

國立交通大學 土木工程學系

碩士論文

矩形板自由振動之傅立葉級數求解

**Fourier Series Solutions for
Free Vibrations of Rectangular Plates**

研究生：郭芳琳

指導教授：黃炯憲 教授

中華民國一百零二年二月

矩形板自由振動之傅立葉級數求解

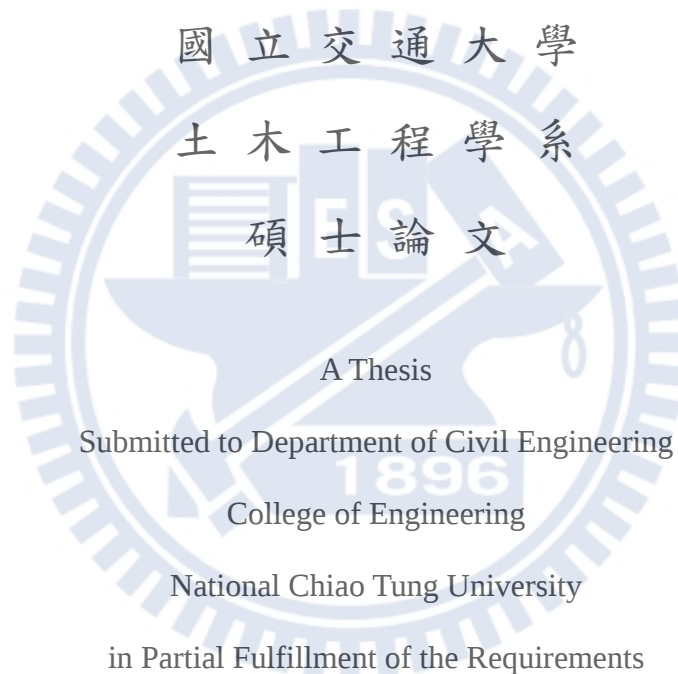
Fourier Series Solutions for Free Vibrations of Rectangular Plates

研 究 生：郭芳琳

Student：Fang-Lin Guo

指導教授：黃炯憲

Advisor：Dr. Chiung-Shiann Huang



for the Degree of

Master of Science in

Civil Engineering

February 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年二月

矩形板自由振動之傅立葉級數求解

研究生：郭芳琳

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

摘 要

本研究利用傅立葉餘弦級數求解矩形板之振動，以多項式作為擴充函數修正傅立葉級數逐項微分所造成的問題。本研究所提之級數解，利用兩種方式滿足矩形板各邊界條件及控制方程，求解自由振動頻率：①積分轉換為傅立葉級數域、②配點法。透過收斂性分析，與文獻結果比較，驗證分析方法及電腦程式之正確性；並比較兩方法優劣，依據結果顯示，轉換於傅立葉級數域之方法收斂性較快，進一步探討不同邊界條件、長寬比對板振動之影響。

Fourier Series Solutions for Free Vibrations of Rectangular Plates

Student : Fang-Lin Guo

Advisor : Dr. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering
National Chiao-Tung University

Abstract

This study establishes analytical solutions of vibrations of rectangular plates using Fourier cosine series supplemented with polynomial functions. The transverse displacement of a thin plate is expressed by a double Fourier cosine series and two single Fourier cosine series multiplied with four polynomial functions, respectively, so that the derivatives of the transverse displacement can be obtained from term-by-term differentiations of these series. The unknown coefficients in the series solution are determined by approximately satisfying the boundary conditions and governing equation in the sense of Fourier series expansion or point matching. It is found that the former approach gives faster convergence of natural frequencies than the latter approach after the validity of these two approaches and correctness of developed computer programs are confirmed through convergence studies and comparisons with published results. The approaches are further applied to investigate the vibrations of rectangular plates with different boundary conditions and aspect ratios.

誌 謝

感恩讚歎 妙禪師父！感恩 師父妙轉讓我健康、樂觀！感恩 師父讓我心安
心定生智慧，讓我知曉人生所謂何來，而非在生活中忙、茫、盲，空過此生！

感恩指導老師黃炯憲教授給我研究方向，增強我的邏輯思考與編譯程式的能力。
感謝老師在百忙之中，幫我一一校正修改，老師辛苦您了！感謝劉俊秀、洪士林教
授在這歲末年終前，抽空審查與指導，讓我收到一份開心的年禮。

感恩嫵妮老師讓我知曉無私無我的心！感恩宜靜老師教導我學會感恩心！感
恩玫琪老師讓我學會慈悲心！感恩趙軒老師讓我學會發願的心！萬分感恩安宏學
弟，因為有你，才有如今的我；感恩尚文、凱農、靜瑩、郁翔、昱如、筌安、東閔、
冠智、珍珍、婉茹、柏勳、佩妤等朋友們，感恩你們伸出一雙慈悲的手，感恩你們
陪伴、分享、調整、帶領我提昇開悟，好愛你們喔！我們一定要一起回家！

感恩明儒、政甯、志偉、靖俞、江祥、穎泰、鈞誠、孟軒、進順、維莘學長姐
以及家毅、宣治、旭進、裕鈞同學們這兩年來的指導、學習、陪伴與互相勉勵。

感恩親愛的父母文賢先生與秀美女士生我、養我、栽培我！感恩兩位妹妹芳菁、
怡真伴我這幾十年來的歲月時光，感恩你們忍受我的傲慢、幼稚與任性等缺點。

感恩 如來！感恩我所認識、經歷的一切人事物！願此生回到彼岸！

郭芳琳 謹誌於交通大學土木工程學系碩士班 102.2

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌 謝	iii
目 錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	viii
符號說明	ix
第一章 緒論	- 1 -
1.1 前言	- 1 -
1.2 文獻回顧	- 1 -
1.3 研究目的與方法	- 3 -
1.4 內容摘要	- 4 -
第二章 梁之振動問題	- 5 -
2.1 梁振動控制方程	- 5 -
2.2 傅立葉級數解之基本理論	- 6 -
2.3 不同邊界條件之解	- 10 -
2.3.1 固定端-固定端(C-C)之解	- 10 -
2.3.2 固定端-簡支端(C-S)之解	- 13 -
2.3.3 固定端-自由端(C-F)之解	- 15 -
2.3.4 自由端-自由端(F-F)之解	- 18 -
2.4 梁自由振動閉合解	- 22 -
2.5 收斂性分析	- 24 -
第三章 矩形板之振動問題	- 27 -
3.1 基本公式	- 27 -
3.2 不同邊界條件之解	- 31 -
3.2.1 求解 C-C-C-C 矩形板	- 31 -
3.2.2 求解 C-F-F-F 矩形板	- 34 -
3.2.3 求解 S-S-S-S 矩形板	- 38 -
3.3 收斂性分析	- 42 -
3.4 數值結果	- 44 -
第四章 利用配點法求解	- 47 -
4.1 配點法	- 48 -
4.1.1 求解 C-C-C-C 自由振動頻率	- 48 -
4.1.2 求解 S-S-S-S 自由振動頻率	- 52 -

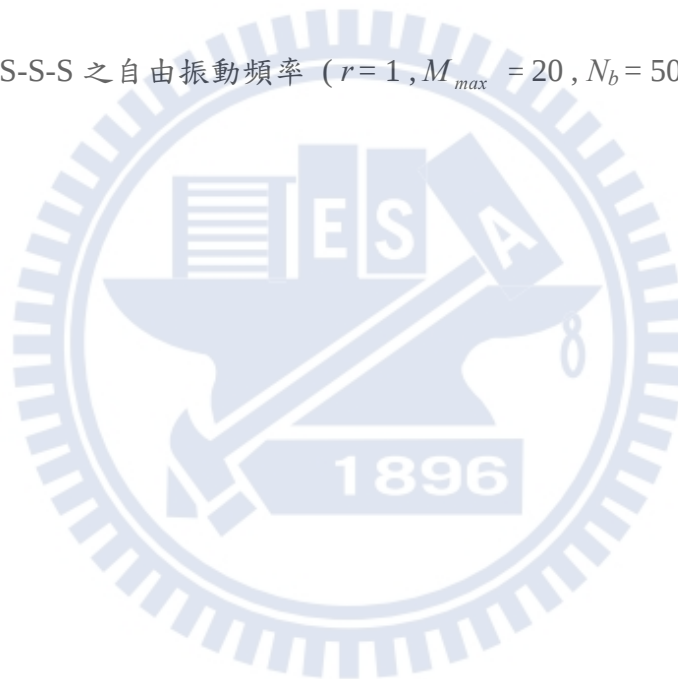
4.2 收斂性分析.....	- 57 -
4.3 比較兩法之收斂性.....	- 61 -
第五章 結論與建議	- 63 -
5.1 結論.....	- 63 -
5.2 建議.....	- 64 -
參考文獻	- 65 -
附錄 A	- 67 -
附錄 B	- 70 -
附錄 C	- 79 -



表目錄

表 2.1	擴充函式 $P_l(x)$ 於梁之邊界值.....	- 8 -
表 2.2	修正後 $P_l(x)$ 導函數於梁之邊界值.....	- 18 -
表 2.3	兩端固定端梁之自由振動頻率.....	- 23 -
表 2.4	固定端-簡支端梁之自由振動頻率.....	- 24 -
表 2.5	固定端-自由端梁之自由振動頻率.....	- 24 -
表 2.6	兩端自由端梁之自由振動頻率.....	- 25 -
表 3.1	擴充函式 $P_x^i(x)$ 於板之邊界值.....	- 28 -
表 3.2	C-C-C-C 之收斂性分析 ($r = a/b = 1$)	- 41 -
表 3.3	S-S-S-S 之收斂性分析 ($r = a/b = 1$)	- 42 -
表 3.4	C-C-C-C 之自由振動頻率.....	- 43 -
表 3.5	C-F-F-F 之自由振動頻率.....	- 43 -
表 3.6	S-S-S-S 之自由振動頻率.....	- 44 -
表 3.7	S-F-S-F 之自由振動頻率.....	- 44 -
表 3.8	S-S-S-F 之自由振動頻率.....	- 45 -
表 3.9	S-C-S-S 之自由振動頻率.....	- 45 -
表 3.10	S-C-S-C 之自由振動頻率.....	- 45 -

表 4.1	C-C-C-C 之收斂性分析 ($r = 1, N_b = 50, l = 0.01$) - 56 -
表 4.2	S-S-S-S 之收斂性分析 ($r = 1, N_b = 150, l = 0.01$) - 57 -
表 4.3	C-C-C-C 之自由振動頻率 ($r = 1, M_{max} = 20, l = 0.01$) - 58 -
表 4.4	S-S-S-S 之自由振動頻率 ($r = 1, M_{max} = 20, l = 0.01$) - 58 -
表 4.5	C-C-C-C 之自由振動頻率 ($r = 1, M_{max} = 20, N_b = 50$) - 59 -
表 4.6	S-S-S-S 之自由振動頻率 ($r = 1, M_{max} = 20, N_b = 50$) - 59 -



圖目錄

圖 2.1	擴充函式 $P_i(x)$	- 8 -
圖 4.1	配點法之編點命名.....	- 46 -



符號說明

■ 梁(第二章)

L	梁長
E	彈性模數
I	慣性矩
A	梁斷面面積
ρ_b	質量密度
ρ_D	$= \rho A / EI$
P_i	多項式方程 ($i = 1, 2, 3, 4$)
A_m	傅立葉係數
C_i	擴充函數中各多項式方程之待定係數 ($i = 1, 2, 3, 4$)
m	傅立葉級數累計項數 ($= 0, 1, 2, \dots, M$)
M	傅立葉級數最大計數值
$w(x)$	梁位移
λ_m	傅立葉級數週期 ($= m\pi/L$)
ω	頻率
μ	無因次化頻率 ($= \left(\frac{\omega}{\pi^2} \sqrt{\rho A / D} \right)^{1/2}$)

■ 矩形平板(第三、四章)

a	矩形板長度(x 方向)
b	矩形板寬度(y 方向)
h	矩形板厚度(z 方向)
D	撓曲剛度($= Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$)
E	彈性模數
ρ	質量密度
ν	普松比
ω	自由振動頻率
$w(x,y)$	垂直板面的撓度方程
A_{mn}	傅立葉級數中雙項數係數
B_m	傅立葉級數中單項數待定係數
C_n	傅立葉級數中單項數待定係數
m, n	傅立葉級數累計項數($= 0, 1, 2, \dots, M$ 或 N)
M, N	傅立葉級數最大計數值
P_x^i, P_y^i	多項式方程($i = 1, 2, 3, 4$)
λ_m	傅立葉級數中 x 方程的週期($= m\pi/a$)
λ_n	傅立葉級數中 y 方程的週期($= n\pi/b$)
Q_x, Q_y	剪力
M_x, M_y	彎矩
M_{xy}	扭力矩
$\mathbf{K}$	結構勁度矩陣
$\mathbf{M}$	結構質量矩陣
r	長寬比($= a/b$)
Ω	無因次化頻率($= \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)

第一章 緒論

1.1 前言

薄板構件廣泛應用於土木、機械、航太工程等領域，在土木工程中，常見有樓地板、橋面板以及各種應用。當板承受不斷變化、不同形式的載重作用，整個系統會反應出各種振動行為，其中振動頻率更是工程應用中所關心的重要因素之一。例如地震發生時，地震力造成構件產生裂縫等影響外，也可能因構件的自然振動頻率與地震頻率相近，而產生共振破壞、崩塌，因此土木工程之頻率分析更需仔細考量。

1.2 文獻回顧

古典薄板理論常見於板之分析，因其方程式較簡單，由 Kirchhoff (1959) 提出，故又稱為 Kirchhoff 理論，專門討論分析薄板，其寬厚比(b/h)大於 20，本研究即是按此理論進行。該理論主要假設：一、當板彎曲時，垂直板中間面的線段仍保持直線，並且垂直板之中間面。二、在橫向荷重下，板發生小撓度時，板的中間面並不會受拉伸。三、忽略轉動慣量(rotary inertia)。

求解矩形板之振動問題，分為兩途徑：一、求出既滿足四階微分控制方程又滿足邊界條件之解析解方法。二、採用近似法求解之數值方法，例如 Ritz 法、有限元素法、加權殘餘法等，隨著計算機技術發展，數值方法亦廣泛迅速應用，在此不多做敘述。

雖然研究矩形薄板之自由振動問題已有許多年，但由於邊界條件與荷載複雜，造成數學計算上的困難，其解析解並不常見於文獻。其中最有名者為考慮四邊簡支端之解，由 Navier 提出，Navier 假設解為雙重正弦三角級數(double sine trigonometric series)之形式¹，求解出矩形板在均佈載重與集中荷重於板中任一點的撓度之正確解，可謂是正確解的創始。

另外，兩對邊簡支而另外兩邊任意邊界之矩形板正確解，亦可容易求得，通常稱之為閉合正確解(closed-formed exact solutions)，由 Lévy 提出，Lévy 假設其解為單正弦三角級數(single sine trigonometric series)之形式²，相較 Navier 法，其收斂性較佳且適用邊界更廣泛，然而其他非對邊簡支之邊界，依然沒有閉合正確解滿足。

常見於工程應用之四邊固定板振動問題，直到 Timoshenko (1938)應用疊加法於 Lévy 法求解而得，亦求解出不少邊界條件之問題。疊加法之應用使得 Lévy 法適用邊界更廣泛，但表達式複雜許多、數值計算瑣碎。

Wang 與 Lin (1996) 以傅立葉級數求解兩端固定及一端固定一端簡支梁之自然振動問題，指出傅立葉級數在不連續邊界下，其微分函數可能造成非一致收斂(non-uniform convergence)而無法逐項微分(term-by-term differentiations)。

Li (2000)提出傅立葉級數求解一維梁自由振動問題，將撓度看成傅立葉級數與任意多項式方程之線性組合，此多項式並非用來滿足特別邊界，而是作為擴充函數來修正邊界不連續問題，並改善其收斂速度；Li (2002)提出當正確解假設為傅立葉

¹ Navier 的『雙重三角級數(double trigonometric series)之形式』資料來源由參考文獻 Szilard (1974)

² Lévy 的『單三角級數(single trigonometric series)之形式』資料來源由參考文獻 Szilard (1974)

餘弦級數展開時，其收斂速度會較傅立葉正弦級數快。在探討薄板自然振動，Du 等人 (2007)採用傅立葉級數求解，以多項式作為擴充函數，探討板內振動情形。Li 等人 (2009)採用傅立葉餘弦級數，以三角函數作為擴充函數，求解五種邊界條件問題。Jin 等人 (2010)採用傅立葉餘弦級數，以五階多項式作為擴充函數求解矩形板振動問題，探討平移彈簧與旋轉彈簧對板振動之影響，並提出改變平移彈簧勁度對求解振動頻率之影響會比旋轉勁度要大許多之結論。

1.3 研究目的與方法

總觀前人之研究，矩形板自由振動問題之閉合解析解研究甚少，故本研究參照 Li (2000)中的方法與概念，假設梁及板之撓度為傅立葉餘弦級數與多項式之線性組合，用以求解其振動問題。利用兩種方法滿足矩形板各邊界條件及控制方程：①積分轉換為傅立葉級數域、②配點法，求解待定係數，將其結果代入滿足控制方程以求解自由振動頻率，探討梁及矩形板於各邊界之振動問題，考慮參數有長寬比，並將兩方法於兩種邊界問題(四端固定、四端簡支端之矩形板)做收斂性分析比較。

1.4 內容摘要

本論文共分為五章，其內容如下：

第一章：緒論

說明本研究目的與方法，以及回顧相關矩形薄板振動解析解發展之文獻。

第二章：梁之振動問題

簡述傅立葉級數逐項微分時的問題與解決方法，參照 Li (2000)並依其假設與方法，使用傅立葉形式級數求解梁之振動問題。

第三章：矩形板之振動問題

利用傅立葉形式級數決定待定係數，探討矩形板在三種邊界條件下的振動問題，並依其法求解出七種邊界條件之振動頻率。

第四章：利用配點法求解

利用配點法決定待定係數，求解矩形板於兩種邊界條件之振動問題，並與傅立葉形式級數之法進行收斂性分析比較。

第五章：結論與建議

結論本研究所得結果，並針對所遇到之問題提出建議。

第二章 梁之振動問題

此章先以梁作驗證，介紹 Euler-Bernoulli 梁理論的控制方程，參照 Li (2000)

所提方法，使用傅立葉級數求解梁振動頻率，以便進一步分析板問題。

2.1 梁振動控制方程

根據 Euler-Bernoulli 梁理論，等截面梁自由振動頻率下的控制方程為

$$\frac{\partial^4 \bar{w}(x,t)}{\partial x^4} + \rho_D \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

其中 $\bar{w}(x,t)$ 為撓度， $\rho_D = \frac{\rho_b A}{EI}$ ，而 E 、 I 、 ρ_b 、 A 分別為梁之彈性模數、慣性矩、質量密度、斷面面積。

在考慮自由振動 (free vibration) 之問題，可令

$$\bar{w}(x,t) = w(x)e^{i\omega t}, \quad (2.2)$$

ω 為自由振動頻率(rad/sec)，將式(2.2)代入式(2.1)可得

$$\left(\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \rho_D \omega^2 w(x) \right) e^{i\omega t} = 0, \quad (2.3a)$$

其中 $e^{i\omega t}$ 非零，可提出而得

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \rho_D \omega^2 w(x) = 0. \quad (2.3b)$$

2.2 傅立葉級數解之基本理論

傅立葉級數之每單一函數 $\cos \lambda_m x$ 、 $\sin \lambda_m x$ 均可微分，但當一函數用傅立葉級數展開時，該函數之微分並不一定等於該傅立葉級數之逐項微分。

Tolstov (1965) 列出兩條傅立葉級數微分之數學定理：

定理一： $f(x)$ 定義在 $[0, L]$ 且為連續函數，以傅立葉正弦展開為

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \lambda_m x, \quad 0 < x < L, \quad (2.4)$$

其中 $\lambda_m = m\pi/L$ ，則

$$f'(x) = \frac{f(L) - f(0)}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} [(-1)^m f(L) - f(0)] + \lambda_m b_m \right) \cos \lambda_m x. \quad (2.5)$$

定理二： $f(x)$ 定義在 $[0, L]$ 且為連續函數，以傅立葉餘弦展開為

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \lambda_m x, \quad 0 < x < L, \quad (2.6)$$

則

$$f'(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m \sin \lambda_m x. \quad (2.7)$$

由兩定理(2.4~2.7)知，傅立葉餘弦展開式可逐項微分；但傅立葉正弦展開式，惟有在 $f(0) = f(L) = 0$ 時，才可得該級數之逐項微分。方程式(2.3b)的解析解可定義在 $[0, L]$ 之傅立葉級數展開表示，但注意定理一之要求，即須滿足其解逐項微分後為連續函數，且在邊界之值為零。

假設撓度為

$$w(x) = \sum_{m=0}^M A_m \cos \lambda_m x, \quad 0 < x < L, \quad (2.8)$$

其中 $\lambda_m = m\pi/L$ ，依定理一、二， $w(x)$ 之微分可表示成

$$w'(x) = -\sum_{m=0}^M \lambda_m A_m \sin \lambda_m x, \quad (2.9)$$

$$w''(x) = \frac{w'(L) - w'(0)}{L} + \sum_{m=0}^M (a_m - \lambda_m^2 A_m) \cos \lambda_m x, \quad (2.10)$$

$$w'''(x) = -\sum_{m=0}^M (a_m \lambda_m - \lambda_m^3 A_m) \sin \lambda_m x, \quad (2.11)$$

$$w^{(4)}(x) = \frac{w'''(L) - w'''(0)}{L} + \sum_{m=0}^M (b_m - a_m \lambda_m^2 + \lambda_m^4 A_m) \cos \lambda_m x, \quad (2.12)$$

其中 $a_m = \frac{2}{L} [(-1)^m w'(L) - w'(0)]$ 、 $b_m = \frac{2}{L} [(-1)^m w'''(L) - w'''(0)]$ ，但通常 $w'(0)$ 、 $w'(L)$ 、 $w'''(0)$ 、 $w'''(L)$ 未知，故依上述做法無法求解。

解決之道，可以擴充函式 $P(x)$ 去修正上述逐項微分所造成之問題，因控制

方程含四階導函數(最高階者)，依 Li (2000) 之建議，假設 $P(x)$ 為四階多項式

$P_1(x)$ 、 $P_2(x)$ 、 $P_3(x)$ 及 $P_4(x)$ 之線性組合，即

$$P(x) = C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x) + C_4 P_4(x), \quad (2.13)$$

其中 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 為待求係數，且滿足 $P_1'(0)=1$ 、 $P_2'''(0)=1$ 、 $P_3'(L)=1$ 、

$P_4'''(L)=1$ ，而其他於 $x=0$ 或 $x=L$ 之一階、三階導數均為零；此外

$$\int_0^L P_i(x) dx = 0, \quad (2.14)$$

其中 $i = 1 \sim 4$ ，滿足以上假設可得

$$P_1(x) = -\frac{x^2}{2L} + x - \frac{L}{3} \quad (2.15a)$$

$$P_2(x) = -\frac{x^4}{24L} + \frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{6} + \frac{L^3}{45} \quad (2.15b)$$

$$P_3(x) = \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6} \quad (2.15c)$$

$$P_4(x) = \frac{x^4}{24L} - \frac{Lx^2}{12} + \frac{7L^3}{360} \quad (2.15d)$$

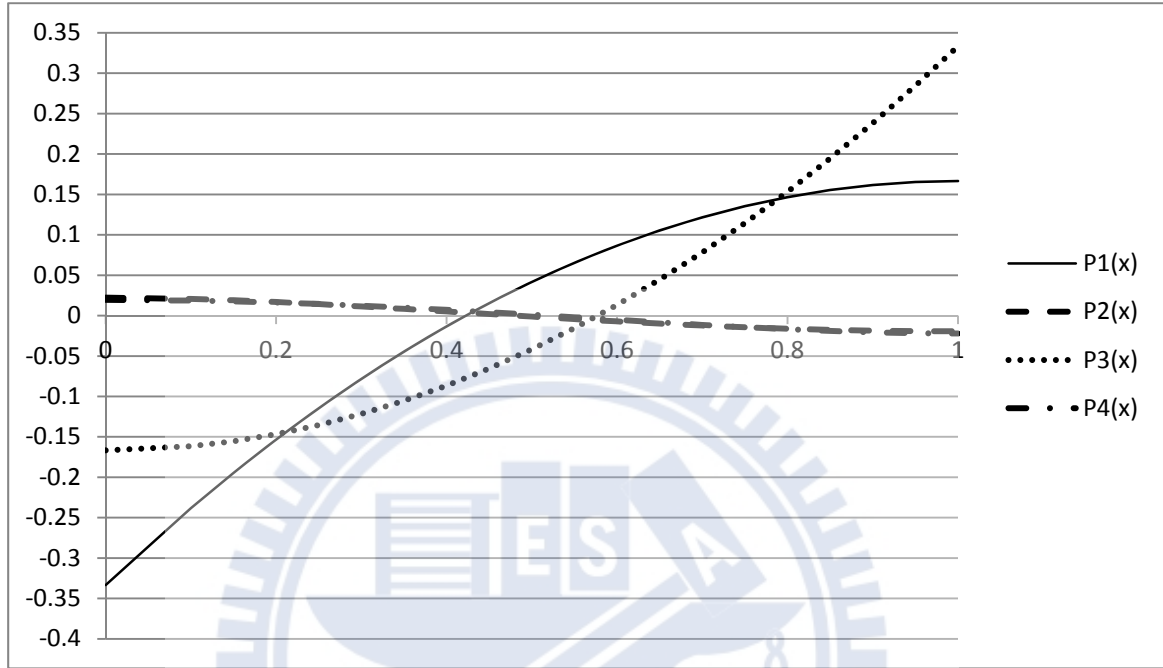


圖 2.1 擴充函式 $P_i(x)$

圖 2.1 之 $P_2(x)$ 、 $P_4(x)$ 數值結果接近。

表 2.1 擴充函式 $P_i(x)$ 於梁之邊界值

	原多項式		一階多項式		二階多項式		三階多項式	
	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$
P_1	$-L/3$	$L/6$	1	0	$-1/L$	$-1/L$	0	0
P_2	$L^3/45$	$-7L^3/360$	0	0	$-L/3$	$L/6$	1	0
P_3	$-L/6$	$L/3$	0	1	$1/L$	$1/L$	0	0
P_4	$7L^3/360$	$-L^3/45$	0	0	$-L/6$	$L/3$	0	1

因此，令梁之撓度方程式為

$$w(x) = \bar{w}(x) + P(x) = \sum_{m=0}^M A_m \cos \lambda_m x + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x) + C_4 P_4(x) , \quad (2.16)$$

其中 $\bar{w}(x)$ 滿足 $\bar{w}'(0) = \bar{w}'(L) = \bar{w}'''(0) = \bar{w}'''(L) = 0$ 。將式(2.15a~2.15d)及(2.16)代回

(2.3b)可得傅立葉級數之控制方程式為

$$\sum_{m=0}^M \lambda_m^4 A_m \cos \lambda_m x + (-C_2 + C_4) - \rho_D \omega^2 \left(\sum_{m=0}^M A_m \cos \lambda_m x + P(x) \right) = 0 . \quad (2.17)$$

利用傅立葉級數之正交性，將(2.17)乘上 $2 \cos \lambda_m x / L$ 並積分 x 從 0 至 L ，可得

$$\lambda_k^4 A_k - \rho_D \omega^2 (A_k + P_k) = 0 \quad (2.18)$$

及

$$(-C_2 + C_4) - \rho_D \omega^2 A_0 = 0 , \quad (2.19)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, M$ ， $\lambda_k = k\pi/L$ ，而

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{2}{L} \int_0^L P(x) \cos \lambda_k x dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L (C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x) + C_4 P_4(x)) \cos \lambda_k x dx \\ &= \frac{2}{L} \left(\left(-\frac{1}{\lambda_k^2} \right) C_1 + \left(\frac{1}{\lambda_k^4} \right) C_2 + \left(\frac{(-1)^k}{\lambda_k^2} \right) C_3 + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} \right) C_4 \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3 不同邊界條件之解

此節探討 Euler-Bernoulli 梁於四種邊界條件之振動問題，分別為：

① 固定端-固定端、② 固定端-簡支端、③ 固定端-自由端、④ 自由端-自由端。為簡化分析，令梁長 $L = 1$ 單位長。

2.3.1 固定端-固定端(C-C)之解

固定端須滿足撓度與旋轉角為零，即

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 0. \quad (2.21)$$

將式(2.16)代入式(2.21)可得

$$w(0) = \sum_{m=0}^M A_m - \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{45}C_2 - \frac{1}{6}C_3 + \frac{7}{360}C_4 = 0, \quad (2.22a)$$

$$w'(0) = C_1 = 0, \quad (2.22b)$$

$$w(1) = \sum_{m=0}^M A_m (-1)^m + \frac{1}{6}C_1 - \frac{7}{360}C_2 + \frac{1}{3}C_3 - \frac{1}{45}C_4 = 0, \quad (2.22c)$$

$$w'(1) = C_3 = 0. \quad (2.22d)$$

整理式(2.22a~2.22d)可得 C_i ($i=1, 2, 3, 4$) 與 A_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$) 關係，以矩

陣形式表示為

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (2.23)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} P_1(0) & P_2(0) & P_3(0) & P_4(0) \\ P'_1(0) & P'_2(0) & P'_3(0) & P'_4(0) \\ P_1(1) & P_2(1) & P_3(1) & P_4(1) \\ P'_1(1) & P'_2(1) & P'_3(1) & P'_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{45} & \frac{-1}{6} & \frac{7}{360} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{-7}{360} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{45} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{C} = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4)^T, \quad (2.24b)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & (-1)^{m+1} & \cdots & (-1)^{M+1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24c)$$

$$\mathbf{A} = (A_0 \ A_1 \ \cdots \ A_M)^T. \quad (2.24d)$$

求解式(2.23)可得待求係數 C_i 與 A_m 之關係為

$$C_1 = 0, \quad (2.25a)$$

$$C_2 = \sum_{m=0}^M (-168(-1)^m - 192) A_m, \quad (2.25b)$$

$$C_3 = 0, \quad (2.25c)$$

$$C_4 = \sum_{m=0}^M (192(-1)^m + 168) A_m. \quad (2.25d)$$

將式(2.25a~2.25d)結果代入式(2.18~2.20)整理可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \lambda_k^4 A_k - \rho_D \omega^2 \left[\sum_{k=1}^M A_k + \sum_{k=1}^M \left(\frac{2}{\lambda_k^4} \right) \sum_{m=0}^M (-168(-1)^m - 192) A_m \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^M \left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} \right) \sum_{m=0}^M (192(-1)^m + 168) A_m \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\sum_{m=0}^M 360((-1)^m + 1) - \rho_D \omega^2 A_0 = 0. \quad (2.27)$$

整理式(2.26)、(2.27)可得矩陣形式為

$$(\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = 0 \quad (2.28)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 720 & 0 & 720 & 0 & \cdots & 360((-1)^m + 1) \\ 0 & \lambda_1^4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^4 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_k^4 \delta_{km} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_M^4 \end{bmatrix}, \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ S_{10} & 1+S_{11} & \cdots & S_{1m} & \cdots & S_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ S_{k0} & S_{k1} & & \delta_{km} + S_{km} & & S_{kM} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ S_{M0} & S_{M1} & \cdots & S_{Mm} & \cdots & 1+S_{MM} \end{bmatrix}, \quad (2.29b)$$

$$S_{km} = \left(\frac{2}{\lambda_k^4} \right) \left(-168(-1)^m - 192 \right) + \left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} \right) \left(192(-1)^m + 168 \right), \quad (2.29c)$$

式(2.29a)、(2.29b)之 δ_{km} 為 Kronecker delta，定義 $\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$ ，其中

$k = 1, 2, \dots, M$ ， $m = 0, 1, \dots, M$ 。

ω 須滿足 $|\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ ，使用求解特徵根之方式，可得該邊界條件(C-C)之自由振動頻率。

2.3.2 固定端-簡支端(C-S)之解

固定端須滿足撓度與旋轉角為零，簡支承端則須滿足撓度以及彎矩為零，即

$$w(0)=0, \quad w'(0)=0, \quad w(1)=0, \quad w''(1)=0. \quad (2.30)$$

將式(2.16)代入式(2.30)可得

$$w(0) = \sum_{m=0}^M A_m - \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{45}C_2 - \frac{1}{6}C_3 + \frac{7}{360}C_4 = 0, \quad (2.31a)$$

$$w'(0) = C_1 = 0, \quad (2.31b)$$

$$w(1) = \sum_{m=0}^M A_m (-1)^m + \frac{1}{6}C_1 - \frac{7}{360}C_2 + \frac{1}{3}C_3 - \frac{1}{45}C_4 = 0, \quad (2.31c)$$

$$w''(1) = \sum_{m=0}^M \lambda_m^2 A_m (-1)^{m+1} - C_1 + \frac{1}{6}C_2 + C_3 + \frac{1}{3}C_4 = 0. \quad (2.31d)$$

整理式(2.31a~2.31d)可得式(2.23)形式，

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (2.23)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} P_1(0) & P_2(0) & P_3(0) & P_4(0) \\ P_1'(0) & P_2'(0) & P_3'(0) & P_4'(0) \\ P_1(1) & P_2(1) & P_3(1) & P_4(1) \\ P_1''(1) & P_2''(1) & P_3''(1) & P_4''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{45} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{360} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{7}{360} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{45} \\ -1 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & (-1)^{m+1} & \cdots & (-1)^{M+1} \\ \lambda_0^2 & -\lambda_1^2 & \cdots & (-1)^m \lambda_m^2 & \cdots & (-1)^M \lambda_M^2 \end{bmatrix}. \quad (2.32b)$$

求解式(2.23)可得待求係數 C_i 與 A_m 之關係為

$$C_1 = 0, \quad (2.33a)$$

$$C_2 = \sum_{m=0}^M \left(-128 - 72(-1)^m - \frac{8}{3}(-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m, \quad (2.33b)$$

$$C_3 = \sum_{m=0}^M \left(-\frac{8}{3} - 4(-1)^m + \frac{1}{9}(-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m, \quad (2.33c)$$

$$C_4 = \sum_{m=0}^M \left(72 + 48(-1)^m + 4(-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m. \quad (2.33d)$$

將式(2.33a~2.33d)結果代入式(2.18~2.20)整理可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \lambda_k^4 A_k - \rho_D \omega^2 \left[\sum_{k=1}^M A_k + \sum_{k=1}^M \left(\frac{2}{\lambda_k^4} \right) \sum_{m=0}^M \left(-128 - 72(-1)^m - \frac{8}{3}(-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^M \left(\frac{2(-1)^k}{\lambda_k^2} \right) \sum_{m=0}^M \left(-\frac{8}{3} - 4(-1)^m + \frac{1}{9}(-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^M \left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} \right) \sum_{m=0}^M \left(72 + 48(-1)^m + 4(-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\sum_{m=0}^M \left(200 + 120(-1)^m + \frac{20}{3}(-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m - \rho_D \omega^2 A_0 = 0. \quad (2.35)$$

整理式(2.34)、(2.35)可得矩陣形式為

$$(\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = 0 \quad (2.28)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 320 & \left(200 - 120 - \frac{20}{3} \lambda_1^2 \right) & \cdots & \left(\frac{200 + 120(-1)^M + \frac{20}{3}(-1)^M \lambda_M^2}{3} \right) & \cdots & \left(\frac{200 + 120(-1)^M + \frac{20}{3}(-1)^M \lambda_M^2}{3} \right) \\ 0 & \lambda_1^4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^4 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_k^4 \delta_{km} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_M^4 \end{bmatrix}, \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ S_{10} & 1+S_{11} & \cdots & S_{1m} & \cdots & S_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ S_{k0} & S_{k1} & & \delta_{km} + S_{km} & & S_{kM} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ S_{M0} & S_{M1} & \cdots & S_{Mm} & \cdots & 1+S_{MM} \end{bmatrix}, \quad (2.36b)$$

$$S_{km} = \left(\frac{2}{\lambda_k^4} \right) \left(-128 - 72(-1)^m - \frac{8}{3}(-1)^m \lambda_m^2 \right) + \left(\frac{2(-1)^k}{\lambda_k^2} \right) \left(-\frac{8}{3} - 4(-1)^m + \frac{1}{9}(-1)^m \lambda_m^2 \right) \\ + \left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} \right) \left(72 + 48(-1)^m + 4(-1)^m \lambda_m^2 \right). \quad (2.36c)$$

ω 須滿足 $|\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ ，使用求解特徵根之方式，可得該邊界條件(C-S)之自由振動頻率。

2.3.3 固定端-自由端(C-F)之解

固定端須滿足撓度與旋轉角為零，自由端則須滿足彎矩與剪力為零，即

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(1) = 0, \quad w'''(1) = 0. \quad (2.37)$$

將式(2.16)代入式(2.37)可得

$$w(0) = \sum_{m=0}^M A_m - \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{45}C_2 - \frac{1}{6}C_3 + \frac{7}{360}C_4 = 0, \quad (2.38a)$$

$$w'(0) = C_1 = 0, \quad (2.38b)$$

$$w''(1) = \sum_{m=0}^M \lambda_m^2 A_m (-1)^{m+1} - C_1 + \frac{1}{6}C_2 + C_3 + \frac{1}{3}C_4 = 0, \quad (2.38c)$$

$$w'''(1) = C_4 = 0. \quad (2.38d)$$

整理式(2.38a~2.38d)可得式(2.23)形式，

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (2.23)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} P_1(0) & P_2(0) & P_3(0) & P_4(0) \\ P_1'(0) & P_2'(0) & P_3'(0) & P_4'(0) \\ P_1''(1) & P_2''(1) & P_3''(1) & P_4''(1) \\ P_1'''(1) & P_2'''(1) & P_3'''(1) & P_4'''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{45} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{360} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_0^2 & -\lambda_1^2 & \cdots & (-1)^m \lambda_m^2 & \cdots & (-1)^M \lambda_M^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^\circ. \quad (2.39b)$$

求解式(2.23)可得待求係數 C_i 與 A_m 之關係為

$$C_1 = 0, \quad (2.40a)$$

$$C_2 = \sum_{m=0}^M \left(-20 + \frac{10}{3} (-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m, \quad (2.40b)$$

$$C_3 = \sum_{m=0}^M \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{9} (-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m, \quad (2.40c)$$

$$C_4 = 0. \quad (2.40d)$$

將式(2.40a~2.40d)結果代入式(2.18~2.20)整理可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \lambda_k^4 A_k - \rho_D \omega^2 \left[\sum_{k=1}^M A_k + \sum_{k=1}^M \left(\frac{2}{\lambda_k^4} \right) \sum_{m=0}^M \left(-20 + \frac{10}{3} (-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^M \left(\frac{2(-1)^k}{\lambda_k^2} \right) \sum_{m=0}^M \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{9} (-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\sum_{m=0}^M \left(20 - \frac{10}{3} (-1)^m \lambda_m^2 \right) A_m - \rho_D \omega^2 A_0 = 0. \quad (2.42)$$

整理式(2.41)、(2.42)可得矩陣形式為

$$(\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = 0 \quad (2.28)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 20 & \left(20 + \frac{10}{3} \lambda_1^2\right) & \cdots & \left(20 - \frac{10}{3} (-1)^m \lambda_m^2\right) & \cdots & \left(20 - \frac{10}{3} (-1)^M \lambda_M^2\right) \\ 0 & \lambda_1^4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^4 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_k^4 \delta_{km} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_M^4 \end{bmatrix}, \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ S_{10} & 1 + S_{11} & \cdots & S_{1m} & \cdots & S_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ S_{k0} & S_{k1} & \cdots & \delta_{km} + S_{km} & \cdots & S_{kM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{M0} & S_{M1} & \cdots & S_{Mm} & \cdots & 1 + S_{MM} \end{bmatrix}, \quad (2.43b)$$

$$S_{km} = \left(\frac{2}{\lambda_k^4}\right) \left(-20 + \frac{10}{3} (-1)^m \lambda_m^2\right) + \left(\frac{2(-1)^k}{\lambda_k^2}\right) \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{9} (-1)^m \lambda_m^2\right). \quad (2.43c)$$

ω 須滿足 $|\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ ，使用求解特徵根之方式，可得該邊界條件(C-F)之自由振動頻率。

2.3.4 自由端-自由端(F-F)之解

自由端須滿足彎矩與剪力為零，即

$$w''(0)=0, \quad w'''(0)=0, \quad w''(1)=0, \quad w'''(1)=0. \quad (2.44)$$

將式(2.16)代入式(2.44)可得

$$w''(0) = -\sum_{m=0}^M \lambda_m^2 A_m - C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3 - \frac{1}{6}C_4 = 0, \quad (2.45a)$$

$$w'''(0) = C_2 = 0, \quad (2.45b)$$

$$w''(1) = \sum_{m=0}^M \lambda_m^2 A_m (-1)^{m+1} - C_1 + \frac{1}{6}C_2 + C_3 + \frac{1}{3}C_4 = 0, \quad (2.45c)$$

$$w'''(1) = C_4 = 0. \quad (2.45d)$$

整理式(2.45a~2.45d) 可得式(2.23)形式，

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (2.23)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} P_1''(0) & P_2''(0) & P_3''(0) & P_4''(0) \\ P_1'''(0) & P_2'''(0) & P_3'''(0) & P_4'''(0) \\ P_1''(1) & P_2''(1) & P_3''(1) & P_4''(1) \\ P_1'''(1) & P_2'''(1) & P_3'''(1) & P_4'''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.46a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_M^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_0^2 & -\lambda_1^2 & \cdots & (-1)^m \lambda_m^2 & \cdots & (-1)^M \lambda_M^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.46b)$$

由式(2.46a)發現 $\mathbf{B}$ 為奇異矩陣，無法求解式(2.23)。原因來自於 $P_1(x)$ 、 $P_3(x)$ 均

為二階多項式，在微分兩次後為常數，代入邊界 0、1 或其他值均不為影響。

為解決此問題，吾人修正 $P_1(x)$ 、 $P_3(x)$ 之限制條件： $P_1(x)$ 須滿足 $P_1'(0)=1$ 、 $P_1'''(0)=0$ 、 $P_1'(L)=0$ 、 $P_1'''(L)=0$ 、 $\int_0^L P_1(x)dx=0$ ，另外加入 $P_1''(0)=0$ ；而 $P_3(x)$ 須滿足 $P_3'(0)=0$ 、 $P_3'''(0)=0$ 、 $P_3'(L)=1$ 、 $P_3'''(L)=0$ 、 $\int_0^L P_3(x)dx=0$ ，以及 $P_3''(L)=0$ 。如此可得 $P_1(x)$ 、 $P_3(x)$ 為五階多項式，而 $P_2(x)$ 、 $P_4(x)$ 保留為原來之四階多項式。故修正可得新假設之撓度方程為

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \bar{w}(x) + P(x) = \sum_{m=0}^M A_m \cos \lambda_m x + C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + C_4 P_4 \\
 &= \sum_{m=0}^M A_m \cos \lambda_m x + C_1 \left(\frac{x^5}{5L^4} - \frac{x^4}{2L^3} + x - \frac{13L}{30} \right) + C_2 \left(-\frac{x^4}{24L} + \frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{6} + \frac{L^3}{45} \right) \\
 &\quad + C_3 \left(\frac{x^5}{5L^4} - \frac{x^4}{2L^3} + \frac{x^2}{L} - \frac{4L}{15} \right) + C_4 \left(\frac{x^4}{24L} - \frac{Lx^2}{12} + \frac{7L^3}{360} \right), \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

表 2.2 修正後 $P_i(x)$ 導函數於梁之邊界值

	一階多項式		二階多項式		三階多項式	
	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$
P_1	1	0	0	$-2/L$	0	0
P_2	0	0	$-L/3$	$L/6$	1	0
P_3	0	1	$2/L$	0	0	0
P_4	0	0	$-L/6$	$L/3$	0	1

將式(2.47)代入自由端邊界條件(2.44)，方法如前，以矩陣形式(2.23)表示之，

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} P_1''(0) & P_2''(0) & P_3''(0) & P_4''(0) \\ P_1'''(0) & P_2'''(0) & P_3'''(0) & P_4'''(0) \\ P_1''(1) & P_2''(1) & P_3''(1) & P_4''(1) \\ P_1'''(1) & P_2'''(1) & P_3'''(1) & P_4'''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & 2 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.48a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_M^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_0^2 & -\lambda_1^2 & \cdots & (-1)^m \lambda_m^2 & \cdots & (-1)^M \lambda_M^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.48b)$$

求解式(2.23)可得待求係數 C_i 與 A_m 之關係為

$$C_1 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M (-1)^{m+1} \lambda_m^2 A_m, \quad (2.49a)$$

$$C_2 = 0, \quad (2.49b)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \lambda_m^2 A_m, \quad (2.49c)$$

$$C_4 = 0. \quad (2.49d)$$

因 $P_1(x)$ 、 $P_3(x)$ 已有所改變，故式(2.20)中之 P_k 亦需更改為

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{2}{L} \int_0^L P(x) \cos \lambda_k x dx \\ &= \left(\frac{-30(24 + \lambda_k^4) + 720(-1)^k}{15\lambda_k^6 L^5} \right) C_1 + \left(\frac{2}{\lambda_k^4 L} \right) C_2 + \\ &\quad \left(\frac{30(24 + \lambda_k^4)(-1)^k - 720}{15\lambda_k^6 L^5} \right) C_3 + \left(\frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} \right) C_4, \end{aligned} \quad (2.50)$$

將式(2.49a~2.49d)結果代入式(2.18~2.19)與(2.50)整理可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \lambda_k^4 A_k - \rho_D \omega^2 \left[\sum_{k=1}^M A_k + \sum_{k=1}^M \left(\frac{-30(24 + \lambda_k^4) + 720(-1)^k}{15\lambda_k^6 L^5} \right) \sum_{m=0}^M \left(\frac{1}{2} (-1)^{m+1} \lambda_m^2 \right) A_m \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^M \left(\frac{30(24 + \lambda_k^4)(-1)^k - 720}{15\lambda_k^6 L^5} \right) \sum_{m=0}^M \left(\frac{1}{2} \lambda_m^2 \right) A_m \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\sum_{m=0}^M 0 \cdot A_m - \rho_D \omega^2 A_0 = 0 \quad (2.52)$$

整理式(2.51)、(2.52)可得矩陣形式為

$$(\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = 0 \quad (2.28)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1^4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^4 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_k^4 \delta_{km} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_M^4 \end{bmatrix}, \quad (2.53a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ S_{10} & 1 + S_{11} & \cdots & S_{1m} & \cdots & S_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k0} & S_{k1} & \cdots & \delta_{km} + S_{km} & \cdots & S_{kM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{M0} & S_{M1} & \cdots & S_{Mm} & \cdots & 1 + S_{MM} \end{bmatrix}, \quad (2.53b)$$

$$S_{km} = \left(\frac{-30(24 + \lambda_k^4) + 720(-1)^k}{15\lambda_k^6 L^5} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}(-1)^{m+1} \lambda_m^2 \right) + \left(\frac{30(24 + \lambda_k^4)(-1)^k - 720}{15\lambda_k^6 L^5} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \lambda_m^2 \right). \quad (2.53c)$$

ω 須滿足 $|\mathbf{K} - \rho_D \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ ，使用求解特徵根之方式，可得該邊界條件(F-F)之

自由振動頻率。很顯然式(2.53a)之 $\mathbf{K}$ 亦為奇異矩陣，因為 F-F 邊界之梁為自由剛體

運動，其對應之勁度矩陣必為奇異矩陣。

2.4 梁自由振動閉合解

均勻梁（uniform beams）皆有閉合解析解，參考 Leissa (2011)在此節補充之。

假設 $w(x) = Ge^{sx}$ 代入控制方程式(2.3b)可得

$$(s^4 - \rho_D \omega^2) Ge^{sx} = 0, \quad (2.54a)$$

令 $\beta^4 = \rho_D \omega^2$ 代入式(2.54a)

$$(s^4 - \beta^4) Ge^{sx} = 0 \quad (2.54b)$$

得 $s = \pm\beta$ 、 $\pm i\beta$ ，以及式(2.3b)之解為

$$w(x) = G_1 e^{\beta x} + G_2 e^{-\beta x} + G_3 e^{i\beta x} + G_4 e^{-i\beta x}, \quad (2.55a)$$

即

$$w(x) = \hat{G}_1 \sin \beta x + \hat{G}_2 \cos \beta x + \hat{G}_3 \sinh \beta x + \hat{G}_4 \cosh \beta x. \quad (2.55b)$$

以兩端固定端之梁 C-C 為例，將式(2.55b)代入該邊界條件

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0 \quad (2.56a \sim 2.56d)$$

由式(2.56a、2.56b)可得

$$w(0) = \hat{G}_2 + \hat{G}_4 = 0, \quad (2.57a)$$

$$w'(0) = \hat{G}_1 + \hat{G}_3 = 0, \quad (2.57b)$$

即 $\hat{G}_2 = -\hat{G}_4$ 、 $\hat{G}_1 = -\hat{G}_3$ ，再由式(2.56c、2.56d)可得

$$w(L) = \hat{G}_3 (\sinh \beta L - \sin \beta L) + \hat{G}_4 (\cosh \beta L - \cos \beta L) = 0, \quad (2.57c)$$

$$w'(L) = \hat{G}_3 (\cosh \beta L - \cos \beta L) + \hat{G}_4 (\sinh \beta L + \sin \beta L) = 0. \quad (2.57d)$$

若上式對 $\hat{G}_3$ 、 $\hat{G}_4$ 有非零解，其係數行列式必須為零，即

$$\begin{vmatrix} \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.58)$$

將式(2.58)展開化簡後可得特徵方程為

$$\cos \beta L \cdot \cosh \beta L = 1 \quad (2.59)$$

以下列出均勻梁於邊界 C-C、C-S、C-F、F-F 之特徵方程：

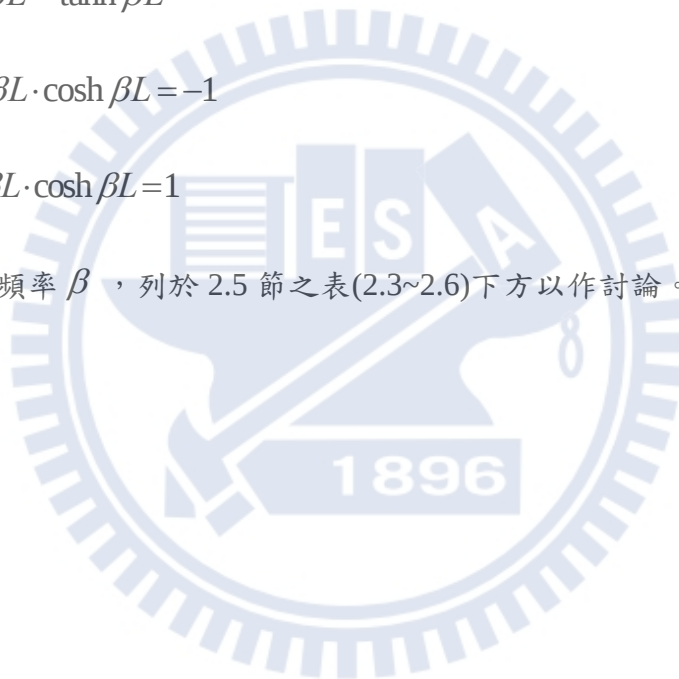
$$\textcircled{1} \text{ C-C : } \cos \beta L \cdot \cosh \beta L = 1 \quad (2.59)$$

$$\textcircled{2} \text{ C-S : } \tan \beta L = \tanh \beta L \quad (2.60)$$

$$\textcircled{3} \text{ C-F : } \cos \beta L \cdot \cosh \beta L = -1 \quad (2.61)$$

$$\textcircled{4} \text{ F-F : } \cos \beta L \cdot \cosh \beta L = 1 \quad (2.62)$$

以上求解可得頻率 β ，列於 2.5 節之表(2.3~2.6)下方以作討論。



2.5 收斂性分析

依 2.3 節所述，吾人將此些公式編譯成程式透過電腦求解。以下進行各邊界條件

求解頻率與收斂性分析，其中考慮無因次化自然振動頻率 $\mu = \left(\frac{\omega}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \right)^{1/2}$ 。

表 2.3 兩端固定端梁之自由振動頻率

M	$\mu = (\omega / \pi^2 \sqrt{\rho A / EI})^{1/2}$				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
1	1.649	2.884			
2	1.506	2.884	4.170		
8	1.506	2.500	3.500	4.501	5.502
10	1.506	2.500	3.500	4.500	5.500
20	1.506	2.500	3.500	4.500	5.500
30	1.506	2.500	3.500	4.500	5.500
* 正確解(Leissa, 2011)	1.506	2.500	3.500	4.500	5.500

表 2.3 為 C-C 梁（兩端固定）解之收斂性分析，由式(2.17)可知，傅立葉級數中取最大項數值 M ，則 A_m 從 A_0 至 A_M ，可近似得 $M+1$ 個自然振動頻率 μ 。由表 2.3 顯示：隨著 M 增加，前五模態之自然振動頻率 μ 逐漸收斂。理論上，此級數解並無法保證隨著 M 增加，自然振動頻率逐漸從上限收斂至正確解；但表 2.3 所示剛好有從上限收斂至正確解之現象。

第一模態頻率在 $M=2$ 收斂至四位有效數字 1.506，第二、三模態頻率在 $M=8$ 分別收斂至四位有效數字(2.500 及 3.500)，第四、五模態頻率則在 $M=10$ 亦分別收斂至四位有效數字(4.500 及 5.500)，其收斂速度很快。

表 2.4 固定端-簡支端梁之自由振動頻率

M	$\mu = (\omega / \pi^2 \sqrt{\rho A / EI})^{1/2}$				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
1	1.331	2.548			
2	1.254	2.469	3.795		
5	1.250	2.253	3.264	4.277	5.942
10	1.250	2.250	3.251	4.253	5.255
20	1.250	2.250	3.250	4.250	5.251
30	1.250	2.250	3.250	4.250	5.250
40	1.250	2.250	3.250	4.250	5.250
* 正確解(Leissa, 2011)	1.250	2.250	3.250	4.250	5.250

表 2.4 為 C-S 梁（一端固定，另一端簡支）解之收斂性分析，由表 2.4 所示： μ 隨著 M 增加，從上限逐漸收斂至正確解。第一模態頻率在 $M = 5$ 收斂至四位有效數字 1.250，第二模態頻率在 $M = 10$ 收斂至四位有效數字 2.250，第三、四模態頻率則在 $M = 20$ 分別收斂至四位有效數字(3.250 及 4.250)，第五模態頻率在 $M = 30$ 收斂至四位有效數字 5.250。

表 2.5 固定端-自由端梁之自由振動頻率

M	$\mu = (\omega / \pi^2 \sqrt{\rho A / EI})^{1/2}$				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
1	0.599	1.883			
2	0.597	1.505	3.251		
10	0.597	1.494	2.501	3.502	4.506
20	0.597	1.494	2.500	3.500	4.500
30	0.597	1.494	2.500	3.500	4.500
* 正確解(Leissa, 2011)	0.597	1.494	2.500	3.500	4.500

表 2.5 為 C-F 梁（一端固定，另一端自由）解之收斂性分析。由表 2.5 顯示： μ 亦隨著 M 增加而從上限逐漸收斂至正確解。第一模態頻率在 $M=2$ 收斂至四位有效數字 0.597，第二模態頻率在 $M=10$ 收斂至四位有效數字 1.494，第三、四、五模態頻率則分別在 $M=20$ 收斂至四位有效數字(2.500、3.500 及 4.500)，其收斂速度很快。

表 2.6 兩端自由端梁之自由振動頻率

M	$\mu = (\omega / \pi^2 \sqrt{\rho A / EI})^{1/2}$				
	3rd	4th	5th	6th	7th
5	1.509	2.509	3.546	4.558	
10	1.506	2.502	3.504	4.512	5.517
20	1.506	2.500	3.500	4.501	5.502
30	1.506	2.500	3.500	4.500	5.500
40	1.506	2.500	3.500	4.500	5.500
* 正確解(Leissa, 2011)	1.506	2.500	3.500	4.500	5.500

表 2.6 為 F-F 梁（兩端自由）解之收斂性分析，第一、二模態頻率為 0，故從第三模態頻率開始討論，由表 2.6 顯示： μ 亦隨著 M 增加而從上限逐漸收斂至正確解。第三模態頻率在 $M=10$ 收斂至四位有效數字 1.506，第四、五模態頻率在 $M=20$ 分別收斂至四位有效數字(2.500 及 3.500)，而第六、七頻率則在 $M=30$ 分別收斂至四位有效數字(4.500 及 5.500)。

以上討論的這四種案例（C-C、C-S、C-F、F-F），其頻率皆隨 M 值增加，而從上限逐漸收斂至正確解。

第三章 矩形板之振動問題

3.1 基本公式

薄板自由振動之控制方程為

$$D \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)_{\#}$$

其中 $\bar{w} = \bar{w}(x, y, t)$ 為撓度，板之撓曲剛度 $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ ， ρ 、 h 、 E 、 ν 分別為板

之質量密度、板厚、彈性模數、包松比。在考慮自由振動之問題，可令

$$\bar{w}(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t}, \quad (3.2)$$

其中 ω 為自由振動頻率。將式(3.2)代入式(3.1)可得

$$D \left(\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right) e^{i\omega t} - \rho h \omega^2 w(x, y) e^{i\omega t} = 0, \quad (3.3a)$$

其中 $e^{i\omega t}$ 非零，可提出而得

$$D \left(\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right) - \rho h \omega^2 w(x, y) = 0. \quad (3.3b)$$

板之彎矩、扭矩、剪力以撓度表示為

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\#} \quad (3.4)_{\#}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\#} \quad (3.5)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (3.7)$$

$$V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (3.8)$$

依第二章之經驗，可令矩形板之撓度為

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x) \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y) \cos \lambda_m x \right) \quad (3.9)$$

其中 A_{mn} 、 B_m^i 、 C_n^i 為待定係數， $\lambda_m = m\pi/a$ 、 $\lambda_n = n\pi/b$ ，其中 a 、 b 為板長與板

寬，擴充函式 $P_x^i(x)$ 、 $P_y^i(y)$ 為多項式：

$$P_x^1(x) = -\frac{x^2}{2a} + x - \frac{a}{3} \# \quad (3.10a)$$

$$P_x^2(x) = -\frac{x^4}{24a} + \frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{45} \# \quad (3.10b)$$

$$P_x^3(x) = \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{6} \# \quad (3.10c)\#$$

$$P_x^4(x) = \frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{12} + \frac{7a^3}{360} \# \quad (3.10d)\#$$

$$P_y^1(y) = -\frac{y^2}{2b} + y - \frac{b}{3} \# \quad (3.10e)\#$$

$$P_y^2(y) = -\frac{y^4}{24b} + \frac{y^3}{6} - \frac{by^2}{6} + \frac{b^3}{45} \# \quad (3.10f)\#$$

$$P_y^3(y) = \frac{y^2}{2b} - \frac{b}{6} \# \quad (3.10g)\#$$

$$P_y^4(y) = \frac{y^4}{24b} - \frac{by^2}{12} + \frac{7b^3}{360} \# \quad (3.10h)\#$$

式(3.10a~3.10h)為擴充函式，用以修正在逐項微分造成非一致收斂問題， $P_x^i(x)$

滿足 $P_x^{1'}(0)=1$ 、 $P_x^{2'''}(0)=1$ 、 $P_x^{3'}(a)=1$ 、 $P_x^{4'''}(a)=1$ ，其他於 $x=0$ 或 $x=a$ 之一階、

三階導數均為零， $P_x^i(x)$ 及其微分在 $x=0$ 及 a 處之值如表 3.1 所示。同樣地， $P_y^i(y)$

滿足 $P_y^{1'}(0)=1$ 、 $P_y^{2'''}(0)=1$ 、 $P_y^{3'}(b)=1$ 、 $P_y^{4'''}(b)=1$ ，其他於 $y=0$ 或 $y=b$ 之一階、三

階導數均為零。

表 3.1 擴充函式 $P_x^i(x)$ 於板之邊界值

	原多項式		一階多項式		二階多項式		三階多項式	
	$x=0$	$x=a$	$x=0$	$x=a$	$x=0$	$x=a$	$x=0$	$x=a$
P_x^1	$-a/3$	$a/6$	1	0	$-1/a$	$-1/a$	0	0
P_x^2	$a^3/45$	$-7a^3/360$	0	0	$-a/3$	$a/6$	1	0
P_x^3	$-a/6$	$a/3$	0	1	$1/a$	$1/a$	0	0
P_x^4	$7a^3/360$	$-a^3/45$	0	0	$-a/6$	$a/3$	0	1

將式(3.9)、(3.10a~3.10h)帶回(3.3b)得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 \right) A_{mn} \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \\
 & + \sum_{i=1}^4 \sum_{m=0}^M \left(\lambda_m^4 P_y^i(y) - 2\lambda_m^2 P_y^{i''}(y) + P_y^{i(4)}(y) \right) B_m^i \cdot \cos \lambda_m x \\
 & + \sum_{i=1}^4 \sum_{n=0}^N \left(\lambda_n^4 P_x^i(x) - 2\lambda_n^2 P_x^{i''}(x) + P_x^{i(4)}(x) \right) C_n^i \cdot \cos \lambda_n y \\
 & - \frac{\rho h \omega^2}{D} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x) \cdot \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y) \cdot \cos \lambda_m x \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

為提出共同項 $\cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y$ ，將 $P_x^i(x)$ 與 $P_y^i(y)$ 及其微分函數分別以 $\cos \lambda_m x$ 及

$\cos \lambda_n y$ 級數展開。令

$$\begin{aligned}
 P_y^i(y) &= \sum_{n=0}^N b_n^i \cdot \cos \lambda_n y, \quad P_y^{i''}(y) = \sum_{n=0}^N b_{n2}^i \cdot \cos \lambda_n y, \quad P_y^{i(4)}(y) = \sum_{n=0}^N b_{n4}^i \cdot \cos \lambda_n y, \\
 P_x^i(x) &= \sum_{m=0}^M a_m^i \cdot \cos \lambda_m x, \quad P_x^{i''}(x) = \sum_{m=0}^M a_{m2}^i \cdot \cos \lambda_m x, \quad P_x^{i(4)}(x) = \sum_{m=0}^M a_{m4}^i \cdot \cos \lambda_m x. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

其中 b_n^i 、 b_{n2}^i 、 b_{n4}^i 、 a_m^i 、 a_{m2}^i 、 a_{m4}^i 列於附錄 A，將之代入式(3.11)可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 \right) A_{mn} \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \\
& + \sum_{i=1}^4 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(\lambda_m^4 b_n^i - 2\lambda_m^2 b_{n2}^i + b_{n4}^i \right) B_m^i \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \\
& + \sum_{i=1}^4 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(\lambda_n^4 a_m^i - 2\lambda_n^2 a_{m2}^i + a_{m4}^i \right) C_n^i \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \\
& - \frac{\rho h \omega^2}{D} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_n^i a_m^i + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N B_m^i b_n^i \right) \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.13a}$$

式(3.13a)可進一步簡化成

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left\{ \left(\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 \right) A_{mn} \right. \\
& + \sum_{i=1}^4 \left(\left(\lambda_m^4 b_n^i - 2\lambda_m^2 b_{n2}^i + b_{n4}^i \right) B_m^i + \left(\lambda_n^4 a_m^i - 2\lambda_n^2 a_{m2}^i + a_{m4}^i \right) C_n^i \right) \\
& \left. - \frac{\rho h \omega^2}{D} \left(A_{mn} + \sum_{i=1}^4 \left(C_n^i a_m^i + B_m^i b_n^i \right) \right) \right\} \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y = 0
\end{aligned} \tag{3.13b}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 \right) A_{mn} \right. \\
& + \sum_{i=1}^4 \left(\left(\lambda_m^4 b_n^i - 2\lambda_m^2 b_{n2}^i + b_{n4}^i \right) B_m^i + \left(\lambda_n^4 a_m^i - 2\lambda_n^2 a_{m2}^i + a_{m4}^i \right) C_n^i \right) \\
& \left. - \frac{\rho h \omega^2}{D} \left(A_{mn} + \sum_{i=1}^4 \left(C_n^i a_m^i + B_m^i b_n^i \right) \right) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.13c}$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。式(3.13c)代表 $(M+1)(N+1)$ 條方程式。

3.2 不同邊界條件之解

此節探討 Kirchhoff 板於三種邊界條件之振動問題，分別為：①四邊固定端，②

一邊固定端、三邊自由端，③四邊簡支端。

3.2.1 求解 C-C-C-C 矩形板

四邊固定(C-C-C-C)矩形板之邊界條件為

$$w(x, 0) = 0, \quad w_{,y}(x, 0) = 0, \quad (3.14a, 3.14b)$$

$$w(0, y) = 0, \quad w_{,x}(0, y) = 0, \quad (3.14c, 3.14d)$$

$$w(x, b) = 0, \quad w_{,y}(x, b) = 0, \quad (3.14e, 3.14f)$$

$$w(a, y) = 0, \quad w_{,x}(a, y) = 0. \quad (3.14g, 3.14h)$$

將撓度方程式(3.9)代入邊界條件(3.14a~3.14h)，可得

$$w(x, 0) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N P_x^i(x) C_n^i + \sum_{m=0}^M P_y^i(0) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0, \quad (3.15a)$$

$$w_{,y}(x, 0) = \sum_{m=0}^M B_m^1 \cos \lambda_m x = 0, \quad (3.15b)$$

$$w(0, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N P_x^i(0) C_n^i \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M P_y^i(y) B_m^i \right) = 0, \quad (3.15c)$$

$$w_{,x}(0, y) = \sum_{n=0}^N C_n^1 \cos \lambda_n y = 0, \quad (3.15d)$$

$$w(x, b) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (-1)^n A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n P_x^i(x) C_n^i + \sum_{m=0}^M P_y^i(b) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0, \quad (3.15e)$$

$$w_{,y}(x, b) = \sum_{m=0}^M B_m^3 \cos \lambda_m x = 0, \quad (3.15f)$$

$$w(a, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (-1)^m A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N P_x^i(a) C_n^i \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M (-1)^m P_y^i(y) B_m^i \right) = 0, \quad (3.15g)$$

$$w_{,x}(a, y) = \sum_{n=0}^N C_n^3 \cos \lambda_n y = 0 \quad (3.15h)$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。

為提出共同項 $\cos \lambda_m x$ 或 $\cos \lambda_n y$ ，令 $P_x^i(x) = \sum_{m=0}^M a_m^i \cdot \cos \lambda_m x$ 與 $P_y^i(y) = \sum_{n=0}^N b_n^i \cdot \cos \lambda_n y$ 。

滿足邊界條件，每邊可得 $2(M+1)$ 或 $2(N+1)$ 條線性代數方程式，故總共得

$4(M+N+2)$ 方程式。由式(3.15b)、(3.15d)、(3.15f)、(3.15h)可得 $B_m^1 = 0$ 、 $C_n^1 = 0$ 、

$B_m^3 = 0$ 、 $C_n^3 = 0$ ，其中 $m = 0, 1, 2, \dots, M$ ， $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。由式(3.15a)、(3.15c)、

(3.15e)、(3.15g)可得 $2(M+N+2)$ 方程式，可以矩陣形式表示為

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (3.16)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^1 & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{f}_1^1 & \mathbf{f}_1^2 \\ \mathbf{e}_2^1 & \mathbf{e}_2^2 & \mathbf{f}_2^1 & \mathbf{f}_2^2 \\ \mathbf{e}_3^1 & \mathbf{e}_3^2 & \mathbf{f}_3^1 & \mathbf{f}_3^2 \\ \mathbf{e}_4^1 & \mathbf{e}_4^2 & \mathbf{f}_4^1 & \mathbf{f}_4^2 \end{bmatrix}, \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \bar{B}_0^1 & \bar{B}_1^1 & \cdots & \bar{B}_M^1 & \bar{B}_0^2 & \bar{B}_1^2 & \cdots & \bar{B}_M^2 \\ \bar{C}_0^1 & \bar{C}_1^1 & \cdots & \bar{C}_N^1 & \bar{C}_0^2 & \bar{C}_1^2 & \cdots & \bar{C}_N^2 \end{array} \right)^T, \quad (3.17b)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.17c)$$

$$\mathbf{A} = \left(A_{00} \quad A_{01} \quad \cdots \quad A_{0N} \quad A_{10} \quad A_{11} \quad \cdots \quad A_{1N} \quad \cdots \quad A_{M0} \quad A_{M1} \quad \cdots \quad A_{MN} \right)^T. \quad (3.17d)$$

$\mathbf{C}$ 行向量為精簡表示，令 $\bar{B}_m^1 = B_m^2$ 、 $\bar{B}_m^2 = B_m^4$ 、 $\bar{C}_n^1 = C_n^2$ 、 $\bar{C}_n^2 = C_n^4$ 。矩陣 $\mathbf{B}$ 中 $\mathbf{e}_k^i$

及 $\mathbf{f}_k^i$ 分別對照 $\bar{B}_m^i$ 、 $\bar{C}_n^i$ ($i = 1, 2, k = 1, 2, 3, 4$)，下標 k 代表式(3.15a)、(3.15c)、(3.15e)、

(3.15g)。矩陣 $\mathbf{e}_k^i$ 、 $\mathbf{f}_k^i$ 之每一列對應滿足式(3.15a)、(3.15c)、(3.15e)、(3.15g)，其矩陣大小為 $(M+1) \times 2(M+N+2)$ 或 $(N+1) \times 2(M+N+2)$ ，各元素之值列於附錄 B。

此處 $\mathbf{B}$ 矩陣大小為 $2(M+N+2) \times 2(M+N+2)$ 。

$\mathbf{Q}_i$ 為大小 $(M+1) \times ((M+1)(N+1))$ 或 $(N+1) \times ((M+1)(N+1))$ 之矩陣，故 $\mathbf{D}$ 之矩陣大小為 $2(M+N+2) \times ((M+1)(N+1))$ ，其中之矩陣 $\mathbf{Q}_i$ 下標之編號 1~4 各代表式(3.15a)、(3.15c)、(3.15e)、(3.15g)，其值列於附錄 B。 $\mathbf{A}$ 為 $((M+1)(N+1)) \times 1$ 之行向量。

由式(3.17a~3.17d)求解可得 B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 之關係為

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}, \quad (3.18)$$

將式(3.18)代入(3.13c)，整理可得

$$\left(\mathbf{K} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}) + \mathbf{K}_2$ ， $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}) + \mathbf{M}_2$ 。

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1a}^1 & \mathbf{K}_{1a}^2 & \mathbf{K}_{1b}^1 & \mathbf{K}_{1b}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1a}^1 & \mathbf{M}_{1a}^2 & \mathbf{M}_{1b}^1 & \mathbf{M}_{1b}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{K}_2(p, k) = (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4) \delta_{pk}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{M}_2(p, k) = \delta_{pk}. \quad (3.23)$$

$\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$ 矩陣之第 p 列，按式(3.13b)中 $\cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y$ 排列， $p = m(N+1) + n + 1$ 。 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 之 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$ ($j = 1, 2$) 矩陣大小為 $((M+1)(N+1)) \times (M+1)$ 、 $((M+1)(N+1)) \times (N+1)$ 、 $((M+1)(N+1)) \times (M+1)$ 、

$((M+1)(N+1)) \times (N+1)$ ，各元素之值列於附錄 C。故 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 之矩陣大小為 $((M+1)(N+1)) \times 2(M+N+2)$ 。

$\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 為 $((M+1)(N+1)) \times ((M+1)(N+1))$ 之對角矩陣，行按 $\mathbf{A}$ 行向量之 $A_{\bar{m}\bar{n}}$ 排列，以 k 表示。令 $A_{\bar{m}\bar{n}} = A(k)$ ， $k = k(\bar{m}, \bar{n}) = \bar{m}(N+1) + (\bar{n}+1)$ ，對角線元素如式 (3.22、3.23) 所示，而 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 對角線外的值皆為零。

3.2.2 求解 C-F-F-F 矩形板

一邊固定、三邊自由(C-F-F-F)矩形板之邊界條件為

$$w(0, y) = 0, \quad w_{,x}(0, y) = 0, \quad (3.24a, 3.24b)$$

$$M_x(a, y) = 0, \quad V_x(a, y) = 0, \quad (3.24c, 3.24d)$$

$$M_y(x, 0) = 0, \quad V_y(x, 0) = 0, \quad (3.24e, 3.24f)$$

$$M_y(x, b) = 0, \quad V_y(x, b) = 0. \quad (3.24g, 3.24h)$$

將撓度方程式(3.9)代入此邊界條件(3.24a~3.24h)，可得

$$w(0, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N P_x^i(0) C_n^i \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M P_y^i(y) B_m^i \right) = 0, \quad (3.25a)$$

$$w_{,x}(0, y) = \sum_{n=0}^N C_n^1 \cos \lambda_n y = 0, \quad (3.25b)$$

$$\begin{aligned} M_x(a, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left((-1)^{m+1} (\lambda_m^2 + \nu \lambda_n^2) \right) A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N \left(P_x^{i''}(a) - \nu \lambda_n^2 P_x^i(a) \right) C_n^i \cos \lambda_n y \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^M \left((-1)^{m+1} \lambda_m^2 P_y^i(y) + \nu (-1)^m P_y^{i''}(y) \right) B_m^i \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.25c)$$

$$V_x(a, y) = \sum_{n=0}^N \left(-(2-\nu) \lambda_n^2 C_n^3 + C_n^4 \right) \cos \lambda_n y = 0, \quad (3.25d)$$

$$M_y(x, 0) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(-(\lambda_n^2 + \nu \lambda_m^2) \right) A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N \left(-\lambda_n^2 P_x^i(x) + \nu P_x^{i''}(x) \right) C_n^i \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^M \left(P_y^{i''}(0) - \nu \lambda_m^2 P_y^i(0) \right) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0 \quad , \quad (3.25e)$$

$$V_y(x, 0) = \sum_{m=0}^M \left(-(2 - \nu) \lambda_m^2 B_m^1 + B_m^2 \right) \cos \lambda_m x = 0 \quad , \quad (3.25f)$$

$$M_y(x, b) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} \left(\lambda_n^2 + \nu \lambda_m^2 \right) A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N \left((-1)^{n+1} \lambda_n^2 P_x^i(x) + \nu (-1)^n P_x^{i''}(x) \right) C_n^i \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^M \left(P_y^{i''}(b) - \nu \lambda_m^2 P_y^i(b) \right) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0 \quad , \quad (3.25g)$$

$$V_y(x, b) = \sum_{m=0}^M \left(-(2 - \nu) \lambda_m^2 B_m^3 + B_m^4 \right) \cos \lambda_m x = 0 \quad . \quad (3.25h)$$

為提出共同項 $\cos \lambda_m x$ 或 $\cos \lambda_n y$ ，令 $P_x^i(x) = \sum_{m=0}^M a_m^i \cdot \cos \lambda_m x$ 、 $P_x^{i''}(x) = \sum_{m=0}^M a_{m2}^i \cdot \cos \lambda_m x$ 、
 $P_y^i(y) = \sum_{n=0}^N b_n^i \cdot \cos \lambda_n y$ 與 $P_y^{i''}(y) = \sum_{n=0}^N b_{n2}^i \cdot \cos \lambda_n y$ 。滿足邊界條件，每邊可得 $2(M+1)$ 或
 $2(N+1)$ 條線性代數方程式，故總共得 $4(M+N+2)$ 方程式。整理式(3.25a~3.25h)

可得矩陣形式為

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (3.16)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^1 & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1^3 & \mathbf{e}_1^4 & \mathbf{f}_1^1 & \mathbf{f}_1^2 & \mathbf{f}_1^3 & \mathbf{f}_1^4 \\ \mathbf{e}_2^1 & \mathbf{e}_2^2 & \mathbf{e}_2^3 & \mathbf{e}_2^4 & \mathbf{f}_2^1 & \mathbf{f}_2^2 & \mathbf{f}_2^3 & \mathbf{f}_2^4 \\ \mathbf{e}_3^1 & \mathbf{e}_3^2 & \mathbf{e}_3^3 & \mathbf{e}_3^4 & \mathbf{f}_3^1 & \mathbf{f}_3^2 & \mathbf{f}_3^3 & \mathbf{f}_3^4 \\ \mathbf{e}_4^1 & \mathbf{e}_4^2 & \mathbf{e}_4^3 & \mathbf{e}_4^4 & \mathbf{f}_4^1 & \mathbf{f}_4^2 & \mathbf{f}_4^3 & \mathbf{f}_4^4 \\ \mathbf{e}_5^1 & \mathbf{e}_5^2 & \mathbf{e}_5^3 & \mathbf{e}_5^4 & \mathbf{f}_5^1 & \mathbf{f}_5^2 & \mathbf{f}_5^3 & \mathbf{f}_5^4 \\ \mathbf{e}_6^1 & \mathbf{e}_6^2 & \mathbf{e}_6^3 & \mathbf{e}_6^4 & \mathbf{f}_6^1 & \mathbf{f}_6^2 & \mathbf{f}_6^3 & \mathbf{f}_6^4 \\ \mathbf{e}_7^1 & \mathbf{e}_7^2 & \mathbf{e}_7^3 & \mathbf{e}_7^4 & \mathbf{f}_7^1 & \mathbf{f}_7^2 & \mathbf{f}_7^3 & \mathbf{f}_7^4 \\ \mathbf{e}_8^1 & \mathbf{e}_8^2 & \mathbf{e}_8^3 & \mathbf{e}_8^4 & \mathbf{f}_8^1 & \mathbf{f}_8^2 & \mathbf{f}_8^3 & \mathbf{f}_8^4 \end{bmatrix} \quad , \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{C} = \left(B_0^1 \ B_1^1 \ \cdots \ B_M^1 \mid B_0^2 \ B_1^2 \ \cdots \ B_M^2 \mid \cdots \ B_0^4 \ B_1^4 \ \cdots \ B_M^4 \mid C_0^1 \ C_1^1 \ \cdots \ C_N^1 \mid C_0^2 \ C_1^2 \ \cdots \ C_N^2 \mid \cdots \ C_0^4 \ C_1^4 \ \cdots \ C_N^4 \right)^T, \quad (3.26b)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_5 \\ \mathbf{Q}_6 \\ \mathbf{Q}_7 \\ \mathbf{Q}_8 \end{bmatrix}, \quad (3.26c)$$

$$\mathbf{A} = \left(A_{00} \ A_{01} \ \cdots \ A_{0N} \ A_{10} \ A_{11} \ \cdots \ A_{1N} \ \cdots \ A_{M0} \ A_{M1} \ \cdots \ A_{MN} \right)^T. \quad (3.26d)$$

矩陣 $\mathbf{B}$ 中 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$ 分別對照 B_m^i 、 C_n^i ($i = 1 \sim 4$, $k = 1 \sim 8$)，下標 k 代表式 (3.25a~3.25h)。矩陣 $\mathbf{e}_k^i$ 、 $\mathbf{f}_k^i$ 之每一列對應滿足式 (3.25a~3.25h)，其矩陣大小為 $(M+1) \times 4(M+N+2)$ 或 $(N+1) \times 4(M+N+2)$ ，各元素之值列於附錄 B。此處 $\mathbf{B}$ 之矩陣大小為 $4(M+N+2) \times 4(M+N+2)$ 。

$\mathbf{Q}_i$ 為大小 $(M+1) \times ((M+1)(N+1))$ 或 $(N+1) \times ((M+1)(N+1))$ 之矩陣，故 $\mathbf{D}$ 之矩陣大小為 $4(M+N+2) \times ((M+1)(N+1))$ ，其中之矩陣 $\mathbf{Q}_i$ 下標之編號 1~8 分別代表式 (3.25a~3.25h)，其值列於附錄 B。 $\mathbf{A}$ 為 $((M+1)(N+1)) \times 1$ 之行向量。

由式 (3.26a ~ 3.26d) 代入式 (3.16) 求解可得 B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 之關係為

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}, \quad (3.27)$$

將式 (3.27) 代入 (3.13c)，整理可得

$$\left(\mathbf{K} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}) + \mathbf{K}_2$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}) + \mathbf{M}_2$ 。

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1a}^1 & \mathbf{K}_{1a}^2 & \mathbf{K}_{1a}^3 & \mathbf{K}_{1a}^4 & \mathbf{K}_{1b}^1 & \mathbf{K}_{1b}^2 & \mathbf{K}_{1b}^3 & \mathbf{K}_{1b}^4 \end{bmatrix} , \quad (3.28)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1a}^1 & \mathbf{M}_{1a}^2 & \mathbf{M}_{1a}^3 & \mathbf{M}_{1a}^4 & \mathbf{M}_{1b}^1 & \mathbf{M}_{1b}^2 & \mathbf{M}_{1b}^3 & \mathbf{M}_{1b}^4 \end{bmatrix} , \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_2(p, k) = (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2\lambda_n^2 + \lambda_n^4) \delta_{pk} , \quad (3.30)$$

$$\mathbf{M}_2(p, k) = \delta_{pk} . \quad (3.31)$$

$\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$ 矩陣之第 p 列，按式(3.13b)中 $\cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y$ 排列，

$p = m(N+1) + n + 1$ 。 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 之 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$ ($j = 1 \sim 4$) 矩陣大小為

$((M+1)(N+1)) \times (M+1)$ 、 $((M+1)(N+1)) \times (N+1)$ 、 $((M+1)(N+1)) \times (M+1)$ 、

$((M+1)(N+1)) \times (N+1)$ ，各元素之值列於附錄 C 。故 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 之矩陣大小為

$((M+1)(N+1)) \times 4(M+N+2)$ 。

$\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 為 $((M+1)(N+1)) \times ((M+1)(N+1))$ 之對角矩陣，行按 $\mathbf{A}$ 行向量之 $A_{\bar{m}\bar{n}}$

排列，以 k 表示。令 $A_{\bar{m}\bar{n}} = A(k)$ ， $k = k(\bar{m}, \bar{n}) = \bar{m}(N+1) + (\bar{n}+1)$ ，對角線元素如式

(3.30 、 3.31) 所示，而 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 對角線外的值皆為零。

3.2.3 求解 S-S-S-S 矩形板

四邊皆簡支端(S-S-S-S)矩形板之邊界條件為

$$w(0, y) = 0, \quad M_x(0, y) = 0, \quad (3.32a, 3.32b)$$

$$w(a, y) = 0, \quad M_x(a, y) = 0, \quad (3.32c, 3.32d)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad M_y(x, 0) = 0, \quad (3.32e, 3.32f)$$

$$w(x, b) = 0, \quad M_y(x, b) = 0. \quad (3.32g, 3.32h)$$

將撓度方程式(3.9)代入邊界條件(3.32a~3.32h)，可得

$$w(0, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N P_x^i(0) C_n^i \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M P_y^i(y) B_m^i \right) = 0, \quad (3.33a)$$

$$M_x(0, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(-(\lambda_m^2 + \nu \lambda_n^2) \right) A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N \left(P_x^{i''}(0) - \nu \lambda_n^2 P_x^i(0) \right) C_n^i \cos \lambda_n y \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^M \left(-\lambda_m^2 P_y^i(y) + \nu P_y^{i''}(y) \right) B_m^i \right) = 0, \quad (3.33b)$$

$$w(a, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (-1)^m A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N P_x^i(a) C_n^i \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M (-1)^m P_y^i(y) B_m^i \right) = 0, \quad (3.33c)$$

$$M_x(a, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left((-1)^{m+1} (\lambda_m^2 + \nu \lambda_n^2) \right) A_{mn} \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N \left(P_x^{i''}(a) - \nu \lambda_n^2 P_x^i(a) \right) C_n^i \cos \lambda_n y \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^M \left((-1)^{m+1} \lambda_m^2 P_y^i(y) + \nu (-1)^m P_y^{i''}(y) \right) B_m^i \right) = 0, \quad (3.33d)$$

$$w(x, 0) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N P_x^i(x) C_n^i + \sum_{m=0}^M P_y^i(0) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0, \quad (3.33e)$$

$$M_y(x, 0) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left(-(\lambda_n^2 + \nu \lambda_m^2) \right) A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N \left(-\lambda_n^2 P_x^i(x) + \nu P_x^{i''}(x) \right) C_n^i \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^M \left(P_y^{i''}(0) - \nu \lambda_m^2 P_y^i(0) \right) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0, \quad (3.33f)$$

$$w(x, b) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (-1)^n A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n P_x^i(x) C_n^i + \sum_{m=0}^M P_y^i(b) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0 \quad , \quad (3.33g)$$

$$M_y(x, b) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left((-1)^{n+1} (\lambda_n^2 + \nu \lambda_m^2) \right) A_{mn} \cos \lambda_m x + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N \left((-1)^{n+1} \lambda_n^2 P_x^i(x) + \nu (-1)^n P_x^{i''}(x) \right) C_n^i \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^M \left(P_y^{i''}(b) - \nu \lambda_m^2 P_y^i(b) \right) B_m^i \cos \lambda_m x \right) = 0 \quad . \quad (3.33h)$$

為提出共同項 $\cos \lambda_m x$ 或 $\cos \lambda_n y$ ，令 $P_x^i(x) = \sum_{m=0}^M a_m^i \cdot \cos \lambda_m x$ 、 $P_x^{i''}(x) = \sum_{m=0}^M a_{m2}^i \cdot \cos \lambda_m x$ 、
 $P_y^i(y) = \sum_{n=0}^N b_n^i \cdot \cos \lambda_n y$ 與 $P_y^{i''}(y) = \sum_{n=0}^N b_{n2}^i \cdot \cos \lambda_n y$ 。滿足邊界條件，每邊可得 $2(M+1)$ 或
 $2(N+1)$ 條線性代數方程式，故總共得 $4(M+N+2)$ 方程式。整理式(3.33a~3.33h)

可得矩陣形式為

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (3.16)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^1 & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1^3 & \mathbf{e}_1^4 & \mathbf{f}_1^1 & \mathbf{f}_1^2 & \mathbf{f}_1^3 & \mathbf{f}_1^4 \\ \mathbf{e}_2^1 & \mathbf{e}_2^2 & \mathbf{e}_2^3 & \mathbf{e}_2^4 & \mathbf{f}_2^1 & \mathbf{f}_2^2 & \mathbf{f}_2^3 & \mathbf{f}_2^4 \\ \mathbf{e}_3^1 & \mathbf{e}_3^2 & \mathbf{e}_3^3 & \mathbf{e}_3^4 & \mathbf{f}_3^1 & \mathbf{f}_3^2 & \mathbf{f}_3^3 & \mathbf{f}_3^4 \\ \mathbf{e}_4^1 & \mathbf{e}_4^2 & \mathbf{e}_4^3 & \mathbf{e}_4^4 & \mathbf{f}_4^1 & \mathbf{f}_4^2 & \mathbf{f}_4^3 & \mathbf{f}_4^4 \\ \mathbf{e}_5^1 & \mathbf{e}_5^2 & \mathbf{e}_5^3 & \mathbf{e}_5^4 & \mathbf{f}_5^1 & \mathbf{f}_5^2 & \mathbf{f}_5^3 & \mathbf{f}_5^4 \\ \mathbf{e}_6^1 & \mathbf{e}_6^2 & \mathbf{e}_6^3 & \mathbf{e}_6^4 & \mathbf{f}_6^1 & \mathbf{f}_6^2 & \mathbf{f}_6^3 & \mathbf{f}_6^4 \\ \mathbf{e}_7^1 & \mathbf{e}_7^2 & \mathbf{e}_7^3 & \mathbf{e}_7^4 & \mathbf{f}_7^1 & \mathbf{f}_7^2 & \mathbf{f}_7^3 & \mathbf{f}_7^4 \\ \mathbf{e}_8^1 & \mathbf{e}_8^2 & \mathbf{e}_8^3 & \mathbf{e}_8^4 & \mathbf{f}_8^1 & \mathbf{f}_8^2 & \mathbf{f}_8^3 & \mathbf{f}_8^4 \end{bmatrix}, \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{C} = \left(B_0^1 \ B_1^1 \ \cdots \ B_M^1 \mid B_0^2 \ B_1^2 \ \cdots \ B_M^2 \mid \cdots \ B_0^4 \ B_1^4 \ \cdots \ B_M^4 \mid C_0^1 \ C_1^1 \ \cdots \ C_N^1 \mid C_0^2 \ C_1^2 \ \cdots \ C_N^2 \mid \cdots \ C_0^4 \ C_1^4 \ \cdots \ C_N^4 \right)^T, \quad (3.34b)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_5 \\ \mathbf{Q}_6 \\ \mathbf{Q}_7 \\ \mathbf{Q}_8 \end{bmatrix} \quad (3.34c)$$

$$\mathbf{A} = (A_{00} \ A_{01} \ \cdots \ A_{0N} \ A_{10} \ A_{11} \ \cdots \ A_{1N} \ \cdots \ A_{M0} \ A_{M1} \ \cdots \ A_{MN})^T \quad (3.34d)$$

矩陣 $\mathbf{B}$ 中 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$ 分別對照 B_m^i 、 C_n^i ($i = 1 \sim 4, k = 1 \sim 8$)，下標 k 代表式 (3.33a~3.33h)。矩陣 $\mathbf{e}_k^i$ 、 $\mathbf{f}_k^i$ 之每一列對應滿足式 (3.33a~3.33h)，其矩陣大小為 $(M+1) \times 4(M+N+2)$ 或 $(N+1) \times 4(M+N+2)$ ，各元素之值列於附錄 B。此處 $\mathbf{B}$ 之矩陣大小為 $4(M+N+2) \times 4(M+N+2)$ 。

$\mathbf{Q}_i$ 為大小 $(M+1) \times ((M+1)(N+1))$ 或 $(N+1) \times ((M+1)(N+1))$ 之矩陣，故 $\mathbf{D}$ 之矩陣大小為 $4(M+N+2) \times ((M+1)(N+1))$ ，其中之矩陣 $\mathbf{Q}_i$ 下標之編號 1~8 分別代表式 (3.33a~3.33h)，其值列於附錄 B。 $\mathbf{A}$ 為 $((M+1)(N+1)) \times 1$ 之行向量。

由式 (3.34a ~ 3.34d) 代入式 (3.16) 求解可得 B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 之關係為

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}, \quad (3.35)$$

將 (3.35) 結果代入 (3.13c) 整理可得矩陣形式為

$$\left(\mathbf{K} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}) + \mathbf{K}_2$ ， $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}) + \mathbf{M}_2$ 。

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1a}^1 & \mathbf{K}_{1a}^2 & \mathbf{K}_{1a}^3 & \mathbf{K}_{1a}^4 & \mathbf{K}_{1b}^1 & \mathbf{K}_{1b}^2 & \mathbf{K}_{1b}^3 & \mathbf{K}_{1b}^4 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1a}^1 & \mathbf{M}_{1a}^2 & \mathbf{M}_{1a}^3 & \mathbf{M}_{1a}^4 & \mathbf{M}_{1b}^1 & \mathbf{M}_{1b}^2 & \mathbf{M}_{1b}^3 & \mathbf{M}_{1b}^4 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{K}_2(p, k) = (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4) \delta_{pk}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{M}_2(p, k) = \delta_{pk}. \quad (3.39)$$

$\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$ 矩陣之第 p 列，按式(3.13b)中 $\cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y$ 排列，
 $p = m(N+1) + n + 1$ 。 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 之 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$ ($j = 1 \sim 4$) 矩陣大小為
 $((M+1)(N+1)) \times (M+1)$ 、 $((M+1)(N+1)) \times (N+1)$ 、 $((M+1)(N+1)) \times (M+1)$ 、
 $((M+1)(N+1)) \times (N+1)$ ，各元素之值列於附錄 C。故 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 之矩陣大小為
 $((M+1)(N+1)) \times 4(M+N+2)$ 。

$\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 為 $((M+1)(N+1)) \times ((M+1)(N+1))$ 之對角矩陣，行按 $\mathbf{A}$ 行向量之 $A_{\bar{m}\bar{n}}$
排列，以 k 表示。令 $A_{\bar{m}\bar{n}} = A(k)$ ， $k = k(\bar{m}, \bar{n}) = \bar{m}(N+1) + (\bar{n}+1)$ ，對角線元素如式
(3.38、3.39)所示，而 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 對角線外的值皆為零。

綜合 3.1 及 3.2 節，本章所述之解的流程為

- 1、假設撓度為(3.9)式，將之代入該邊界條件。
- 2、將擴充函式 $P_x^i(x)$ 、 $P_y^i(y)$ 積分轉換成 $\cos \lambda_m x$ 、 $\cos \lambda_n y$ 形式，使其邊界條件可
以提出該 $\cos \lambda_m x$ 、 $\cos \lambda_n y$ 變數。
- 3、由(3.18)可得 A_{mn} 與 B_m^i 、 C_n^i 關係，此處若無法反矩陣，需重新更改假設提高
擴充函式階數。
- 4、將以上所得 B_m^i 、 C_n^i 結果帶入(3.13c)，並由(3.19)求解而得該頻率值。
- 5、將上述方程編譯成程式透過電腦求解，改變項數 m 、 n 大小以得精確值。

3.3 收斂性分析

本章節探討兩邊界條件 C-C-C-C 與 S-S-S-S 之收斂性分析，依 3.2.1、3.2.3 節所述，吾人將此些公式編譯成程式透過電腦求解，可得到邊界條件 C-C-C-C、S-S-S-S 的頻率，考慮無因次自然振動頻率為 $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 。

表 3.2 C-C-C-C 之收斂性分析 ($r = a/b = 1$)

M_{max}	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1	37.947	86.335	86.335	116.89	
5	35.956	73.306	73.306	107.96	131.52
10	35.984	73.389	73.389	108.19	131.57
15	35.985	73.393	73.393	108.21	131.58
20	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
25	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
50	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
*Li (2009)	35.985	73.393	73.393	108.21	131.58

表 3.2 為 C-C-C-C 矩形板（四端固定端）解之收斂性分析。傅立葉級數中 M 、 N 最大項數值 M_{max} ， A_{mn} 從 A_{00} 至 A_{MN} ，故 $M_{max}=1$ 時有四個模態頻率 (A_{00} 、 A_{01} 、 A_{10} 、 A_{11})，即最大值為 M_{max} ，會有 $(M_{max}+1)^2$ 個模態頻率。

由上表顯示：數值隨著 M 增加，其值一開始遞減而後為漸增收斂，原因可能來自於 $M_{max}=1$ 時，其準確度不夠。討論有效位數為五位，邊界 C-C-C-C 之前五個模態頻率在 $M_{max}=20$ 皆已收斂至五位有效數字 (35.985、73.394、73.394、108.22 與 131.58)，其收斂速度很快，與文獻 Li (2009) 比照，前五個模態頻率之收斂值皆相差很小。

表 3.3 S-S-S-S 之收斂性分析 ($r = a/b = 1$)

M_{max}	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1	17.238	50.970	50.970	78.619	
5	19.659	49.307	49.307	78.783	99.410
10	19.723	49.334	49.334	78.888	98.707
15	19.730	49.338	49.338	78.928	98.691
20	19.735	49.342	49.342	78.938	98.689
30	19.737	49.345	49.345	78.948	98.691
40	19.738	49.346	49.346	78.952	98.693
50	19.738	49.347	49.347	78.954	98.694
*Leissa (1973)	19.739	49.348	49.348	78.957	98.696

表 3.3 為 S-S-S-S 矩形板（四端簡支端）解之收斂性分析。由上表顯示：

數值隨著 M 增加，第一模態頻率由下限遞增收斂，在 $M_{max}=20$ 時收斂至四位有效數字 19.74；第二、三模態相同，為重根關係，隨著 M 增加，模態頻率先減後增，為振盪收斂，在 $M_{max}=30$ 時收斂至四位有效數字 49.35；隨著 M 增加，第四模態頻率由下限遞增收斂，在 $M_{max}=30$ 時收斂至四位有效數字 78.95；第五模態頻率則是先減後增，為振盪收斂，在 $M_{max}=15$ 時收斂至四位有效數字 98.69。與文獻 Leissa (1973) 比照，發現前五個模態頻率收斂值相近。

3.4 數值結果

以下列出各邊界條件於 $\nu = 0.3$ 、 $M_{max} = 20$ 、不同長寬比(a/b)之振動頻率值。

表 3.4 C-C-C-C 之自由振動頻率

r=a/b	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
	35.985 ^a	73.393 ^a	73.393 ^a	108.21 ^a	131.58 ^a
	35.992 ^b	73.413 ^b	73.413 ^b	108.27 ^b	131.64 ^b
1.5	60.761	93.833	148.78	149.67	179.56
2.0	98.311	127.30	179.08	253.32	255.93
2.5	147.77	173.79	221.35	291.69	384.33
3.0	208.77	232.73	276.67	342.83	431.67

^aLi (2009)

^bLeissa (1973)

其中 Li (2009)所假設的解為傅立葉餘弦級數，加入擴充函式為三角函數；而 Leissa (1973)將兩對邊為簡支端之矩形板以雙傅立葉級數解求得自由振動頻率，其他非兩對邊為簡支端之案例，則以 Ritz 法求之。

表 3.5 C-F-F-F 之自由振動頻率

r=a/b	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	3.4704	8.5040	21.280	27.200	30.947
	3.470 ^a	8.504 ^a	21.279 ^a	27.201 ^a	30.948 ^a
	3.4917 ^b	8.5246 ^b	21.429 ^b	27.331 ^b	31.111 ^b
1.5	3.4528	11.654	21.462	39.318	53.546
2.0	3.4385	14.799	21.429	48.169	60.143
2.5	3.4271	17.959	21.391	57.208	60.115
3.0	3.4180	21.133	21.357	60.009	66.364

^aLi (2009)

^bLeissa (1973)

表 3.6 S-S-S-S 之自由振動頻率

r=a/b	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	19.735	49.342	49.342	78.938	98.689
	19.739*	49.348*	49.348*	78.957*	98.696*
1.5	32.071	61.674	98.693	111.03	128.28
2.0	49.343	78.946	128.29	167.79	197.38
2.5	71.552	101.16	150.50	219.62	256.62
3.0	98.696	128.31	177.65	246.77	335.63

*Leissa (1973)

同§ 3.2.1~§3.2.3 節做法，改變其邊界方程可得①兩對邊簡支、兩對邊自由端(S-F-S-F)、②三邊簡支、一邊自由端(S-S-S-F)、③兩對邊簡支、一邊固定、一邊簡支(S-C-S-S)、④兩對邊簡支、兩對邊固定(S-C-S-C)之自由振動頻率，其中考慮普松比 $\nu = 0.3$ 與 $M_{max} = 20$ 。

表 3.7 S-F-S-F 之自由振動頻率

r=a/b	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	9.6308	16.126	36.705	38.944	46.725
	9.6314*	16.135*	36.726*	38.945*	46.738*
2.0	9.5124	27.513	38.527	64.525	87.294

*Leissa (1973)

表 3.8 S-S-S-F 之自由振動頻率

r=a/b	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	11.682	27.744	41.193	59.047	61.846
	11.685*	27.756*	41.197*	59.066*	61.861*
2.0	16.131	46.734	75.275	96.043	111.00

*Leissa (1973)

表 3.9 S-C-S-S 之自由振動頻率

r=a/b	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	23.643	51.671	58.644	86.125	100.28
	23.646*	51.674*	58.646*	86.135*	100.27*
2.0	51.671	86.128	140.84	168.96	201.72

*Leissa (1973)

表 3.10 S-C-S-C 之自由振動頻率

r=a/b	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	28.951	54.745	69.327	94.586	102.23
	28.951*	54.743*	69.327*	94.585*	102.22*
2.0	95.263	115.80	156.36	219.00	254.14

*Leissa (1973)

第四章 利用配點法求解

如上章所述，矩形板之撓度可以傅立葉級數表示

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x) \cos \lambda_n y + \sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y) \cos \lambda_m x \right) \quad (3.9)$$

邊界條件以及控制方程均在傅立葉級數域滿足，即在運算上均須將 $P_x^i(x)$ 、 $P_y^i(y)$ 及

其導函數分別用 $\cos \lambda_m x$ 、 $\cos \lambda_n y$ 展開，計算上較繁雜。本章採用配點法方式讓邊

界條件與控制方程於所選點位上滿足(而非於傅立葉級數域滿足)，以決定式(3.9)中

係數 B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 之關係，並進一步求解自然振動頻率 ω 。

本章僅考慮兩種邊界條件①四邊固定端、②四邊簡支端之解，並與第三章傅立葉級數方法做收斂性分析。本章之配點法如圖 4.1 所示，①、②、③、④分別代表邊界 $y=0$ 、 $x=a$ 、 $y=b$ 、 $x=0$ ，①、③編點由左至右排列，以 $b_{11} \sim b_{1t}$ 、 $b_{31} \sim b_{3t}$ 表示；②、④編點由下至上排列，以 $b_{21} \sim b_{2t}$ 、 $b_{41} \sim b_{4t}$ 表示，而在板內之點則由左下至右上排列，以 $d_{11} \sim d_{pq}$ 表示。

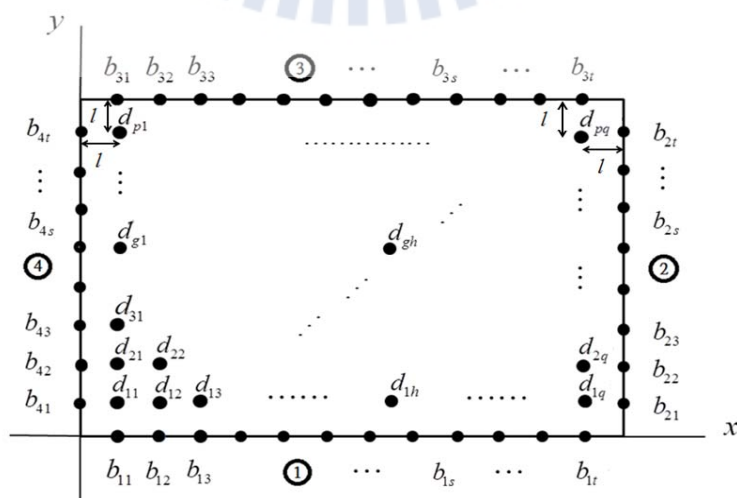


圖 4.1 配點法之編點命名

4.1 配點法

4.1.1 求解 C-C-C-C 自由振動頻率

將各邊界之點代入四邊固定端之邊界條件可得

邊界①

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m (x(b_{1s})) \cdot \cos \lambda_n (y(b_{1s})) A_{mn} \\
 &+ \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i (y(b_{1s})) \cos \lambda_m (x(b_{1s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i (x(b_{1s})) \cos \lambda_n (y(b_{1s})) \right) = 0, \\
 &s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (4.1a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{,y}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m (x(b_{1s})) (-\lambda_n \sin \lambda_n (y(b_{1s}))) A_{mn} \\
 &+ \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^{i'} (y(b_{1s})) \cos \lambda_m (x(b_{1s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i (x(b_{1s})) (-\lambda_n \sin \lambda_n (y(b_{1s}))) \right) = 0, \\
 &s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (4.1b)
 \end{aligned}$$

邊界②

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m (x(b_{2s})) \cdot \cos \lambda_n (y(b_{2s})) A_{mn} \\
 &+ \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i (y(b_{2s})) \cos \lambda_m (x(b_{2s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i (x(b_{2s})) \cos \lambda_n (y(b_{2s})) \right) = 0, \\
 &s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (4.1c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{,x}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_n (y(b_{2s})) (-\lambda_m \sin \lambda_m (x(b_{2s}))) A_{mn} \\
 &+ \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i (y(b_{2s})) (-\lambda_m \sin \lambda_m (x(b_{2s}))) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^{i'} (x(b_{2s})) \cos \lambda_n (y(b_{2s})) \right) = 0, \\
 &s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (4.1d)
 \end{aligned}$$

邊界③

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m(x(b_{3s})) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{3s})) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y(b_{3s})) \cos \lambda_m(x(b_{3s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x(b_{3s})) \cos \lambda_n(y(b_{3s})) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (4.1e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{,y}(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m(x(b_{3s})) (-\lambda_n \sin \lambda_n(y(b_{3s}))) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^{i'}(y(b_{3s})) \cos \lambda_m(x(b_{3s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x(b_{3s})) (-\lambda_n \sin \lambda_n(y(b_{3s}))) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (4.1f)
 \end{aligned}$$

邊界④

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m(x(b_{4s})) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{4s})) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y(b_{4s})) \cos \lambda_m(x(b_{4s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x(b_{4s})) \cos \lambda_n(y(b_{4s})) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (4.1g)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{,x}(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_n(y(b_{4s})) (-\lambda_m \sin \lambda_m(x(b_{4s}))) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y(b_{4s})) (-\lambda_m \sin \lambda_m(x(b_{4s}))) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^{i'}(x(b_{4s})) \cos \lambda_n(y(b_{4s})) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (4.1h)
 \end{aligned}$$

其中 $x(b_{is})$ 及 $y(b_{is})$ ($i=1, 2, 3, 4$) 代表 b_{is} 點之 x 及 y 座標值，又 $\lambda_m = m\pi/a$ 、 $\lambda_n = n\pi/b$ ，

$m = 0, 1, 2, \dots, M$ 、 $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。為簡化分析，取 $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_b$ ，在此直接

代入符合各邊界上的點 b_{is} ， $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \geq 4(M + N + 2)$ 求解出待定係數 B_m^i 、

C_n^i 與 A_{mn} 之關係，以矩陣形式表示為

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (3.16)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^1 & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1^3 & \mathbf{e}_1^4 & \mathbf{f}_1^1 & \mathbf{f}_1^2 & \mathbf{f}_1^3 & \mathbf{f}_1^4 \\ \mathbf{e}_2^1 & \mathbf{e}_2^2 & \mathbf{e}_2^3 & \mathbf{e}_2^4 & \mathbf{f}_2^1 & \mathbf{f}_2^2 & \mathbf{f}_2^3 & \mathbf{f}_2^4 \\ \mathbf{e}_3^1 & \mathbf{e}_3^2 & \mathbf{e}_3^3 & \mathbf{e}_3^4 & \mathbf{f}_3^1 & \mathbf{f}_3^2 & \mathbf{f}_3^3 & \mathbf{f}_3^4 \\ \mathbf{e}_4^1 & \mathbf{e}_4^2 & \mathbf{e}_4^3 & \mathbf{e}_4^4 & \mathbf{f}_4^1 & \mathbf{f}_4^2 & \mathbf{f}_4^3 & \mathbf{f}_4^4 \\ \mathbf{e}_5^1 & \mathbf{e}_5^2 & \mathbf{e}_5^3 & \mathbf{e}_5^4 & \mathbf{f}_5^1 & \mathbf{f}_5^2 & \mathbf{f}_5^3 & \mathbf{f}_5^4 \\ \mathbf{e}_6^1 & \mathbf{e}_6^2 & \mathbf{e}_6^3 & \mathbf{e}_6^4 & \mathbf{f}_6^1 & \mathbf{f}_6^2 & \mathbf{f}_6^3 & \mathbf{f}_6^4 \\ \mathbf{e}_7^1 & \mathbf{e}_7^2 & \mathbf{e}_7^3 & \mathbf{e}_7^4 & \mathbf{f}_7^1 & \mathbf{f}_7^2 & \mathbf{f}_7^3 & \mathbf{f}_7^4 \\ \mathbf{e}_8^1 & \mathbf{e}_8^2 & \mathbf{e}_8^3 & \mathbf{e}_8^4 & \mathbf{f}_8^1 & \mathbf{f}_8^2 & \mathbf{f}_8^3 & \mathbf{f}_8^4 \end{bmatrix}, \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{C} = \left(B_0^1 \ B_1^1 \ \cdots \ B_M^1 \mid B_0^2 \ B_1^2 \ \cdots \ B_M^2 \mid \cdots \ B_0^4 \ B_1^4 \ \cdots \ B_M^4 \mid C_0^1 \ C_1^1 \ \cdots \ C_N^1 \mid C_0^2 \ C_1^2 \ \cdots \ C_N^2 \mid \cdots \ C_0^4 \ C_1^4 \ \cdots \ C_N^4 \right)^T, \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix}, \quad (4.2c)$$

$$\mathbf{A} = \left(A_{00} \ A_{01} \ \cdots \ A_{0N} \ A_{10} \ A_{11} \ \cdots \ A_{1N} \ \cdots \ A_{M0} \ A_{M1} \ \cdots \ A_{MN} \right)^T. \quad (4.2d)$$

矩陣 $\mathbf{B}$ 中 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$ ，上標 $i=1\sim 4$ 分別對應 B_m^i 及 C_n^i ，下標 $k = 1\sim 8$ 分別對應滿足方程式(4.1a~4.1h)，矩陣 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$ 之每一列為各邊界上的點 b_{is} 依序代入而得。如圖 4.1 所示，若每邊取 N_b 個點，即有 N_b 條方程式， $\mathbf{e}_k^i$ 、 $\mathbf{f}_k^i$ 之矩陣大小為 $N_b \times 4(M+N+2)$ ，各元素之值列於附錄 B。 $\mathbf{B}$ 為大小 $8N_b \times 4(M+N+2)$ 之矩陣，此處 $\mathbf{B}$ 矩陣不一定為方陣。 $\mathbf{C}$ 行向量大小為 $4(M+N+2) \times 1$ 。

D 矩陣中 $\mathbf{Q}_i$ 之列按方程(4.1a~4.1h)代入點 b_{is} 排列，以下標 $i=1\sim 8$ 表示方程(4.1a~4.1h)， $\mathbf{Q}_i$ 矩陣大小為 $N_b \times ((M+1)(N+1))$ ，故 **D** 矩陣大小為 $8N_b \times ((M+1)(N+1))$ ，其中 $\mathbf{Q}_i$ 矩陣之值列於附錄 B。**A** 為 $((M+1)(N+1)) \times 1$ 之向量，由式(3.16)與(4.2a~4.2d)，利用廣義反矩陣求解，得 B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 之關係：

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.3)$$

將式(4.3)結果代入(3.11)整理可得矩陣形式為

$$\left(\mathbf{K} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot ((\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}) + \mathbf{K}_2$ ， $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot ((\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}) + \mathbf{M}_2$ 。

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1a}^1 & \mathbf{K}_{1a}^2 & \mathbf{K}_{1a}^3 & \mathbf{K}_{1a}^4 & \mathbf{K}_{1b}^1 & \mathbf{K}_{1b}^2 & \mathbf{K}_{1b}^3 & \mathbf{K}_{1b}^4 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1a}^1 & \mathbf{M}_{1a}^2 & \mathbf{M}_{1a}^3 & \mathbf{M}_{1a}^4 & \mathbf{M}_{1b}^1 & \mathbf{M}_{1b}^2 & \mathbf{M}_{1b}^3 & \mathbf{M}_{1b}^4 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{K}_2(o, k) = (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4) \cdot \cos \lambda_m x(d_{gh}) \cdot \cos \lambda_n y(d_{gh}) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{M}_2(o, k) = \cos \lambda_m x(d_{gh}) \cdot \cos \lambda_n y(d_{gh}) \quad (4.7)$$

$\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 矩陣之列按板內之點 d_{gh} 代入排列， $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 各元素為變數 $\bar{m}$ 、 $\bar{n}$ 、點 $d_{gh}(x, y)$ 之函數。如圖 4.1 所示，若板內取 $p \cdot q$ 個點，即有 $p \cdot q$ 條方程式， $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 之 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$ ($j=1\sim 4$) 矩陣大小為 $(p \cdot q) \times (M+1)$ 、 $(p \cdot q) \times (N+1)$ 、 $(p \cdot q) \times (M+1)$ 、 $(p \cdot q) \times (N+1)$ ，故 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 為 $(p \cdot q) \times 4(M+N+2)$ 之矩陣，各元素之值列於附錄 C。

$\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 為矩陣大小 $(p \cdot q) \times ((M+1)(N+1))$ 之對角化矩陣， $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 各元素為其變數 m 、 n 與點 $d_{gh}(x, y)$ 之函數。 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 矩陣之列按 o 排列，令 $d_{gh} = d(o)$ ， $o = o(g, h) = h + (g-1)q$ ，而矩陣之行以 k 表示，代表 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 矩陣之行按 $\mathbf{A}$ 行向量中變數 m 、 n 排列，令 $\mathbf{A}$ 行向量中各元素 $A_{mn} = A(k)$ ， $k = m(N+1) + (n+1)$ ，對角線元素如式(4.6、4.7)表示， $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 對角線外的值皆為零。為使 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ 矩陣以求解特徵值，該矩陣須為方陣，故取點數 $p \cdot q = ((M+1)(N+1))$ 。

4.1.2 求解 S-S-S-S 自由振動頻率

編點方式同圖 4.1 所示。將各邊界之點代入四邊簡支端之邊界條件可得

邊界①

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m(x(b_{1s})) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{1s})) A_{mn} + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y(b_{1s})) \cos \lambda_m(x(b_{1s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x(b_{1s})) \cos \lambda_n(y(b_{1s})) \right) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (4.8a)$$

$$M_y(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N -(\lambda_n^2 + \nu \lambda_m^2) \cos \lambda_m(x(b_{1s})) \cos \lambda_n(y(b_{1s})) A_{mn} + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M (P_y^{i''}(y(b_{1s})) - \nu \lambda_m^2 P_y^i(y(b_{1s}))) B_m^i \cos \lambda_m(x(b_{1s})) + \sum_{n=0}^N (-\lambda_n^2 P_x^i(x(b_{1s})) + \nu P_x^{i''}(x(b_{1s}))) C_n^i \cos \lambda_n(y(b_{1s})) \right) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (4.8b)$$

邊界②

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m(x(b_{2s})) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{2s})) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y(b_{2s})) \cos \lambda_m(x(b_{2s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x(b_{2s})) \cos \lambda_n(y(b_{2s})) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (4.8c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N -(\lambda_m^2 + \nu \lambda_n^2) \cos \lambda_m(x(b_{2s})) \cos \lambda_n(y(b_{2s})) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M \left(-\lambda_m^2 P_y^i(y(b_{2s})) + \nu P_y^{i''}(y(b_{2s})) \right) B_m^i \cos \lambda_m(x(b_{2s})) \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^N \left(P_x^{i''}(x(b_{2s})) - \nu \lambda_n^2 P_x^i(x(b_{2s})) \right) C_n^i \cos \lambda_n(y(b_{2s})) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (4.8d)
 \end{aligned}$$

邊界③

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m(x(b_{3s})) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{3s})) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y(b_{3s})) \cos \lambda_m(x(b_{3s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x(b_{3s})) \cos \lambda_n(y(b_{3s})) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (4.8e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N -(\lambda_n^2 + \nu \lambda_m^2) \cos \lambda_m(x(b_{3s})) \cos \lambda_n(y(b_{3s})) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M \left(P_y^{i''}(y(b_{3s})) - \nu \lambda_m^2 P_y^i(y(b_{3s})) \right) B_m^i \cos \lambda_m(x(b_{3s})) \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^N \left(-\lambda_n^2 P_x^i(x(b_{3s})) + \nu P_x^{i''}(x(b_{3s})) \right) C_n^i \cos \lambda_n(y(b_{3s})) \right) = 0 \quad , \\
 & s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (4.8f)
 \end{aligned}$$

邊界④

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m(x(b_{4s})) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{4s})) A_{mn} \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M B_m^i P_y^i(y(b_{4s})) \cos \lambda_m(x(b_{4s})) + \sum_{n=0}^N C_n^i P_x^i(x(b_{4s})) \cos \lambda_n(y(b_{4s})) \right) = 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

$$s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (4.8g)$$

$$\begin{aligned} M_x(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N -(\lambda_m^2 + v\lambda_n^2) \cos \lambda_m(x(b_{4s})) \cos \lambda_n(y(b_{4s})) A_{mn} \\ & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{m=0}^M (-\lambda_m^2 P_y^i(y(b_{4s})) + vP_y^{i''}(y(b_{4s}))) B_m^i \cos \lambda_m(x(b_{4s})) \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^N (P_x^{i''}(x(b_{4s})) - v\lambda_n^2 P_x^i(x(b_{4s}))) C_n^i \cos \lambda_n(y(b_{4s})) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (4.8h)$$

求解式(4.8a~4.8h)可得待係數 B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 之關係，以矩陣形式表示為

$$\mathbf{BC} = \mathbf{DA} \quad (3.16)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^1 & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1^3 & \mathbf{e}_1^4 & \mathbf{f}_1^1 & \mathbf{f}_1^2 & \mathbf{f}_1^3 & \mathbf{f}_1^4 \\ \mathbf{e}_2^1 & \mathbf{e}_2^2 & \mathbf{e}_2^3 & \mathbf{e}_2^4 & \mathbf{f}_2^1 & \mathbf{f}_2^2 & \mathbf{f}_2^3 & \mathbf{f}_2^4 \\ \mathbf{e}_3^1 & \mathbf{e}_3^2 & \mathbf{e}_3^3 & \mathbf{e}_3^4 & \mathbf{f}_3^1 & \mathbf{f}_3^2 & \mathbf{f}_3^3 & \mathbf{f}_3^4 \\ \mathbf{e}_4^1 & \mathbf{e}_4^2 & \mathbf{e}_4^3 & \mathbf{e}_4^4 & \mathbf{f}_4^1 & \mathbf{f}_4^2 & \mathbf{f}_4^3 & \mathbf{f}_4^4 \\ \mathbf{e}_5^1 & \mathbf{e}_5^2 & \mathbf{e}_5^3 & \mathbf{e}_5^4 & \mathbf{f}_5^1 & \mathbf{f}_5^2 & \mathbf{f}_5^3 & \mathbf{f}_5^4 \\ \mathbf{e}_6^1 & \mathbf{e}_6^2 & \mathbf{e}_6^3 & \mathbf{e}_6^4 & \mathbf{f}_6^1 & \mathbf{f}_6^2 & \mathbf{f}_6^3 & \mathbf{f}_6^4 \\ \mathbf{e}_7^1 & \mathbf{e}_7^2 & \mathbf{e}_7^3 & \mathbf{e}_7^4 & \mathbf{f}_7^1 & \mathbf{f}_7^2 & \mathbf{f}_7^3 & \mathbf{f}_7^4 \\ \mathbf{e}_8^1 & \mathbf{e}_8^2 & \mathbf{e}_8^3 & \mathbf{e}_8^4 & \mathbf{f}_8^1 & \mathbf{f}_8^2 & \mathbf{f}_8^3 & \mathbf{f}_8^4 \end{bmatrix}, \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_5 \\ \mathbf{Q}_6 \\ \mathbf{Q}_7 \\ \mathbf{Q}_8 \end{bmatrix}. \quad (4.9b)$$

矩陣 $\mathbf{B}$ 中 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$ ，上標 $i = 1 \sim 4$ 分別對應 B_m^i 及 C_n^i ，下標 $k = 1 \sim 8$ 分別對應滿

足方程式(4.8a~4.8h)，矩陣 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$ 之每一列為各邊界上的點 b_{is} 依序代入而得。

如圖 4.1 所示，若每邊取 N_b 個點，即有 N_b 條方程式， $\mathbf{e}_k^i$ 、 $\mathbf{f}_k^i$ 之矩陣大小為 $N_b \times 4(M+N+2)$ ，各元素之值列於附錄 B。 $\mathbf{B}$ 為大小 $8N_b \times 4(M+N+2)$ 之矩陣，此處 $\mathbf{B}$ 矩陣不一定為方陣。 $\mathbf{C}$ 行向量大小為 $4(M+N+2) \times 1$ 。

$\mathbf{D}$ 矩陣中 $\mathbf{Q}_i$ 之列按方程(4.8a~4.8h)代入點 b_{is} 排列，以下標 $i = 1 \sim 8$ 表示方程(4.8a~4.8h)， $\mathbf{Q}_i$ 矩陣大小為 $N_b \times ((M+1)(N+1))$ ，故 $\mathbf{D}$ 矩陣大小為 $8N_b \times ((M+1)(N+1))$ ，其中 $\mathbf{Q}_i$ 矩陣之值列於附錄 B。

$\mathbf{A}$ 為 $((M+1)(N+1)) \times 1$ 之行向量，由式(3.16)與(4.9a~4.9b)，利用廣義反矩陣求解，可得 B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 之關係：

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.3)$$

將(4.3)結果代入(3.11)整理可得矩陣形式為

$$\left(\mathbf{K} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot ((\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}) + \mathbf{K}_2$ ， $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot ((\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}) + \mathbf{M}_2$ 。

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1a}^1 & \mathbf{K}_{1a}^2 & \mathbf{K}_{1a}^3 & \mathbf{K}_{1a}^4 & \mathbf{K}_{1b}^1 & \mathbf{K}_{1b}^2 & \mathbf{K}_{1b}^3 & \mathbf{K}_{1b}^4 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1a}^1 & \mathbf{M}_{1a}^2 & \mathbf{M}_{1a}^3 & \mathbf{M}_{1a}^4 & \mathbf{M}_{1b}^1 & \mathbf{M}_{1b}^2 & \mathbf{M}_{1b}^3 & \mathbf{M}_{1b}^4 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{K}_2(o, k) = (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4) \cdot \cos \lambda_m x(d_{gh}) \cdot \cos \lambda_n y(d_{gh}) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M}_2(o, k) = \cos \lambda_m x(d_{gh}) \cdot \cos \lambda_n y(d_{gh}) \quad (4.13)$$

$\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 矩陣之列按板內之點 d_{gh} 代入排列， $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 各元素為變數 $\bar{m}$ 、 $\bar{n}$ 、點 $d_{gh}(x, y)$ 之函數。如圖 4.1 所示，若板內取 $p \cdot q$ 個點，即有 $p \cdot q$ 條方程式， $\mathbf{K}_1$ 、

$\mathbf{M}_1$ 之 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$ ($j=1 \sim 4$) 矩陣大小為 $(p \cdot q) \times (M+1)$ 、 $(p \cdot q) \times (N+1)$ 、

$(p \cdot q) \times (M+1)$ 、 $(p \cdot q) \times (N+1)$ ，故 $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 為 $(p \cdot q) \times 4(M+N+2)$ 之矩陣，各元素之值列於附錄 C。

$\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 為矩陣大小 $(p \cdot q) \times ((M+1)(N+1))$ 之對角化矩陣， $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 各元素為其變數 m 、 n 與點 $d_{gh}(x, y)$ 之函數。 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 矩陣之列按 o 排列，令 $d_{gh} = d(o)$ ， $o = o(g, h) = h + (g-1)q$ ，而矩陣之行以 k 表示，代表 $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 矩陣之行按 $\mathbf{A}$ 行向量中變數 m 、 n 排列，令 $\mathbf{A}$ 行向量中各元素 $A_{mn} = A(k)$ ， $k = m(N+1) + (n+1)$ ，對角線元素如式(4.12、4.13)表示， $\mathbf{K}_2$ 、 $\mathbf{M}_2$ 對角線外的值皆為零。為使 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ 矩陣以求解特徵值，該矩陣須為方陣，故取點數 $p \cdot q = ((M+1)(N+1))$ 。

綜合以上所述，求解之流程為

- 1、假設撓度同式(3.9)，將之代入該邊界條件。
- 2、直接代入各邊界上的點 b_{is} ，得到方程(3.16)。
- 3、利用廣義反矩陣式(4.3)，求解可得 A_{mn} 與 B_m^i 、 C_n^i 之關係。
- 4、將以上所得 B_m^i 、 C_n^i 結果代入(3.13b)，亦帶入板內點 d_{gh} ，並由式(3.19)求解而得該頻率值。
- 5、將上述方程編譯成程式透過電腦求解，改變項數 m 、 n 、點數 N_b 以及間距 l ，以得精確值。

4.2 收斂性分析

在本文，配點法採均勻佈點，依固定間距取點。為滿足控制方程以求解頻率 ω ，所取之點不應過於靠近邊界，令於矩形板內所取之點均至少與邊界距離 l ，如圖 4.1 所示，點 d_{1h} 、 d_{gq} 、 d_{ph} 、 d_{g1} 均與最近之邊界距離 l ，且為了求解特徵值，該 **K**、**M** 矩陣須為方陣，項數 m 、 n 最大值取為 M ， A_{mn} 將會有 $(M+1)^2$ 個，為配合 A_{mn} ，取點數 $pq = (M+1)^2$ ，即佈點間距長為 $\frac{a-2l}{M}$ ，構成之 **K**、**M** 矩陣大小為 $(M+1)^2 \times (M+1)^2$ ，為方陣。

以下列出此章探討的兩種邊界條件(C-C-C-C、S-S-S-S)之結果，分別討論

①變數為項數 M_{max} ，其他參數如板之長寬比 $r (=a/b)$ 、邊界取點數 N_b ，以及板內點離最近邊界之距離 l 皆為定值。②變數為 N_b ，其他 r 、 M_{max} 、 l 為定值。③參數為 l ，其他 r 、 M_{max} 、 N_b 為定值。

①參數： M_{max}

表 4.1 C-C-C-C 之收斂性分析 ($r=1$, $N_b=50$, $l=0.01$)

M_{max}	$\# \Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
5	36.088	72.815	72.815	107.97	127.59
10	35.997	73.424	73.424	108.34	131.62
20	35.986	73.396	73.396	108.23	131.59
30	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
50	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
*Li (2009)	35.985	73.393	73.393	108.21	131.58

表 4.1 可視為四端固定(C-C-C-C)矩形板之收斂性分析，討論有效位數五位。由上表所示：隨 M_{max} 增加，第一模態頻率由上限遞減收斂，在 $M_{max}=30$ 收斂至五位有效數字 35.985；第二、三模態相同，為重根關係，隨著 M_{max} 增加，模態頻率先增後減，為振盪收斂，在 $M_{max}=30$ 收斂至五位有效數字 73.394；隨著 M_{max} 增加，第四及第五模態頻率先增後減，為振盪收斂，在 $M_{max}=30$ 分別收斂至五位有效數字 (108.22 及 131.58)。

表 4.2 S-S-S-S 之收斂性分析 ($r=1, N_b=150, l=0.01$)

M_{max}	$\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
5	19.717	49.679	49.679	79.853	100.48
10	19.682	49.198	49.198	79.112	98.649
20	19.724	49.326	49.326	78.889	98.666
30	19.732	49.337	49.337	78.926	98.677
40	19.734	49.341	49.341	78.938	98.682
*Leissa (1973)	19.739	49.348	49.348	78.957	98.696

表 4.2 可視為四端簡支(S-S-S-S)矩形板之收斂性分析。由上表顯示：隨著 M_{max} 增加，第一模態頻率先減後增，為振盪收斂，在 $M_{max}=30$ 收斂至四位有效數字 19.73；第二、三模態相同，為重根關係，模態頻率先減後增，為振盪收斂，在 $M_{max}=30$ 收斂至四位有效數字 49.34；第四及第五模態頻率亦先減後增，為振盪收斂，在 $M_{max}=30$ 分別收斂至三位有效數字以及四位有效數字(78.9 及 98.68)。

③參數： N_b

表 4.3 C-C-C-C 之自由振動頻率 ($r=1, M_{max}=20, l=0.01$)

N_b	$\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1	2	3	4	5
10	36.474	73.778	73.778	107.31	129.061
20	36.032	73.391	73.391	108.23	31.59
30	35.986	73.396	73.396	108.23	131.59
50	35.986	73.396	73.396	108.23	131.59
100	35.986	73.396	73.396	108.23	131.59

表 4.4 S-S-S-S 之自由振動頻率 ($r=1, M_{max}=20, l=0.01$)

N_b	$\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1	2	3	4	5
10	27.089	91.517	94.381	94.381	101.85
20	16.834	49.227	49.227	78.777	96.647
30	19.698	49.265	49.265	78.995	98.569
50	19.717	49.315	49.315	78.853	98.641
80	19.721	49.321	49.321	78.876	98.656
100	19.723	49.323	49.323	78.882	98.661
150	19.724	49.326	49.326	78.889	98.666

滿足邊界條件求解 A_{mn} 與 B_m^i 、 C_n^i 關係時，會受各邊界上取點數 N_b 多寡影響。

當取點數越多， B_m^i 、 C_n^i 與 A_{mn} 關係將越精確，由表 4.3 所示，當 $N_b \geq 30$ ， N_b 所

造成之影響不大；表 4.4 所示，當 $N_b \geq 30$ ，頻率各數值仍在變動，若討論有效位

數四位，則 $N_b \geq 50$ 其影響不大。

©參數： l

表 4.5 C-C-C-C 之自由振動頻率 ($r=1, M_{max}=20, N_b=50$)

l	$\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1	2	3	4	5
2	36.384	73.052	75.588	108.61	131.70
1	35.994	73.425	73.425	108.35	131.64
0.1	35.985	73.393	73.393	108.21	131.58
0.01	35.986	73.396	73.396	108.23	131.59
0.001	35.986	73.397	73.397	108.23	131.59
0.0001	35.986	73.397	73.397	108.23	131.59

表 4.6 S-S-S-S 之自由振動頻率 ($r=1, M_{max}=20, N_b=50$)

l	$\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1	2	3	4	5
2	18.578	49.110	49.110	78.753	94.413
1	19.647	49.101	49.101	79.068	98.098
0.1	19.691	49.256	49.256	78.493	98.550
0.01	19.717	49.315	49.315	78.853	98.641
0.001	19.720	49.319	49.319	78.871	98.649
0.0001	19.720	49.320	49.320	78.872	98.650

滿足控制方程以求解頻率值，會受板內取點數影響，當 l 越小即代表取點數越多。由表 4.5 知，當 $l \leq 0.01$ ，參數 l 所造成之影響不大；而由表 4.6 所示，當 $l = 0.01$ ，頻率各數值仍在變動，但當 $l \leq 0.001$ ，討論有效位數四位， l 所造成之影響不大。

4.3 比較兩法之收斂性

① 四邊固定(C-C-C-C)矩形板

表 3.1 C-C-C-C 之自由振動頻率($r=1$)

M_{max}	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1	37.947	86.335	86.335	116.89	
5	35.956	73.306	73.306	107.96	131.52
10	35.984	73.389	73.389	108.19	131.57
15	35.985	73.393	73.393	108.21	131.58
20	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
25	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
50	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58

表 4.1 C-C-C-C 之自由振動頻率($r=1, N_b=50, l=0.01$)

M_{max}	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1	2	3	4	5
5	36.088	72.815	72.815	107.97	127.59
10	35.997	73.424	73.424	108.34	131.62
20	35.986	73.396	73.396	108.23	131.59
30	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58
50	35.985	73.394	73.394	108.22	131.58

由表 3.1 (傅立葉形式級數) 與表 4.1 (配點法) 可見其收斂值結果相同，只是收斂速度不同，傅立葉形式級數收斂會較快，討論有效位數為五位，在 $M_{max}=20$ 時已收斂，配點法則在 $M_{max}=30$ 時收斂。

④四邊簡支(S-S-S-S)矩形板

表 3.2 S-S-S-S 之自由振動頻率($r = 1$)

M_{max}	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
1	17.238	50.970	50.970	78.619	
5	19.659	49.307	49.307	78.783	99.410
10	19.723	49.334	49.334	78.888	98.707
15	19.730	49.338	49.338	78.928	98.691
20	19.735	49.342	49.342	78.938	98.689
30	19.737	49.345	49.345	78.948	98.691
40	19.738	49.346	49.346	78.952	98.693
50	19.738	49.347	49.347	78.954	98.694

表 4.2 S-S-S-S 之自由振動頻率($r = 1, N_b = 150, l = 0.01$)

M_{max}	$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$				
#	1st	2nd	3rd	4th	5th
5	19.717	49.679	49.679	79.853	100.48
10	19.682	49.198	49.198	79.112	98.649
20	19.724	49.326	49.326	78.889	98.666
30	19.732	49.337	49.337	78.926	98.677
40	19.734	49.341	49.341	78.938	98.682

由表 3.2 (傅立葉形式級數) 與表 4.2 (配點法) 可見該結果不同，以傅立葉形式級數求解頻率，其前五個模態頻率值在 $M_{max} = 30$ 收斂至有效位數四位(19.74、49.35、49.35、78.95 與 98.69)；採配點法之第一、二、三、五模態頻率則在 $M_{max} = 30$ 收斂至有效位數四位(19.73、49.34、49.34、98.68)，而第四模態頻率則在 $M_{max} = 30$ 收斂至有效位數三位 78.9。

第五章 結論與建議

5.1 結論

本研究利用傅立葉餘弦級數求解矩形板之振動，以多項式作為擴充函數修正傅立葉級數逐項微分所造成的問題。在第三章討論板之振動問題，將此傅立葉餘弦級數代入邊界與控制方程，求解七種邊界條件(C-C-C-C、S-S-S-S、C-F-F-F、S-F-S-F、S-S-S-F、S-C-S-S、S-C-S-C)之自然振動頻率，並對邊界於 C-C-C-C、S-S-S-S 之案例做收斂性分析，與文獻 Li (2009)、Leissa (1973)之數值比照，以驗證方法之可行性。求解時，將 $P_x^i(x)$ 與 $P_y^j(y)$ 及其微分函數分別以 $\cos\lambda_m x$ 及 $\cos\lambda_n y$ 級數展開，以提出共同項 $\cos\lambda_m x \cdot \cos\lambda_n y$ 、 $\cos\lambda_m x$ 或 $\cos\lambda_n y$ ，使其於傅立葉級數域，但計算繁複。

第四章討論另一個方法—配點法，該法不進行積分轉換，而是直接代入滿足邊界條件之點 b_{is} 或滿足控制方程位於板內之點 d_{gh} ，同樣地，亦可求解出頻率值。亦對邊界於 C-C-C-C、S-S-S-S 之案例做收斂性分析，與文獻 Li (2009)、Leissa (1973)之數值比照，以驗證方法之可行性。

邊界於 C-C-C-C 之案例，由表 3.1 與表 4.1 可見其收斂值結果相同，只是收斂速度不同，轉換至傅立葉級數域方法之收斂速度會較快。而在邊界於 S-S-S-S 之案例，由表 3.2 與表 4.2 可見該結果值不同，以傅立葉形式級數求解頻率，前五個模態頻率值皆可收斂至有效位數四位；採配點法之第一、二、三、五模態頻率收斂至有效位數四位，而第四模態頻率僅收斂至有效位數三位。

綜合本文結果，發現轉換至傅立葉級數域方法之收斂速度較快，收斂值也較精

確，但需積分轉換，步驟程序與數值整理上較繁複。而配點法由於直接代邊界點滿足邊界或代板內點滿足控制方程，不須再積分轉換，步驟程序與數值處理較直觀、簡易，但收斂速度較慢，也因考慮變數多，收斂值較不精確。

5.2 建議

在 2.2.4 節發現由於自由端之高階微分，擴充函式之部分項變為常數，而造成 $\mathbf{B}$ 矩陣奇異性，無法求解出 A_m 與 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 之關係，於是提高多項式階數以避免之。此問題亦會衍伸至探討矩形板之頻率求解，在求解矩形板 C-F-C-F、C-C-F-F、F-F-F-F 之 A_{mn} 與 B_m^i 、 C_n^i 關係 ($\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}$)， $\mathbf{B}$ 矩陣奇異無法反矩陣，該假設之擴充函式亦須像 2.2.4 節提高擴充函式階數。由此可知在擴充函式假設時，該多項式的選擇須注意階數，是否在高階微分後消失，造成矩陣奇異無法求解。預期 2.2.4 節中修正後之多項式函數代入 F-F-F-F 邊界條件後，將可獲解。

相較配點法，利用傅立葉形式級數求解時，將其轉換至傅立葉級數域，其收斂較快速也較精確，將來亦可以此方法探討厚板或其他邊界問題。

參考文獻

Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959) Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York.

Szilar, R. (1974) Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Timoshenko, S.P. (1938) “Bending of Rectangular Plates with Clamped Edges”, In Proceedings Fifth International Congress of Applied Mechanics, pp.40-43, MIT: USA.

Wang, J.T. and Lin, C. (1996) “Dynamic Analysis of Generally Supported Beams Using Fourier series”, Journal of Sound and Vibration, 196, pp.285-293.

Li, W.L. (2000) “Free Vibration of Beams with General Boundary Conditions”, Journal of Sound and Vibration, 237, pp.709-725.

Li, W.L. (2002) “Comparison of Fourier Sine and Cosine Series Expansions for Beams with Arbitrary Boundary Conditions”, Journal of Sound and Vibration, 255, pp.185-194.

Du, J.T., Li, W.L., Jin, G.Y., Yang, T.J. and Liu, Z.G. (2007) “An Analytical Method for the in-plane Vibration Analysis of Rectangular Plates with Elastically Restrained Edges”, Journal of Sound and Vibration, 306, pp.908-927.

Li, W.L., Zhang, X.F., Du, J.T. and Liu, Z.G. (2009) “An Exact Series Solution for the Transverse Vibration of Rectangular Plates with General Elastic Boundary Supports”, Journal of Sound and Vibration, 321, pp.254-269.

Jin, G.Y., Chen, H., Du, J.T., Yang, T.J. and Li, W.Y. (2010) “The Influence of Edge Restraining Stiffness on the Transverse Vibrations of Rectangular Plate Structures”, Journal of Marine Science and Application, 9, pp.393-402.

”

Tolstov, G.P. (1965) Fourier Series, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall.

Leissa, A.W. (1973) “The Free Vibration of Rectangular Plates”, Journal of Sound and Vibration, 31, pp.257-293.

Leissa, A.W. and Qatu, M.S. (2011) Vibration of Continuous Systems, McGraw-Hill.

Clough, R.W. and Penzien, J. (1975) Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York.

Xing, Y.F. and Liu, B. (2009) “New Exact Solutions for Free Vibrations of Thin Orthotropic Rectangular Plates”, Composite Structures, 89, pp.567-574.



附錄 A

➤ 式(3.12)中 b_n^i 、 b_{n2}^i 、 b_{n4}^i 、 a_m^i 、 a_{m2}^i 、 a_{m4}^i 之表示式

$$b_0^i = \frac{1}{b} \int_0^b (P_y^i(y)) dy \quad (\text{A.1.1})$$

$$b_n^i = \frac{2}{b} \int_0^b (P_y^i(y) \cdot \cos \lambda_n y) dy \quad (\text{A.1.2})$$

$$b_{02}^i = \frac{1}{b} \int_0^b (P_y^{i''}(y)) dy \quad (\text{A.1.3})$$

$$b_{n2}^i = \frac{2}{b} \int_0^b (P_y^{i''}(y) \cdot \cos \lambda_n y) dy \quad (\text{A.1.4})$$

$$b_{04}^i = \frac{1}{b} \int_0^b (P_y^{i(4)}(y)) dy \quad (\text{A.1.5})$$

$$b_{n4}^i = \frac{2}{b} \int_0^b (P_y^{i(4)}(y) \cdot \cos \lambda_n y) dy \quad (\text{A.1.6})$$

$$a_0^i = \frac{1}{a} \int_0^a (P_x^i(x)) dx \quad (\text{A.1.7})$$

$$a_m^i = \frac{2}{a} \int_0^a (P_x^i(x) \cdot \cos \lambda_m x) dx \quad (\text{A.1.8})$$

$$a_{02}^i = \frac{1}{a} \int_0^a (P_x^{i''}(x)) dx \quad (\text{A.1.9})$$

$$a_{m2}^i = \frac{2}{a} \int_0^a (P_x^{i''}(x) \cdot \cos \lambda_m x) dx \quad (\text{A.1.10})$$

$$a_{04}^i = \frac{1}{a} \int_0^a (P_x^{i(4)}(x)) dx \quad (\text{A.1.11})$$

$$a_{m4}^i = \frac{2}{a} \int_0^a (P_x^{i(4)}(x) \cdot \cos \lambda_m x) dx \quad (\text{A.1.12})$$

其中

$$b_n^1 = \begin{cases} 0, n=0 \\ \frac{-2b}{n^2 \pi^2}, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.1})$$

$$b_n^2 = \begin{cases} 0, n=0 \\ \frac{2b^3}{n^4 \pi^4}, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$b_n^3 = \begin{cases} 0, n = 0 \\ \frac{2b \cdot \cos n\pi}{n^2 \pi^2}, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.3})$$

$$b_n^4 = \begin{cases} 0, n = 0 \\ \frac{-2b^3 \cdot \cos n\pi}{n^4 \pi^4}, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.4})$$

$$b_{n2}^1 = \begin{cases} -\frac{1}{b}, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.5})$$

$$b_{n2}^2 = \begin{cases} 0, n = 0 \\ \frac{-2b}{n^2 \pi^2}, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.6})$$

$$b_{n2}^3 = \begin{cases} \frac{1}{b}, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.7})$$

$$b_{n2}^4 = \begin{cases} 0, n = 0 \\ \frac{2b \cdot \cos n\pi}{n^2 \pi^2}, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.8})$$

$$b_{n4}^1 = 0, \quad (\text{A.2.9})$$

$$b_{n4}^2 = \begin{cases} -\frac{1}{b}, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.10})$$

$$b_{n4}^3 = 0, \quad (\text{A.2.11})$$

$$b_{n4}^4 = \begin{cases} \frac{1}{b}, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.12})$$

$$a_m^1 = \begin{cases} 0, m = 0 \\ \frac{-2a}{m^2 \pi^2}, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.13})$$

$$a_m^2 = \begin{cases} 0, m = 0 \\ \frac{2a^3}{m^4 \pi^4}, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.14})$$

$$a_m^3 = \begin{cases} 0, m = 0 \\ \frac{2a \cdot \cos m\pi}{m^2 \pi^2}, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.15})$$

$$a_m^4 = \begin{cases} 0, m = 0 \\ \frac{-2a^3 \cdot \cos m\pi}{m^4 \pi^4}, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.16})$$

$$a_{m2}^1 = \begin{cases} -\frac{1}{a}, m = 0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.17})$$

$$a_{m2}^2 = \begin{cases} 0, m = 0 \\ \frac{-2a}{m^2 \pi^2}, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.18})$$

$$a_{m2}^3 = \begin{cases} \frac{1}{a}, m = 0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.19})$$

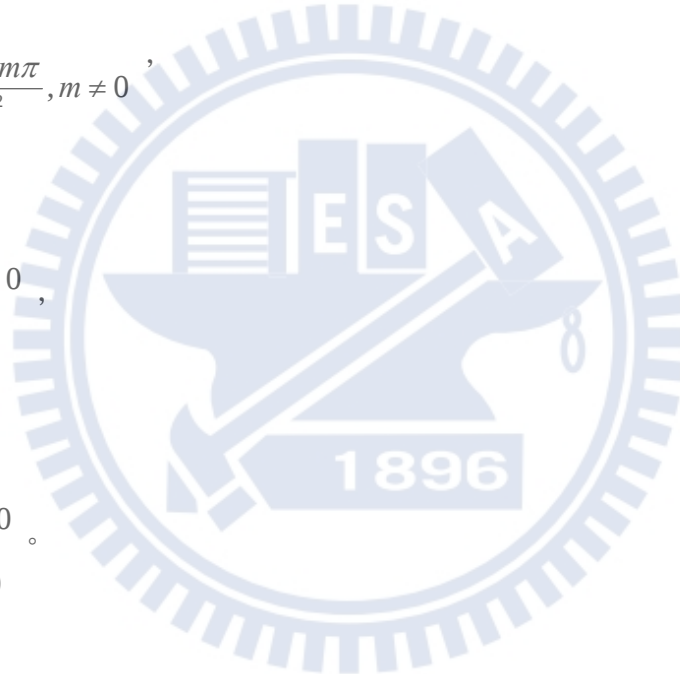
$$a_{m2}^4 = \begin{cases} 0, m = 0 \\ \frac{2a \cdot \cos m\pi}{m^2 \pi^2}, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.20})$$

$$a_{m4}^1 = 0, \quad (\text{A.2.21})$$

$$a_{m4}^2 = \begin{cases} -\frac{1}{a}, m = 0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2.22})$$

$$a_{m4}^3 = 0, \quad (\text{A.2.23})$$

$$a_{m4}^4 = \begin{cases} \frac{1}{a}, m = 0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{A.2.24})$$



附錄 B

➤ 3.2.1 式(3.17a) 矩陣 **B** 之 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$

$$\mathbf{e}_{1m,n}^1 = P_y^2(0) \cdot \delta_{mn} \quad (\text{B.1.1})$$

$$\mathbf{e}_{1m,n}^2 = P_y^4(0) \cdot \delta_{mn} \quad (\text{B.1.2})$$

$$\mathbf{f}_{1m,n}^1 = a_{m-1}^2 \quad (\text{B.1.3})$$

$$\mathbf{f}_{1m,n}^2 = a_{m-1}^4 \quad (\text{B.1.4})$$

$$\mathbf{e}_{2n,m}^1 = b_{n-1}^2 \quad (\text{B.1.5})$$

$$\mathbf{e}_{2n,m}^2 = b_{n-1}^4 \quad (\text{B.1.6})$$

$$\mathbf{f}_{2n,m}^1 = P_x^2(0) \cdot \delta_{nm} \quad (\text{B.1.7})$$

$$\mathbf{f}_{2n,m}^2 = P_x^4(0) \cdot \delta_{nm} \quad (\text{B.1.8})$$

$$\mathbf{e}_{3m,n}^1 = P_y^2(b) \cdot \delta_{mn} \quad (\text{B.1.9})$$

$$\mathbf{e}_{3m,n}^2 = P_y^4(b) \cdot \delta_{mn} \quad (\text{B.1.10})$$

$$\mathbf{f}_{3m,n}^1 = a_{m-1}^2 \cdot \cos(n-1)\pi \quad (\text{B.1.11})$$

$$\mathbf{f}_{3m,n}^2 = a_{m-1}^4 \cdot \cos(n-1)\pi \quad (\text{B.1.12})$$

$$\mathbf{e}_{4n,m}^1 = b_{n-1}^2 \cdot \cos(m-1)\pi \quad (\text{B.1.13})$$

$$\mathbf{e}_{4n,m}^2 = b_{n-1}^4 \cdot \cos(m-1)\pi \quad (\text{B.1.14})$$

$$\mathbf{f}_{4n,m}^1 = P_x^2(a) \cdot \delta_{nm} \quad (\text{B.1.15})$$

$$\mathbf{f}_{4n,m}^2 = P_x^4(a) \cdot \delta_{nm} \quad (\text{B.1.16})$$

a_m^i 、 b_n^i 可於附錄 A 查得，其中 $m = 1, 2, \dots, M$ ， $n = 1, 2, \dots, N$ 。

➤ 3.2.1 式(3.17c) 矩陣 **D** 之矩陣 Q_i

$$Q_{1i,j} = -\delta_{m\bar{m}} \quad (B.2.1)$$

$$Q_{2i,j} = -\delta_{m\bar{m}} \quad (B.2.2)$$

$$Q_{3i,j} = (-1)^{\bar{n}+1} \cdot \delta_{m\bar{m}} \quad (B.2.3)$$

$$Q_{4i,j} = (-1)^{\bar{m}+1} \cdot \delta_{m\bar{m}} \quad (B.2.4)$$

其中 $i = m+1 = n+1$, $j = \bar{m}(N+1) + (\bar{n}+1)$, $m = 0, 1, \dots, M$, $n = 0, 1, \dots, N$ 。注意 $\bar{m}$ 及 $\bar{n}$

對應於 $A_{\bar{m}\bar{n}}$ 之下標。

➤ 3.2.2 式(3.26a) 矩陣 **B** 之 e_k^i 及 f_k^i

$$e_{1n,m}^i = b_{n-1}^i \quad (B.3.1)$$

$$f_{1n,m}^i = P_x^i(0) \cdot \delta_{nm} \quad (B.3.2)$$

$$e_{2n,m}^i = 0 \quad (B.3.3)$$

$$f_{2n,m}^1 = \delta_{nm} \quad (B.3.4)$$

$$f_{2n,m}^2 = f_{2n,m}^3 = f_{2n,m}^4 = 0 \quad (B.3.5)$$

$$e_{3n,m}^i = (-1)^m \lambda_{m-1}^2 \cdot b_{n-1}^i + (-1)^{m-1} v \cdot b_{(n-1)2}^i \quad (B.3.6)$$

$$f_{3n,m}^i = \left(P_x^{i''}(a) - v \cdot \lambda_{n-1}^2 \cdot P_x^i(a) \right) \delta_{nm} \quad (B.3.7)$$

$$e_{4n,m}^i = 0 \quad (B.3.8)$$

$$f_{4n,m}^1 = f_{4n,m}^2 = 0 \quad (B.3.9)$$

$$f_{4n,m}^3 = -\lambda_{n-1}^2 (2-v) \delta_{nm} \quad (B.3.10)$$

$$\mathbf{f}_{4n,n}^4 = \delta_{nn} \quad (\text{B.3.11})$$

$$\mathbf{e}_{5m,n}^i = \left(P_y^{i''}(0) - v \cdot \lambda_{m-1}^2 \cdot P_y^i(0) \right) \delta_{mn} \quad (\text{B.3.12})$$

$$\mathbf{f}_{5m,n}^i = -\lambda_{n-1}^2 \cdot a_{m-1}^i + v \cdot a_{(m-1)2}^i \quad (\text{B.3.13})$$

$$\mathbf{e}_{6m,n}^1 = -\lambda_{m-1}^2 (2-v) \cdot \delta_{nn} \quad (\text{B.3.14})$$

$$\mathbf{e}_{6m,n}^2 = \delta_{mn} \quad (\text{B.3.15})$$

$$\mathbf{e}_{6m,n}^3 = \mathbf{e}_{6m,n}^4 = 0 \quad (\text{B.3.16})$$

$$\mathbf{f}_{6m,n}^i = 0 \quad (\text{B.3.17})$$

$$\mathbf{e}_{7m,n}^i = \left(P_y^{i''}(b) - v \lambda_{m-1}^2 \cdot P_y^i(b) \right) \delta_{mn} \quad (\text{B.3.18})$$

$$\mathbf{f}_{7m,n}^i = (-1)^n \cdot \lambda_{n-1}^2 \cdot a_{m-1}^i + (-1)^{n-1} \cdot v \cdot a_{(m-1)2}^i \quad (\text{B.3.19})$$

$$\mathbf{e}_{8m,n}^1 = \mathbf{e}_{8m,n}^2 = 0 \quad (\text{B.3.20})$$

$$\mathbf{e}_{8m,n}^3 = -\lambda_{m-1}^2 (2-v) \delta_{mn} \quad (\text{B.3.21})$$

$$\mathbf{e}_{8m,n}^4 = \delta_{mn} \quad (\text{B.3.22})$$

$$\mathbf{f}_{8m,n}^i = 0 \quad (\text{B.3.23})$$

a_m^i 、 a_{m2}^i 、 b_n^i 、 b_{n2}^i 可於附錄 A 查得，其中 $m = 1, 2, \dots, M$ ， $n = 1, 2, \dots, N$ ， $i = 1 \sim 4$ 。

➤ 3.2.2 式(3.26c) 矩陣 $\mathbf{D}$ 之矩陣 $\mathbf{Q}_i$

$$\mathbf{Q}_{1i,j} = -\delta_{\bar{m}} \quad (\text{B.4.1})$$

$$\mathbf{Q}_{2i,j} = 0 \quad (\text{B.4.2})$$

$$\mathbf{Q}_{3i,j} = (-1)^{\bar{m}} \cdot \left(\lambda_{\bar{m}}^2 + v \lambda_n^2 \right) \delta_{\bar{m}} \quad (\text{B.4.3})$$

$$\mathbf{Q}_{4,i,j}=0 \quad (\text{B.4.4})$$

$$\mathbf{Q}_{5i,j} = (\lambda_{\bar{n}}^2 + v\lambda_m^2) \delta_{m\bar{m}} \quad (\text{B.4.5})$$

$$\mathbf{Q}_{6i,j}=0 \quad (\text{B.4.6})$$

$$\mathbf{Q}_{7i,j} = (-1)^{\bar{n}} \cdot (\lambda_{\bar{n}}^2 + v\lambda_m^2) \delta_{m\bar{m}} \quad (\text{B.4.7})$$

$$\mathbf{Q}_{8i,j}=0 \quad (\text{B.4.8})$$

其中 $i = m+1 = n+1$, $j = \bar{m}(N+1) + (\bar{n}+1)$, $m = 0, 1, \dots, M$, $n = 0, 1, \dots, N$ 。注意 $\bar{m}$ 及 $\bar{n}$

對應於 $A_{\bar{m}\bar{n}}$ 之下標。

➤ 3.2.3 式(3.34a) 矩陣 $\mathbf{B}$ 之 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$

$$\mathbf{e}_{1n,m}^i = b_{n-1}^i \quad (\text{B.5.1})$$

$$\mathbf{f}_{1n,m}^i = P_x^i(0) \delta_{nm} \quad (\text{B.5.2})$$

$$\mathbf{e}_{2n,m}^i = -\lambda_{m-1}^2 b_{n-1}^i + v b_{(n-1)2}^i \quad (\text{B.5.3})$$

$$\mathbf{f}_{2n,m}^i = \left(P_x^{i''}(0) - v \cdot \lambda_{n-1}^2 \cdot P_x^i(0) \right) \delta_{nm} \quad (\text{B.5.4})$$

$$\mathbf{e}_{3n,m}^i = (-1)^{m-1} b_{n-1}^i \quad (\text{B.5.5})$$

$$\mathbf{f}_{3n,m}^i = P_x^i(a) \delta_{nm} \quad (\text{B.5.6})$$

$$\mathbf{e}_{4n,m}^i = (-1)^m \lambda_{m-1}^2 \cdot b_{n-1}^i + (-1)^{m-1} v \cdot b_{(n-1)2}^i \quad (\text{B.5.7})$$

$$\mathbf{f}_{4n,m}^i = \left(P_x^{i''}(a) - v \cdot \lambda_{n-1}^2 \cdot P_x^i(a) \right) \delta_{nm} \quad (\text{B.5.8})$$

$$\mathbf{e}_{5m,n}^i = P_y^i(0) \delta_{mn} \quad (\text{B.5.9})$$

$$\mathbf{f}_{5m,n}^i = a_{m-1}^i \quad (\text{B.5.10})$$

$$\mathbf{e}_{6m,n}^i = \left(P_y^{i''}(0) - v \cdot \lambda_{m-1}^2 \cdot P_y^i(0) \right) \delta_{mn} \quad (\text{B.5.11})$$

$$\mathbf{f}_{6m,n}^i = -\lambda_{n-1}^2 \cdot a_{m-1}^i + v \cdot a_{(m-1)2}^i \quad (\text{B.5.12})$$

$$\mathbf{e}_{7m,n}^i = P_y^i(b) \delta_{mn} \quad (\text{B.5.13})$$

$$\mathbf{f}_{7m,n}^i = (-1)^{n-1} a_{m-1}^i \quad (\text{B.5.14})$$

$$\mathbf{e}_{8m,n}^i = \left(P_y^{i''}(b) - v \cdot \lambda_{m-1}^2 \cdot P_y^i(b) \right) \delta_{mn} \quad (\text{B.5.15})$$

$$\mathbf{f}_{8m,n}^i = (-1)^n \lambda_{n-1}^2 \cdot a_{m-1}^i + (-1)^{n-1} v \cdot a_{(m-1)2}^i \quad (\text{B.5.16})$$

a_m^i 、 a_{m2}^i 、 b_n^i 、 b_{n2}^i 可於附錄 A 查得，其中 $m = 1, 2, \dots, M$ ， $n = 1, 2, \dots, N$ ， $i = 1 \sim 4$ 。

➤ 3.2.3 式(3.34c) 矩陣 D 之矩陣 Q_i

$$Q_{1i,j} = -\delta_{\bar{m}} \quad (\text{B.6.1})$$

$$Q_{2i,j} = \left(\lambda_{\bar{m}}^2 + v \lambda_n^2 \right) \delta_{\bar{m}} \quad (\text{B.6.2})$$

$$Q_{3i,j} = (-1)^{\bar{m}+1} \delta_{\bar{m}} \quad (\text{B.6.3})$$

$$Q_{4i,j} = (-1)^{\bar{m}} \left(\lambda_{\bar{m}}^2 + v \lambda_n^2 \right) \delta_{\bar{m}} \quad (\text{B.6.4})$$

$$Q_{5i,j} = -\delta_{m\bar{m}} \quad (\text{B.6.5})$$

$$Q_{6i,j} = \left(\lambda_{\bar{n}}^2 + v \lambda_m^2 \right) \delta_{m\bar{m}} \quad (\text{B.6.6})$$

$$Q_{7i,j} = (-1)^{\bar{n}+1} \delta_{m\bar{m}} \quad (\text{B.6.7})$$

$$Q_{8i,j} = (-1)^{\bar{n}} \left(\lambda_{\bar{n}}^2 + v \lambda_m^2 \right) \delta_{m\bar{m}} \quad (\text{B.6.8})$$

其中 $i = m+1 = n+1$ ， $j = \bar{m}(N+1) + (\bar{n}+1)$ ， $m = 0, 1, \dots, M$ ， $n = 0, 1, \dots, N$ 。注意 $\bar{m}$ 及 $\bar{n}$

對應於 $A_{\bar{m}\bar{n}}$ 之下標。

➤ 4.1.1 式(4.2a) 矩陣 $\mathbf{B}$ 之 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$

$$\mathbf{e}_{1s,h}^i = P_y^i(0) \cdot \cos \lambda_m(x(b_{1s})) , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.7.1})$$

$$\mathbf{f}_{1s,k}^i = P_x^i(x(b_{1s})) , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.7.2})$$

$$\mathbf{e}_{2s,h}^1 = \cos \lambda_m(x(b_{1s})) , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.7.3})$$

$$\mathbf{e}_{2s,h}^2 = \mathbf{e}_{2s,h}^3 = \mathbf{e}_{2s,h}^4 = 0 , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.7.4})$$

$$\mathbf{f}_{2s,k}^i = 0 , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.7.5})$$

$$\mathbf{e}_{3s,h}^i = (-1)^m \cdot P_y^i(y(b_{2s})) , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.7.6})$$

$$\mathbf{f}_{3s,k}^i = P_x^i(a) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{2s})) , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.7.7})$$

$$\mathbf{e}_{4s,h}^i = 0 , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.7.8})$$

$$\mathbf{f}_{4s,k}^3 = \cos \lambda_n(y(b_{2s})) , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.7.9})$$

$$\mathbf{f}_{4s,k}^1 = \mathbf{f}_{4s,k}^2 = \mathbf{f}_{4s,k}^4 = 0 , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.7.10})$$

$$\mathbf{e}_{5s,h}^i = P_y^i(b) \cdot \cos \lambda_m(x(b_{3s})) , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.7.11})$$

$$\mathbf{f}_{5s,k}^i = (-1)^n \cdot P_x^i(x(b_{3s})) , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.7.12})$$

$$\mathbf{e}_{6s,h}^3 = \cos \lambda_m(x(b_{3s})) , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.7.13})$$

$$\mathbf{e}_{6s,h}^1 = \mathbf{e}_{6s,h}^2 = \mathbf{e}_{6s,h}^4 = 0 , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.7.14})$$

$$\mathbf{f}_{6s,k}^i = 0 , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.7.15})$$

$$\mathbf{e}_{7s,h}^i = P_y^i(y(b_{4s})) , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.7.16})$$

$$\mathbf{f}_{7s,k}^i = P_x^i(0) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{4s})) , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.7.17})$$

$$\mathbf{e}_{8s,h}^i = 0 , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.7.18})$$

$$\mathbf{f}_{8s,k}^1 = \cos \lambda_n \left(y(b_{4s}) \right) , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.7.19})$$

$$\mathbf{f}_{8s,k}^2 = \mathbf{f}_{8s,k}^3 = \mathbf{f}_{8s,k}^4 = 0 , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.7.20})$$

其中 $h = m + 1$ 、 $k = n + 1$ 。 $\mathbf{e}_k^i$ 、 $\mathbf{f}_k^i$ 矩陣之每一列以 s 表示各邊界上的點 b_{is} 。

➤ 4.1.1 式(4.2c) 矩陣 $\mathbf{D}$ 之矩陣 $\mathbf{Q}_i$

$$\mathbf{Q}_{1s,k} = -\cos \lambda_m \left(x(b_{1s}) \right) \quad (\text{B.8.1})$$

$$\mathbf{Q}_{2s,k} = 0 \quad (\text{B.8.2})$$

$$\mathbf{Q}_{3s,k} = (-1)^{m+1} \cdot \cos \lambda_n \left(y(b_{2s}) \right) \quad (\text{B.8.3})$$

$$\mathbf{Q}_{4s,k} = 0 \quad (\text{B.8.4})$$

$$\mathbf{Q}_{5s,k} = (-1)^{n+1} \cdot \cos \lambda_m \left(x(b_{3s}) \right) \quad (\text{B.8.5})$$

$$\mathbf{Q}_{6s,k} = 0 \quad (\text{B.8.6})$$

$$\mathbf{Q}_{7s,k} = -\cos \lambda_n \left(y(b_{4s}) \right) \quad (\text{B.8.7})$$

$$\mathbf{Q}_{8s,k} = 0 \quad (\text{B.8.8})$$

其中 $\mathbf{Q}_i$ 矩陣之每一列以 s 表示各邊界上的點 b_{is} ，矩陣之行則對照 A_{mn} 排列，以 k 表

示。令 $\mathbf{A}$ 矩陣中各元素 $A_{mn} = A(k)$ ， $k = m(N+1) + (n+1)$ 。

➤ 4.1.2 式(4.9a) 矩陣 $\mathbf{B}$ 之 $\mathbf{e}_k^i$ 及 $\mathbf{f}_k^i$

$$\mathbf{e}_{1s,h}^i = P_y^i(0) \cdot \cos \lambda_m(x(b_{1s})) , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.9.1})$$

$$\mathbf{f}_{1s,k}^i = P_x^i(x(b_{1s})) , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.9.2})$$

$$\mathbf{e}_{2s,h}^i = (P_y^{i''}(0) - v\lambda_m^2 \cdot P_y^i(0)) \cdot \cos \lambda_m(x(b_{1s})) , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.9.3})$$

$$\mathbf{f}_{2s,k}^i = -\lambda_n^2 \cdot P_x^i(x(b_{1s})) + v \cdot P_x^{i''}(x(b_{1s})) , s = 1, 2, \dots, N_1 \quad (\text{B.9.4})$$

$$\mathbf{e}_{3s,h}^i = (-1)^m \cdot P_y^i(y(b_{2s})) , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.9.5})$$

$$\mathbf{f}_{3s,k}^i = P_x^i(a) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{2s})) , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.9.6})$$

$$\mathbf{e}_{4s,h}^i = (-1)^{m+1} \cdot \lambda_m^2 \cdot P_y^i(y(b_{2s})) + (-1)^m \cdot v \cdot P_y^{i''}(y(b_{2s})) , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.9.7})$$

$$\mathbf{f}_{4s,k}^i = (P_x^{i''}(a) - v\lambda_n^2 \cdot P_x^i(a)) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{2s})) , s = 1, 2, \dots, N_2 \quad (\text{B.9.8})$$

$$\mathbf{e}_{5s,h}^i = P_y^i(b) \cdot \cos \lambda_m(x(b_{3s})) , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.9.9})$$

$$\mathbf{f}_{5s,k}^i = (-1)^n \cdot P_x^i(x(b_{3s})) , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.9.10})$$

$$\mathbf{e}_{6s,h}^i = (P_y^{i''}(b) - v\lambda_m^2 \cdot P_y^i(b)) \cdot \cos \lambda_m(x(b_{3s})) , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.9.11})$$

$$\mathbf{f}_{6s,k}^i = (-1)^{n+1} \cdot \lambda_n^2 \cdot P_x^i(x(b_{3s})) + (-1)^n \cdot v \cdot P_x^{i''}(x(b_{3s})) , s = 1, 2, \dots, N_3 \quad (\text{B.9.12})$$

$$\mathbf{e}_{7s,h}^i = P_y^i(y(b_{4s})) , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.9.13})$$

$$\mathbf{f}_{7s,k}^i = P_x^i(0) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{4s})) , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.9.14})$$

$$\mathbf{e}_{8s,h}^i = -\lambda_m^2 \cdot P_y^i(y(b_{4s})) + v \cdot P_y^{i''}(y(b_{4s})) , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.9.15})$$

$$\mathbf{f}_{8s,k}^i = (P_x^{i''}(0) - v\lambda_n^2 \cdot P_x^i(0)) \cdot \cos \lambda_n(y(b_{4s})) , s = 1, 2, \dots, N_4 \quad (\text{B.9.16})$$

其中 $h = m + 1$ 、 $k = n + 1$ 。 $\mathbf{e}_k^i$ 、 $\mathbf{f}_k^i$ 矩陣之每一列以 s 表示各邊界上的點 b_{is} 。

➤ 4.1.2 (4.9b) 矩陣 **D** 之矩陣 **Q_i**

$$\mathbf{Q}_{1s,k} = -\cos \lambda_m (x(b_{1s})) \quad (\text{B.10.1})$$

$$\mathbf{Q}_{2s,k} = (\lambda_n^2 + v\lambda_m^2) \cdot \cos \lambda_m (x(b_{1s})) \quad (\text{B.10.2})$$

$$\mathbf{Q}_{3s,k} = (-1)^{m+1} \cdot \cos \lambda_n (y(b_{2s})) \quad (\text{B.10.3})$$

$$\mathbf{Q}_{4s,k} = (-1)^m \cdot (\lambda_m^2 + v\lambda_n^2) \cdot \cos \lambda_n (y(b_{2s})) \quad (\text{B.10.4})$$

$$\mathbf{Q}_{5s,k} = (-1)^{n+1} \cdot \cos \lambda_m (x(b_{3s})) \quad (\text{B.10.5})$$

$$\mathbf{Q}_{6s,k} = (-1)^n \cdot (\lambda_n^2 + v\lambda_m^2) \cdot \cos \lambda_m (x(b_{3s})) \quad (\text{B.10.6})$$

$$\mathbf{Q}_{7s,k} = -\cos \lambda_n (y(b_{4s})) \quad (\text{B.10.7})$$

$$\mathbf{Q}_{8s,k} = (\lambda_m^2 + v\lambda_n^2) \cdot \cos \lambda_n (y(b_{4s})) \quad (\text{B.10.8})$$

其中 **Q_i** 矩陣之每一列以 *s* 表示各邊界上的點 b_{is} ，矩陣之行則對照 A_{mn} 排列，以 *k* 表示。令 **A** 矩陣中各元素 $A_{mn} = A(k)$ ， $k = m(N+1) + (n+1)$ 。

附錄 C

➤ 3.2.1 式(3.20、3.21) 矩陣 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$

$$\mathbf{K}_{1a}^j(p, q) = \left(\lambda_m^4 b_n^i - 2\lambda_m^2 b_{n2}^i + b_{n4}^i \right) \delta_{m\bar{m}} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{K}_{1b}^j(p, q) = \left(\lambda_n^4 a_m^i - 2\lambda_n^2 a_{m2}^i + a_{m4}^i \right) \delta_{n\bar{n}} \quad (\text{C.2})$$

其中 $i = 2, 4$ ， $j = 1, 2$ ， $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 矩陣之列以 p 表示， $p = p(m, n) = m(N+1) + n + 1$ ，

矩陣之行原按式(3.17b)各元素排列，為表示簡便，令 $\bar{C}_n^1 = \bar{B}_n^3$ 、 $\bar{C}_n^2 = \bar{B}_n^4$ ，使其對應

$\bar{B}^l$ ， $l = 1 \sim 4$ ，故 $\mathbf{C}$ 行向量又以 $\tilde{\mathbf{C}}$ 表示為

$$\tilde{\mathbf{C}} = \left(\bar{B}_0^1 \quad \bar{B}_1^1 \quad \cdots \quad \bar{B}_M^1 \mid \bar{B}_0^2 \quad \bar{B}_1^2 \quad \cdots \quad \bar{B}_M^2 \mid \bar{B}_0^3 \quad \bar{B}_1^3 \quad \cdots \quad \bar{B}_N^3 \mid \bar{B}_0^4 \quad \bar{B}_1^4 \quad \cdots \quad \bar{B}_N^4 \right)^T, \quad (\text{C.3})$$

如此， $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 矩陣第 q 行為 $q = q(\bar{m}, \bar{n}) = l(M+1) + \bar{m} + \bar{n} - M$ ， $l = 1 \sim 4$ 。注意 $\bar{m}$ 及

$\bar{n}$ 對應於 $\bar{B}^l$ 之下標。又

$$\mathbf{M}_{1a}^j(p, q) = b_n^i \delta_{m\bar{m}}, \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{M}_{1b}^j(p, q) = a_m^i \delta_{n\bar{n}}, \quad (\text{C.5})$$

$\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$ 矩陣排列方式同 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ ，如上所示。

➤ 3.2.2、3.2.3 式(3.28、3.29、3.36、3.37) 矩陣 $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^j$

$$\mathbf{K}_{1a}^j(p, q) = \left(\lambda_m^4 b_n^i - 2\lambda_m^2 b_{n2}^i + b_{n4}^i \right) \delta_{m\bar{m}} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{K}_{1b}^j(p, q) = \left(\lambda_n^4 a_m^i - 2\lambda_n^2 a_{m2}^i + a_{m4}^i \right) \delta_{n\bar{n}} \quad (\text{C.7})$$

其中 $i = 1 \sim 4$ ， $j = 1 \sim 4$ ， $\mathbf{K}_{1a}^j$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^j$ 矩陣之列以 p 表示， $p = p(m, n) = m(N+1) + n + 1$ ，

矩陣之行原按式(3.26b)各元素排列，為表示簡便，令 $C_n^1 = B_n^5$ 、 $C_n^2 = B_n^6$ 、 $C_n^3 = B_n^7$ 、

$C_n^4 = B_n^8$ ，使其對應 B^l ， $l = 1 \sim 8$ ，故 C 行向量又以 $\tilde{C}$ 表示為

$$\tilde{C} = \left(B_0^1 \ B_1^1 \ \cdots \ B_M^1 \mid B_0^2 \ B_1^2 \ \cdots \ B_M^2 \mid \cdots \ B_0^4 \ B_1^4 \ \cdots \ B_M^4 \mid B_0^5 \ B_1^5 \ \cdots \ B_N^5 \mid B_0^6 \ B_1^6 \ \cdots \ B_N^6 \mid \cdots \ B_0^8 \ B_1^8 \ \cdots \ B_N^8 \right)^T, \quad (C.8)$$

如此， K_{1a}^j 、 K_{1b}^j 矩陣之第 q 行為 $q = q(\bar{m}, \bar{n}) = l(M+1) + \bar{m} + \bar{n} - M$ ， $l = 1 \sim 8$ 。注意 $\bar{m}$

及 $\bar{n}$ 對應於 B^l 之下標。又

$$M_{1a}^j(p, q) = b_n^i \delta_{m\bar{m}}, \quad (C.9)$$

$$M_{1b}^j(p, q) = a_m^i \delta_{n\bar{n}}, \quad (C.10)$$

M_{1a}^j 、 M_{1b}^j 矩陣排列方式同 K_{1a}^j 、 K_{1b}^j ，如上所示。

➤ 4.1.1、4.1.2 式(4.4、4.5、4.10、4.11) 矩陣 K_{1a}^i 、 K_{1b}^i 、 M_{1a}^i 、 M_{1b}^i

$$\begin{aligned} K_{1a}^i(o, u) = & P_y^i \left(y(d_{gh}) \right) \cdot \lambda_m^4 \cdot \cos \lambda_m \left(x(d_{gh}) \right) - 2 \cdot P_y^{i''} \left(y(d_{gh}) \right) \cdot \lambda_m^2 \cdot \cos \lambda_m \left(x(d_{gh}) \right) \\ & + P_y^{i(4)} \left(y(d_{gh}) \right) \cdot \cos \lambda_m \left(x(d_{gh}) \right) \end{aligned} \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned} K_{1b}^i(o, u) = & P_x^i \left(x(d_{gh}) \right) \cdot \lambda_n^4 \cdot \cos \lambda_n \left(y(d_{gh}) \right) - 2 \cdot P_x^{i''} \left(x(d_{gh}) \right) \cdot \lambda_n^2 \cdot \cos \lambda_n \left(y(d_{gh}) \right) \\ & + P_x^{i(4)} \left(x(d_{gh}) \right) \cdot \cos \lambda_n \left(y(d_{gh}) \right) \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$M_{1a}^i(o, u) = P_y^i \left(y(d_{gh}) \right) \cdot \cos \lambda_m \left(x(d_{gh}) \right) \quad (C.13)$$

$$M_{1b}^i(o, u) = P_x^i \left(x(d_{gh}) \right) \cdot \cos \lambda_n \left(y(d_{gh}) \right) \quad (C.14)$$

$\mathbf{K}_{1a}^i$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^i$ 矩陣之下標 a 、 b 分別對照 B_m^i 、 C_n^i ，其矩陣之每一列以 o 表示各邊

界上的點 d_{gh} 。令 $d_{gh} = d(o)$ ， $o = o(g, h) = h + (g-1)q$ ，其中 $g = 1, 2, \dots, p$ 、

$h = 1, 2, \dots, q$ 。而矩陣之行原本按式(4.2b)各元素排列，為表示簡便，令 $C_n^1 = B_n^5$ 、

$C_n^2 = B_n^6$ 、 $C_n^3 = B_n^7$ 、 $C_n^4 = B_n^8$ ，使其對應 B^l ， $l = 1 \sim 8$ ，故 $\mathbf{C}$ 行向量又以 $\tilde{\mathbf{C}}$ 表示：

$$\tilde{\mathbf{C}} = \left(B_0^1 \ B_1^1 \ \dots \ B_M^1 \mid B_0^2 \ B_1^2 \ \dots \ B_M^2 \mid \dots \ B_0^4 \ B_1^4 \ \dots \ B_M^4 \mid B_0^5 \ B_1^5 \ \dots \ B_N^5 \mid B_0^6 \ B_1^6 \ \dots \ B_N^6 \mid \dots \ B_0^8 \ B_1^8 \ \dots \ B_N^8 \right)^T \quad (\text{C.15})$$

如此， $\mathbf{K}_{1a}^i$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^i$ 矩陣之行按 u 排列，其值對應 B^l ，令 $u = l(M+1) + m + n - M$ ， $l = 1 \sim 8$ 。

$\mathbf{M}_{1a}^i$ 、 $\mathbf{M}_{1b}^i$ 矩陣排列方式同 $\mathbf{K}_{1a}^i$ 、 $\mathbf{K}_{1b}^i$ ，如上所示。

