_i} (b^2 + 2br_i) \quad (2.3.20)$$

$$k_2 = r_o^2 \quad (2.3.21)$$

其中， ν_m 為基材之柏松比。此外，由碳管之拉伸應力 σ_i^B 代回方程式(2.3.11)，再將基材外緣處之拉伸應力 σ_o^B 與碳管之拉伸應力 σ_i^B 代回方程式(2.3.9)，便可以得到基材區域拉伸應力之分佈 σ_m^B 。其後，將碳管之剪切應力 τ_i^B 代入方程式(2.3.2)，可以得到基材區域之剪應力分佈 τ_m^B 。

2.3.2 第二階段 碳管與基材開始滑動

當碳管所受到最大剪應力在碳管上下緣處 ($z = \pm \frac{L_t}{2}$) 到達破壞剪切應力

τ_c 時碳管開始滑動，由方程式(2.3.17)碳管上之剪切應力到達 τ_c 得到：

$$\tau_c = c_1 \cdot \sigma_c \left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda L_t / 2)} \right] \quad (2.3.22)$$

此時所施加的外應力 σ_c 經由方程式(2.3.22)移項後可以表示為：

$$\sigma_c = \frac{\tau_c}{c_1 \tanh(\lambda L_t / 2)} \quad (2.3.23)$$

換句話說當施加應力到達 σ_c 時，第一階段結束進入第二階段，則在此階段可將複合材料分成上方之純基材區域、碳管與基材界面發生破壞滑動之區域以及碳管與基材界面尚未發生破壞之區域三個部份加以考慮，如圖 2.7 所示。並定義因外力所造成之界面破壞長度為 L_{slip} ，基材與碳管仍保持鏈結之長度為 L_{stick} ，且 $L_{slip} + L_{stick} = L_t$ ，而其計算方式在其後詳述。與第一階段相似，在第二階段 A 區之正向應力 σ_m^A 可以由方程式(2.3.1)得到。又在 B 區域中，因碳管與基材已無鏈結存在，故碳管與基材界面之摩擦力 τ_t^B 可以表示為：

$$\tau_t^B = \mu_0 p \quad (2.3.24)$$

μ_0 、 p 分別為界面間的摩擦係數以及徑向之正向力，在此假設在外力固定下，碳管與基材界面之摩擦力 τ_t^B 及徑向之正向力 p 在滑移區域內(B 區)為一定值，換句話說，徑向之正向力 p 在 B 區域的碳管上為均勻分佈。因界面摩擦力 τ_t^B 為均勻分佈，則由 B 區碳管之力平衡，如圖 2.8 所示，可以求得線性分佈之碳管之正向應力 σ_t^B 為：

$$\sigma_t^B(z') = \frac{2\tau_t^B}{r_t} z' \quad 0 \leq z' \leq \frac{L_{slip}}{2} \quad (2.3.25)$$

在此定義一新座標 z' 以 A、B 區交界面為基準平面，朝下為正。將方程式 (2.3.25) 對已滑開長度取平均，可將 B 區之碳管平均正向應力 $\overline{\sigma_t^B}$ 表示為：

$$\overline{\sigma_t^B} = \frac{2}{L_{slip}} \int_0^{\frac{L_{slip}}{2}} \sigma_t^B dz' = \frac{L_{slip} \tau_t^B}{2r_t} \quad (2.3.26)$$

由整體複材之自由體圖如圖 2.9 所示，可求得 B 區基材區域之平均正向應力 $\overline{\sigma_m^B}$ ：

$$\overline{\sigma_m^B} = \frac{\overline{\sigma_o^2} - \overline{\sigma_t^B} r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (2.3.27)$$

值得一提的，因 B 區基材與碳管已經分離，在此並不考慮基材之正向應力 $\overline{\sigma_m^B}$ 在半徑方向的變化。而界面間徑向之正向力 p 仍為未知數，為了求得徑向之正向力，考慮彈性力學[32]中厚壁筒受到內外壓所產生之徑向變形以及拉伸後波松效應之徑向變形，如圖 2.10 所示，其詳細推導內容請見附錄 2，則碳管與基材在半徑方向之位移可分別表示為：

$$u_t^B = \nu_t \frac{r_t \overline{\sigma_t^B}}{E_t} + \nu_t \frac{r_t p}{E_t} \quad (2.3.28)$$

$$u_m^B = \nu_m \frac{\overline{r_i \sigma_m^B}}{E_m} - \frac{r_i p}{E_m} \left(\frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} + \nu_m \right) \quad (2.3.29)$$

在基材與碳管交界面中，徑向之位移連續，故由方程式(2.3.28)以及方程式(2.3.29)相等，可將徑向之正向力 p 表示為：

$$p = \frac{E_t E_m}{c_2 E_t + \nu_t E_m} \left(\nu_m \frac{\overline{\sigma_m^B}}{E_m} - \nu_t \frac{\overline{\sigma_t^B}}{E_t} \right) \quad (2.3.30)$$

其中

$$c_2 = \frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} + \nu_m \quad (2.3.31)$$

為了求解界面間徑向之正向力 p ，將方程式(2.3.24)、(2.3.26)及(2.3.27)代入方程式(2.3.30)，經移項整理後得到：

$$p(\sigma) = \sigma \frac{k_3}{k_4 + k_5} \quad (2.3.32)$$

其中

$$k_3 = 2E_t \nu_m r_o^2 r_i \quad (2.3.33)$$

$$k_4 = (c_2 E_t + \nu_t E_m)(r_o^2 - r_i^2) r_i \quad (2.3.34)$$

$$k_5 = L_{slip} \mu_0 [E_t \nu_m r_i^2 + E_m \nu_t (r_o^2 - r_i^2)] \quad (2.3.35)$$

與第一階段相似，基材區域之剪應力 τ_m^B 仍假設為由碳管壁上之剪應力呈線性分佈至模型外緣為零，由方程式(2.3.2)可以得到。在 C 區域中，碳管與基材間之鏈結尚未破壞，故與第一階段之 B 區域類似，但 C 區碳管最上緣並非應力為零，而是與第二階段 B 區碳管下緣應力連續，詳細推導請見附錄 3，此時碳管之正向應力 σ_t^C 及剪應力 τ_t^C 分別表示為：

$$\sigma_t^C = \frac{\mu_0 p L_{slip}}{r_t} \times \left[\frac{\cosh \lambda z}{\cosh \lambda (L_{stick} / 2)} \right] + \frac{k_2}{k_1} \cdot \sigma \left[1 - \frac{\cosh \lambda z}{\cosh \lambda (L_{stick} / 2)} \right] \quad (2.3.36)$$

$$\tau_t^C = \left(c_l \sigma - \frac{\lambda \mu_0 p L_{slip}}{2} \right) \left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh \lambda (L_{stick} / 2)} \right] \quad (2.3.37)$$

當施加外應力大小超過 σ_c 時，C 區域碳管最上緣應力到達破壞剪切應力 τ_c ，可由方程式(2.3.37)改寫為：

$$\tau_c = \left(c_l \sigma - \frac{\lambda \mu_0 p L_{slip}}{2} \right) \tanh \lambda (L_{stick} / 2) \quad (2.3.38)$$

其中 λ 及 c_l 由方程式(2.3.18)及(2.3.19)可以得到，值得一提的是， p 中也含有因外力所造成之界面破壞長度 L_{slip} ，也因此無法經移項得到 L_{slip} ，於是利用數值運算軟體 Matlab7.1，由方程式(2.3.38)反求得到界面破壞長度 L_{slip} ，而當外應力大小等於 σ_c 時，方程式(2.3.38)可以簡化為方程式(2.3.22)，此時之界面破壞長度 L_{slip} 等於零，詳細內容請見附錄 4。而基材與碳管仍保持鏈結的長度 L_{stick} ，可以由 $L_{stick} = L_t - L_{slip}$ 得到。接下來，與第一階段中方程式(2.3.9)相似，基材區域拉伸應力之分佈 σ_m^C 可以表示為：

$$\sigma_m^C(r, z) = \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^C + \frac{1}{b^2} [-2br_i - r_i^2 + 2r_o r - r^2] (\sigma_o^C - \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^C) \quad (2.3.39)$$

其中，第一階段之碳管應力 σ_t^B 代換為此時之碳管應力 σ_t^C 。而基材區域最外緣 ($r = r_o$) 之應力 σ_o^C 與第一階段中方程式(2.3.11)相似，並將碳管應力 σ_t^B 代換為此時之碳管應力 σ_t^C 後表示為：

$$\sigma_o^C(z) = \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^C + \frac{6}{8br_i + 5b^2} [\sigma_o^2 - \sigma_t^C r_i^2 - \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^C (b^2 + 2br_i)] \quad (2.3.40)$$

而基材區域之剪應力分佈 τ_m^C 與方程式(2.3.2)相似，並將方程式中碳管剪應力 τ_t^B 代換為此時之碳管剪切應力 τ_t^C 後表示為：

$$\tau_m^C = \frac{\tau_t^C (b + r_i - r)}{b} \quad (2.3.41)$$

2.4 損失因子(Loss factor)計算方法

在此微觀力學模型中，利用能量的觀點來計算損失因子，並且根據 2.3 節所計算出之碳管與基材之應力與剪應力，分成二個階段考慮基材正向應力所消耗之能量、基材剪應力所消耗之能量以及碳管與基材交界面摩擦消耗之能量。

2.4.1 第一階段 碳管與基材尚未發生滑動

一般複合材料在計算損失因子 η 的方法，係由複合材料所損失之能量 ΔW 與複材中所儲存之總應變能 W 的比值表示，而複合材料所損失之能量由材料之應變能乘上其損失因子得到[33]：

$$\eta = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\sum_i^n \eta_i W_i}{\sum_i^n W_i} \quad (2.4.1)$$

其中 η_i 及 W_i 分別為各材料之損失因子及儲存之應變能。在第一階段 A 區域中，因為只有拉伸應力作用，故所儲存之應變能 W^A 可以表示為：

$$W^A = \frac{\pi}{2} r_o^2 (L - L_t) \sigma_m^A \varepsilon_m^A \quad (2.4.2)$$

其中， σ_m^A 為 A 區之拉伸應力，可由方程式(2.3.1)得到， ε_m^A 為 A 區之拉伸應變，因材料為線彈性，故可由拉伸應力及楊氏模數之關係相互轉換。而 A 區所損耗的能量 ΔW^A 由正向力所儲存之應變能與基材之損失因子的乘積得到：

$$\Delta W^A = \eta_m \cdot \frac{\pi}{2} r_o^2 (L - L_t) \sigma_m^A \varepsilon_m^A \quad (2.4.3)$$

在 B 區域中，因破管上之剪應力所儲存應變能相當微小，將之忽略不計，則總應變能 W^B 分成基材區域拉伸應力、基材區域剪應力以及破管區域拉伸應力三個部份計算：

$$\begin{aligned} W^B &= \int \frac{1}{2} \sigma_m^B \varepsilon_m^B dV_m^B + \int \frac{1}{2} \tau_m^B \gamma_m^B dV_m^B + \int \frac{1}{2} \sigma_t^B \varepsilon_t^B dV_t^B \\ &= \frac{\pi}{E_m} \int_{r_i}^{r_o} \int_{-L_t/2}^{L_t/2} (\sigma_m^B)^2 r dr dz + \frac{\pi}{G_m} \int_{r_i}^{r_o} \int_{-L_t/2}^{L_t/2} (\tau_m^B)^2 r dr dz + \frac{\pi}{E_t} \int_0^{\eta} \int_{-L_t/2}^{L_t/2} (\sigma_t^B)^2 r dr dz \quad (2.4.4) \end{aligned}$$

其中， σ_m^B 、 τ_m^B 及 σ_t^B 為基材的拉伸應力、剪應力及破管的拉伸應力，可分別由方程式(2.3.7)、方程式(2.3.2)及方程式(2.3.16)得到。基材中損耗之能量

ΔW^B ，可由其儲存之應變能與基材之損失因子乘積，在此不考慮碳管所消耗之能量：

$$\begin{aligned}\Delta W^B &= \eta_m \int \frac{1}{2} \sigma_m^B \varepsilon_m^B dV_m^B + \eta_m \int \frac{1}{2} \tau_m^B \gamma_m^B dV_m^B \\ &= \eta_m \cdot \frac{\pi}{E_m} \int_{r_i - L_t/2}^{r_o} \int_{-L_t/2}^{L_t/2} (\sigma_m^B)^2 r dr dz + \eta_m \cdot \frac{\pi}{G_m} \int_{r_i - L_t/2}^{r_o} \int_{-L_t/2}^{L_t/2} (\tau_m^B)^2 r dr dz\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

第一階段之總應變能 W_{total} 以及消耗之總能量 ΔW 由 A 區及 B 區總合得到，分別表示為：

$$W_{total} = W^A + W^B \quad (2.4.6)$$

$$\Delta W = \Delta W^A + \Delta W^B \quad (2.4.7)$$

則第一階段之損失因子可以表示為：

$$\eta_{comp} = \frac{\Delta W}{W_{total}} \quad (2.4.8)$$

2.4.2 第二階段 碳管與基材開始滑動

與第一階段相似，在第二階段 A 區域中，因為只有拉伸應力作用，故

所儲存之應變能 W^A 可以由方程式(2.4.2)得到。而 A 區所損耗的能量 ΔW^A 由方程式(2.4.3)得到。在 B 區域中，因碳管上之剪應力所儲存應變能相當微小，將之忽略不計，則總應變能 W^B 分成基材區域拉伸應力、基材區域剪應力以及碳管區域拉伸應力三個部份計算：

$$W^B = \int \frac{1}{2} \sigma_m^B \varepsilon_m^B dV_m^B + \int \frac{1}{2} \tau_m^B \gamma_m^B dV_m^B + \int \frac{1}{2} \sigma_t^B \varepsilon_t^B dV_t^B$$

$$= \frac{2\pi}{E_m} \int_0^{L_{slip}/2} \int_{\bar{r}_i}^{r_o} (\overline{\sigma_m^B})^2 r dr dz' + \frac{2\pi}{G_m} \int_0^{L_{slip}/2} \int_{\bar{r}_i}^{r_o} (\tau_m^B)^2 r dr dz' + \frac{2\pi}{E_t} \int_0^{L_{slip}/2} \int_0^{\bar{r}_i} (\overline{\sigma_t^B})^2 r dr dz' \quad (2.4.9)$$

其中， σ_m^B 、 τ_m^B 及 σ_t^B 為基材的平均拉伸應力、剪應力及碳管的平均拉伸應力，可分別由方程式(2.3.27)、方程式(2.3.2)及方程式(2.3.26)得到。基材中損耗之能量 ΔW^B ，可由其儲存之應變能與基材之損失因子乘積，在此不考慮碳管所消耗之能量：

$$\Delta W^B = \eta_m \int \frac{1}{2} \sigma_m^B \varepsilon_m^B dV_m^B + \eta_m \int \frac{1}{2} \tau_m^B \gamma_m^B dV_m^B$$

$$= \eta_m \cdot \frac{2\pi}{E_m} \int_{\bar{r}_i}^{r_o} \int_0^{L_{slip}/2} (\overline{\sigma_m^B})^2 r dr dz' + \eta_m \cdot \frac{2\pi}{G_m} \int_{\bar{r}_i}^{r_o} \int_0^{L_{slip}/2} (\tau_m^B)^2 r dr dz' \quad (2.4.10)$$

另外在 B 區域中，還有因碳管與基材摩擦所消耗之能量 ΔW_{slip} ，將在其後介紹。接下來，與 B 區域相似，C 區域中碳管上剪應力所儲存之應變能

相當微小，將之忽略不計，則總應變能 W^C 分成基材區域拉伸應力、基材區域剪應力以及碳管區域拉伸應力三個部份計算：

$$\begin{aligned}
 W^C &= \int \frac{1}{2} \sigma_m^C \varepsilon_m^C dV_m^C + \int \frac{1}{2} \tau_m^C \gamma_m^C dV_m^C + \int \frac{1}{2} \sigma_t^C \varepsilon_t^C dV_t^C \\
 &= \frac{\pi}{E_m} \int_{r_i}^{r_o} \int_{-L_{stick}/2}^{L_{stick}/2} (\sigma_m^C)^2 r dr dz + \frac{\pi}{G_m} \int_{r_i}^{r_o} \int_{-L_{stick}/2}^{L_{stick}/2} (\tau_m^C)^2 r dr dz + \frac{\pi}{E_t} \int_0^{r_i} \int_{-L_{stick}/2}^{L_{stick}/2} (\sigma_t^C)^2 r dr dz \quad (2.4.11)
 \end{aligned}$$

其中， σ_m^C 、 τ_m^C 及 σ_t^C 為基材的拉伸應力、剪應力及碳管的拉伸應力，可分別由方程式(2.3.39)、方程式(2.3.41)及方程式(2.3.36)得到。基材中損耗之能量 ΔW^C ，可由其儲存之應變能與基材之損失因子乘積，在此不考慮碳管所消耗之能量：

$$\begin{aligned}
 \Delta W^C &= \eta_m \int \frac{1}{2} \sigma_m^C \varepsilon_m^C dV_m^C + \eta_m \int \frac{1}{2} \tau_m^C \gamma_m^C dV_m^C \\
 &= \eta_m \cdot \frac{\pi}{E_m} \int_{r_i}^{r_o} \int_{-L_{stick}/2}^{L_{stick}/2} (\sigma_m^C)^2 r dr dz + \eta_m \cdot \frac{\pi}{G_m} \int_{r_i}^{r_o} \int_{-L_{stick}/2}^{L_{stick}/2} (\tau_m^C)^2 r dr dz \quad (2.4.12)
 \end{aligned}$$

第二階段之總應變能 W_{total} 與基材部份所損耗的能量 ΔW_s 由 A 區、B 區及 C 區總合得到，表示為：

$$W_{total} = W^A + W^B + W^C \quad (2.4.13)$$

$$\Delta W_s = \Delta W^A + \Delta W^B + \Delta W^C \quad (2.4.14)$$

根據 Zhou[4]之研究，因拉伸產生滑動現象之複材，其損失因子可以分成滑動所產生之損失因子以及基材本身所產生之損失因子兩部份計算：

$$\eta_{comp} = \eta_{slip} + \eta_s \quad (2.4.15)$$

則整體複合材料中，因基材材料所產生之損失因子 η_s 可表示為：

$$\eta_s = \frac{\Delta W_s}{W_{total}} \quad (2.4.16)$$

另外在 B 區域中，因碳管與基材摩擦所消耗之能量 ΔW_{slip} ，由交界面之剪力做的功計算：

$$\Delta W_{slip} = \int F \cdot du \quad (2.4.17)$$

其中，剪應力 F 由 B 區碳管表面積與剪切應力之乘積得到：

$$F = 2\pi r_t L_{slip} \tau_t^B \quad (2.4.18)$$

而微小之相對位移量 du 由基材與碳管的相對位移之微分表示：

$$du = L_{slip} d(\varepsilon_m - \varepsilon_t) = L_{slip} \left[\frac{1}{E_m} \cdot \frac{d\overline{\sigma_m^B}(\sigma)}{d\sigma} - \frac{1}{E_t} \cdot \frac{d\overline{\sigma_t^B}(\sigma)}{d\sigma} \right] d\sigma \quad (2.4.19)$$

其中， $\left(\frac{d\overline{\sigma_m^B}}{d\sigma} \right)$ 與 $\left(\frac{d\overline{\sigma_t^B}}{d\sigma} \right)$ 分別對方程式(2.3.27)與方程式(2.3.26)進行微分。

值得一提的是，已滑開區域之長度 L_{slip} 為定值，因為當施加外應力由零增加至最大值 σ_{max} 時，已滑開區域之長度 L_{slip} 便已產生，接著才計算在一完整週期中所消耗之能量，故得到：

$$\frac{d\overline{\sigma_m^B}}{d\sigma} = \frac{r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{L_{slip} \mu_0 k_3 r_i}{2(r_o^2 - r_i^2)(k_4 + k_5)} \quad (2.4.20)$$

$$\frac{d\overline{\sigma_t^B}}{d\sigma} = \frac{L_{slip} \mu_0 k_3}{2r_t (k_4 + k_5)} \quad (2.4.21)$$

其中， μ_0 為碳管與基材間的摩擦係數， k_3 、 k_4 與 k_5 分別由方程式(2.3.33)、方程式(2.3.34)與方程式(2.3.35)得到。將方程式(2.4.20)及方程式(2.4.21)代入方程式(2.4.19)後，聯同方程式(2.4.18)代回方程式(2.4.17)，並將外應力範圍介於零到 σ 之間代入積分上下限，整理後得到：

$$\Delta W_{slip} = \int_0^\sigma 2\pi r_i \tau_i^B (L_{slip})^2 \left[\frac{1}{E_m} \cdot \frac{d\overline{\sigma_m^B}(\sigma)}{d\sigma} - \frac{1}{E_t} \cdot \frac{d\overline{\sigma_t^B}(\sigma)}{d\sigma} \right] d\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2 (k_6 - k_7 - k_8) \quad (2.4.22)$$

其中

$$k_6 = \frac{2\pi r_o^2 r_i \mu_0 k_3 (L_{slip})^2}{E_m (r_o^2 - r_i^2) (k_4 + k_5)} \quad (2.4.23)$$

$$k_7 = \frac{\pi r_i^2 \mu_0^2 k_3^2 (L_{slip})^3}{E_m (r_o^2 - r_i^2) (k_4 + k_5)^2} \quad (2.4.24)$$

$$k_8 = \frac{\pi \mu_0^2 k_3^2 (L_{slip})^3}{E_t (k_4 + k_5)^2} \quad (2.4.25)$$

在第二階段中因滑動所產生之阻尼容量 ψ_{slip} (Damping capacity)，可以表示為一完整週期摩擦所消耗能量與週期內應變能最大值之比值[4]：

$$\psi_{slip} = \frac{4 \times \Delta W_{slip}}{W_{total}} \quad (2.4.26)$$

由方程式(2.4.26)得到滑動所產生之阻尼容量，則滑動所產之損失因子 η_{slip} 可由阻尼容量除以 2π 得到[34]：

$$\eta_{slip} = \frac{\psi_{slip}}{2\pi} = \frac{2\Delta W_{slip}}{\pi \cdot W_{total}} \quad (2.4.27)$$

而在第二章所介紹之解析模型，其詳細程式碼請見附錄 5。



第三章 以有限元素法模擬受拉伸之奈米碳管複合材料

在第二章中，以解析模型分析奈米碳管複合材料進行拉伸試驗時複材中應力分佈情形，進而以能量觀點計算整體複合材料之阻尼性質。在本章節中，我們使用有限元素軟體 ANSYS13.0 建立微觀模型，同樣在受均佈拉伸應力作用下進行分析，並將分析結果與第二章之解析模型對照比較。

3.1 奈米碳管複合材料之有限元素模型

在此有限元素模型建立過程中，利用實體元素建立八分之一的碳管與基材模型，為了模擬碳管與基材間的滑動現象，在碳管邊緣已滑動區域鋪上接觸元素，使此區域之碳管與基材發生滑動現象，再透過均佈應力對模型進行拉伸測試。

3.1.1 建立碳管與基材之實體模型

為了透過有限元素軟體模擬奈米碳管複合材料，在此將圓柱狀之奈米碳管埋入圓柱狀基材中，碳管在基材中為軸向排列。在碳管上下緣斷面與基材並無鏈結，換句話說，碳管上之應力完全由基材與碳管表面之作用力所傳遞。因模型之對稱性，故只需取八分之一之大小進行分析，以降低程式計算量，如圖 3.1-3.2 所示。圖 3.1 及 3.2 分別為八分之一模型及模型之下視圖，其中紫紅色區域為碳管，藍色區域為基材，碳管的上緣部份與基材並無連結， L_i 及 L 分別為為碳管及基材區域的高度， r_i 及 r_o 分別為奈米碳管及基材區域的半徑，並以八節點立體元素 SOLID45 建立其有限元素網格，

該元素上每個節點僅有 x 、 y 、 z 三個方向的位移自由度，並使網格長寬比約等於 1。本研究在建立有限元素網格時，已進行收斂性測試，其相關結果將在 4.1 節進行討論。

3.1.2 邊界條件設定

在進行拉伸試驗模擬時，為了避免在求解過程中發生剛體運動，須設定適當的邊界條件後求解。在此建立之模型為八分之一模型，邊界條件設定如圖 3.3 所示，圖 3.3(a)表示在 $x=0$ 之平面，其 x 方向自由度被固定住，另外在 $y=0$ 之平面，其 y 方向自由度被固定住，圖 3.3(b)表示在 $z=0$ 平面，其 z 方向自由度被固定，並且施加大小為 σ 之均佈拉伸應力在模型最上緣 $\left(z = \frac{L}{2}\right)$ 平面。

3.1.3 以接觸元素模擬碳管與基材間之滑動

在鋪設接觸元素之前，必須先判定碳管與基材間在外力作用下的滑動情形，若拉伸強度較小，基材與碳管之間的界面尚未發生破壞，則碳管與基材間均保持鏈結，如圖 3.4 所示。一旦外應力加大，使基材與碳管之間的剪切應力超過鏈結強度 τ_c ，界面將有部份發生滑動，則將碳管分成鏈結已破壞區域以及尚未破壞區域兩個部份，如圖 3.5 所示。

為了決定在固定外力下，受破壞區域之高度 $L_{slip} / 2$ ，其模型建立流程如圖 3.6 所示。在流程中，首先假設碳管與基材間的鏈結尚未破壞，並建立如圖 3.4 之模型，施加邊界條件及拉伸外力並求解高斯積分點位置之應力值，

並使用 ERESX 指令，使節點上讀取的結果即為積分點上的結果，如圖 3.7 所示。接著，讀取碳管上緣最外層處高斯積分點上之剪切應力，如圖 3.8 中 a 點位置所示，但發現在碳管上緣最外層之高斯積分點，會產生應力集中之現象而無法收斂，故讀取相鄰節點上之剪切應力，如圖 3.8 中之 b 點，以避免應力集中現象影響結果，並與鏈結強度 τ_c 進行比較，若未超過 τ_c ，代表基材與碳管之間仍保持鏈結，則模型建立完畢，若已超過 τ_c ，代表界面有部份已經發生破壞。

若基材與碳管間鏈結已遭受破壞，先根據解析模型中，方程式(2.3.38) 反算後之結果，假設鏈結破壞長度 $L_{slip}/2$ ，並建立如圖 3.5 之模型。與判斷滑動相似地，在施加邊界條件及固定外力並求解，且使節點上讀取的結果即為積分點上的結果後，讀取未滑開碳管上緣最外層處節點上之剪切應力，如圖 3.9 所示。相似地，圖 3.9 中 c 點會產生應力集中之現象，故讀取相鄰之 d 點之剪切應力，並檢查其是否等於鏈結強度 τ_c ，來判斷假設之鏈結破壞長度 $L_{slip}/2$ 是否正確，若超過鏈結強度則增加鏈結破壞長度，若低於鏈結強度則減少鏈結破壞長度。重覆上述動作，直到讀取的值與鏈結強度 τ_c 一致，則此時受破壞區域之高度定義為 $L_{slip}/2$ ，未滑開區域的高度為 $L_{stick}/2$ 。在建立實體模型時，因為在鏈結尚未破壞區域，基材以及碳管體積互相連接，相對的，在鏈結已破壞區域，使基材及碳管體積互相分離。

接下來針對體積互相分離的區域，利用一組平面與平面接觸所使用之

四節點接觸元素 CONTA173 以及目標元素 TARGE170 分別在碳管最外緣以及基材最內緣建立一層有限元素網格，其網格鋪設在立體元素 SOLID45 上，並與立體元素共用節點如圖 3.10 所示。在接觸元素的設定中，接觸剛度介於 0.01-1 之間，因在此施加之外力為正向力，故設定為 1 使其與真實情況接近。摩擦係數由為兩接觸物間之粗糙程度決定，在此與解析模型一致皆假設為 0.1。因在外力作用下，應變量估計會到達 1%，因此開啟幾何大變形分析。在求解之步階設定上，當步階越細其結果越精確，但計算量將大幅增加，在此設定為 20 步來求解。

3.2 損失因子計算方法

在此有限元素微觀模型中，利用能量的觀點來計算損失因子，並且根據 3.1 節所建立之模型受拉伸後所計算出之碳管與基材之應力與剪應力，分成二個階段考慮基材正向應力所消耗之能量、基材剪應力所消耗之能量以及碳管與基材交界面摩擦消耗之能量。

3.2.1 第一階段 碳管與基材尚未發生滑動

與第二章模型相似，由方程式(2.4.1)得知，計算整體複合材料之阻尼損失因子，可以由複材中各材料所消耗之能量與總能量之比值計算。當拉伸應力值較小，碳管與基材之間的鏈結尚未被破壞時，整體複合材料所儲存之最大應變能 W_{total} 可以表示為基材區域及碳管區域之拉伸應變能與剪應變

能之總合：

$$\begin{aligned}
 W_{total} = & \sum \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z V_m + \sum \frac{1}{2} \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} V_m + \sum \frac{1}{2} \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} V_m \\
 & + \sum \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z V_t + \sum \frac{1}{2} \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} V_t + \sum \frac{1}{2} \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} V_t
 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

其中， σ_z 、 σ_{yz} 及 σ_{xz} 分別代表各元素上 z、yz 及 xz 方向之應力，係由八個高斯積分點平均得到。 ε_z 、 ε_{yz} 及 ε_{xz} 分別代表各元素上 z、yz 及 xz 方向之應變，係由八個節點平均而得。在讀取元素之結果之前，必須選取欲讀取之區域， V_m 及 V_t 分別為基材區域內各元素之體積及破管區域各元素之體積。而整體複材所消耗的能量 ΔW 為基材之應變能與損失因子乘積，可以表示為：

$$\Delta W = \eta_m \cdot \left(\sum \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z V_m + \sum \frac{1}{2} \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} V_m + \sum \frac{1}{2} \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} V_m \right) \quad (3.2.2)$$

故第一階段之損失因子可以表示為：

$$\eta_{comp} = \frac{\Delta W}{W_{total}} \quad (3.2.3)$$

3.2.2 第二階段 碳管與基材開始滑動

根據 Zhou[4]之研究，因拉伸產生滑動現象之複材，其損失因子可以由滑動所產生之損失因子以及複材中各組成材料之阻尼性質所產生的損失因子兩部份疊加計算。當施加拉伸應力上升，碳管與基材之間的鏈結遭受破壞，整體複合材料所儲存之最大應變能 W_{total} 可由方程式(3.2.1)得到。此外，由方程式(3.2.2)得到基材所消耗的能量 ΔW ，故在第二階段因基材材料阻尼所產生之損失因子 η_s 可以表示為：

$$\eta_s = \frac{\Delta W}{W_{total}} \quad (3.2.4)$$

因為碳管與基材之間部份鏈結遭受破壞，如圖 3.9 所示，在鏈結破壞的區域將產生摩擦而消耗能量，則摩擦所消耗的能量 ΔW_{slip} 可以表示為：

$$\Delta W_{slip} = \frac{1}{2} F_{slip} \Delta L_{slip} \quad (3.2.5)$$

其中， F_{slip} 、 ΔL_{slip} 分別為遭受破壞區域之碳管壁上所產生之總剪力、基材與碳管的相對位移量，又因為 F_{slip} 與 ΔL_{slip} 呈線相關，故摩擦所消耗的能量 ΔW_{slip} 可以由方程式(3.2.5)表示，其相關驗證將在 4.1 小節詳細說明。 F_{slip} 與 ΔL_{slip} 分別表示為：

$$\Delta L_{slip} = u_1 - u_2 \quad (3.2.6)$$

$$F_{slip} = \pi r_t L_{slip} \tau_{slip} \quad (3.2.7)$$

因樹脂與碳管上平面在施加變形後能夠保持平面，故在計算基材與碳管的相對位移量 ΔL_{slip} 時，取一斷面進行分析如圖 3.11 所示。圖 3.11 中， u_1 及 u_2 分別屬於基材區域以及已滑開滑碳管區域，在尚未受外力做用時，節點 1 與節點 2 位於相同之位置，但經拉伸作用後，因基材與碳管之楊氏模數不同，產生相對的位移差量，在選取基材區域後，讀取節點 1 拉伸方向之位移，再選取滑開碳管區域，讀取節點 2 拉伸方向之位移，代入方程式(3.2.6)相減得到基材與碳管在滑動過程中其能量消耗做功之距離。

在方程式(3.2.7)中，為了計算鏈結破壞區域碳管壁上之平均剪力，以圓周長 $2\pi r_t$ 乘上模型高度 $\frac{L_{slip}}{2}$ 計算已滑開碳管表面積，接下來，選取滑開區域之碳管最外層元素，如圖 3.12 所示，滑開之碳管壁上所受到之平均剪切應力可以表示為

$$\tau_{slip} = \frac{I}{V_{tr}} \sum_i^n \tau_i V_i \quad (3.2.8)$$

其中， V_{tr} 代表滑開區域碳管最外層元素之體積， τ_i 及 V_i 表示此區域中各元素上之剪切應力及體積，元素上之剪切應力 τ_i 為八個積分點的平均值，平均剪切應力之收斂性測試，在 4.1 節將詳細說明。則在第二階段中因滑動所產生之阻尼容量 ψ_{slip} (Damping capacity)，可以由方程式(2.4.28)得到，則因滑動所產之損失因子 η_{slip} 可由方程式(2.4.29)得到，最後由方程式(2.4.30)計算出整體複材在第二階段之損失因子。



第四章 結果與討論

在第二章以及第三章中，針對奈米碳管複合材料，分別介紹解析模型以及有限元素模型模擬複材之阻尼性質，在本章節中，將根據前兩章節所建立之模型，討論解析模型與有限元素模型之間的差異性、解析模型中各參數之影響、解析模型與文獻中之實驗差異以及與過去文獻中所建立之微觀力學模型之比較。

4.1 有限元素模型驗證

在有限元素模型建立後，必須進行收斂性測試，及驗證相關公式，才與解析模型進行比較與討論。在建立有限元素模型時，其模型之材料參數如表 4.1 所示，其中樹脂基材與碳管之楊式模數、柏松比及基材材料之損失因子等材料參數由 Suhr[1]之研究得到，碳管之半徑長度係參考 Zhou[4]之研究，樹脂基材區域半徑假設為碳管半徑長度之 8 倍。另外在表 4.2 中，列出在過去的研究文獻中，對於樹脂基材與碳管界面之鏈結強度結果，發現其範圍由 2~500MPa 之間，在此參考 Liu[18]之研究結果，設定樹脂基材與碳管界面之鏈結強度為 18MPa，鏈結破壞後之界面摩擦係數為 0.1，碳管之體積比為 1%進行求解。

4.1.1 有限元素模型之收斂性測試

在收斂性測試中，設定碳管長度為 50nm，並建立三組不同網格密度之

有限元素模型，其最小元素網格邊長約為碳管長度 $\frac{L_t}{2}$ 之 $\frac{1}{350}$ 、 $\frac{1}{700}$ 及 $\frac{1}{1000}$ ，分別定義此三組模型為 model 1、model 2 及 model 3，如圖 4.1a-4.1c 所示。在施加大小為 10MPa 之均佈拉伸應力在模型上緣，進行拉伸試驗並求解後，進行黏著界面與滑動界面交界點之剪應力、破壞交界面之剪應力的收斂測試，以及整體複合材料之損失因子的收斂測試。

首先，讀取鏈結碳管上緣最外層(點 1)及相鄰處(點 2)相對應高斯積分點上之剪切應力，如圖 4.2a-4.2c 所示，其中虛線位置代表破壞交界面之位置，左側及右側材料分別為碳管及基材，分別取出此三組不同網格密度之有限元模型結果，如表 4.3a-4.3c 所示，發現因模型之對稱性，在同一個元素上，對稱位置所受到之剪應力一致，例如：表 4.3a 中之點 1 與點 3。此外，由點 1、5、9 發現，在已破壞區域與尚未破壞區域交界處，會產生應力集中的現象，此歧異點會因網格加密而持續上升無法收斂，故在計算上將之忽略，而取距離點 1、5、9 為 $\frac{L_t}{700}$ 相同位置之點 2、6、10 來進行計算，發現點 2 與點 6 之剪切應力誤差約為 1%，但點 6 與點 10 誤差降低為 0.5%，故將其視為收斂。

接下來，對於已滑開之碳管壁上之平均剪切應力，也進行收斂性的測試，取出已滑開之碳管最外層之元素，如圖 3.12 所示，由方程式(3.2.8)計算平均之剪應力。其結果如表 4.4 所示，發現 model 1 與 model 2 之間之誤

差約為 0.9%，但 model 2 與 model 3 之值幾乎一致，誤差在 0.2%以下。

另外，此三組模型之阻尼損失因子如表 4.5 所示，誤差皆在 0.4%以下，故可將此結果視為收斂，因此為了節省計算量，在接下來的有限元素分析中，皆使用 model 2 之網格大小進行分析，換句話說，當施加外力改變，仍使最小元素網格邊長保持約 0.035nm 進行分析。

4.1.2 有限元素模型滑動消耗之能量公式驗證

為了驗證在有限元素模型中，計算滑動所消耗的能量公式(3.2.5)，在此模擬施加外應力由零增加至最大值的過程中，已滑開碳管壁上之平均剪力 F_{slip} 以及基材與樹脂之相對位移量 ΔL_{slip} 之關係，施加外應力最大值設定為 70MPa，碳管長度為 50nm，且因最大外力固定，已滑開之碳管長度不會改變，唯一之改變量為施加之拉伸應力。

由圖 4.3 可以發現，當施加之外力逐漸增加，已滑開碳管壁上之平均剪力 F_{slip} 以及基材與樹脂之相對位移量 ΔL_{slip} 呈正比關係成長，因此在方程式 (3.2.5) 中，計算滑動所消耗的能量，可以利用三角形面積公式計算。

4.2 解析模型與有限元素模型比較

為了驗證在第二章中所建立之解析模型，在第三章建立有限元素模型來進行模擬並加以比較，在此利用材料參數如表 4.1 所示，且令樹脂基材區域半徑為碳管半徑長度之 8 倍，碳管之體積比為 1%，分別代入解析模型與有限元素模型中求解，其後分別針對模型中各部份進行討論與比較。值得一提的是，在此假設鏈結破壞後之界面摩擦係數為 0.1，而有關摩擦係數對複材阻尼性質之影響，將在 4.3 小節進行探討。

為了驗證解析模型，故在此利用碳管長度 L_c 為 50nm 以及 100nm 之兩組有限元素模型進行比對與討論。圖 4.4 為施加外應力與已滑開之碳管長度關係圖，發現當施加外應力改變，基材與碳管界面發生滑動之碳管長度也隨之改變，當外應力一旦超過基材與碳管之鏈結強度使界面產生破壞後，其破壞延展相當快速，當外應力持續增加，破壞之長度接近碳管全長，但仍有些許區域不被破壞而持續保持鏈結，此結果有限元素模型與解析模型之預測相當一致。

圖 4.5-4.6 為施加外應力與滑動所產生之相對位移量 ΔL_{slip} 以及已滑開碳管壁上之總剪力 F_{slip} 關係圖。在圖 4.5 中發現在預測基材與碳管之間產生之相對位移量 ΔL_{slip} 時，由於在推導解析模型中各區域應力之初，做出基材剪應力為線性分佈及碳管拉伸應力為均勻分佈等假設，解析模型與有限元素模型約有 0.1~0.6% 之誤差。在圖 4.6 中，發現已滑開區域碳管壁上之總剪

力 F_{slip} ，解析模型與有限元素模型約有 15~20%之誤差，與圖 4.5 相較之下誤差較大。探討其原因，由方程式(3.2.7)可以發現，在固定的施加外力下，已滑開碳管的表面積為定值，誤差來源為碳管壁上之剪應力 τ_{slip} 。圖 4.7-4.8 為施加外應力為 35MPa 時，已滑開區域碳管壁上剪應力隨 z 方向的分佈，發現有限元素模型的結果經平均之後，與解析模型之間確實有 20%之誤差。

由方程式(2.3.24)得知，碳管壁上之剪應力 τ_{slip} 為摩擦係數 μ_0 與碳管徑向正向應力 p 之乘積，當摩擦係數為定值，徑向平均正向力 p 為誤差主要來源。由表 4.6 可以發現，滑開區域碳管壁上徑向之平均正向應力 p ，在有限元素模型與解析模型之間有大約 15~20%之誤差。由方程式(2.3.25)得知，已滑開區域之碳管拉伸方向應力分佈 $\sigma_r^B(z')$ ，在解析模型中假設為線性分佈，接著推導基材區域拉伸應力 $\overline{\sigma_m^B}$ 及徑向平均正向力 p 時，連帶產生了誤差。

圖 4.9 為施加外應力與滑動所消耗之能量關係圖，因平均正向力所產生之誤差，也使得解析模型之結果低於有限元素模型。圖 4.10 為施加外應力與整體複合材料總應變能關係圖，發現解析模型與有限元素模型之間約有 0.1~0.8%之誤差，其原因與圖 4.5 相似，因假設基材剪應力為線性分佈及碳管拉伸應力為均勻分佈，導致模型中產生些微誤差。

圖 4.11 為基材所產生之阻尼損失因子 η_s 以及滑動所產生之損失因子

η_{slip} 對整體複材之阻尼性質之貢獻比較圖，發現因基材所產生之損失因子隨著拉伸應力上升，增幅並不大，主要貢獻來自於碳管與基材間摩擦所產生之損失因子。圖 4.12 為外應力與整體複材之阻尼損失因子關係圖，解析模型與有限元素模型可以得到相似的趨勢，但因已滑開區域之碳管拉伸應力 $\sigma_t^B(z')$ 為線性之假設，導致解析模型與有限元素模型之間約有 1~10% 之誤差存在。

4.3 解析模型參數影響

在解析模型中，碳管的長度 L_t 、體積比 V_f 、基材與碳管間的鏈結強度 τ_c 以及已滑開區域之摩擦係數 u_0 等參數都需要相關的設定，當參數改變之後，整體複合材料的阻尼損失因子也相對改變。因此，本節將依次討論當此些參數改變時，整體複材之阻尼性質隨外力拉伸之趨勢。其中所用之材料參數如表 4.1 所示，但其中之基材與碳管之鏈結強度以及已滑動界面間之摩擦係數，將分別在 4.2.3 小節以及 4.2.4 小節成為改動量，屆時將再詳細說明。

4.3.1 碳管長度

在此利用解析模型，體積比固定為 1%，摩擦係數為 0.1 及鏈結強度為 18MPa，分別分析在樹脂基材中添加長度為 50nm、75nm 及 100nm 奈米碳管之複合材料，且因碳管及基材半徑固定，模型軸向高度分別為 78.125nm、117.1875nm 及 156.25nm，其阻尼損失因子如圖 4.13 所示。發現當添加之奈米碳管長度越長，將產生越高之阻尼損失因子，其原因為，當碳管的長度

增加，則與樹脂基材接觸之表面積也隨之增加，由方程式(2.4.22)得知，因滑動所損耗的能量會隨著接觸之表面積增加而提高，也因此整體複合材料的損失因子隨之上升，故較長的碳管添加物能夠得到較高的阻尼性質。值得一提的是，隨著碳管長度上升，滑動發生所需之外應力也有所不同，但在圖 4.13 中看不出明顯的變化，由方程式(2.3.23)發現，當碳管長度 L_c 代入雙曲正切函數內做運算後，其變化將會變得相當微小。

4.3.2 碳管體積比

在此利用解析模型，碳管長度固定為 50nm，摩擦係數為 0.1 及鏈結強度為 18MPa，分別分析在樹脂基材中添加體積比為 0.5%、1%及 1.5%奈米碳管之複合材料，值得一提的是，在解析模型中，有兩種作法來改變複合材料之碳管體積比。其一為以添加 1%之模型為基準，將模型之軸向高度固定為 78.125nm，使體積比改變為 0.5%及 1.5%時，基材之半徑厚度分別為碳管半徑之 16.16 及 9.33 倍，如圖 4.14a 所示。其二為將基材之半徑厚度固定為碳管之 8 倍，當體積比改變為 0.5%及 1.5%時，模型軸向高度分別為 156.25nm 及 52.08nm，如圖 4.14b 所示。此外，若依照本模型最初的假設，令樹脂基材半徑為碳管半徑之 8 倍進行模擬，其只適用在添加之碳管體積比為 1.5%以下之複合材料。

圖 4.15 為整體複材之阻尼損失因子，其中 R-0.5 及 R-1.5%之曲線分別代表改變基材半徑大小使體積比為 0.5%及 1.5%之情況，而 L-0.5 及 L-1.5

之曲線分別代表改變模型軸向高度使體積比為 0.5% 及 1.5% 之情況。發現當添加之奈米碳管體積比越高，將產生越高之阻尼損失因子，其原因為當碳管的體積比增加，樹脂區域的體積比相對減少，則總應變能也相對減少，由方程式(2.4.27)發現，當整體應變能減少而滑動之消耗能不變的情況下，因滑動所產生之損失因子也因此而提升，故在解析模型中，碳管體積比越高整體複合材料之損失因子也較高。

此外，在碳管與基材間尚未發生滑動時，添加體積比較少的複材反而有較高的阻尼損失因子，因為當碳管與基材間沒有滑動之能量消散時，阻尼完全由樹脂基材提供，故樹脂體積比較高的複合材料，其擁有較高的損失因子。

4.3.3 已滑動界面間之摩擦係數

在此利用解析模型，體積比固定為 1%，碳管長度固定為 50nm 及鏈結強度為 18MPa，分別分析在已滑開區域的基材與碳管間摩擦係數 μ_0 為 0.1、0.2、0.3 及 0.5 之奈米碳管複合材料，其阻尼損失因子如圖 4.16 所示。發現隨著摩擦係數增加，整體複合材料的損失因子也隨之上升，由方程式(2.4.22)得知，越高的界面摩擦係數會使碳管與基材滑動的過程中，產生越高的能量消散，也因此使得奈米複合材料的阻尼損失因子隨之上升。

4.3.4 基材與碳管之鏈結強度

在此利用解析模型，體積比固定為 1%，碳管長度固定為 50nm 及摩擦

係數為 0.1，分別分析基材與碳管之間的鏈結強度 τ_c 為 10MPa、18MPa 及 50MPa 之奈米碳管複合材料，其阻尼損失因子如圖 4.17 所示。發現曲線隨著鏈結強度上升有向右移的趨勢，由方程式(2.3.23)得知，當樹脂基材與碳管間鏈結得更緊密時，使鏈結破壞並發生滑動所需要的拉伸應力也隨之增大。此外，在相同的拉伸應力之下，鏈結較弱的複合材料能夠產生較大的滑動距離，由方程式(2.4.22)可以發現，較大的滑動距離其損耗的能量也較大，而鏈結較強的複合材料則需較大的拉伸應力才能達到相同的損失因子，故施加外應力在 0-200MPa 之間時，基材與碳管間的鏈結越弱，整體奈米碳管複合材料之阻尼損失因子也就越大。

4.4 解析模型與文獻結果之比較

根據過去的研究中，在聚合物基材中加入單壁奈米碳管的确會有效的提升複合材料的阻尼性質，在此利用相同的材料參數先比較解析模型與文獻中的實驗數據[1, 4, 5]，接著再與過去文獻中之解析模型[4, 18, 26]進行比較與討論。

4.4.1 拉伸應力與應變的換算

在文獻的實驗結果中，阻尼性質隨著拉伸應變量的增加而改變，在此為了將解析模型與文獻的實驗結果相互比較，需先計算出整體複材的楊氏模數後，將拉伸應力轉換成拉伸應變量，再與之比較。首先將整體複合材料分成上方之樹脂基材 A 區以及與碳管同高度之 B 區如圖 4.18a 所示，在 B

區中，碳管與兩側之樹脂區域受到拉伸作用時，將會產生相同之拉伸應變量，因此可以將 B 區之等效楊氏模數 E_B 表示為：

$$E_B = E_t v_t + E_{rs} v_{rs} \quad (4.4.1)$$

其中， E_t 及 E_{rs} 分別為碳管以及樹脂基材之楊氏模數， v_t 及 v_{rs} 分別為碳管以及樹脂基材之所佔 B 區之體積比，在此 $v_t + v_{rs} = 1$ 。又當整體複材受到拉伸作用時，A 區與 B 區將會擁有相同的拉伸應力如圖 4.18b 所示，故由此關係可以將整體複合材料之等效楊氏模數 E_c 表示為：

$$\frac{1}{E_c} = \frac{v_B}{E_B} + \frac{v_A}{E_{rs}} \quad (4.4.2)$$

其中， v_A 及 v_B 分別為 A 區域以及 B 區域所佔之體積比。由方程式(4.4.2)可以求出整體複合材料之等效楊氏模數 E_c ，再借由應力應變關係，將施加外應力 σ 除上等效楊氏模數 E_c ，便得到整體複材之拉伸應變量。

4.4.2 解析模型與文獻實驗結果比較

根據 Suhr 等人[1]的研究，在聚碳酸脂基材中加入單壁奈米碳管，在此所用的材料參數均參照文獻[1]如表 4.7 所示，且根據過去的研究，由表 4.2 得知，單壁奈米碳管與樹脂基材之鏈結強度範圍約為 2.1~36MPa，故在此範圍內利用解析模型與文獻中之動態黏彈機械分析結果進行比較，如圖 4.19

所示。發現隨著拉伸應變量增加，整體複合材料之阻尼損失因子會有上升的趨勢，在應變量為 0.75% 以下，當基材與碳管間的鏈結強度 τ_c 以及已滑開區域之摩擦係數 u_0 分別為 10.5 以及 0.15 時，解析模型預測結果與文獻的結果相當吻合，但當拉伸應變量繼續增加，預測值將因碳管滑開長度接近全長而趨於收斂，但實驗值仍繼續上升。

在此也根據 Koratkar 等人 [5] 之研究，在雙酚 A-聚碳酸酯 (Bisphenol-A-polycarbonate) 中加入單壁奈米碳管，依照文獻中 [5] 之材料參數如表 4.8，且令基材與碳管之鏈結強度在 2.1~36MPa 的範圍內，利用解析模型與文獻中之動態黏彈機械分析結果進行比較，如圖 4.20 所示，發現隨著拉伸應變量增加，整體複合材料之阻尼損失因子隨之上升，且在應變量為 0.8% 以下，基材與碳管間的鏈結強度 τ_c 以及已滑開區域之摩擦係數 u_0 分別為 8.5 以及 0.057 時，解析模型預測結果與文獻的結果相當吻合，但當拉伸應變量繼續增加，解析模型之損失因子將因碳管接近完全滑開而趨於收斂，但實驗值仍繼續上升。

綜合以上兩篇文獻之比較，發現當應變量過大時，實驗值明顯大於解析模型之預測值，推測其原因為，當複合材料受到外力作用使碳管與基材界面互相脫離，當應變量加大後使界面間產生孔隙，若複合材料中出現孔隙會使整體阻尼性質提升，而此種現象在解析模型中並無法模擬，故在較大應變量之下，解析模型與實驗值出現誤差。

4.4.3 解析模型與文獻模擬結果[4]比較

根據 Zhou 等人[4]之研究，在環氧樹脂(Epoxy)基材中加入單壁奈米碳管，並建立數值模型來探討拉伸應變與奈米碳管複合材料阻尼性質之間的關係，在此依照文獻中之材料參數如表 4.9 代入解析模型，並與文獻中之懸壁樑振動試驗結果以及其解析模型結果進行比較，如圖 4.21 所示。發現整體複合材料之阻尼比，隨著振動之應變量提升而升高，在 Zhou 模型中，利用已完全滑動碳管所佔之體積比隨拉伸量上升逐漸增加，來提升整體複材之阻尼比，對比本研究之模型，利用碳管與基材界面破壞區域以及摩擦力隨拉伸應力增加，使阻尼性質提升，在振動應變量為 0.01%以內，可得到相同之趨勢。此外，在 Zhou 的研究中，假設基材應力在半徑方向為定值，但本研究之解析模型為了更接近真實情況，將基材應力在半徑方向的變化加入考慮，使得本研究之模型之值高於 Zhou 之模型。

當振動應變高於 0.01%後，Zhou 模型結果，隨著應變量上升，阻尼比反而開始下降，出現明顯峰值，其原因為假設基材與碳管界面之剪切應力，在鏈結受力破壞後，就保持定值，也因此摩擦所消耗的能量增加速度減緩，但整體複材之應變能仍繼續成長的情況之下，阻尼比便因此下降。本研究由摩擦係數與徑向正向力之乘積考慮基材與碳管界面之剪切應力，當碳管與基材界面滑動後，界面之剪切應力仍會隨著正向力提高而上升，故能量消散仍繼續上升，導致整體複材之阻尼比逐漸收斂。

4.4.4 解析模型與文獻模擬結果[18]比較

根據 Liu 等人[18]之研究，在環氧樹脂基材中加入單壁奈米碳管，並建立數值模型來探討隨著拉伸應力上升，奈米碳管複合材料阻尼性質之變化。其模型以七根碳管組成之碳管束埋入環氧樹脂基材中，在拉伸應力施加後，考慮內碳管與外層碳管之間以及外層碳管與基材間的消能，使整體複材損失因子因而上升。

在文獻中，依照內碳管與外碳管間以及外碳管與基材間之鏈結強度，可將複材受力後，界面之鏈結破壞模式分為三種情況。第一種情況為內碳管與外碳管間鏈結強度甚弱，當受外力作用後，此界面先發生破壞，當此界面鏈結皆已破壞後，外碳管與基材間之界面才到達鏈結破壞強度開始產生滑動，而外力繼續上升，最後無論內碳管與外碳管間之界面或外碳管與基材間的界面，皆無鏈結存在而產生相對的滑動消耗更多能量。第二種情況為內碳管與外碳管間鏈結強度較弱，受外力作用後先發生破壞，但此界面鏈結尚未完全破壞時，外碳管與基材間之界面已達到鏈結破壞強度開始產生滑動，則內碳管與外碳管間之界面將保持此時之狀態，其鏈結破壞長度不再增加，當外力繼續上升，最後外碳管與基材間的界面已完全破壞，但內碳管與外碳管間的界面仍保持初始破壞之長度不因外力增加而改變。第三種情況為外碳管與基材間之鏈結強度較低，使得外力作用後先發生破壞，當外力繼續上升，此界面將完全破壞無鏈結存在，而內碳管與外碳管

間的界面至始自終都保持著鏈結狀態，並沒有滑動產生。

在本研究之解析模型中，只有考慮碳管與基材界面間的滑動所導致的能量消散，與文獻中第三種情況相似，故與之比較。根據文獻[18]之材料參數代入解析模型如表 4.10 所示，值得一提的是，在此將文獻中之碳管束之半徑代入解析模型中之碳管半徑，而非單根碳管半徑長，則與文獻之結果相比較後，如圖 4.22 所示。發現當碳管與基材間的鏈結開始破壞後，解析模型的損失因子上升速度比起文獻之結果要快，其原因來自於解析模型在計算鏈結破壞長度時，由方程式(2.3.38)反求得到，其破壞得相當快速，故能快速地提供更多的能量消散，使得損失因子上升，而文獻中是假設鏈結破壞之長度隨著施加外力呈線性增加，故提供之能量消散增加速度不如解析模型中快速。

當施加之應力超過 80MPa，文獻中的模擬結果與 Zhou[4]之模型相似，基材與碳管界面之剪切應力，在鏈結受力破壞後保持定值，能量消散提升速度因此減緩，但整體應變能仍保持原來的提升速度，也因此隨著外應力上升，損失因子上升至最大值後反而呈下降趨勢。反觀本研究之解析模型，認為複合材料隨著拉伸應力上升，鏈結破壞區域之正向力應隨之增加如表 4.6 所示，代表此區域之剪切應力隨之上升，也因此整體複合材料損失因子並不會下降，反而逐漸收斂至定值。

4.4.5 解析模型與文獻模擬結果[26]比較

根據 Dwaikat 等人[26]之研究，在聚醚醚酮(Poly-ether-ether-ketone, PEEK)基材中加入奈米碳管，並建立數值模型，來探討當奈米碳管的長徑比改變，整體複合材料阻尼性質之變化。根據文獻[26]中之材料性質如表 4.11 代入解析模型中，值得一提的是，若依照本模型初始假設基材半徑為碳管之 8 倍，其碳管體積比至多為 1.5%，為了與文獻相比較，在此重新定義基材之半徑為碳管之 4 倍，令碳管之體積比為 5%，並根據表 4.2 假設碳管與基材界面鏈結強度為 5MPa，拉伸外應力固定為 50MPa，計算其損失因子後與文獻結果相比較，如圖 4.23 所示。

在圖 4.23 中發現，隨著碳管長徑比增加，整體複合材料之阻尼損失因子初始會逐漸上升，但到達其最大值後開始下降，此現象在本研究之模型與文獻之模型中有著共同的趨勢。在文獻中解釋其原因為，當施加之外力大小足夠時，碳管長度增長仍可以使碳管與基材之界面繼續滑動，產生更大的相對位移量，並因此造成更多的能量消耗，使損失因子隨碳管長徑比而提升，但當碳管長徑比超過 250，複合材料需要更高的外力來產生滑動，因此相對位移量隨碳管長度增加反而減少，其損耗的能量因而下降，導致阻尼損失因子因而快速下滑。而在本研究之解析模型中，由方程式(2.3.26)及方程式(2.3.27)計算碳管與基材間之相對應變，發現當碳管長徑比超過 250 時，碳管拉伸應力上升而基材拉伸應力相對下降，導至相對應變量縮小，

此外，由方程式(2.3.38)反求碳管與基材界面之滑移長度，發現其隨著長徑比增加呈固定比例增長，圖 4.24 為碳管與基材的相對滑移量與碳管長徑比之關係，相對滑移量由滑移長度與相對應變乘積得到，發現與文獻結果不同的是，相對滑移量隨著碳管長度增加，其增幅逐漸減緩並非下降，也因此與總應變能相除後計算整體複材損失因子，其到達最大值後，下降之速度並沒有文獻之模型來得如此快速。



第五章 結論與未來展望

5.1 結論

在本研究中根據黏著-滑動之摩擦行為，發展奈米碳管與樹脂基材組成之複合材料微觀力學模型，用以描述奈米碳管複合材料之阻尼特性。本研究也根據過去的文獻，定義碳管與基材間之鏈結強度，當模型受到拉伸外力作用時，利用此鏈結強度來區分碳管與基材滑動區域以及仍保持黏著區域，並藉由觀察碳管與樹脂界面上之剪切應力來定義碳管與樹脂間滑動區域的變化。本模型中，利用界面間的黏著-滑動行為可以有效地描述複合材料之能量損失，並根據整體複合材料之應變能計算複材之損失因子之後，可將結論整理如下：

- 1.根據解析模型的結果發現，隨著界面之摩擦係數、碳管長徑比以及體積比提升，都能有效的提升複材之阻尼性質，但在固定的拉伸應力之下，較弱的界面鏈結強度，因較早開始發生滑移現象，產生較大的相對滑移量，反而能產生較高之阻尼性質。
- 2.本研究中將解析模型與有限元素模型進行比較與討論，發現解析模型與有限元素模型可以得到相符合之趨勢，但在解析模型中，假設已滑開之碳管拉伸方向應力為線性分佈，導致當施加之外應力在 50MPa 以下，損失因子與有限元素模型有 1~2%之誤差，隨著施加外力提升，誤差也隨之增加，當施加外應力為 200MPa 時，解析模型與有限元素

模型之誤差約為 10%。

3. 本研究之解析模型與文獻之實驗結果[1, 5]進行比較，發現隨著複合材料受到的拉伸應變量增加，碳管與基材間因滑動所消耗的能量也因此提升，整體複材之阻尼性質隨之升高，解析模型與文獻中之實驗結果具有相同的趨勢。此外，解析模型與文獻之懸臂樑振動試驗結果[4]進行比較，發現在應變量 0.01% 之下，複材阻尼比在解析模型與實驗結果中皆隨應變量提升而升高，當應變量超過 0.01%，解析模型逐漸收斂至定值但實驗值卻反而降低。
4. 比較解析模型與文獻中之解析模型[4, 18]，發現在解析模型與文獻之模型中，複材之阻尼性質先隨著外力提升呈現上升趨勢，但當外力持續上升，文獻之模型假設碳管與基材滑動後其界面剪切應力保持定值，導致阻尼性質開始下降，而本解析模型卻認為剪切應力應隨外力持續上升，並使阻尼性質逐漸收斂。此外，比較解析模型與文獻中之解析模型[26]，發現隨著碳管長徑比增加，整體複合材料之阻尼性質會隨之提升，一旦長徑比超過 250，複材之阻尼性質反而開始下降，此結果在本解析模與文獻中之解析模型也具有相同的趨勢。

5.2 未來展望

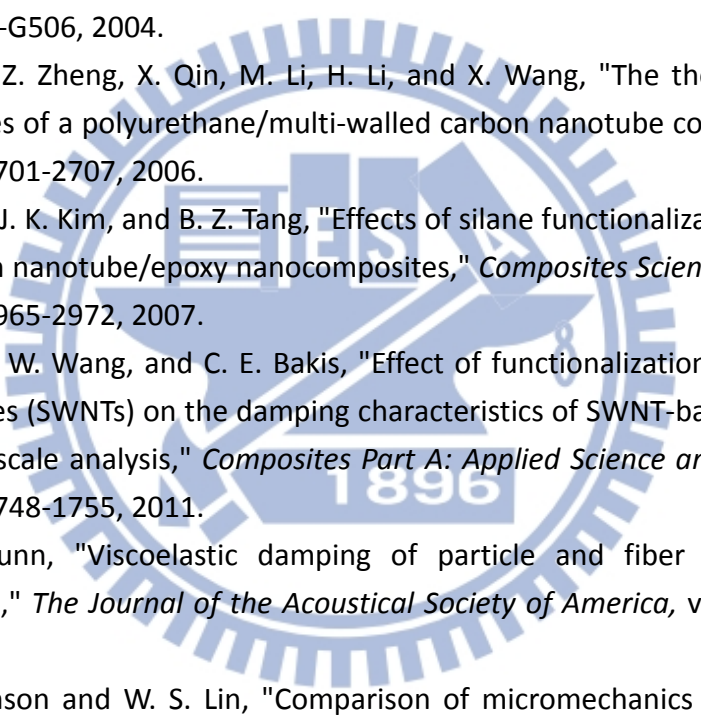
現今所研究有關於奈米碳管複合材料阻尼性質之解析模型，主要是以單壁奈米碳管為模擬對象，接下來可以將本模型推廣至多壁奈米碳管複合

材料，考慮非實心圓柱，而以多層之碳管幾何形狀加以改變，並且考慮碳管壁與壁之間界面之滑動所增加之阻尼性質，與現今碳管與基材間所產生之滑動消能、基材材料本身之阻尼消能結合，進而計算出整體多壁奈米碳管複合材料之阻尼損失因子，再與文獻中之實驗結果進行比較。



參考文獻

- [1] J. Suhr, W. Zhang, P. M. Ajayan, and N. A. Koratkar, "Temperature-activated interfacial friction damping in carbon nanotube polymer composites," *Nano letters*, vol. 6, pp. 219-223, 2006.
- [2] R. L. Dai and W. H. Liao, "Fabrication, testing, and modeling of carbon nanotube composites for vibration damping," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 131, pp. 051004-1-051004-9, 2009.
- [3] T. Ogasawara, T. Tsuda, and N. Takeda, "Stress-strain behavior of multi-walled carbon nanotube/PEEK composites," *Composites Science and Technology*, vol. 71, pp. 73-78, 2011.
- [4] X. Zhou, E. Shin, K. W. Wang, and C. E. Bakis, "Interfacial damping characteristics of carbon nanotube-based composites," *Composites Science and Technology*, vol. 64, pp. 2425-2437, 2004.
- [5] N. A. Koratkar, J. Suhr, A. Joshi, R. S. Kane, L. S. Schadler, P. M. Ajayan, and S. Bartolucci, "Characterizing energy dissipation in single-walled carbon nanotube polycarbonate composites," *Applied Physics Letters*, vol. 87, pp. 063102-1-063102-3, 2005.
- [6] S. U. Khan, C. Y. Li, N. A. Siddiqui, and J. K. Kim, "Vibration damping characteristics of carbon fiber-reinforced composites containing multi-walled carbon nanotubes," *Composites Science and Technology*, vol. 71, pp. 1486-1494, 2011.
- [7] H. Rajoria and N. Jalili, "Passive vibration damping enhancement using carbon nanotube-epoxy reinforced composites," *Composites Science and Technology*, vol. 65, pp. 2079-2093, 2005.
- [8] T. Ramanathan, H. Liu, and L. C. Brinson, "Functionalized SWNT/polymer nanocomposites for dramatic property improvement," *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, vol. 43, pp. 2269-2279, 2005.
- [9] C. A. Mitchell, R. Krishnamoorti, and P. F. Green, "Elastic modulus of single walled carbon nanotube/poly (methyl methacrylate) nanocomposites," *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, vol. 42, pp. 2286-2293, 2004.
- [10] F. T. Fisher, A. Eitanz, R. Andrews, L. S. Schadler, and L. C. Brinson, "Spectral response and effective viscoelastic properties of MWNT reinforced polycarbonate," *Advanced Composites Letters*, vol. 13, pp. 105-111, 2004.
- [11] J. S. Jang, J. Varischetti, G. W. Lee, and J. Suhr, "Experimental and analytical investigation of mechanical damping and CTE of both SiO₂ particle and carbon nanofiber reinforced hybrid epoxy composites," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 42, pp. 98-103, 2011.

- 
- [12] X. Gong, J. Liu, S. Baskaran, R. D. Voise, and J. S. Young, "Surfactant-assisted processing of carbon nanotube/polymer composites," *Chemistry of Materials*, vol. 12, pp. 1049-1052, 2000.
 - [13] E. T. Thostenson and T. W. Chou, "Aligned multi-walled carbon nanotube-reinforced composites: processing and mechanical characterization," *Journal of physics D: Applied physics*, vol. 35, pp. L77-L80, 2002.
 - [14] F. H. Gojny and K. Schulte, "Functionalisation effect on the thermo-mechanical behaviour of multi-wall carbon nanotube/epoxy-composites," *Composites Science and Technology*, vol. 64, pp. 2303-2308, 2004.
 - [15] P. C. Ramamurthy, W. R. Harrell, R. V. Gregory, B. Sadanadan, and A. M. Rao, "Mechanical and electrical properties of solution-processed polyaniline/multiwalled carbon nanotube composite films," *Journal of the Electrochemical Society*, vol. 151, pp. G502-G506, 2004.
 - [16] J. Xiong, Z. Zheng, X. Qin, M. Li, H. Li, and X. Wang, "The thermal and mechanical properties of a polyurethane/multi-walled carbon nanotube composite," *Carbon*, vol. 44, pp. 2701-2707, 2006.
 - [17] P. C. Ma, J. K. Kim, and B. Z. Tang, "Effects of silane functionalization on the properties of carbon nanotube/epoxy nanocomposites," *Composites Science and Technology*, vol. 67, pp. 2965-2972, 2007.
 - [18] A. Liu, K. W. Wang, and C. E. Bakis, "Effect of functionalization of single-wall carbon nanotubes (SWNTs) on the damping characteristics of SWNT-based epoxy composites via multiscale analysis," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 42, pp. 1748-1755, 2011.
 - [19] M. L. Dunn, "Viscoelastic damping of particle and fiber reinforced composite materials," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 98, pp. 3360-3374, 1995.
 - [20] L. C. Brinson and W. S. Lin, "Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites," *Composite Structures*, vol. 41, pp. 353-367, 1998.
 - [21] F. T. Fisher and L. C. Brinson, "Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites: theoretical models and finite-element analysis," *Composites Science and Technology*, vol. 61, pp. 731-748, 2001.
 - [22] Y. Benveniste, G. J. Dvorak, and T. Chen, "Stress fields in composites with coated inclusions," *Mechanics of Materials*, vol. 7, pp. 305-317, 1989.
 - [23] I. C. Finegan and G. Tibbetts, "Modeling and characterization of damping in carbon nanofiber/polypropylene composites," *Composites Science and Technology*, vol. 63, pp. 1629-1635, 2003.
 - [24] H. Liu and L. C. Brinson, "A hybrid numerical-analytical method for modeling the

- viscoelastic properties of polymer nanocomposites," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 73, pp. 758-768, 2006.
- [25] C. Friebel, I. Doghri, and V. Legat, "General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 2513-2541, 2006.
- [26] M. M. S. Dwaikat, C. Spitas, and V. Spitas, "A Model for Elastic Hysteresis of Unidirectional Fibrous Nano Composites Incorporating Stick-Slip," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 530, pp. 349-356, 2011.
- [27] A. Liu, J. H. Huang, K. W. Wang, and C. E. Bakis, "Effects of interfacial friction on the damping characteristics of composites containing randomly oriented carbon nanotube ropes," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 17, pp. 217-229, 2006.
- [28] A. Liu, K. W. Wang, and C. E. Bakis, "Multiscale damping model for polymeric composites containing carbon nanotube ropes," *Journal of Composite Materials*, vol. 44, pp. 2301-2323, 2010.
- [29] A. Kelly, "Interface effects and the work of fracture of a fibrous composite," *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 319, pp. 95-116, 1970.
- [30] I. H. Shames and F. A. Cozzarelli, *Elastic and inelastic stress analysis*: Taylor & Francis, 1997.
- [31] J. L. Tsai and T. C. Lu, "Investigating the load transfer efficiency in carbon nanotubes reinforced nanocomposites," *Composite Structures*, vol. 90, pp. 172-179, 2009.
- [32] H. Reismann and P. S. Pawlik, *Elasticity, theory and applications*: Wiley, 1980.
- [33] R. F. Gibson, *Principles of composite material mechanics*: McGraw-Hill (New York), 1994.
- [34] H. S. Chu, K. S. Liu, and J. W. Yeh, "Damping behaviour of in situ Al-(graphite, Al₄C₃) composites produced by reciprocating extrusion," *Journal of Materials Research*, vol. 16, pp. 1372-1380, 2001.
- [35] S. Sanvito, Y. K. Kwon, D. Tomanek, and C. J. Lambert, "Fractional quantum conductance in carbon nanotubes," *Physical review letters*, vol. 84, pp. 1974-1977, 2000.
- [36] S. J. V. Frankland, A. Caglar, D. W. Brenner, and M. Griebel, "Molecular simulation of the influence of chemical cross-links on the shear strength of carbon nanotube-polymer interfaces," *The Journal of Physical Chemistry B*, vol. 106, pp. 3046-3048, 2002.
- [37] M. Wong, M. Paramsothy, X. J. Xu, Y. Ren, S. Li, and K. Liao, "Physical interactions at carbon nanotube-polymer interface," *Polymer*, vol. 44, pp. 7757-7764, 2003.
- [38] K. Liao and S. Li, "Interfacial characteristics of a carbon nanotube-polystyrene

- composite system," *Applied Physics Letters*, vol. 79, pp. 4225-4227, 2001.
- [39] Q. Zheng, Q. Xue, K. Yan, X. Gao, Q. Li, and L. Hao, "Influence of chirality on the interfacial bonding characteristics of carbon nanotube polymer composites," *Journal of Applied Physics*, vol. 103, p. 044302, 2008.
- [40] J. Q. Liu, T. Xiao, K. Liao, and P. Wu, "Interfacial design of carbon nanotube polymer composites: a hybrid system of noncovalent and covalent functionalizations," *Nanotechnology*, vol. 18, p. 165701, 2007.
- [41] C. Wei, "Adhesion and reinforcement in carbon nanotube polymer composite," *Applied Physics Letters*, vol. 88, p. 093108, 2006.
- [42] J. Gou, Z. Liang, C. Zhang, and B. Wang, "Computational analysis of effect of single-walled carbon nanotube rope on molecular interaction and load transfer of nanocomposites," *Composites Part B: Engineering*, vol. 36, pp. 524-533, 2005.
- [43] Q. Zheng, Q. Xue, K. Yan, X. Gao, Q. Li, and L. Hao, "Effect of chemisorption on the interfacial bonding characteristics of carbon nanotube-polymer composites," *Polymer*, vol. 49, pp. 800-808, 2008.
- [44] A. H. Barber, S. R. Cohen, and H. D. Wagner, "Measurement of carbon nanotube-polymer interfacial strength," *Applied Physics Letters*, vol. 82, pp. 4140-4142, 2003.
- [45] C. A. Cooper, S. R. Cohen, A. H. Barber, and H. D. Wagner, "Detachment of nanotubes from a polymer matrix," *Applied Physics Letters*, vol. 81, pp. 3873-3875, 2002.
- [46] H. D. Wagner, O. Lourie, Y. Feldman, and R. Tenne, "Stress-induced fragmentation of multiwall carbon nanotubes in a polymer matrix," *Applied Physics Letters*, vol. 72, pp. 188-190, 1998.
- [47] D. Roy, S. Bhattacharyya, A. Rachamim, A. Plati, and M. L. Saboungi, "Measurement of interfacial shear strength in single wall carbon nanotubes reinforced composite using Raman spectroscopy," *Journal of Applied Physics*, vol. 107, pp. 043501-043501-6, 2010.
- [48] F. Deng, T. Ogasawara, and N. Takeda, "Pull-out testing for individual MWCNT and functionalized MWCNT," In: *Proceedings US-Japan conference on composite materials Chemistry and Physics*, 2008.
- [49] T. Tsuda, T. Ogasawara, F. Deng, and N. Takeda, "Direct measurements of interfacial shear strength of multi-walled carbon nanotube/PEEK composite using a nano-pullout method," *Composites Science and Technology*, vol. 71, pp. 1295-1300, 2011.

附錄

附錄 1 第一階段碳管應力推導

先將方程式(2.3.4)代入方程式(2.3.13)進行移項，表示成：

$$\frac{d\sigma_t^B}{dz} = \frac{-4G_m}{r_t b} (w_o^B - w_i^B) \quad (\text{A.1.1})$$

對方程式(A.1.1)再微分一次，得到：

$$\frac{d^2\sigma_t^B}{dz^2} = \frac{-2(\sigma_o^B - \sigma_i^B)}{r_t b(1-\nu_m)} \quad (\text{A.1.2})$$

將方程式(2.3.8)代入方程式(A.1.2)，得到：

$$\frac{d^2\sigma_t^B}{dz^2} = \frac{-2(\sigma_o^B - \frac{E_m}{E_t}\sigma_t^B)}{r_t b(1-\nu_m)} \quad (\text{A.1.3})$$

又將方程式(2.3.11)代入方程式(A.1.3)，得到：

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_t^B}{dz^2} &= \frac{-12}{r_t(8b^2r_t + 5b^3)(1-\nu_m)} \\ &\times \left[\sigma_o^2 - \sigma_t r_t^2 - \frac{E_m}{E_t} \sigma_t^B (b^2 + 2br_t) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

求解方程式(A.1.4)，得到碳管應力 $\sigma_t(z)$ 表示為：

$$\sigma_t^B(z) = (\sigma_t)_h + (\sigma_t)_p \quad (\text{A.1.5})$$

其中 $(\sigma_t)_h$ 以及 $(\sigma_t)_p$ 分別為通解以及特解， λ 為微分方程求解中的根，表示為：

$$(\sigma_t)_h = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} \quad (\text{A.1.6})$$

$$(\sigma_t)_p = \frac{E_t \sigma_o^2}{r_t^2 E_t + (b^2 + 2br_t) E_m} \quad (\text{A.1.7})$$

$$\lambda = \left\{ 12 \left[\frac{r_t^2 E_t + (b^2 + 2br_t) E_m}{r_t (8b^2 r_t + 5b^3) (1 + \nu_m) E_t} \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{A.1.8})$$

將碳管應力代入方程式(2.3.13)，得到：

$$\tau_t^B(z) = \frac{-r_t \lambda}{2} (C_1 e^{\lambda z} - C_2 e^{-\lambda z}) \quad (\text{A.1.9})$$

為了求得未知常係數係數 C_1 及 C_2 ，將邊界條件式(2.3.14)代入(A.1.5)得到：

$$\frac{E_t \sigma_o^2}{r_t^2 E_t + (b^2 + 2br_t) E_m} + C_1 e^{\lambda L_t / 2} + C_2 e^{-\lambda L_t / 2} = 0 \quad (\text{A.1.10})$$

再將邊界條件式(2.3.15)代入(A.1.9)得到：

$$\frac{-r_t \lambda}{2}(C_1 - C_2) = 0 \quad (\text{A.1.11})$$

由方程式(A.1.10)及方程式(A.1.11)求得係數 C_1 及 C_2

$$C_1 = C_2 = \frac{I}{(e^{\lambda L_t / 2} + e^{-\lambda L_t / 2})} \left[\frac{-E_t \sigma_o^2}{r_t^2 E_t + (b^2 + 2br_t)E_m} \right] \quad (\text{A.1.12})$$

則將 C_1 及 C_2 代回方程式(A.1.7)及方程式(A.1.9)得到：

$$\sigma_t^B(z) = \frac{k_2}{k_1} \cdot \sigma \left[1 - \frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda L_t / 2)} \right] \quad (\text{A.1.13})$$

$$\tau_t^B(z) = c_1 \cdot \sigma \left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda L_t / 2)} \right] \quad (\text{A.1.14})$$

其中

$$c_1 = \frac{r_t \lambda k_2}{r_t^2 + k_1} \quad (\text{A.1.15})$$

$$k_1 = r_t^2 + \frac{E_m}{E_t} (b^2 + 2br_t) \quad (\text{A.1.16})$$

$$k_2 = r_o^2 \quad (\text{A.1.17})$$

附錄 2 已滑開區域徑向正向力推導

由彈性力學[32]中，厚壁筒受到內外壓如圖 A.1 所示，其側向之位移 u 可以表示為：

$$u = \frac{1-\nu}{E} \times \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E} \times \frac{a^2 b^2 (p_1 - p_2)}{b^2 - a^2} \times \frac{1}{r} \quad (\text{A.2.1})$$

其中 ν 、 E 分別為厚壁筒之柏松比(Poisson's ratio)以及楊式模數(Young's modulus)， a 、 b 分別為厚壁筒之內半徑以及外半徑， p_1 、 p_2 分別為施加在厚壁筒上之外壓力及內壓力， r 為半徑上任一點位置。由以上公式將之考慮為本模型之碳管，則其中內半徑以及內壓力為零，外半徑為 r_t ，外壓力為碳管與基材間之正向力 p ，則在碳管最外緣($r = r_t$)處，因正向力所產生之徑向位移可以改寫為：

$$u_t = \nu_t \frac{p}{E_t} r_t \quad (\text{A.2.2})$$

將方程式(A.2.1)考慮為本模型之基材區域，則其中外壓力為零，內半徑及外半徑為 r_i 及 r_o ，內壓力為碳管與基材間之正向力 p ，則在基材最內緣($r = r_i$)處，因正向力所產生之徑向位移可以改寫為：

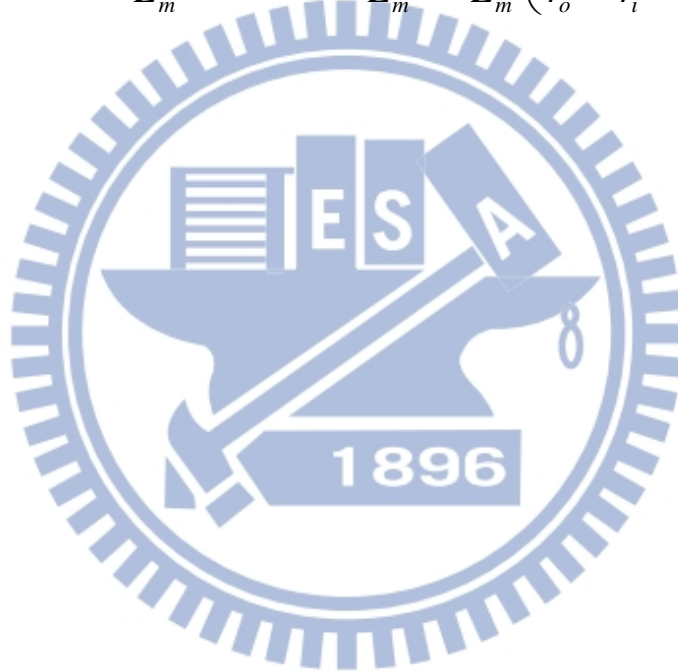
$$u_i = \left(\frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} + \nu_m \right) \frac{r_i p}{E_m} \quad (\text{A.2.3})$$

由圖 2.10 所示，碳管與基材的徑向位移由波松效應以及正向力所造成，則

在第二階段 B 區之碳管基材徑向之位移，可分別表示為：

$$u_t^B = u_t + \nu_t \frac{\overline{r_t \sigma_t^B}}{E_t} = \nu_t \frac{\overline{r_t \sigma_t^B}}{E_t} + \nu_t \frac{r_t p}{E_t} \quad (\text{A.2.4})$$

$$u_m^B = \nu_m \frac{\overline{r_i \sigma_m^B}}{E_m} - u_i = \nu_m \frac{\overline{r_i \sigma_m^B}}{E_m} - \frac{r_i p}{E_m} \left(\frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} + \nu_m \right) \quad (\text{A.2.5})$$



附錄 3 第二階段 C 區碳管應力推導

因 C 區域之應力分佈與第一階段之 B 區相似，只在碳管上緣之邊界條件有所不同，附錄 1 之推導中，由方程式(A.1.5)及方程式(A.1.9)可以得到第二階段 C 區碳管之應力與剪應力為：

$$\sigma_t^C(z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} + \frac{E_t \sigma_o^2}{r_t^2 E_t + (b^2 + 2br_t) E_m} \quad (\text{A.3.1})$$

$$\tau_t^C(z) = \frac{-r_t \lambda}{2} (C_1 e^{\lambda z} - C_2 e^{-\lambda z}) \quad (\text{A.3.2})$$

其中

$$\lambda = \left\{ 12 \left[\frac{r_t^2 E_t + (b^2 + 2br_t) E_m}{r_t (8b^2 r_t + 5b^3) (1 + \nu_m) E_t} \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{A.3.3})$$

因為 C 區碳管上緣之應力與 B 區應力連續，將 $z' = \frac{L_{slip}}{2}$ 代入方程式 (2.3.25)，及碳管中心位置之剪應力為零，碳管之邊界條件可以表示為：

$$\sigma_t^C(z = \frac{L_{stick}}{2}) = \sigma_t^B(z' = \frac{L_{slip}}{2}) = \frac{\tau_t^B L_{slip}}{r_t} \quad (\text{A.3.4})$$

$$\tau_t^C(z = 0) = 0 \quad (\text{A.3.5})$$

將邊界條件代入式(A.3.1)及(A.3.2)，則將常係數 C_1 、 C_2 解出：

$$C_1 = C_2 = \left(\frac{\tau_t^B L_{slip}}{r_t} - \frac{E_t \sigma_o^2}{r_t^2 E_t + E_m (b^2 + 2br_t)} \right) \times \frac{l}{e^{\lambda \left(\frac{L_{stick}}{2} \right)} + e^{-\lambda \left(\frac{L_{stick}}{2} \right)}} \quad (A.3.5)$$

將常係數代回方程式(A.3.1)及(A.3.2)，則 C 區碳管之正向應力 σ_t^C 及剪應力 τ_t^C 分別表示為：

$$\sigma_t^C = \frac{\mu_0 p L_{slip}}{r_t} \times \left[\frac{\cosh \lambda z}{\cosh \lambda (L_{stick} / 2)} \right] + \frac{k_2}{k_1} \cdot \sigma \left[1 - \frac{\cosh \lambda z}{\cosh \lambda (L_{stick} / 2)} \right] \quad (A.3.6)$$

$$\tau_t^C = \left(c_1 \sigma - \frac{\lambda \tau_t^B L_{slip}}{2} \right) \left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh \lambda (L_{stick} / 2)} \right] \quad (A.3.7)$$

附錄 4 已滑開區域長度計算程式碼

```
%-----  
%本程式用以計算碳管與基材已滑動區域長度  
%以 4.1 小節之模型為例，碳管長度為 50nm，施加外應力由 0~200MPa  
%-----  
  
clear all  
clc  
  
%-----  
%          碳管材料參數  
%-----  
Rint=0.7;          % 半徑  
Eeq=1000*1000;     % 楊氏模數  
veq=0.3;           % 柏松比  
Geq=Eeq/(2*(1+veq))*1000; % 剪力模數  
l=50;              % 長度  
vrp=0.01;          % 體積比  
  
%-----  
%          基材材料參數  
%-----  
Rm=Rint*8;         % 半徑(隨體積比調整)  
E1=2.1*1000;       % 楊氏模數  
gg1=0.008 ;        % 損失因子
```

```

v1=0.36;                                % 柏松比

G1=E1/(2*(1+v1)) ;                      % 剪力模數

%-----
%                                     體積
%-----

Vrp=pi*(Rint^2)*l;                       %碳管體積

Vrs=(Vrp/vrp)-Vrp;                       %基材體積

V=Vrp+Vrs;                               %總體積

%-----
%                                     使用參數設定
%-----

La=V/(pi*Rm^2);                           %基材高度
b=Rm-Rint;

Ec=Eeq*(Rint^2/Rm^2)+E1*(1-Rint^2/Rm^2); %碳管同高度區域等效 E 值

Ecom=1/(((La-l)/La)/E1+((l/La)/Ec))/1000; %複材等效楊氏模數

k1=Rint^2+E1*(b^2+2*b*Rint)/Eeq;
k2=(b+Rint)^2;
a1=(8*(b^2)*Rint+5*b^3)*(1+v1)*Rint;      %for c1
b1=(12*k1/a1)^(1/2);                      %for c1
c1=Rint*b1*k2/(Rint^2+k1);
u0=0.1;

%-----
%                                     開啓文件檔存入資料
%-----

```

```

fout=fopen('data.txt','w');

%-----
%
%          計算破壞長度
%-----

syms leff;                                     %定義未知數

for i=1:200;                                   %迴圈數

s2=8.8373+i;                                   %第二階段應力

% 8.8373= $\sigma_c$ 

shear=18 ;                                    %破壞剪切強度
cc=(c1*s2+shear)/(c1*s2-shear);               %for leff
leff=1-(1/b1)*log(cc);                        %初始值

%-----
%          徑向正向力
%-----

c2=v1+(Rm^2+Rint^2)/(Rm^2-Rint^2);
k3=2*Eeq*v1*Rm^2*Rint;
k4=(c2*Eeq+veq*E1)*(Rm^2-Rint^2)*Rint;
k5=leff*u0*(Eeq*v1*Rint^2+E1*veq*(Rm^2-Rint^2));
p=s2*k3/(k4+k5);

%-----
%          求解破壞長度
%-----

shear_stress_tB2=u0*p;                        %碳管上剪應力

```

```

ll=solve((c1*s2-b1*shear_stress_tB2*lef/2)*(tanh(b1*(1-lef)/2))-shear); % 求解

lefff=eval(ll); %轉化為純數值

%-----
%      將結果存出至 data.txt 檔
%-----

fprintf(fout,'%10g\n',leff);
end

```



附錄 5 複合材料損失因子計算程式碼

```
%-----  
%本程式用以計算施加外應力與複材損失因子關係  
%以 4.1 小節之模型為例，碳管長度為 50nm，施加外應力由 0~200MPa  
%-----  
  
clear all  
clc  
  
%-----  
%          碳管材料參數  
%-----  
Rint=0.7;          % 半徑  
Eeq=1000*1000;     % 楊氏模數  
veq=0.3;           % 柏松比  
Geq=Eeq/(2*(1+veq))*1000; % 剪力模數  
l=50;              % 長度  
vrp=0.01;          % 體積比  
  
%-----  
%          基材材料參數  
%-----  
Rm=Rint*8;         % 半徑  
E1=2.1*1000;       % 楊氏模數  
gg1=0.008 ;        % 損失因子
```

```

v1=0.36;                                % 柏松比

G1=E1/(2*(1+v1)) ;                      % 剪力模數

%-----
%                                     體積
%-----

Vrp=pi*(Rint^2)*l;                      %碳管體積

Vrs=(Vrp/vrp)-Vrp;                      %基材體積

V=Vrp+Vrs;                              %總體積

%-----
%                                     使用參數設定
%-----

La=V/(pi*Rm^2);                          %基材高度
b=Rm-Rint;

Ec=Eeq*(Rint^2/Rm^2)+E1*(1-Rint^2/Rm^2); %碳管同高度區域等效 E 值

Ecom=1/(((La-l)/La)/E1+((l/La)/Ec))/1000; %複材等效楊氏模數

k1=Rint^2+E1*(b^2+2*b*Rint)/Eeq;
k2=(b+Rint)^2;
a1=(8*(b^2)*Rint+5*b^3)*(1+v1)*Rint;    %for c1
b1=(12*k1/a1)^(1/2);                    %for c1
c1=Rint*b1*k2/(Rint^2+k1);
u0=0.1;

%-----
%                                     將 data.txt 檔讀入
%-----

```

```

fout=fopen('data.txt','r');
for i=1:100
LL(i)=fscanf(fout,'%e',1);
end

%-----
%
%第一階段
%-----

syms z1 r s1 %定義未知數

shear=18 ; %剪切強度

g1=sinh(b1*z1)/cosh(b1*l/2); %式(2.3.17)後半部份
cz1=1-cosh(b1*z1)/cosh(b1*l/2); %式(2.3.16)後半部份

%-----
%
%第一階段應力
%-----

stress1=shear/(c1*tanh(b1*l/2)); %  $\sigma_c$ 

shear_stress_t1=c1*g1*s1; %  $\tau_t^B$ 

stress_t1=(k2/k1)*s1*cz1; %  $\sigma_t^B$ 

shear_stress_rs1=shear_stress_t1*(b+Rint-r)/b; %  $\tau_m^B$ 

stress_Rint=E1*stress_t1/Eeq; %  $\sigma_i^B$ 

stress_Rm=stress_Rint+(6/(8*b*Rint+5*(b^2)))*(s1*((b+Rint)^2)-stress_t1*(Rint^2)-stress_Rint*(b^2+2*b*Rint)); %  $\sigma_o^B$ 

stress_rs1=stress_Rint+(-2*b*Rint-Rint^2+2*(b+Rint)*r-r^2)*(stress_Rm-stress

```

_Rint)/b^2;

% σ_m^B

%-----

% 第一階段能量積分

%-----

%-----以參數簡化程式碼-----

stress_rs11=r*stress_rs1^2;

shear_stress_rs11=r*shear_stress_rs1^2;

stress_t11=r*stress_t1^2;

%-----基材能量積分-----

in_stress_rs=int(stress_rs11,'z1',-l/2,l/2); %應力 z 方向積分

in_stress_rs1=int(in_stress_rs,'r',Rint,Rm); %應力徑向積分

in_shear_stress_rs=int(shear_stress_rs11,'z1',-l/2,l/2); %剪應力 z 方向積分

in_shear_stress_rs1=int(in_shear_stress_rs,'r',Rint,Rm); %剪應力徑向積分

%-----碳管能量積分-----

in_stress_t=int(stress_t11,'z1',-l/2,l/2); %應力 z 方向積分

in_stress_t1=int(in_stress_t,'r',Rint,Rm); %應力徑向積分

%-----能量加總-----

Wst1=(pi*Rm^2)*(La-l)*(s1^2)/(2*E1); %A 區能量

Wst2=pi*in_stress_rs1/E1+pi*in_shear_stress_rs1/G1; %B 區基材能量

Wst3=pi*in_stress_t1/Eeq; %B 區碳管能量

Wst11=Wst1+Wst2+Wst3; %總能量

Wrs1=(Wst1+Wst2)*gg1; %基材消耗能量

Wslip=0; %滑動消耗能量

%-----

% 計算損失因子

%-----

for i=1:50; %50 步迴圈

s1=i*stress1/50; %第一階段施加外力

%-----轉化為純數值-----

Wrs=eval(Wrs1);

Wst=eval(Wst11);

WstA=eval(Wst1);

WstB=eval(Wst2);

WstC=eval(Wst3);

lossfactor(i+1,1)=s1; %施加外力

lossfactor(i+1,2)=(Wrs+Wslip)/(Wst); %損失因子

%-----

% 能量分量貢獻

%-----

com1(i+1,1)=s1;

com1(i+1,2)=WstA; %A 區能量

com2(i+1,1)=s1;

com2(i+1,2)=WstB; %B 區基材能量

```

com3(i+1,1)=s1;
com3(i+1,2)=WstC;          %B 區碳管能量
com4(i+1,1)=s1;
com4(i+1,2)=Wst;           %總能量
com5(i+1,1)=s1;
com5(i+1,2)=Wrs;           %基材消耗能量
com6(i+1,1)=s1;
com6(i+1,2)=Wslip;         %滑動所消耗能量
com7(i+1,1)=s1;
com7(i+1,2)=Wrs+Wslip;     %總消耗能量

%-----
%
%-----
檢視各細項

Friction(i+1,1)=s1;
Friction(i+1,2)=0;         %摩擦力
u1_u2_a(i+1,1)=s1;
u1_u2_a(i+1,2)=0;         %相對位移量
lef(i,1)=s1;
lef(i,2)=0;               %破壞長度
end

```

```

%-----
%
%-----
第二階段

```

```

syms z2 r s2 x             %定義未知數

```

```

for j=1:200;                                %100 步迴圈

s2=s1+j;                                    %第二階段施加外力

leff=LL(j);                                %破壞長度

%-----
%                徑向正向力
%-----

c2=v1+(Rm^2+Rint^2)/(Rm^2-Rint^2);
k3=2*Eeq*v1*Rm^2*Rint;
k4=(c2*Eeq+veq*E1)*(Rm^2-Rint^2)*Rint;
k5=leff*u0*(Eeq*v1*Rint^2+E1*veq*(Rm^2-Rint^2));
p=s2*k3/(k4+k5);

%-----
%                第二階段 B 區應力
%-----

shear_stress_tB2=u0*p;                      %  $\tau_t^B$ 

stress_tB2=leff*shear_stress_tB2/(2*Rint);  %  $\sigma_t^B$ 

stress_rsB2=(s2*Rm^2-stress_tB2*Rint^2)/(Rm^2-Rint^2); %  $\sigma_m^B$ 

shear_stress_rsB2=shear_stress_tB2*(b+Rint-r)/b; %  $\tau_m^B$ 

shear_stress_rsB=r*shear_stress_rsB2^2;    %平方

%-----
%                第二階段 B 區能量積分
%-----

```

in_shear_stress_rsB=int(shear_stress_rsB,'r',Rint,Rm); %剪應力對徑向積分

%-----

% 第二階段 C 區應力

%-----

g2=sinh(b1*z2)/cosh(b1*(l/2-leff/2)); %式(2.3.37)

cz2=1-cosh(b1*z2)/cosh(b1*(l/2-leff/2)); %式(2.3.36)

cz3=cosh(b1*z2)/cosh(b1*(l/2-leff/2)); %式(2.3.36)

shear_stress_tC2=(c1*s2-b1*shear_stress_tB2*leff/2)*g2; % τ_i^c

stress_tC2=leff*shear_stress_tB2*cz3/Rint+(k2/k1)*s2*cz2; % σ_i^c

stress_RintC2=E1*stress_tC2/Eeq; % σ_i^c

stress_RmC2=stress_RintC2+(6/(8*b*Rint+5*(b^2)))*(s2*((b+Rint)^2)-stress_tC2*(Rint^2)-stress_RintC2*(b^2+2*b*Rint)); % σ_o^c

stress_rsC2=stress_RintC2+(-2*b*Rint-Rint^2+2*(b+Rint)*r-r^2)*(stress_RmC2-stress_RintC2)/b^2; % σ_m^c

shear_stress_rsC2=shear_stress_tC2*(b+Rint-r)/b; % τ_m^c

%-----以參數簡化程式碼-----

stress_rs22=r*stress_rsC2^2;

shear_stress_rs22=r*shear_stress_rsC2^2;

stress_t22=r*stress_tC2^2;

%-----

% 第二階段 C 區能量積分

%-----

$ll=(l-leff)/2;$

% L_{stick}

$in_stress_rs=int(stress_rs22,'z2',-ll,ll);$

%基材應力 z 方向

$in_stress_rs2=int(in_stress_rs,'r',Rint,Rm);$

%基材應力徑向

$in_shear_stress_rs=int(shear_stress_rs22,'z2',-ll,ll);$

%基材剪應力 z 方向

$in_shear_stress_rs2=int(in_shear_stress_rs,'r',Rint,Rm);$

%基材剪應力徑向

$in_stress_t=int(stress_t22,'z2',-ll,ll);$

%碳管應力 z 方向

$in_stress_t2=int(in_stress_t,'r',Rint,Rm);$

%碳管應力徑向

%-----能量加總-----

$WstA=(pi*Rm^2)*(La-l)*(s2^2)/(2*E1);$

%A 區能量

$WstB1=(stress_rsB2^2)/(2*E1)*(leff*(pi*Rm^2-pi*Rint^2))+pi*leff/G1*in_shear_stress_rsB;$

%B 區基材能量

$WstB2=(leff*pi*Rint^2)*(stress_tB2^2)/(2*Eeq);$

%B 區碳管能量

$WstC1=pi*in_stress_rs2/E1+pi*in_shear_stress_rs2/G1;$

%C 區基材能量

$WstC2=pi*in_stress_t1/Eeq;$

%C 區碳管能量

$Wst2=WstA+WstB1+WstB2+WstC1+WstC2;$

%總能量

$Wrs2=(WstA+WstB1+WstC1)*gg1;$

%基材消耗總能量

%-----

% 滑動所消耗能量

%-----

```
k6=2*pi*(Rm^2)*Rint*u0*k3*(leff^2)/(E1*(Rm^2-Rint^2)*(k4+k5));
k7=pi*(Rint^2)*(u0^2)*(k3^2)*(leff^3)/(E1*(Rm^2-Rint^2)*((k4+k5)^2));
k8=pi*(u0^2)*(k3^2)*(leff^3)/(Eeq*((k4+k5)^2));
Wslip2=s2^2*(k6-k7-k8)/2;
```

%-----轉換為純數值-----

```
A=eval(WstB1);
AA=WstB2;
AAA=WstA;
B=eval(WstC1);
BB=eval(WstC2);
Wst22=eval(Wst2);
Wslip22=Wslip2;
Wrs22=eval(Wrs2);
stress_tB22=stress_tB2;
stress_rsB22=stress_rsB2;
shear_stress_tB22=shear_stress_tB2;
lefff=leff;
p1=p;
```

%-----

% 計算損失因子

%-----

```
lossfactor(i+j,1)=s2; %施加外力
```

```
lossfactor(i+j,2)=4*Wslip22/(2*pi*Wst22)+Wrs22/Wst22; %損失因子
```

%-----

% 能量各分量貢獻

%-----

com11(i+j,1)=s2;

com11(i+j,2)=AAA; %A 區能量

com22(i+j,1)=s2;

com22(i+j,2)=A; %B 區基材能量

com33(i+j,1)=s2;

com33(i+j,2)=AA; %B 區碳管能量

com44(i+j,1)=s2;

com44(i+j,2)=B; %C 區基材能量

com55(i+j,1)=s2;

com55(i+j,2)=BB; %C 區碳管能量

com4(i+j,1)=s2;

com4(i+j,2)=Wst22; %總能量

com5(i+j,1)=s2;

com5(i+j,2)=Wrs22; %基材總消耗能量

com6(i+j,1)=s2;

com6(i+j,2)=Wslip22; %滑動消耗能量

%-----

% 檢視各細項

%-----

Friction(i+j,1)=s2;

Friction(i+j,2)=2*pi*Rint*lefff*shear_stress_tB22; %摩擦力

u1_u2_a(i+j,1)=s2;

u1_u2_a(i+j,2)=(stress_rsB22/E1-stress_tB22/Eeq)*lefff; %相對位移量

pp(j,1)=s2;	
pp(j,2)=p1;	%正向力
lef(i+j,1)=s2;	
lef(i+j,2)=lefff/2;	%一半之滑開長度
end	%程式結束



附表

表 4.1 材料參數列表 1

	Resin	SWNT	Interface
Young's modulus (GPa)	2.1	1000	-
Loss factor	0.008	-	-
Poisson's ratio	0.36	0.3	-
Radius(nm)	5.6	0.7	-
Bonding strength (MPa)	-	-	18
Friction coefficient	-	-	0.1



表 4.2 界面剪切強度列表

Method		Materials	Interfacial shear strength (MPa)	Author
Simulation	MD	MWNT/polyethylene	2	Sanvito et al. [35]
	MD	MWNT/crystalline polyethylene	2.8	Frankland et al. [36]
	MD	MWNT/cross-linked crystalline polyethylene	110	Frankland et al. [36]
	MD	MWNT/PS	186	Wong et al. [37]
	MD	MWNT/epoxy	138	Wong et al. [37]
	MD	MWNT/PS	160	Liao and Li[38]
	MD	SWNT/PMMA	36	Zheng et al. [39]
	MD	SWNT/epoxy	170	Liu et al. [40]
	MD	MWNT/PE	46	Wei[41]
	MD	SWNT rope/epoxy	36	Gou et al. [42]
	MD	SWNT Oxide/PE	600	Zheng et al. [43]
	MD	SWNT/epoxy	18	Liu et al. [18]
Experiment	AFM	MWNT/polyethylene-butene	10–90	Barber et al. [44]
	AFM	MWNT/epoxy	35–380	Copper et al. [45]
	TEM	MWNT/epoxy	500	Wagner et al. [46]
	RMN	SWNT/PVA	188	Roy et al. [47]
	SEM/NMS	MWNT/PEEK	4.0	Deng et al. [48]
	SEM/NMS	MWNT/PEEK	3.5-7	Tsuda et al. [49]
	Tensile	MWCNT/PEEK	2.1-6.2	Ogasawara et al. [3]

表 4.3 基材與碳管交界面之剪切應力((a)Model 1 (b)Model 2 (c)Model 3)

(a)	
	Shear stress (MPa)
Node 1	20.143
Node 2	18.012
Node 3	20.142
Node 4	18.010
(b)	
	Shear stress (MPa)
Node 5	21.835
Node 6	18.216
Node 7	21.834
Node 8	18.215
(c)	
	Shear stress (MPa)
Node 9	23.152
Node 10	18.306
Node 11	23.150
Node 12	18.306

表 4.4 已滑開碳管壁上之平均剪切應力收斂性測試結果

	Model 1	Model 2	Model 3
τ_{slip} (MPa)	1.721	1.736	1.739

表 4.5 損失因子收斂性測試結果

	Loss factor
Model 1	0.00695
Model 2	0.00693
Model 3	0.00693

表 4.6 平均徑向之正向應力與施加外應力關係((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)

(a)		
Applied stress (MPa)	Average normal stress P	
	Analytical model (MPa)	FEM model (MPa)
10	5.194	3.652
15	7.715	5.831
25	12.80	9.901
35	17.88	14.68
50	25.51	21.78
100	50.98	43.46
150	76.41	61.13
200	101.85	76.41
(b)		
Applied stress (MPa)	Average normal stress P	
	Analytical model (MPa)	FEM model (MPa)
10	5.020	3.586
15	7.466	5.531
25	12.39	9.701
35	17.32	14.28
50	24.72	21.28
100	49.35	39.42
150	74.01	59.35
200	98.67	78.94

表 4. 7 參數列表 2[1]

	Resin	SWNT
Young's modulus (GPa)	2.1	1000
Loss factor	0.008	-
Poisson's ratio	0.36	0.3
Radius (nm)	140	17.5
Length (nm)	-	1000
Volume fraction (%)	-	0.3 ^a

^a conversion from wt%

表 4. 8 材料參數列表 3[5]

	Resin	SWNT
Young's modulus (GPa)	2.1	1000
Loss factor	0.011	-
Poisson's ratio	0.36	0.3
Radius (nm)	140	17.5
Length (nm)	-	1000
Volume fraction (%)	-	0.3 ^a

^a conversion from wt%

表 4. 9 材料參數列表 4[4]

	Resin	SWNT
Young's modulus (GPa)	3.3	1003
Loss factor	0.02	-
Poisson's ratio	0.35	0.17
Radius (nm)	5.6	0.7
Length (nm)	-	1000
Volume fraction (%)	-	0.54
Bonding strength (MPa)	0.2	

表 4. 10 材料參數列表 5[18]

	Resin	SWNT
Young's modulus (GPa)	3.3	641.1
Loss factor	0.015	-
Poisson's ratio	0.35	0.3
Radius (nm)	20.352	2.544
Length (nm)	-	1500
Volume fraction (%)	-	0.5
Bonding strength (MPa)	18	

表 4. 11 材料參數列表 6[26]

	Resin	SWNT
Young's modulus (GPa)	4.2	1000
Loss factor	0.048	-
Poisson's ratio	0.35	0.3
Radius (nm)	2.8	0.7
Length (nm)	-	35-560
Volume fraction (%)	-	5



附圖

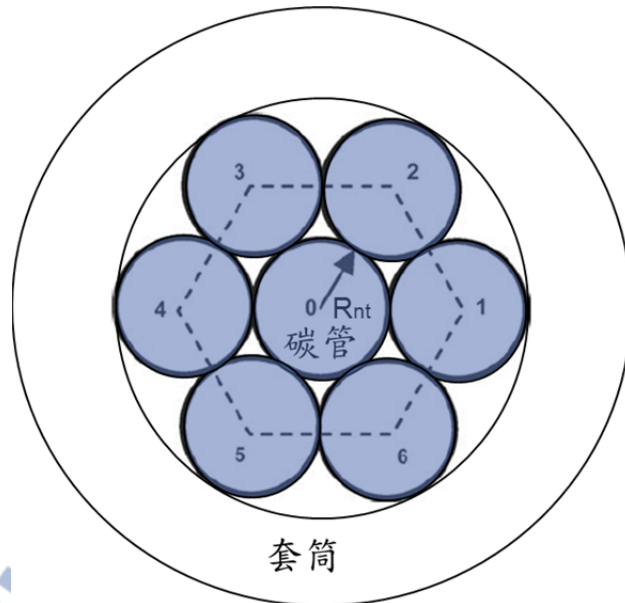


圖 2.1 Liu[18]模型碳管束與套筒示意圖

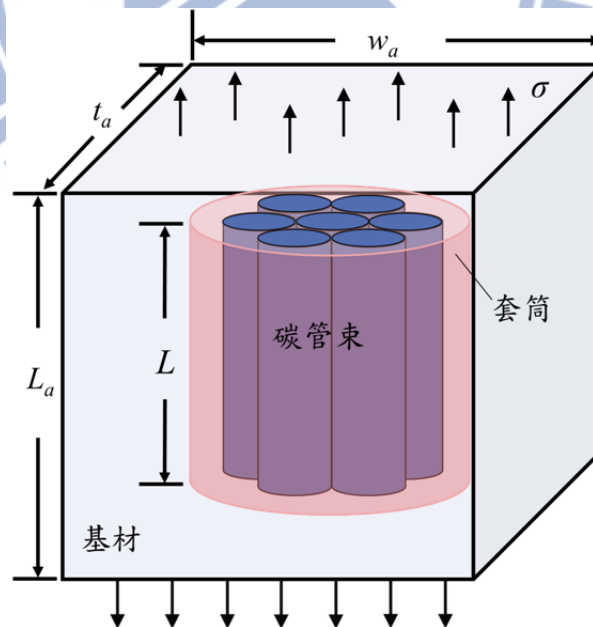


圖 2.2 Liu[18]模型受均佈拉應力作用

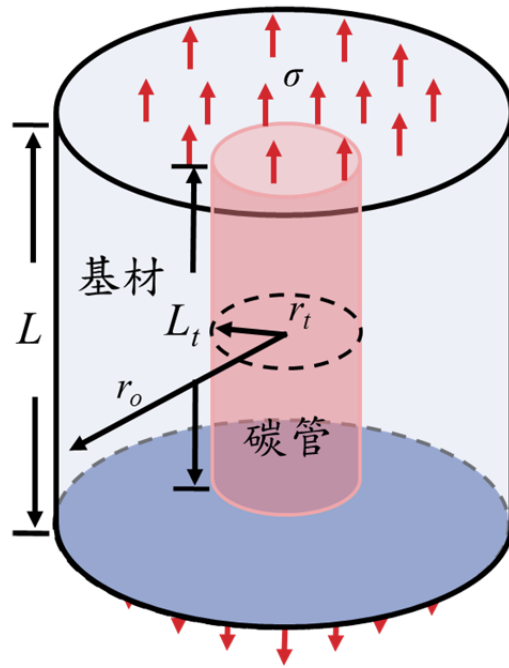


圖 2.3 模型受均佈拉應力作用

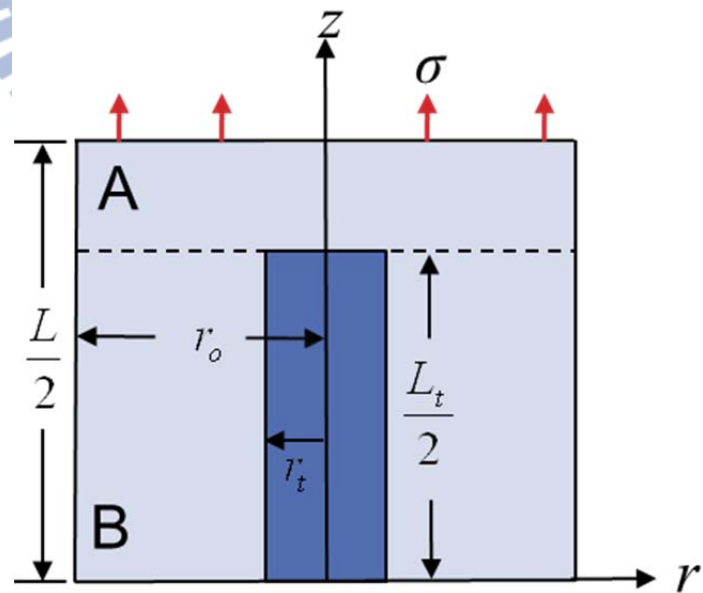


圖 2.4 第一階段整體複合材料示意圖

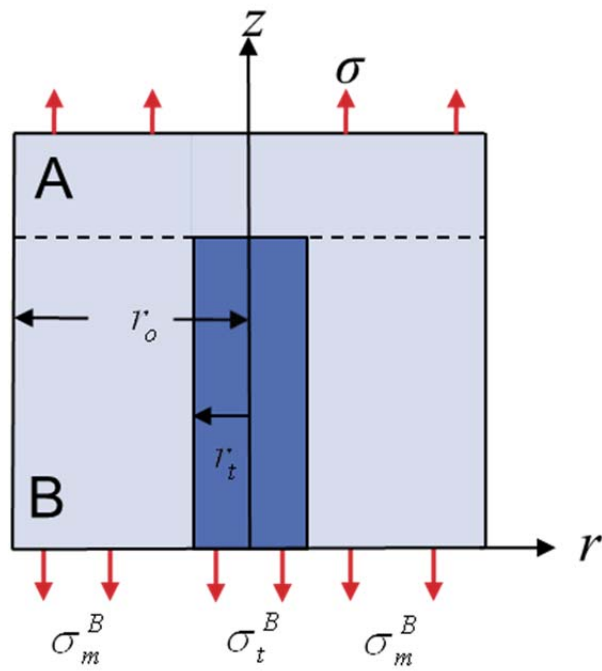


圖 2.5 整體複合材料自由體圖

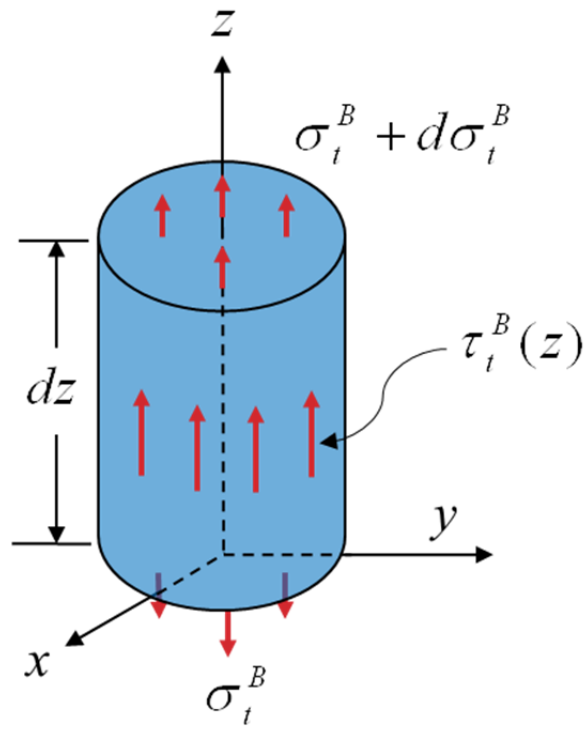


圖 2.6 奈米碳管力平衡示意圖

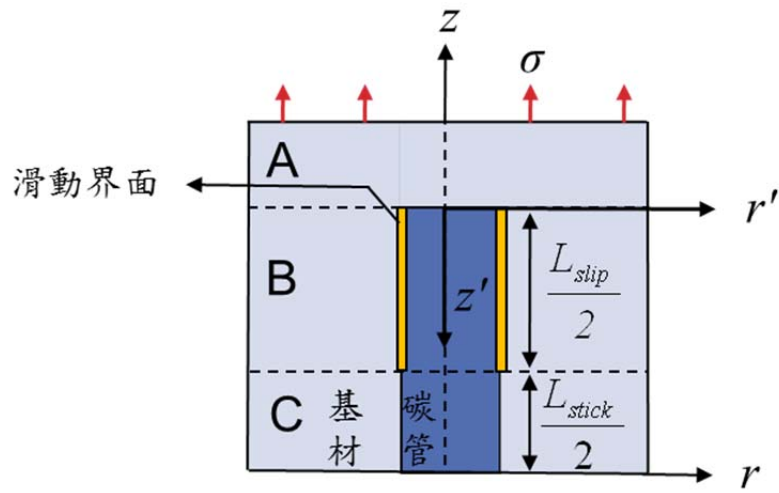


圖 2.7 第二階段整體複合材料示意圖

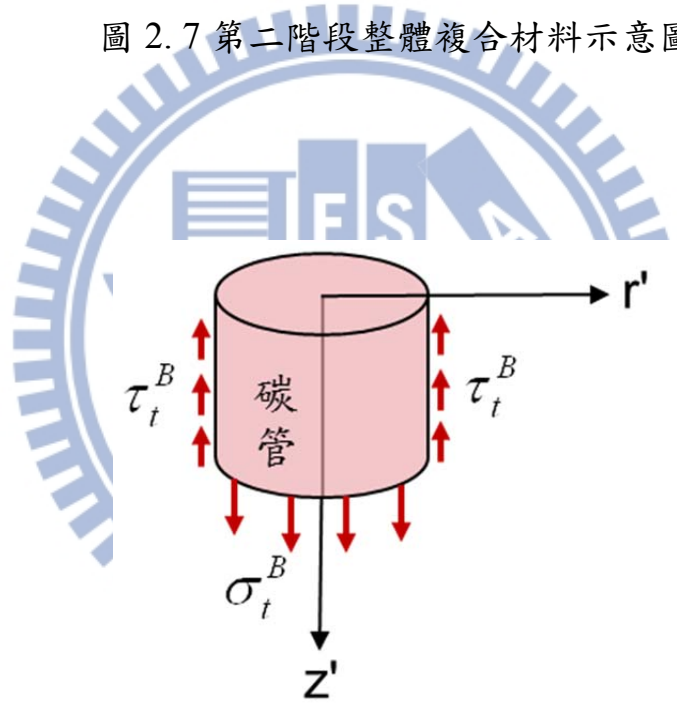


圖 2.8 第二階段B區域碳管自由體圖

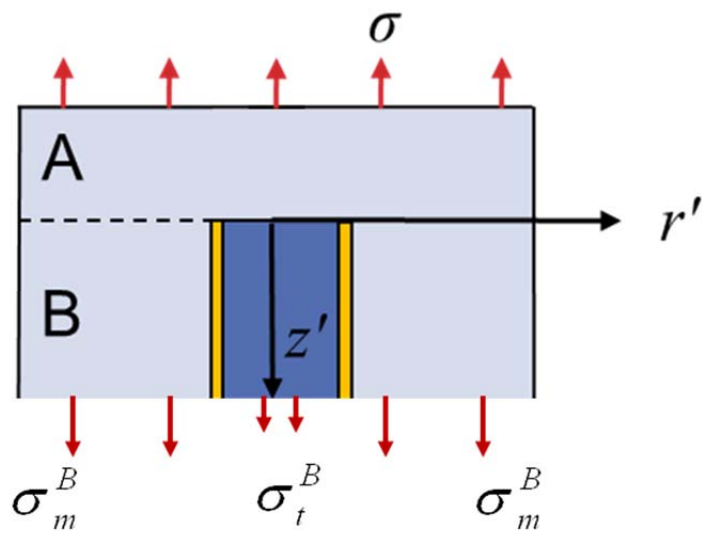


圖 2.9 複合材料之自由體圖

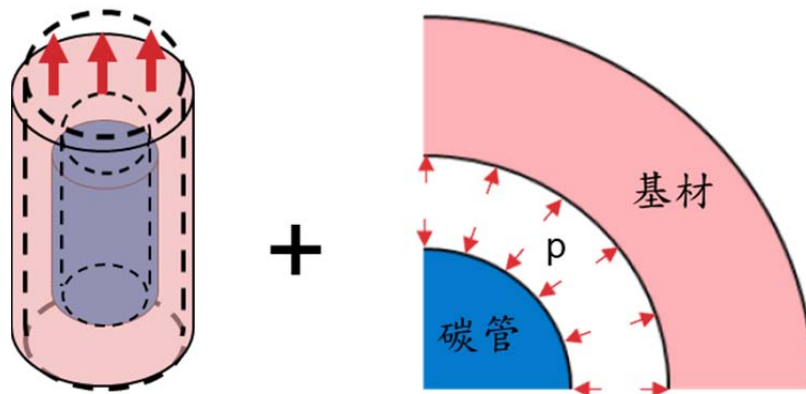


圖 2.10 波松效應與界面間之正向力示意圖

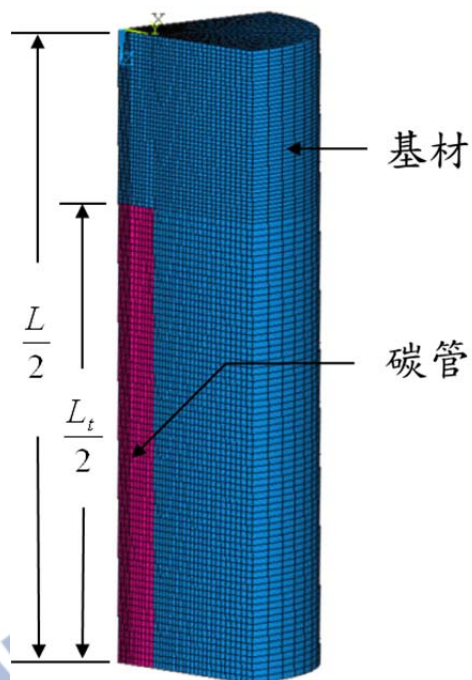


圖 3.1 八分之一複材模型

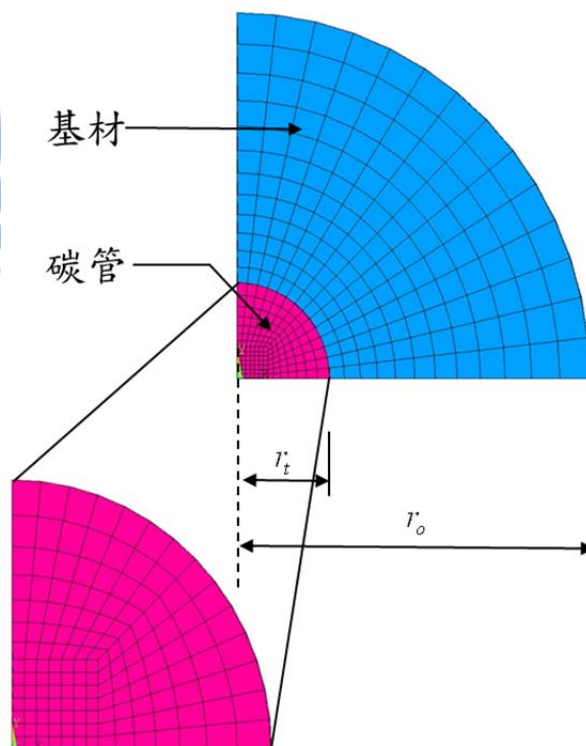


圖 3.2 複材模型截面之網格

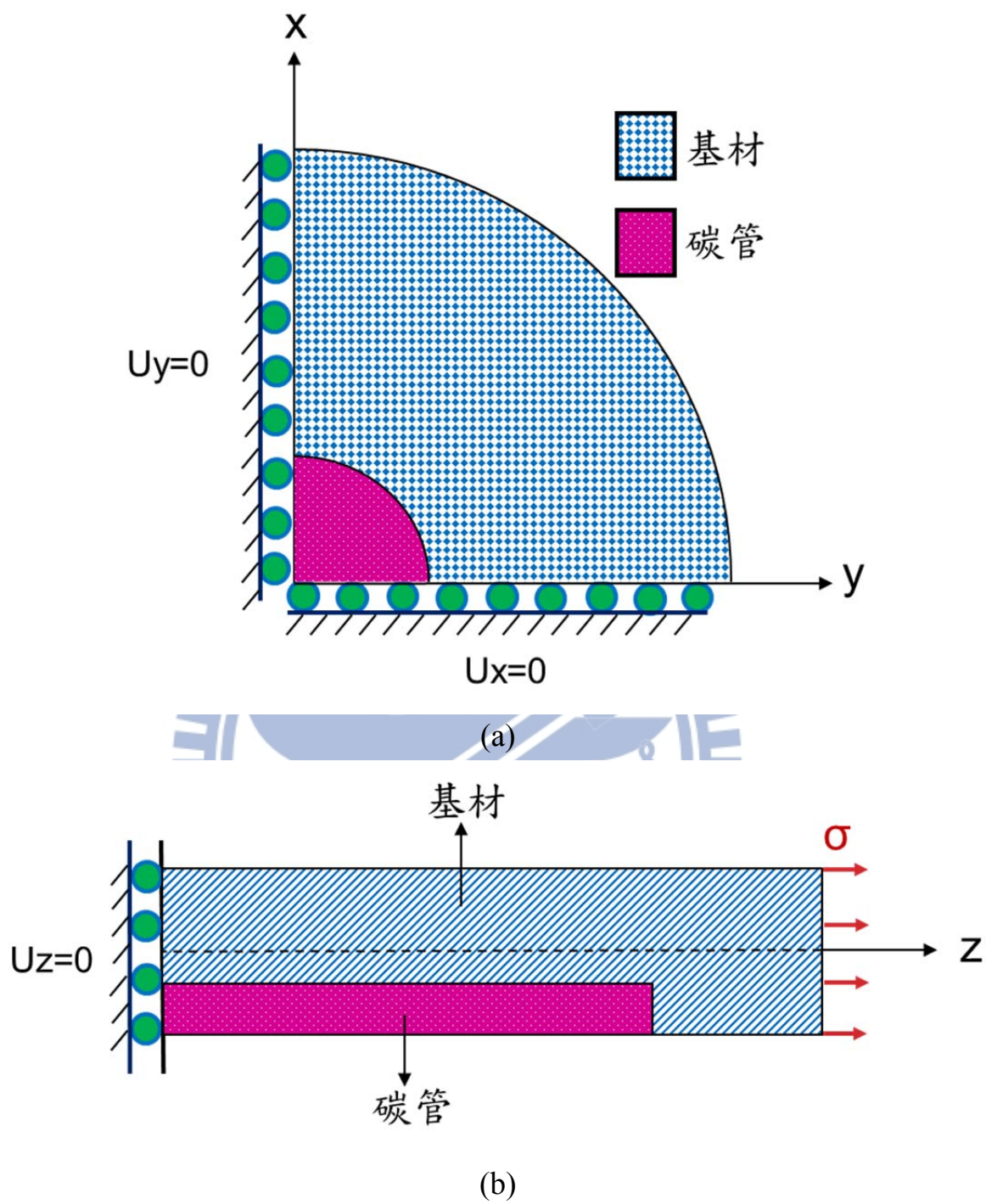


圖 3.3 邊界條件示意圖((a)模型下視圖 (b)模型側視圖)

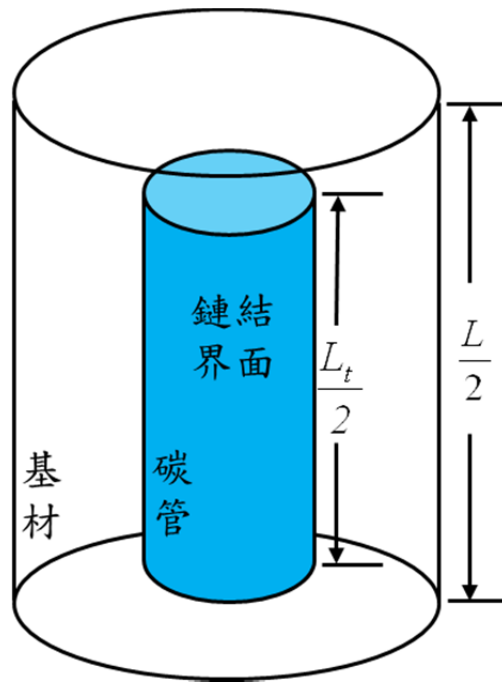


圖 3.4 基材與碳管界面尚未破壞之半模型

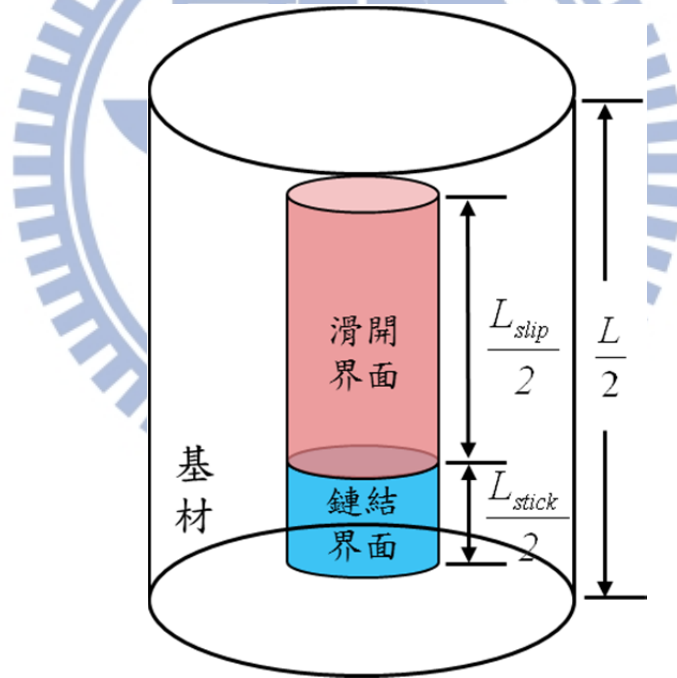


圖 3.5 基材與碳管界面發生部份破壞之半模型

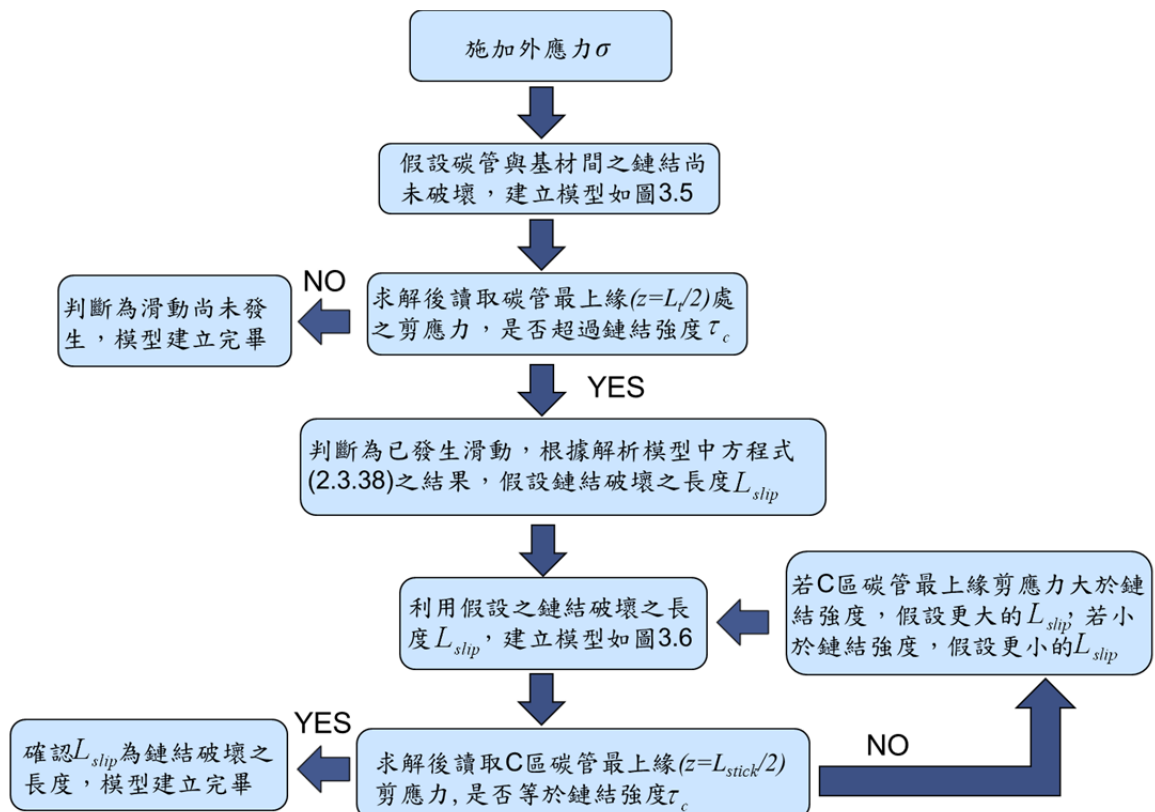


圖 3.6 有限元素模型建立流程圖

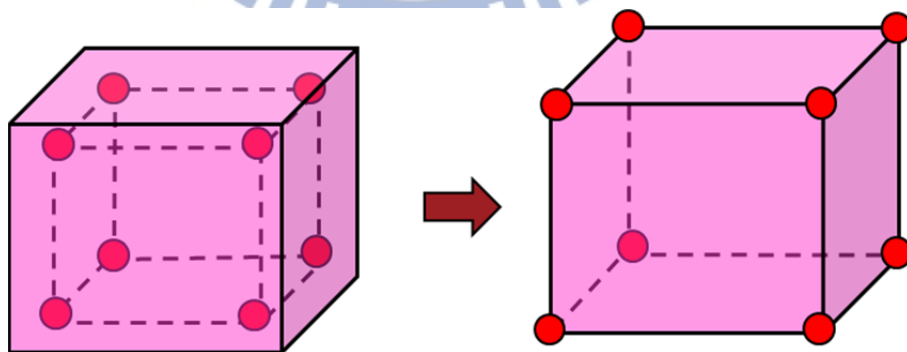


圖 3.7 將高斯積分點結果複製至節點上

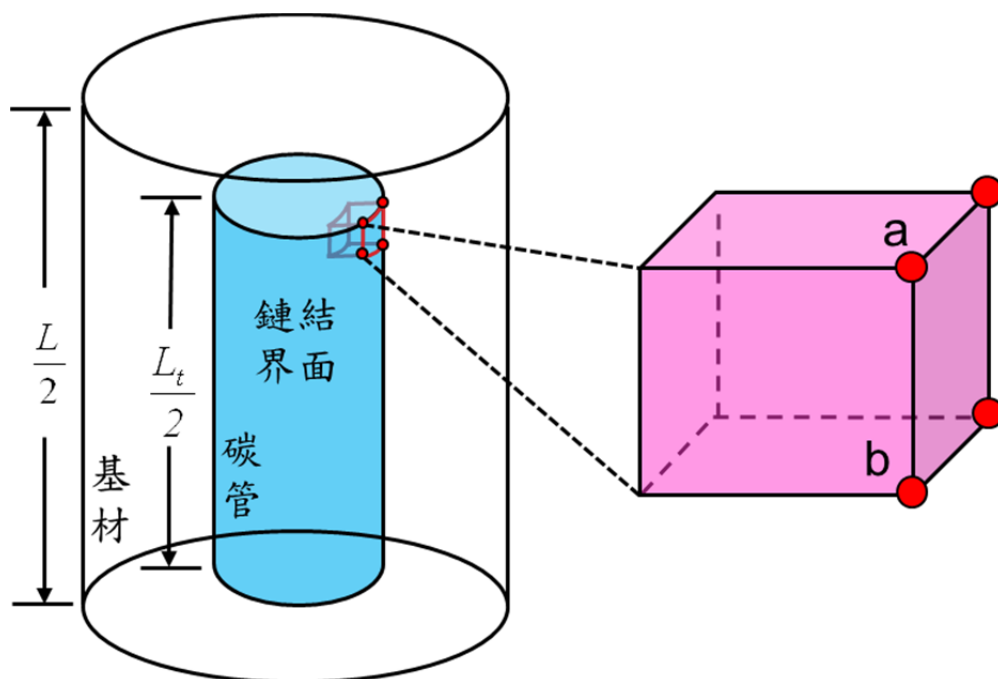


圖 3.8 碳管與基材交界面最上緣元素示意圖

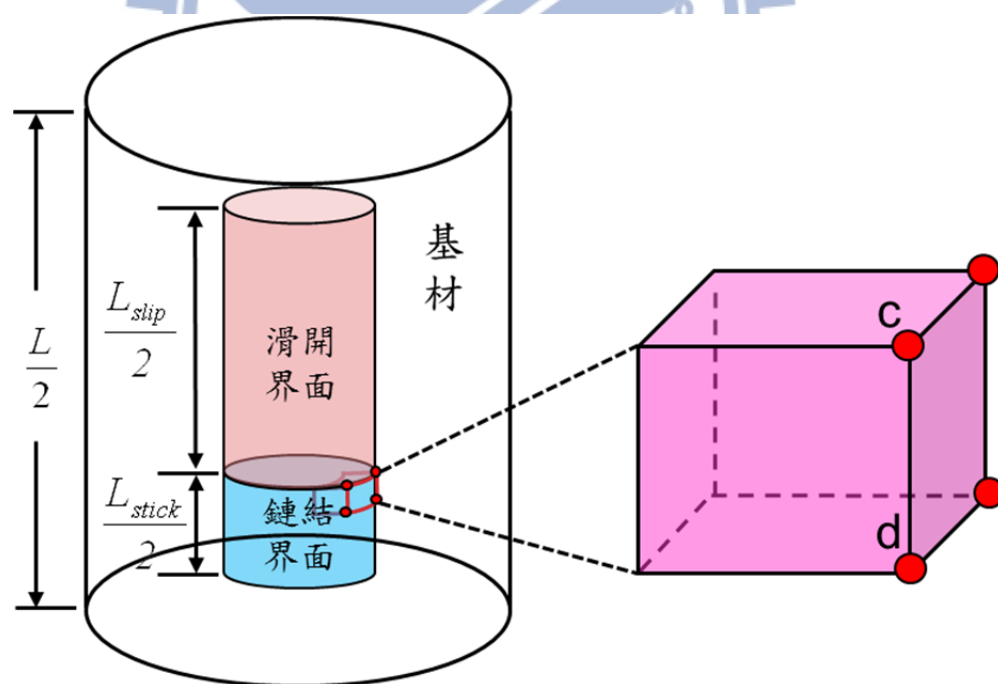


圖 3.9 未滑開碳管與基材交界面最上緣元素示意圖

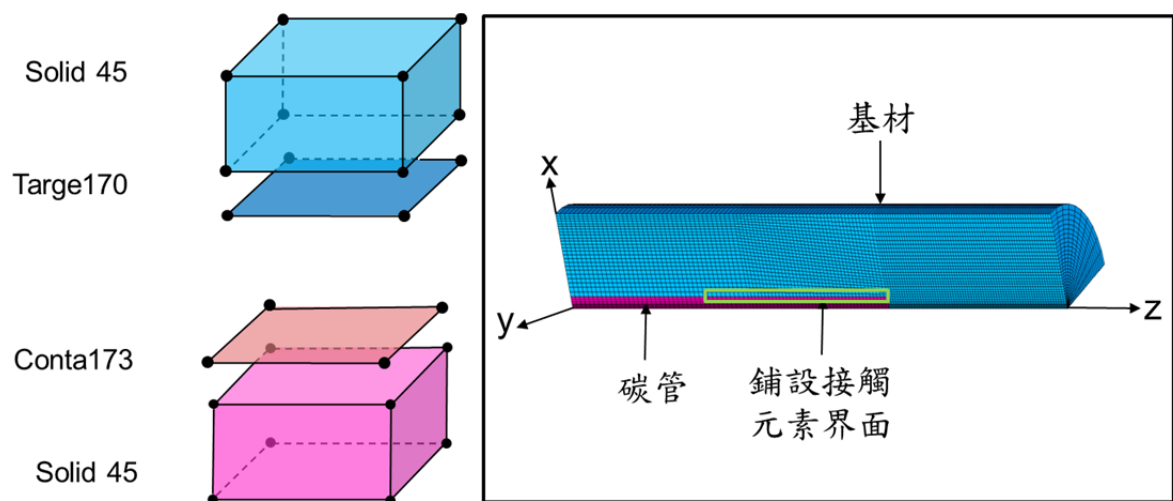


圖 3.10 元素鋪設示意圖

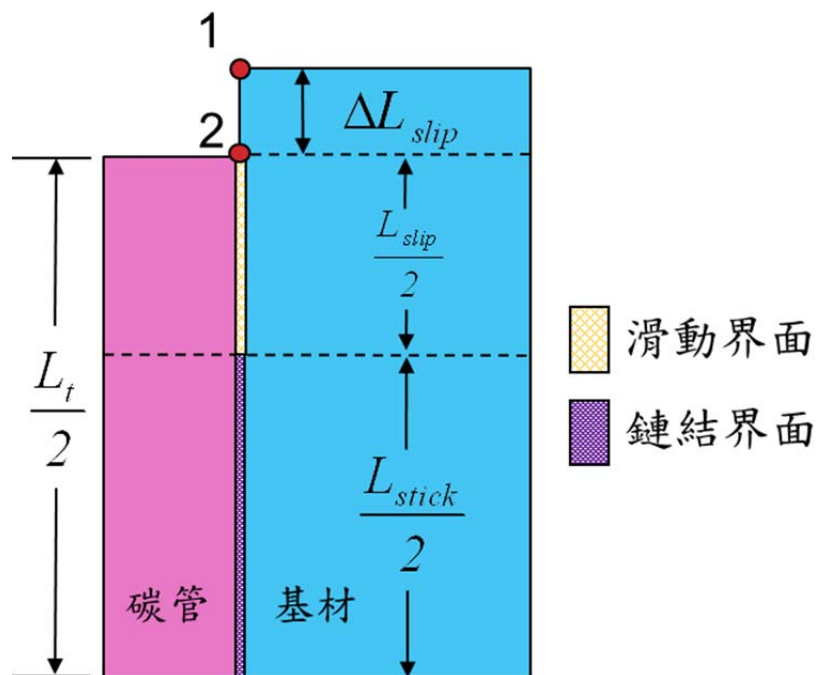


圖 3.11 碳管與基材邊界滑動

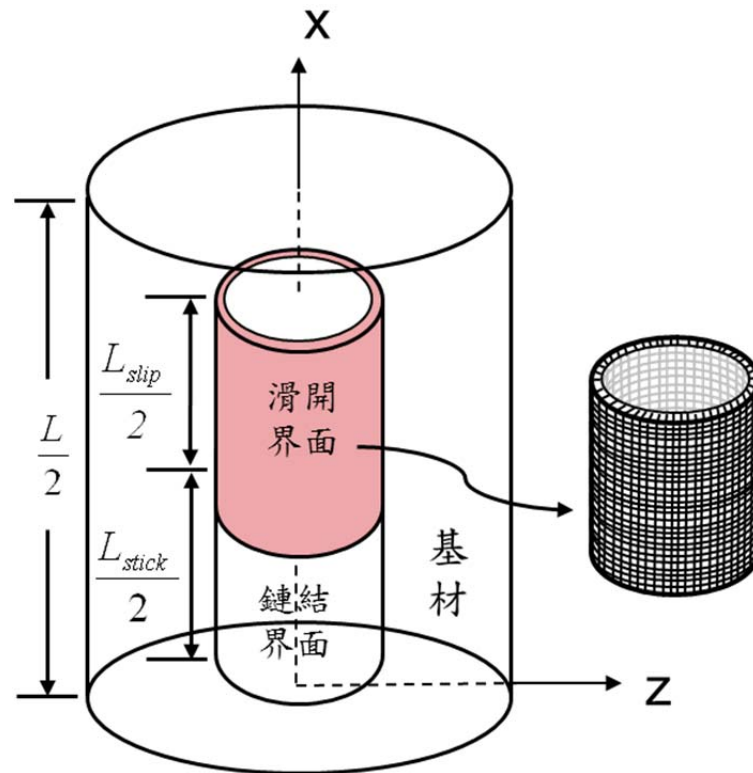
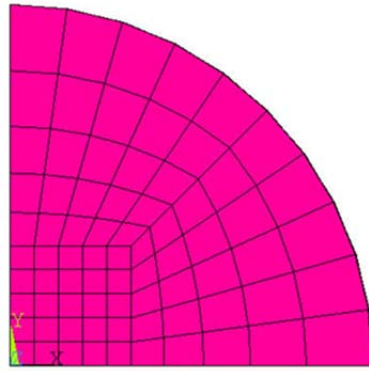
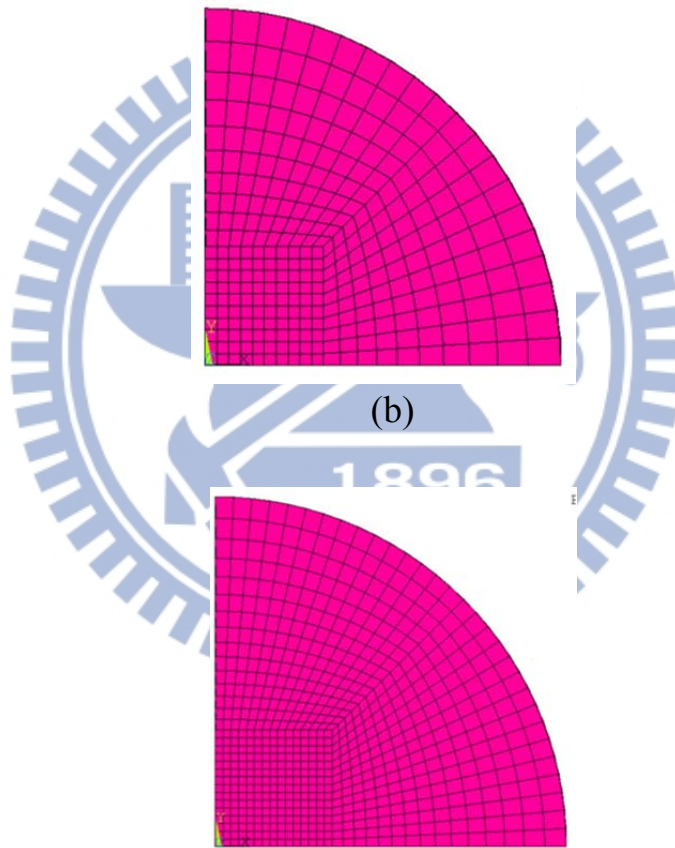


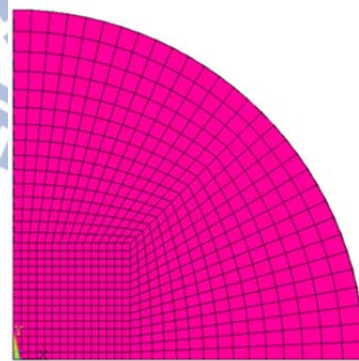
圖 3.12 已滑開碳管最外層元素示意圖



(a)

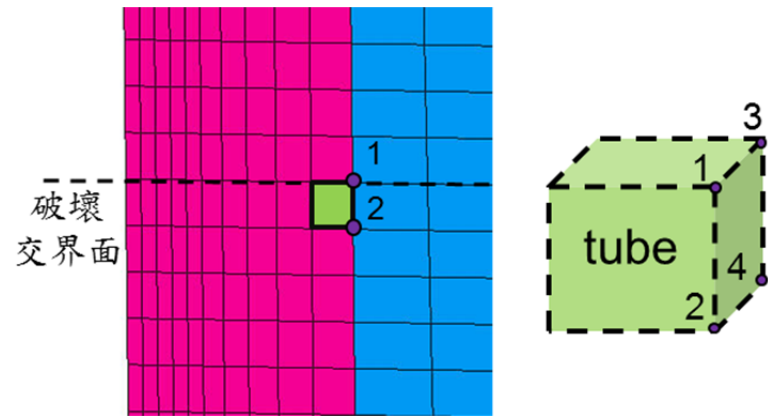


(b)

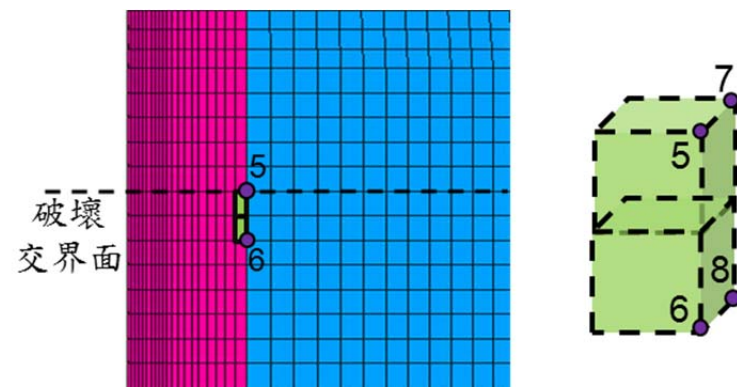


(c)

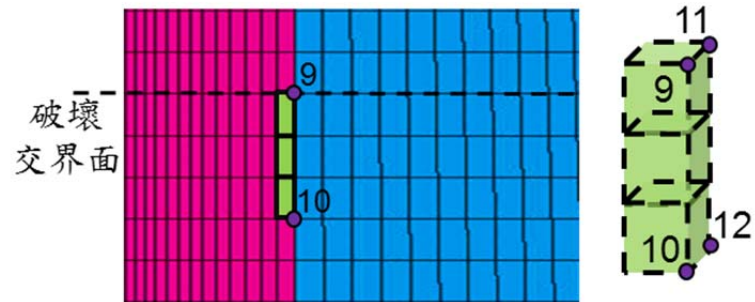
圖 4. 1 碳管上緣之網格((a) model 1 (b) model 2 (c) model 3)



(a)



(b)



(c)

圖 4.2 已破壞區域與鏈結區域交界處之網格((a) model 1 (b) model 2 (c) model 3)

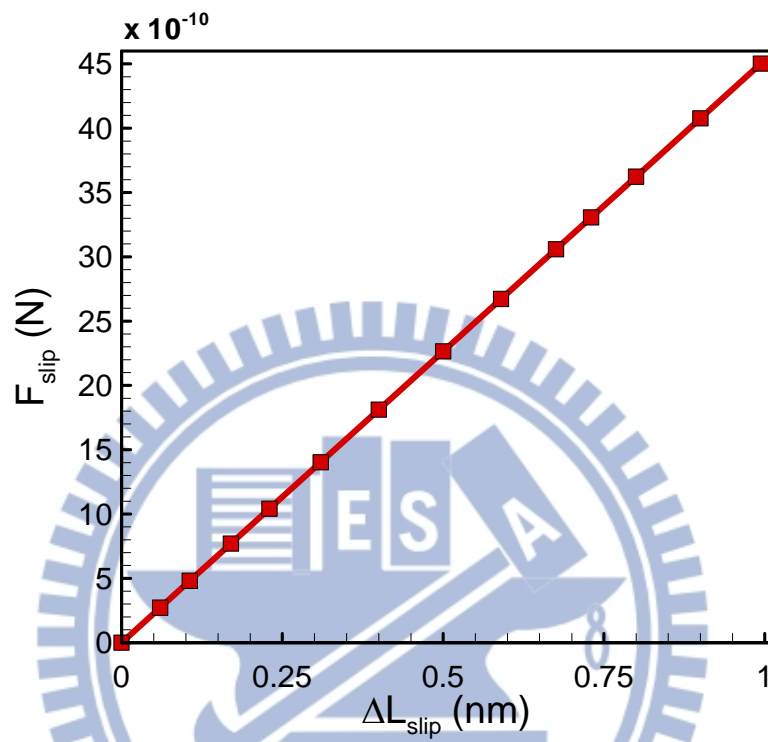
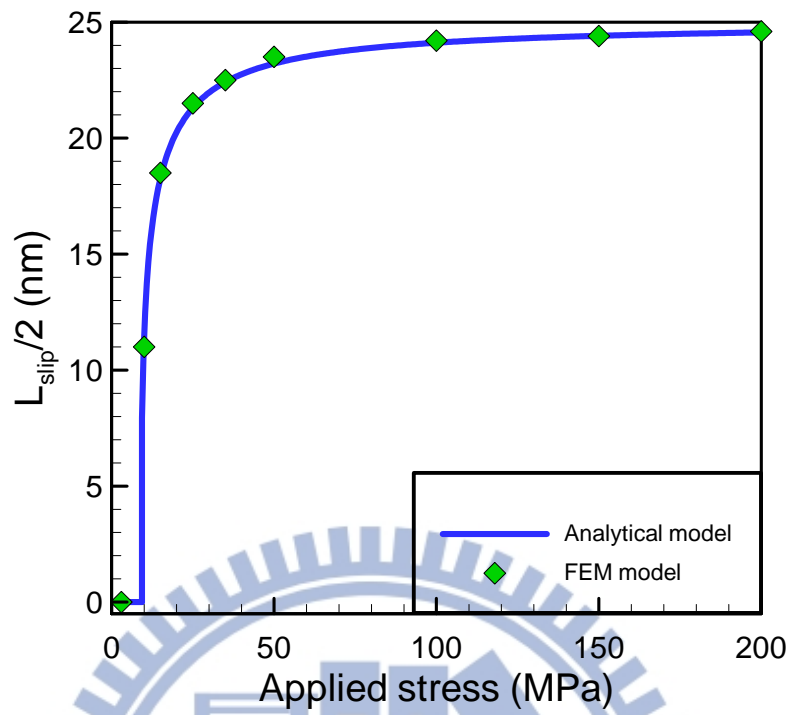
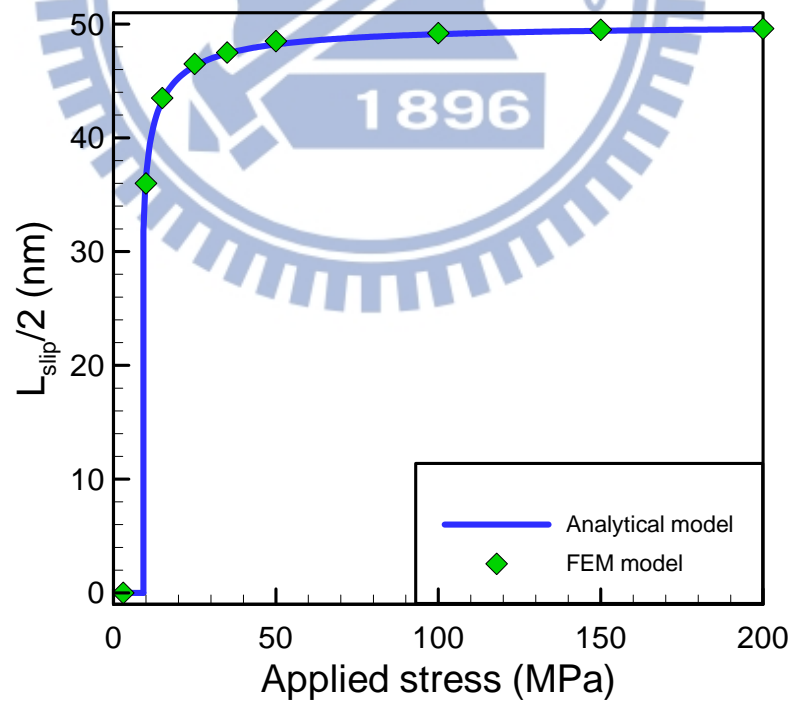


圖 4.3 已滑開碳管壁上之平均剪力-基材與碳管相對位移量之關係圖

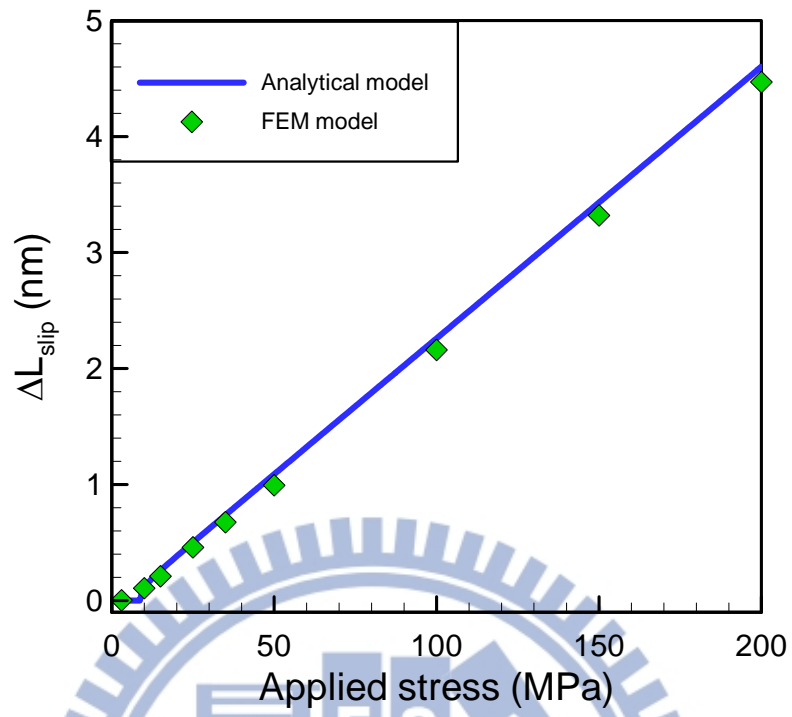


(a)

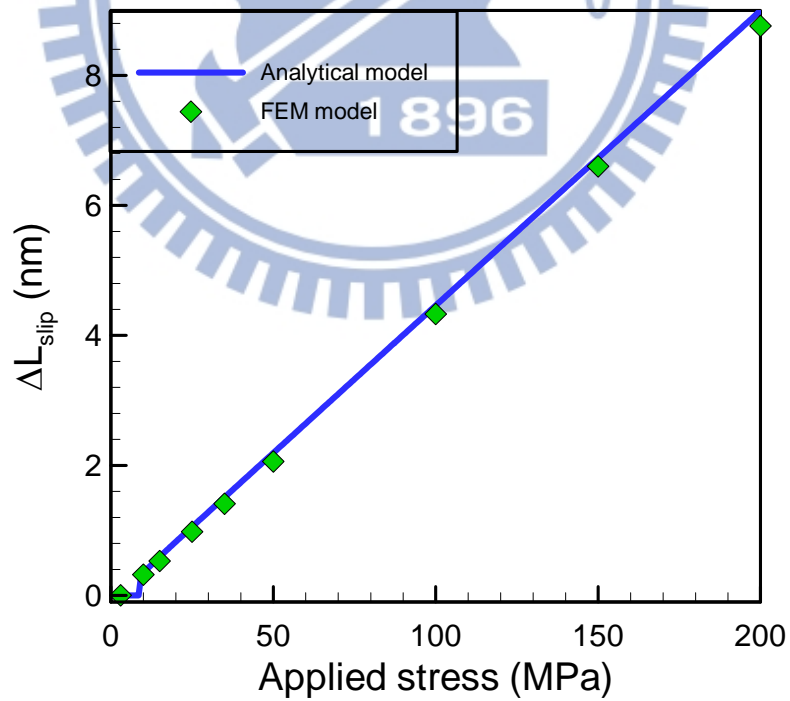


(b)

圖 4.4 外應力與已滑開碳管長度關係圖((a) $L_t=50$ nm (b) $L_t=100$ nm)

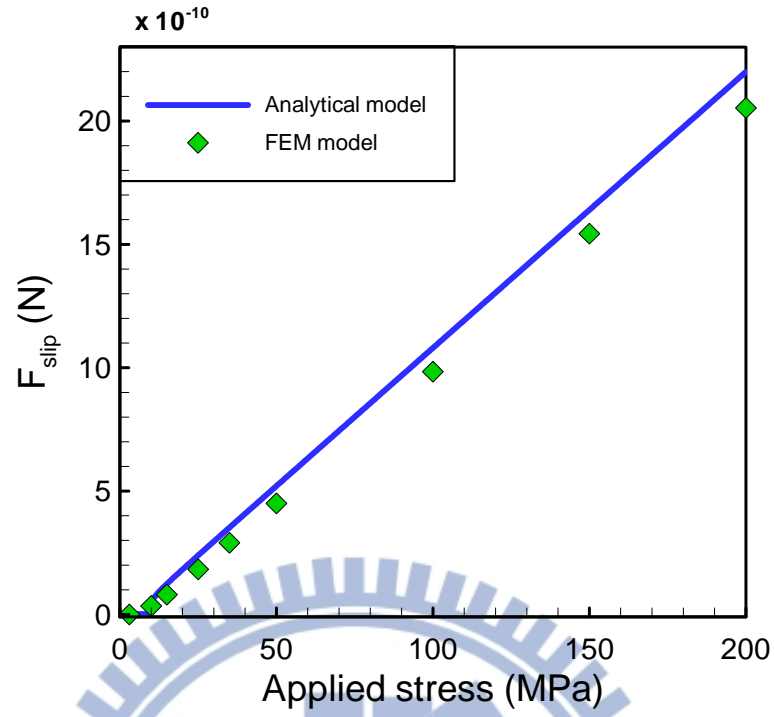


(a)

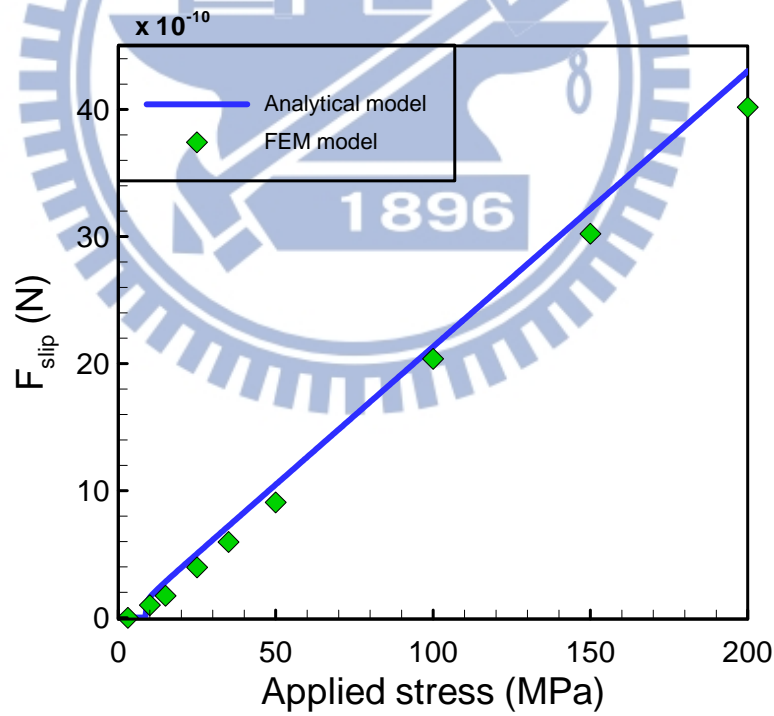


(b)

圖 4.5 外應力與相對滑動長度關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)



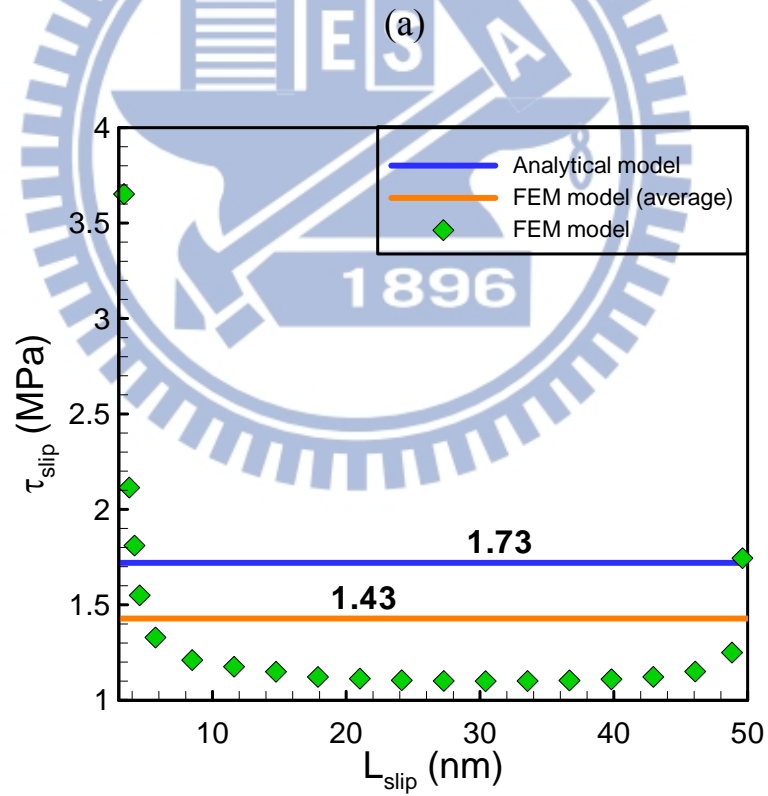
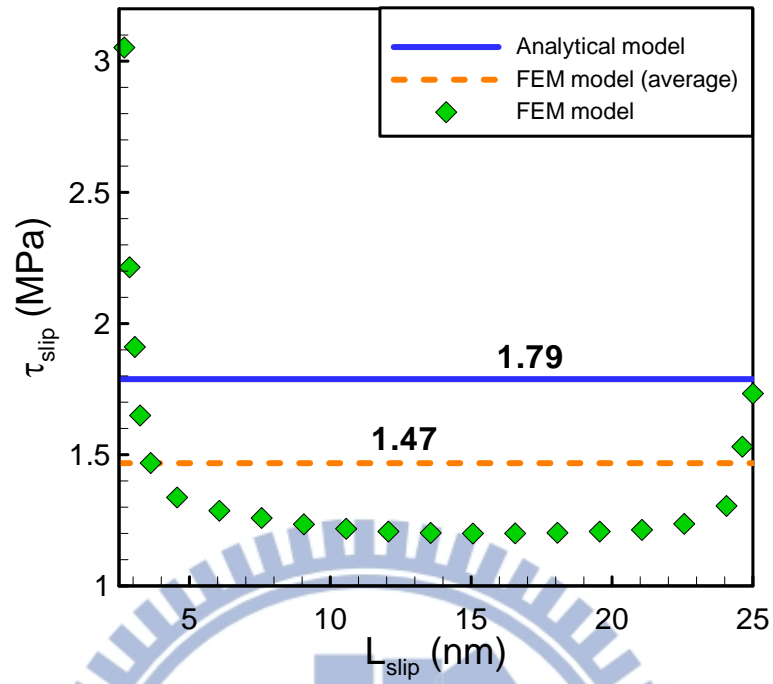
(a)



(b)

圖 4.6 外應力與滑開區域碳管壁上之總剪力關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b)

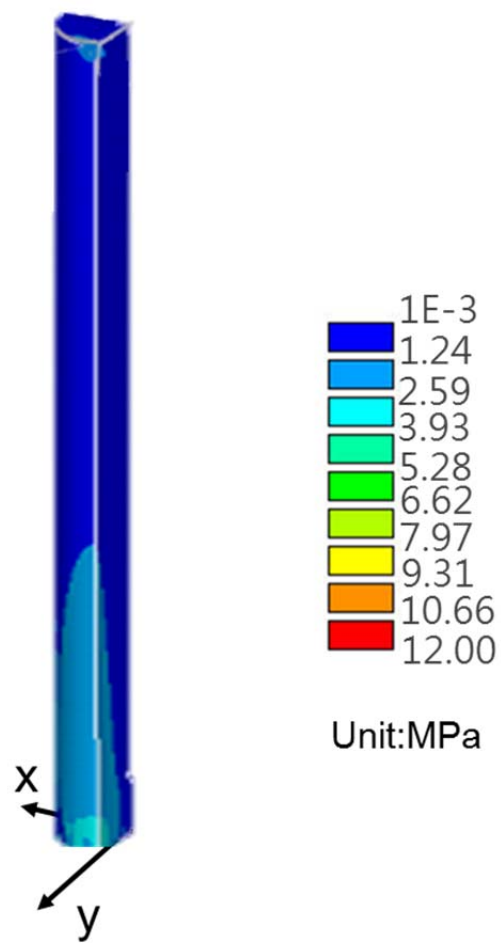
$L_t=100\text{nm}$)



(b)

圖 4.7 當外應力為 35MPa 時，碳管壁上剪切應力在已滑開碳管區域分佈圖

((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)



(a)

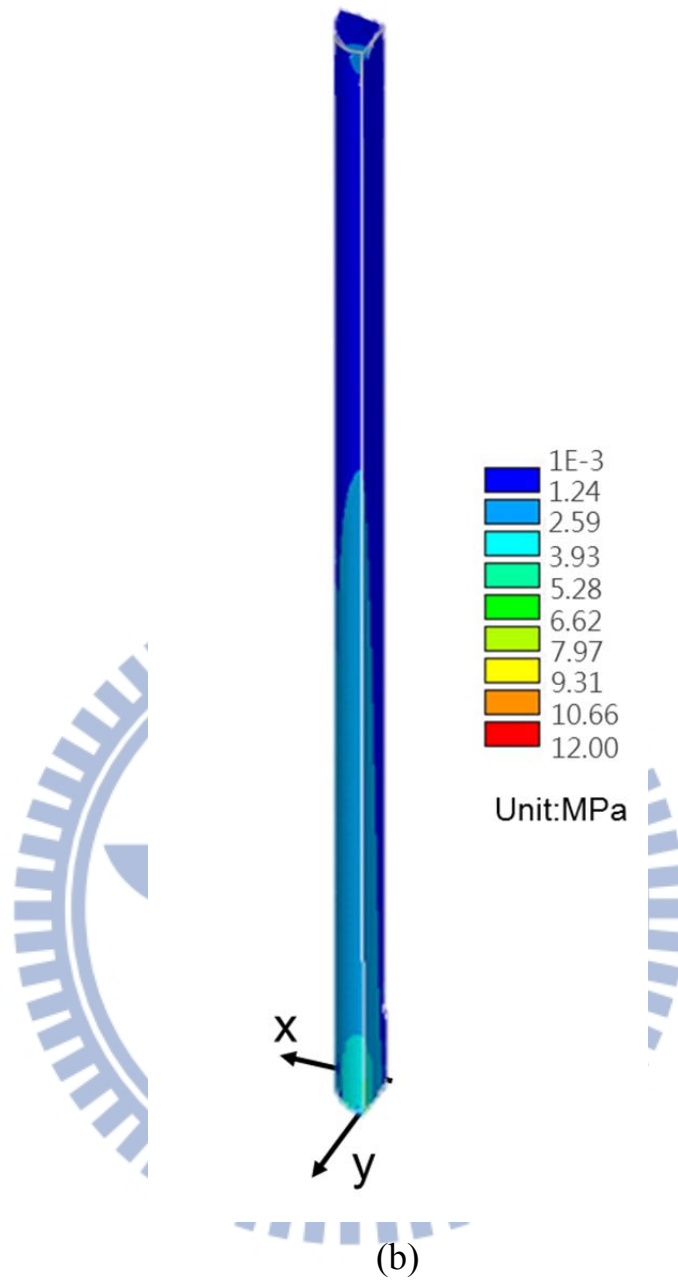
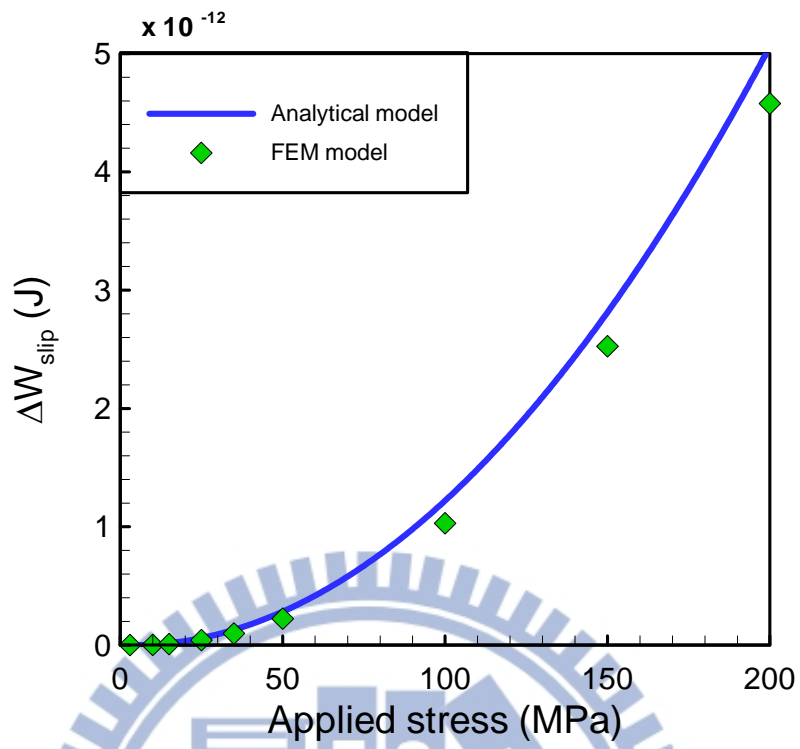
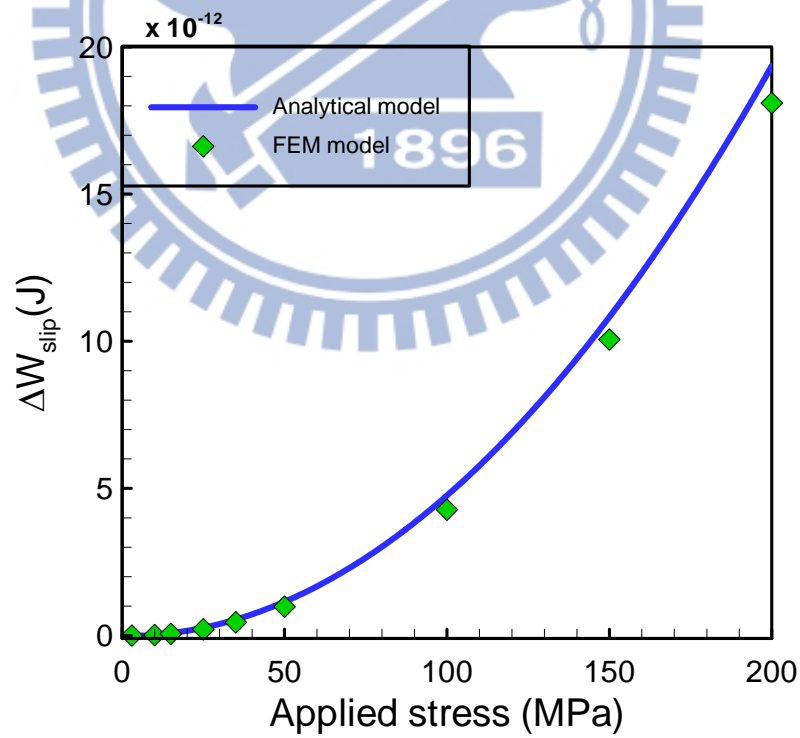


圖 4.8 已滑開破管區域剪切應力分佈圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)

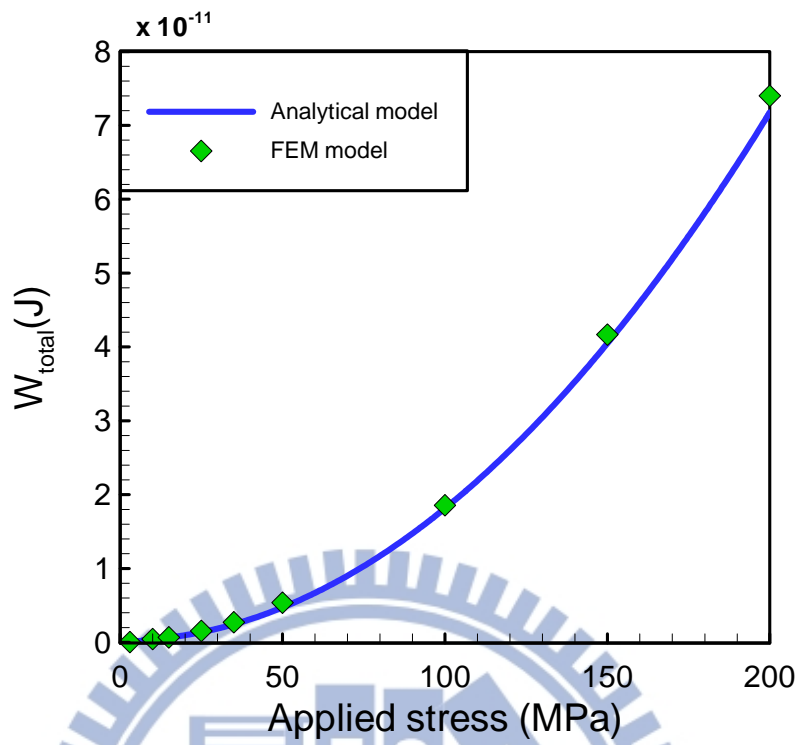


(a)

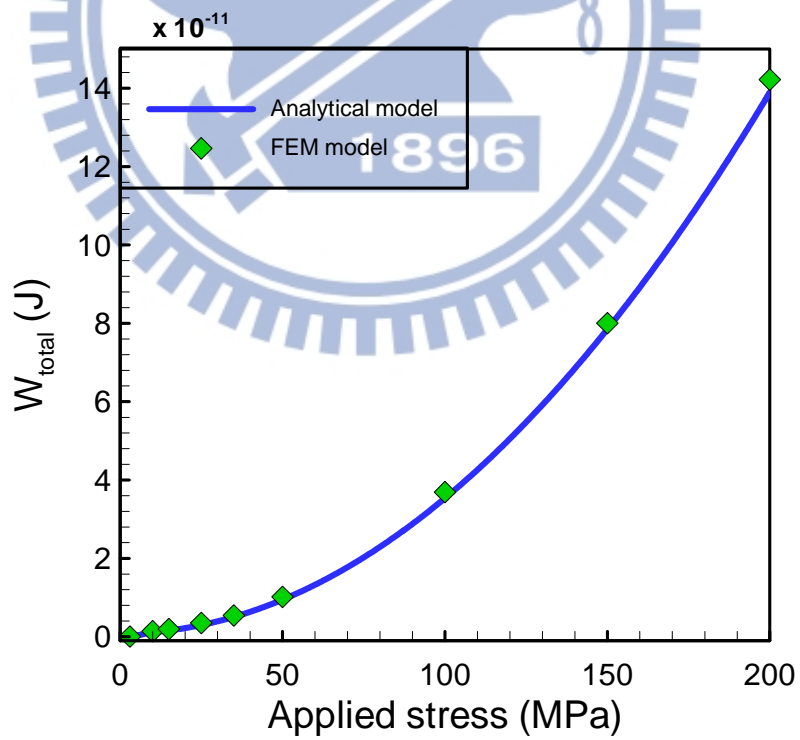


(b)

圖 4.9 外應力與滑動所消耗之能量關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)

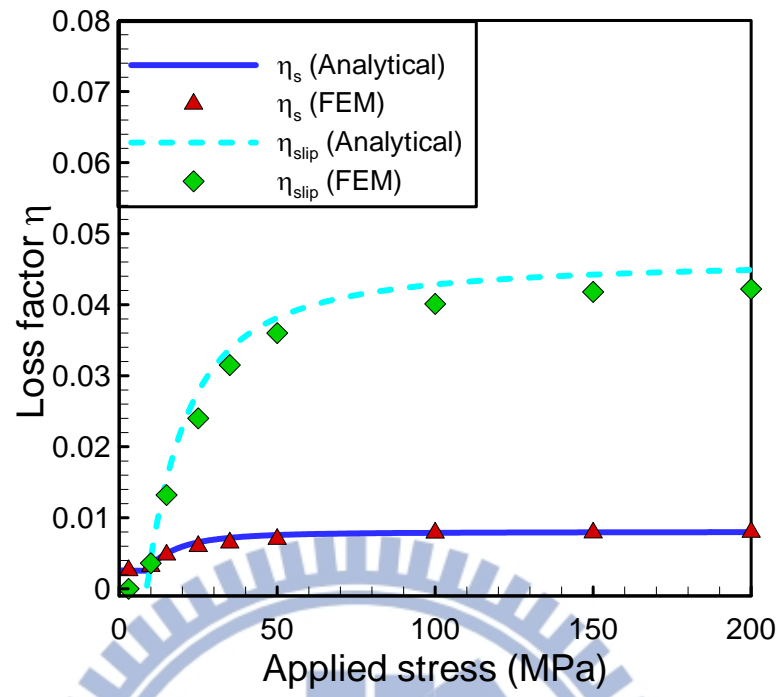


(a)

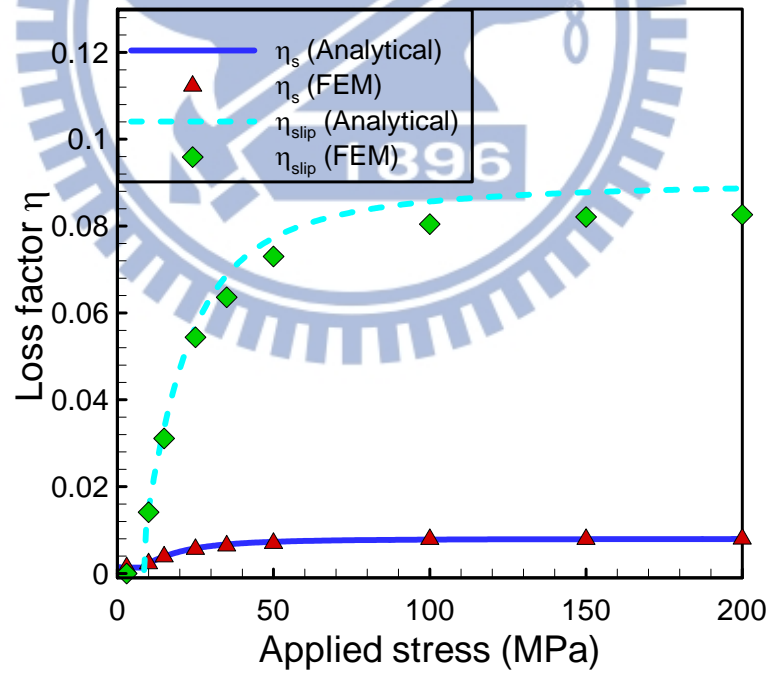


(b)

圖 4. 10 外應力與整體複材之總應變能關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)



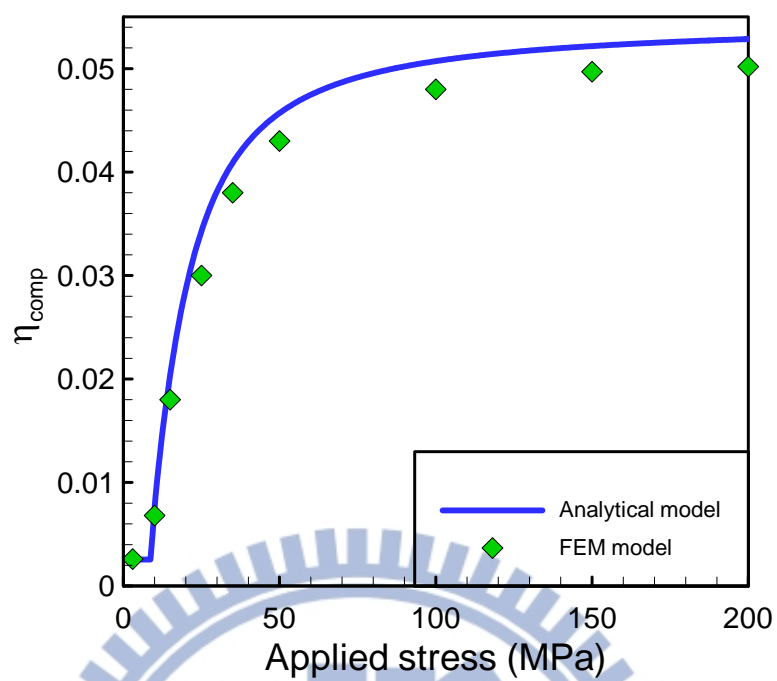
(a)



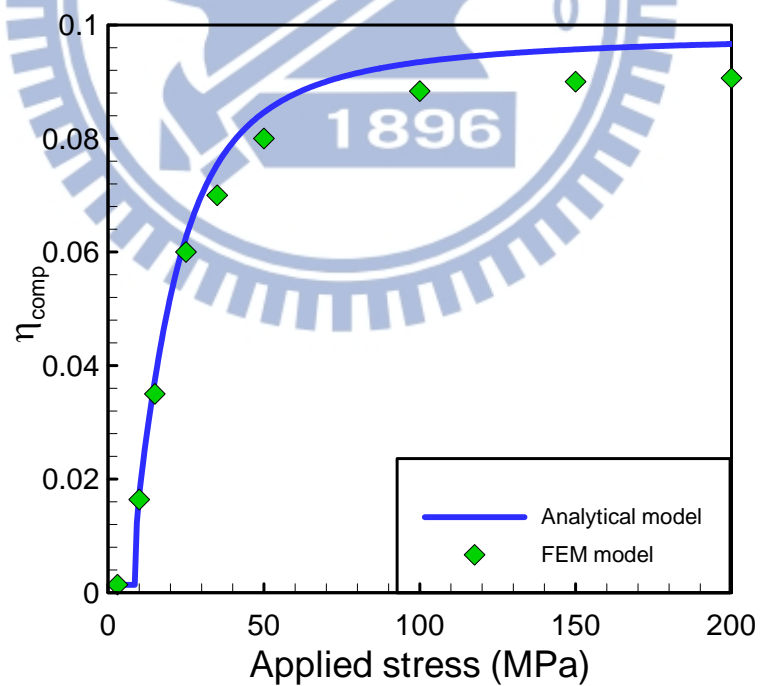
(b)

圖 4. 11 比較因滑動所產生之損失因子以及基材材料之損失因子

((a) $L_t=50\text{nm}$ (b) $L_t=100\text{nm}$)



(a)



(b)

圖 4. 12 外應力與整體複材之阻尼損失因子關係圖((a) $L_t=50\text{nm}$ (b)
 $L_t=100\text{nm}$)

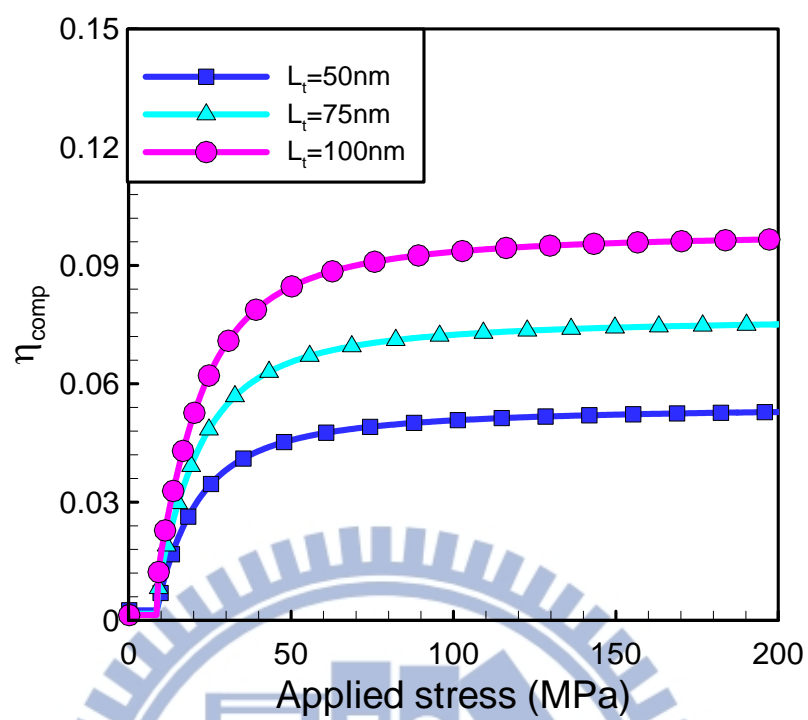
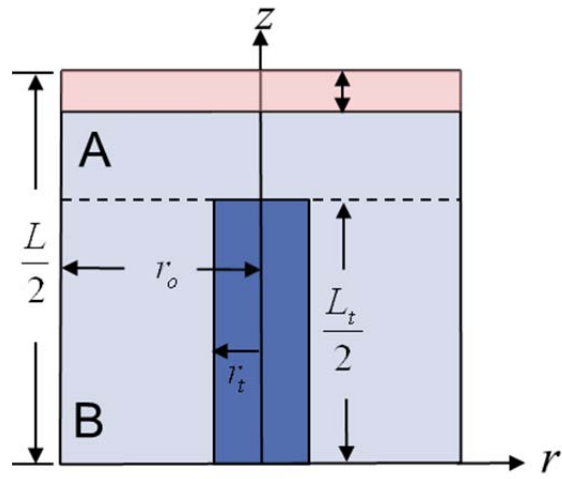
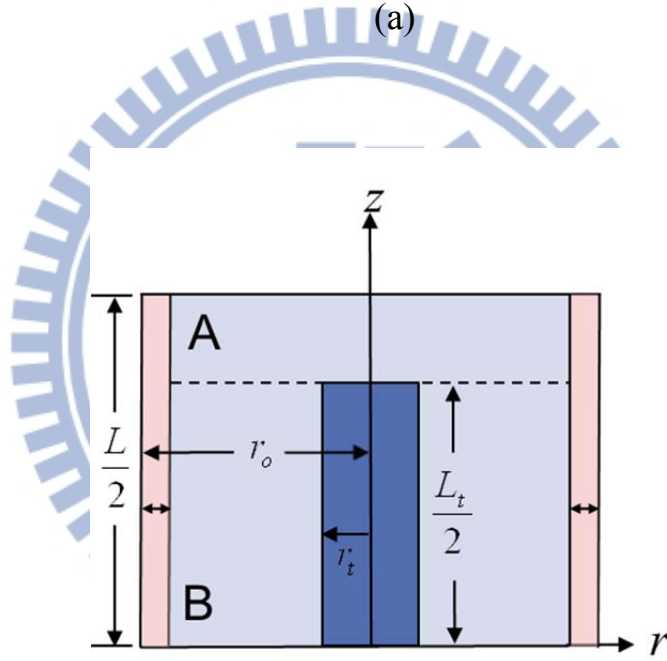


圖 4.13 碳管長度與損失因子關係圖



(a)



(b)

圖 4. 14 複材幾何隨體積比改變示意圖((a)複材隨體積比改變基材突出厚度

(b)複材隨體積比改變基材半徑)

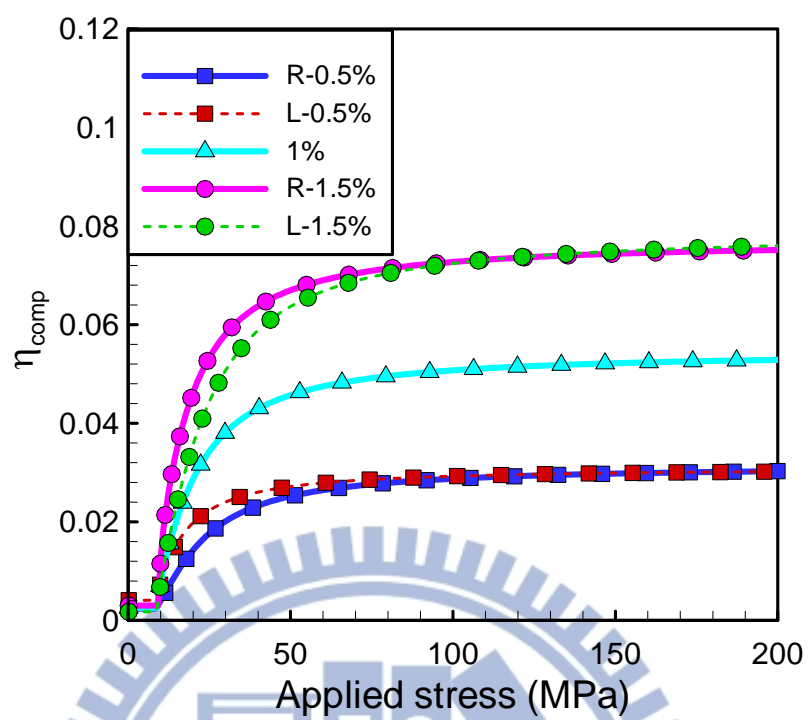


圖 4.15 碳管體積比與損失因子關係圖

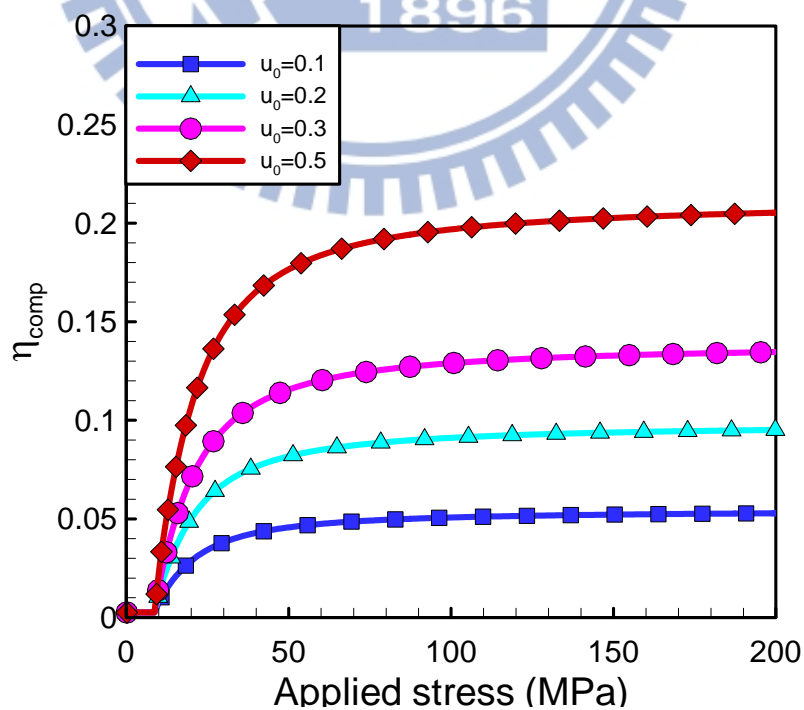


圖 4.16 已滑開界面摩擦係數與損失因子關係圖

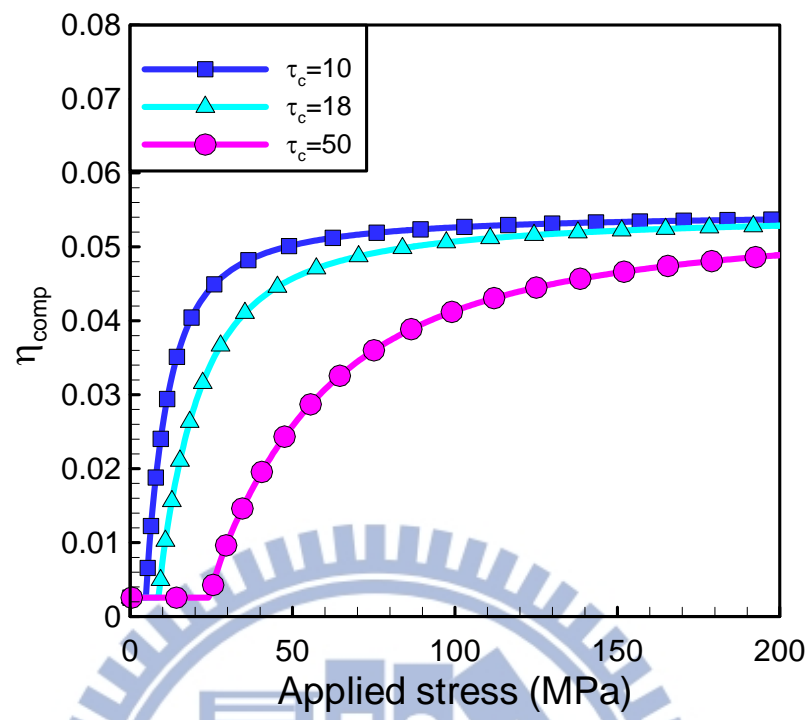
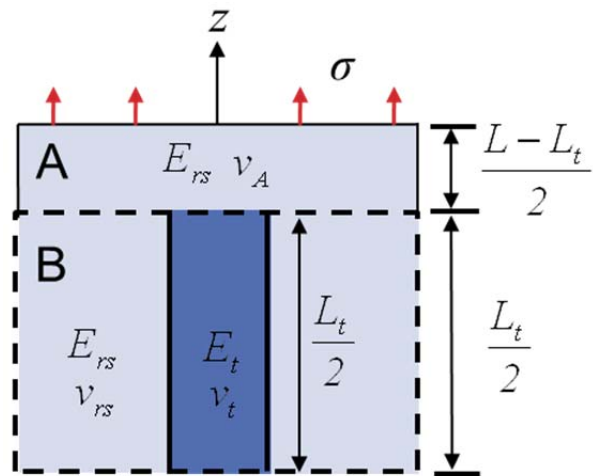
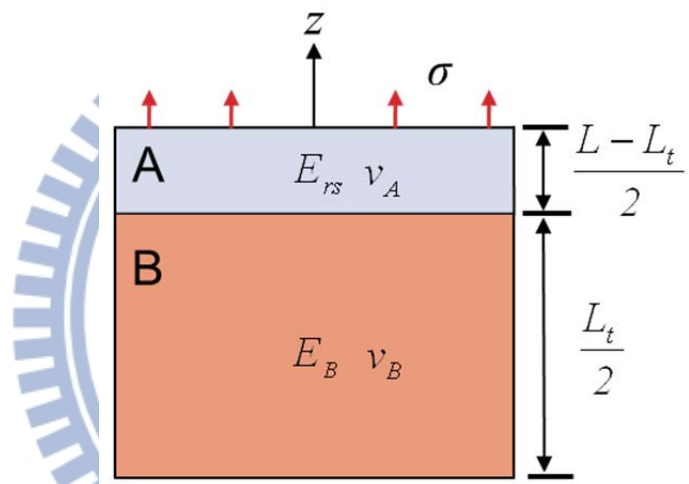


圖 4.17 基材與碳管界面鏈結強度與損失因子關係圖



(a)



(b)

圖 4.18 計算複材等效楊式模數((a)將 B 區域等效為一均質材料(b)將 A、B 區域等效為一均質材料)

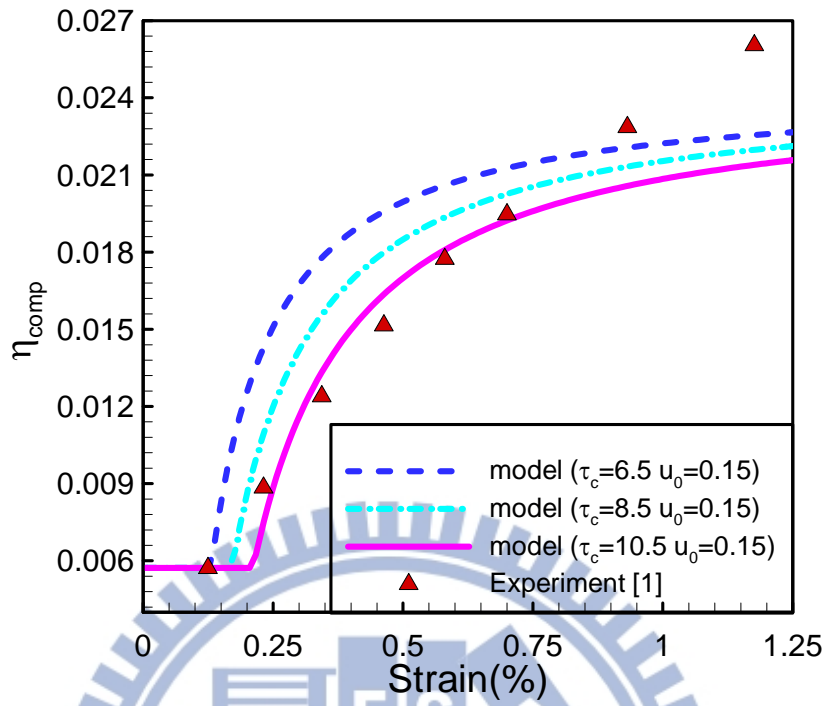


圖 4.19 解析模型與文獻實驗[1]比較結果

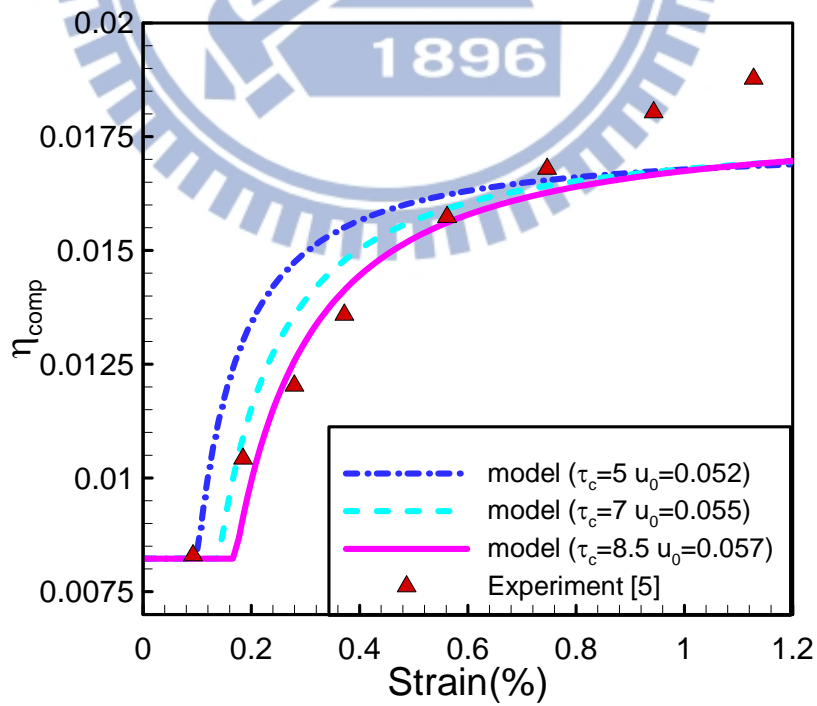


圖 4.20 解析模型與文獻實驗[5]比較結果

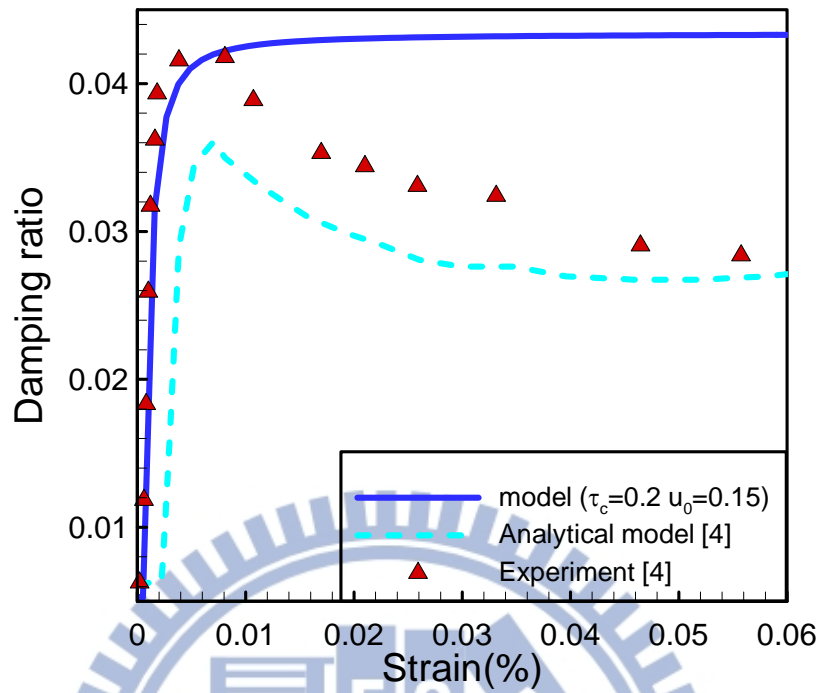


圖 4.21 解析模型與文獻實驗及模擬[4]比較結果

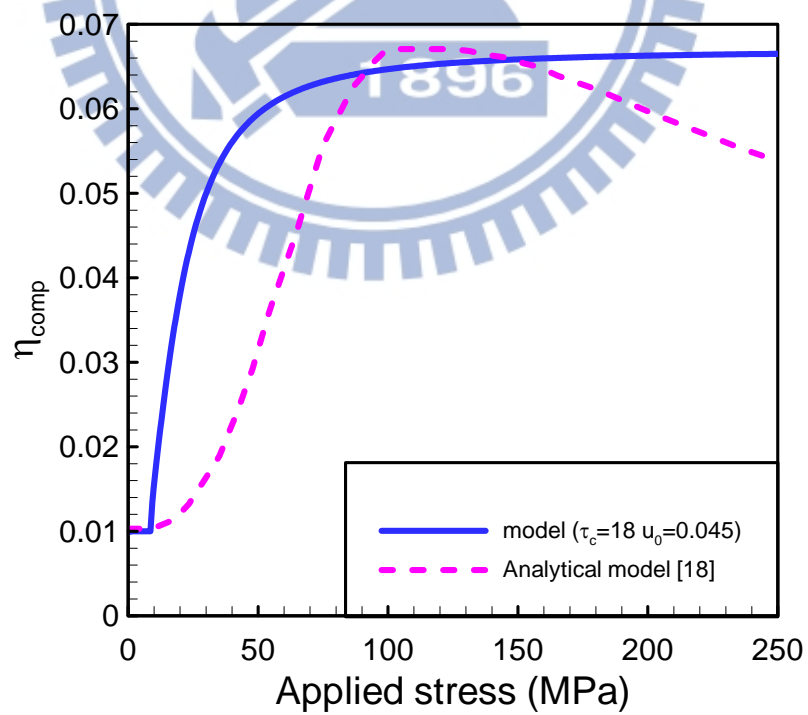


圖 4.22 解析模型與文獻解析模型[18]比較結果

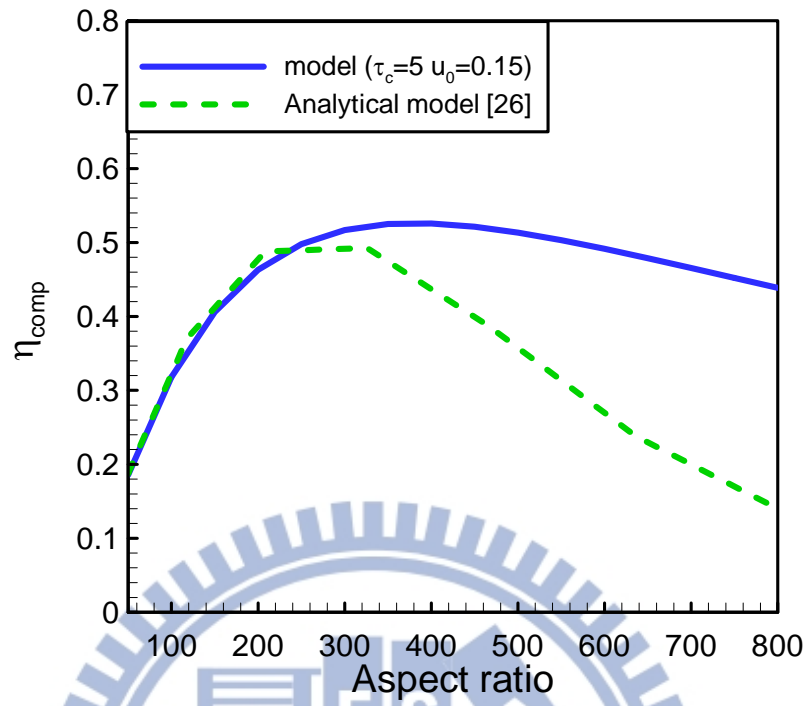


圖 4.23 解析模型與文獻解析模型[26]比較結果

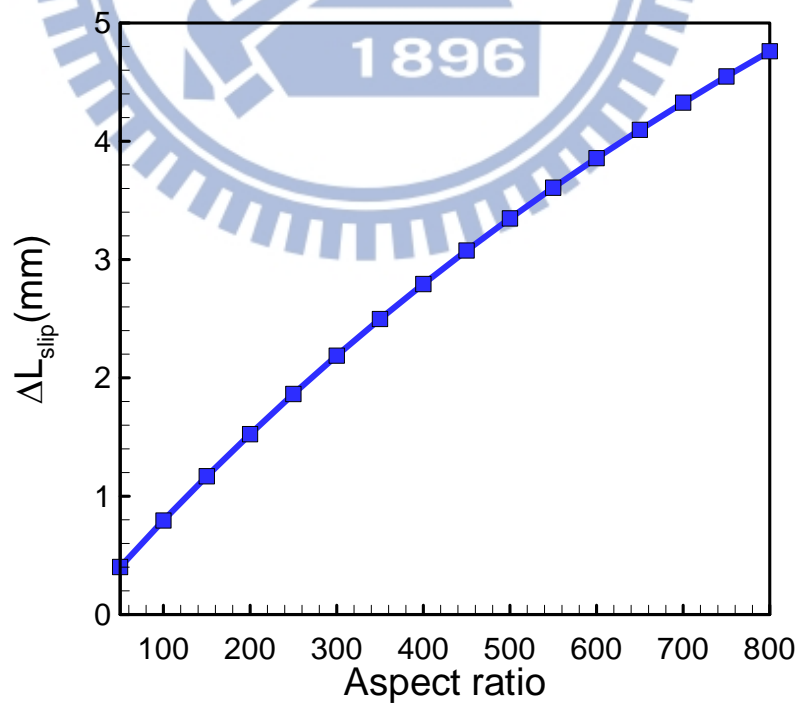


圖 4.24 解析模型相對位移量與碳管長徑比關係圖

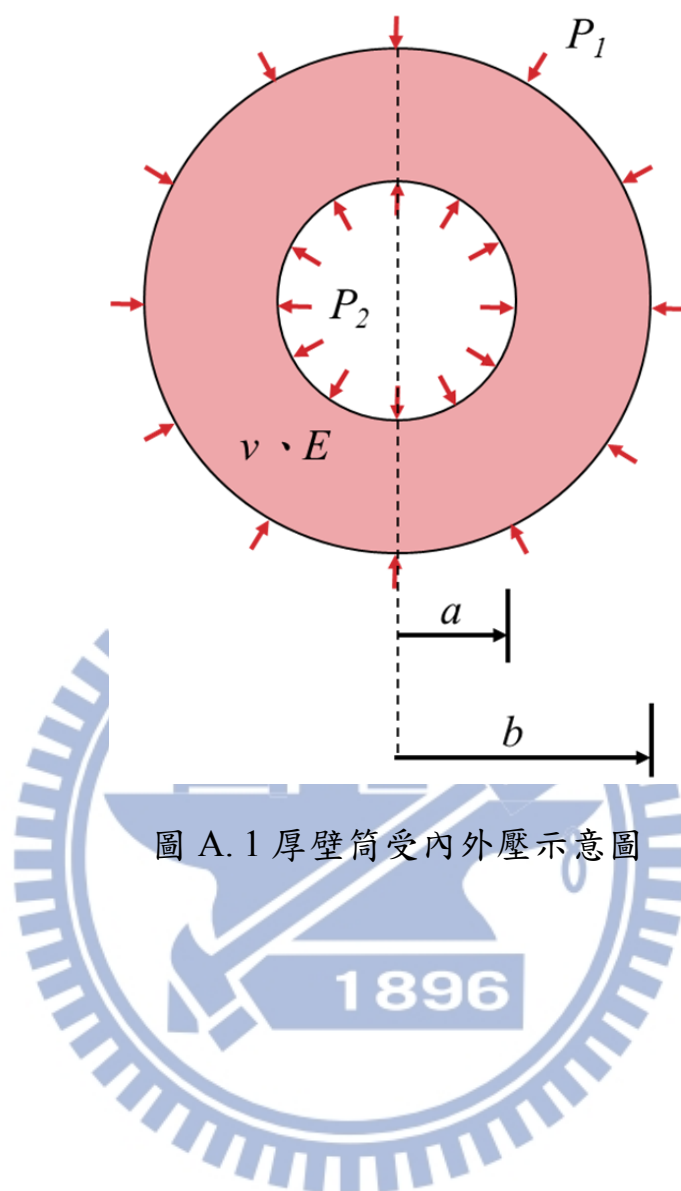


圖 A.1 厚壁筒受內外壓示意圖