

國立交通大學

土木工程學系

碩士論文

應用無線監測技術之唯輸出系統結構損傷探測

Application of Wireless Sensing Technology for Damage

Detection of Output-Only Structural Systems

研究生：黃 罡

指導教授：王彥博 教授

中華民國一〇一年六月

應用無線監測技術之唯輸出系統結構損傷探測

**Application of Wireless Sensing Technology for Damage  
Detection of Output-Only Structural Systems**

研究生：黃 罡

Student : Gang Huang

指導教授：王彥博 博士

Advisor : Dr. Yen-Po Wang



Submitted to Department of Civil Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Civil Engineering  
June 2012  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇一年六月

# 應用無線監測技術之唯輸出系統結構損傷探測

研究生：黃罡

指導教授：王彥博 博士

國立交通大學土木工程學系研究所

## 摘要

本研究結合隨機子空間系統識別法 (Stochastic Subspace Identification, SSI) 與狀態空間 DLV 損傷定位法，針對唯輸出系統之地震監測反應進行結構損傷定位。經由數值模擬分析及一系列之振動台地震模擬試驗，證明吾人可在未知輸入擾動資訊的條件下，透過結構全域之地震反應歷時定位出平面構架結構之局部受損位置（樓層）。本研究採用 SSI-COV 以及結合多變量分析之 SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等在隨機子空間系統架構下所發展之系統識別分析方法，其概念為透過輸出向量序列間之協方差關係，建立包含原變量特性之降階系統，減少矩陣維度過高對精確性之影響。數值模擬分析結果顯示，結合多變量分析之 SSI 識別法，由於引進了卡爾曼過濾器之觀念，因此無論對於損傷程度之敏感性或是噪音干擾之適應性，皆較 SSI-COV 識別法為佳。振動台試驗採用無線監測技術，以台灣大學所發展之無線傳輸系統 NTU-WSU 結合加速規進行動態反應監測。試驗結果顯示，包含 SSI-COV 在內的五種系統識別法結合 DLV 損傷探測法多能有效定位出受損樓層，其中以 SSI-ECCA 之結果最佳，在單一樓層受損及複數樓層受損案例中皆能將所有受損樓層定位出，證明

其於實例應用上之可行性。惟五種方法都會發生將未受損之一樓誤判的情況，主要是輸入擾動乃不具穩態特性之隨機過程(白噪音案例亦因振動台性能之限制未能忠實呈現高斯訊號的特性)所致。

**關鍵字：**唯輸出、隨機子空間識別、系統識別、多變量分析、結構損傷探測、無線感測



# **Application of Wireless Sensing Technology for Damage Detection of Output-Only Structural Systems**

Student : Gang Huang

Advisor : Dr. Yen-Po Wang

Department of Civil Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University

## **Abstract**

In this study, a scheme integrated with the stochastic subspace system identification (SSI) and state-space damage localization (DLV) method has been developed for structural damage detection of output-only systems. A series of numerical simulations and shaking table tests has been conducted. Encouraging results indicate that local (storey) damages of plan frames can be identified from global seismic response data without knowledge of the input disturbance. In this study, the SSI-COV as well as SSI-PLS, SSI-MLR, SSI-CCA, and SSI-ECCA techniques developed for system identification under the framework of stochastic state-space system via the multivariate analysis are considered. The concept of multivariate analysis is to identify system parameters of the dynamically equivalent reduced-order system from the covariance matrix consisting of the output state vector sequences in a way that adverse effects on the accuracy of oversized data set can be eliminated. Simulation results indicate that, with the introduction of Kalman filter, the multivariate-analysis-based techniques are more sensitive to moderate

structural damages and adaptive to noise than the SSI-COV approach. The wireless sensing technique has been adopted for dynamic response monitoring in the shaking table tests using the wireless communication device, NTU-WSU, developed by NTU, in connection with accelerometers. Results show that the damaged stories of the output-only systems can in general be effectively located with the DLV damage detection method using the system parameters identified by all the methods, among which the SSI-ECCA proves to be the most effective one. With the SSI-ECCA, all damage stories can be identified regardless of single or multiple-storey damage conditions, indicating great potential of practical applications. Nevertheless, in all cases the first storey has been judged as potentially damaged, whether or not it is really damaged. This might be attributed to the non-Gaussian characteristics of the input excitations. The white noise processes adopted in the shaking table tests system does not reflect the desired properties of Gaussian due to performance limitations of the hydraulic actuator.

**Keywords:** output-only, stochastic subspace identification, multivariate analysis, system identification, structural damage detection, wireless sensing

## 誌謝

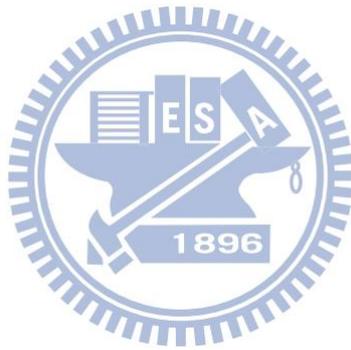
感謝吾師 王彥博教授兩年來的悉心指導。在論文寫作期間，吾師費心的指正及修改，方使本論文得以順利完成。在研究所兩年的期間，讓學生體會到吾師對於學術研究的積極態度及鍥而不捨的精神，實為學生學習的典範。對於吾師的諄諄教誨，在此致上最誠摯的謝意。

在研究實驗上，感謝台灣大學 羅俊雄教授及國家地震工程研究中心 盧恭君博士無私的提供無線感測設備及技術上的協助，方使實驗得以順利進行。而在論文口試期間，承蒙國家地震工程研究中心 林子剛博士、國家地震工程研究中心 盧恭君博士及嘉南藥理科技大學 高清雲教授撥冗指正，並提供寶貴意見，使本論文之內容更加詳實完備，亦在此表達最誠摯的謝意。

在交大的研究生涯中，感謝李建良博士及陳逸軒博士在研究及實驗上的指導；學長智洋、柏霖、連峰及柏翰在研究及生活上的經驗分享。而在這兩年中，很高興遇到同窗夥伴怡廷及學弟明廉，無論是在學業上的一起打拚奮鬥，或是對於共同討厭事物的相互抱怨及調侃，都成為我畢身難忘的回憶。另外也很高興能與同學懷國、恆志、前昱、智緯、幸聰、建翔及芳綺繼大學同學後能繼續當研究所同學，讓枯燥的研究生活因你們的陪伴而變的多采多姿。

最後，衷心的感謝我的家人，因為有你們的支持、鼓勵、關懷與無怨無悔的奉獻，讓我得以一路順利的走過來。謹以本文獻給所有關心我的朋友們，謝謝你們。

謹誌於交通大學工程二館 2012 年 8 月

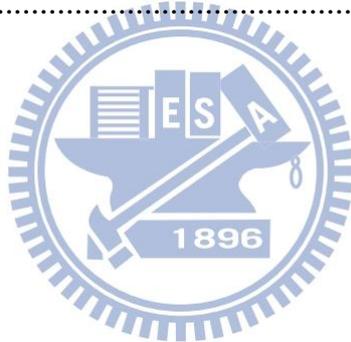


# 目錄

摘要.....	I
Abstract.....	III
誌謝.....	V
目錄.....	VII
表目錄.....	XI
圖目錄.....	XIII
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 論文架構.....	7
第二章 SSI 系統識別分析理論.....	9
2.1 前言.....	9
2.2 隨機預測子空間系統識別(SSI)理論回顧.....	10
2.2.1 狀態空間方程式.....	11
2.2.2 隨機預測狀態方程式(Stochastic State-Space System).....	13
2.2.3 隨機子空間系統識別—協方差法(SSI-COV).....	13
2.2.3.1 隨機狀態系統.....	13
2.2.3.2 隨機狀態空間系統之參數識別.....	15
2.3 卡爾曼濾波模型( The Kalman filter model).....	18
2.4 多變量分析(Multivariate Analysis).....	22
2.4.1 多變量統計分析之概念.....	23
2.4.2 局部最小平方法(Partial Least Squares , PLS).....	25
2.4.3 典型相關分析法(Canonical Correlation Analysis, CCA).....	28

2.4.4 多元迴歸分析法(Multiple Linear Regression , MLR).....	31
2.5 卡爾曼狀態向量之多變量分析.....	36
2.5.1 卡爾曼輸出向量預估 .....	36
2.5.2 透過局部最小平方法(PLS)建立卡爾曼狀態向量 $\hat{\mathbf{z}}(i)$ .....	38
2.5.3 透過典型相關分析法(CCA)建立卡爾曼狀態向量 $\hat{\mathbf{z}}(i)$ .....	39
2.5.4 透過多元迴歸分析法(MLR)建立卡爾曼狀態向量 $\hat{\mathbf{z}}(i)$ .....	41
2.5.5 改良典型相關分析(Enhanced CCA , 簡稱 ECCA).....	42
2.6 隨機狀態空間系統之參數識別.....	44
2.7 萃取系統模態參數.....	50
2.8 數值範例.....	51
第三章 DLV 損傷探測分析之理論與數值驗證.....	61
3.1 前言 .....	61
3.2 DLV 損傷探測理論.....	62
3.2.1 DLV 法之理論回顧 .....	62
3.2.2 狀態空間 DLV 法之理論回顧 .....	65
3.3 結合 SSI 系統識別之損傷探測分析.....	70
第四章 狀態空間 DLV 法之數值模擬驗證.....	73
4.1 前言 .....	73
4.2 五層樓剪力屋架之結構損傷探測.....	73
4.2.1 單一樓層受損情況之診斷分析 .....	74
4.2.2 複數樓層受損情況之診斷分析 .....	78
4.3 結構損傷探測於噪訊中之分析.....	80
4.3.1 單一樓層受損情況之診斷分析 .....	81
4.3.2 複數樓層受損情況之診斷分析 .....	86
4.4 結構損傷探測之敏感度分析.....	89

4.3.1 單一樓層受損情況之診斷分析 .....	89
4.3.2 複數樓層受損情況之診斷分析 .....	97
4.4 小結 .....	101
第五章 無線監測技術於結構損傷探測試驗驗證 .....	165
5.1 前言 .....	165
5.2 試驗設備 .....	165
5.2.1 無線感應器與原有線感應器之比較 .....	168
5.3 DLV 損傷探測分析 .....	169
5.4 小結 .....	177
第六章 結論與建議 .....	225
參考文獻 .....	229





## 表目錄

表 2.1 五層樓結構系統之參數(特徵分析).....	53
表 2.2 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithn=SSI-COV) .....	53
表 2.3 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithn=SSI-PLS).....	53
表 2.4 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithn=SSI-MLR) .....	54
表 2.5 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithn=SSI-CCA).....	54
表 2.6 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithn=SSI-ECCA) .....	54
表 2.7 五層樓結構系統之模態參數誤差( $E_i$ )比較.....	55
表 4.1 五層樓剪力屋架結構參數.....	103
表 4.2 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g) .	104
表 4.3 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g) .....	105
表 4.4 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, NSR=10%) .....	106
表 4.5 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, NSR=20%) .....	107
表 4.6 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, NSR=50%) .....	108
表 4.7 不同系統識別方法結合 DLV 法之損傷探測於噪訊中分析歸納表 .....	109
表 4.8 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, 樓層 斜撐受損 50%) .....	110
表 4.9 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, 樓層 斜撐受損 20%) .....	111
表 4.10 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise,PGA=0.1g, 樓	

層斜撐受損 10%).....	112
表 4.11 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, 樓層斜撐受損 5%).....	113
表 4.12 不同系統識別方法結合 DLV 法之損傷探測敏感度分析歸納表 .	114
表 5.1 五層樓鋼結構之結構參數 .....	179
表 5.2 VSE-15D 規格 .....	179
表 5.3 原有線感應器與無線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果 .....	180
表 5.4 結構損傷偵測試驗分析結果(Input=White noise,PGA=0.1g) .....	181
表 5.5 不同系統識別法結合 DLV 法之損傷探測試驗分析結果歸納表 (Input=White noise,PGA=0.1g).....	182
表 5.6 結構損傷偵測試驗分析結果(Input=El Centro 地震,PGA=0.1g) .....	183
表 5.7 不同系統識別法結合 DLV 法之損傷探測試驗分析結果歸納表 (Input=El Centro 地震,PGA=0.1g) .....	184



## 圖目錄

圖 2.1 子空間向量投影示意圖.....	56
圖 2.2 五層樓二維剪力屋架示意圖 .....	56
圖 2.3 White noise 加速度歷時圖(PGA=0.1g) .....	56
圖 2.4 Mode1 之系統識別誤差比較 .....	57
圖 2.5 Mode2 之系統識別誤差比較 .....	57
圖 2.6 Mode3 之系統識別誤差比較 .....	58
圖 2.7 Mode4 之系統識別誤差比較 .....	58
圖 2.8 Mode5 之系統識別誤差比較 .....	59
圖 3.1 狀態空間 DLV 損傷探測分析之流程.....	72
圖 4.1 五層樓剪力屋架結構模型 .....	115
圖 4.2 White noise 加速度歷時圖(PGA=0.1g) .....	115
圖 4.3 El Centro 加速度歷時圖(PGA=0.1g).....	115
圖 4.4 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV).....	116
圖 4.5 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS).....	117
圖 4.6 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR).....	118
圖 4.7 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA) .....	119
圖 4.8 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA).....	120
圖 4.9 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV) .....	121

圖 4.10 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS).....	122
圖 4.11 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR).....	123
圖 4.12 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA) .....	124
圖 4.13 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA).....	125
圖 4.14 結構健康狀態之各層樓加速度歷時(NSR=10%) .....	126
圖 4.15 結構健康狀態之各層樓加速度歷時(NSR=20%) .....	127
圖 4.16 結構健康狀態之各層樓加速度歷時(NSR=50%) .....	128
圖 4.17 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV, NSR=10%) .....	129
圖 4.18 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS, NSR=10%) .....	130
圖 4.19 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, NSR=10%).....	131
圖 4.20 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, NSR=10%).....	132
圖 4.21 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA, NSR=10%).....	133
圖 4.22 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV, NSR=20%) .....	134
圖 4.23 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS, NSR=20%) .....	135

圖 4.24 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, NSR=20%).....	136
圖 4.25 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, NSR=20%).....	137
圖 4.26 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA, NSR=20%).....	138
圖 4.27 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV, NSR=50%).....	139
圖 4.28 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS, NSR=50%).....	140
圖 4.29 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, NSR=50%).....	141
圖 4.30 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, NSR=50%).....	142
圖 4.31 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA, NSR=50%).....	143
圖 4.32 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 50%).....	144
圖 4.33 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 50%).....	145
圖 4.34 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR,樓層受損 50%).....	146
圖 4.35 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA,樓層受損 50%).....	147
圖 4.36 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g,	

Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 50%).....	148
圖 4.37 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 20%) .....	149
圖 4.38 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 20%) .....	150
圖 4.39 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR,樓層受損 20%).....	151
圖 4.40 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA,樓層受損 20%).....	152
圖 4.41 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 20%).....	153
圖 4.42 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 10%) .....	154
圖 4.43 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 10%) .....	155
圖 4.44 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR,樓層受損 10%).....	156
圖 4.45 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA,樓層受損 10%).....	157
圖 4.46 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 10%).....	158
圖 4.47 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 5%) .....	159
圖 4.48 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 5%) .....	160

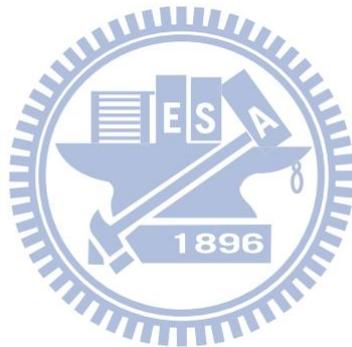
圖 4.49 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR,樓層受損 5%).....	161
圖 4.50 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA,樓層受損 5%).....	162
圖 4.51 結構損傷偵測數值模擬分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 5%).....	163
圖 5.1 交通大學地震模擬振動台尺寸詳圖 .....	185
圖 5.2 油壓致動器.....	186
圖 5.3 MTS407 控制器 .....	186
圖 5.4 五層樓鋼構架示意圖(單位：cm).....	187
圖 5.5 無線感應器(a)VSE-15D (b)NTU-WSU .....	188
圖 5.6 無線感應器與有線感應器之訊號比較圖 (Input=White noise, PGA=0.1g,感應器位於振動台面上).....	188
圖 5.7 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV).....	189
圖 5.8 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS) .....	190
圖 5.9 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR) .....	191
圖 5.10 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA).....	192
圖 5.11 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA) .....	193
圖 5.12 五層樓鋼結構.....	194
圖 5.13 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g,結構未受損) .....	195

圖 5.14 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構未受損)	196
圖 5.15 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 1 樓受損)	197
圖 5.16 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 2 樓受損)	198
圖 5.17 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 3 樓受損)	199
圖 5.18 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 4 樓受損)	200
圖 5.19 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 5 樓受損)	201
圖 5.20 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 1 樓及 3 樓 受損)	202
圖 5.21 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 1 樓及 5 樓 受損)	203
圖 5.22 各層樓加速度歷時 (Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 1 樓、3 樓 及 5 樓受損)	204
圖 5.23 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV)	205
圖 5.24 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS)	206
圖 5.25 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR)	207
圖 5.26 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA)	208

圖 5.27 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA).....	209
圖 5.28 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 1 樓受損).....	210
圖 5.29 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 2 樓受損).....	211
圖 5.30 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 3 樓受損).....	212
圖 5.31 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 4 樓受損).....	213
圖 5.32 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 5 樓受損).....	214
圖 5.33 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 1 樓及 3 樓受損).....	215
圖 5.34 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 1 樓及 5 樓受損).....	216
圖 5.35 各層樓加速度歷時 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 1 樓、3 樓及 5 樓受損).....	217
圖 5.36 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV).....	218
圖 5.37 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS).....	219
圖 5.38 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR).....	220
圖 5.39 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA).....	221

圖 5.40 結構損傷偵測試驗分析結果 (Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA)..... 222

圖 5.41 振動台地表加速度頻譜比較圖 (a)油壓致動器預定給予之擾動 (b) 油壓致動器真實給予之擾動..... 223



# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機與目的

台灣位於環太平洋地震帶，長年受地震問題所困擾，許多結構物往往於地震過程中受損但卻未能即時發現，導致結構毀於後續的地震中，造成無數生命財產的損失。有鑑於此，發展一套在結構受損後能迅速且準確地找出受損位置及評估受損狀態，並予以補強改善，乃維持結構安全之關鍵。因此，結構健康監測(Structural Health Monitoring, SHM)近年來遂成為土木工程領域極受重視的研究課題。結構健康監測之概念為透過感應器擷取結構的動態反應資料，並藉由結構系統識別分析取得結構之系統特性，以作為評估結構損傷之依據。因此，欲實現結構健康監測，須完整結合動態試驗、動態監測、系統識別及損傷探測等技術。

在動態測試上，由於建築結構之規模龐大，人為敲擊與激振試驗難以有效地激發結構主要的振態反應。惟建築結構經由地震所提供之擾動能量，可將其動態行為激發出來，乃結構系統識別分析最可靠的資料來源，並有助於進一步的損傷探測分析。因此本研究將以震測資料為基礎發展具體可行之結構損傷探測技術。動態監測需透過感應器方可實行，傳統之有線感應器受限於環境因素，不利於大型結構之動態反應監測，無線監測系統之應用乃實現結構健康監測技術之必然發展趨勢。本研究之振動台試驗將嘗試以無線感應傳輸系統作為動態反應監測與傳輸之工具，以進一步了解其未來於結構健康監測實務應用之潛力。系統識別可助吾人了解結構系統之特性，惟因應現實中可能無法獲取輸入擾動之情況，發展適用於唯輸出(Output-Only) 系統之識別方法乃結構健康監測技術不可或缺之一環。本

研究將探討 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等之適用性。在損傷探測方面，須選擇對於結構損傷有高度敏感性，不須仰賴高頻模態資訊，且能由全域反應(global response)定位出局部破壞(local damages)的方法。本研究將整合滿足於前述條件之方法，發展具備嚴謹之學理基礎與實用價值之結構損傷探測技術。

## 1.2 文獻回顧

系統識別分析為結構健康診斷分析之必要的前置作業，其目的在於透過結構之動態反應萃取結構系統之參數。系統識別可依其識別對象分為參數(parametric)識別法及非參數(non-parametric)識別法。參數識別法為識別出具有物理意義之系統參數，如頻率、模態等；非參數識別法則以適當之數學模型描述輸出與輸入資料之關係，系統識別之直接目標乃在於求取該數學模型之係數，從而推算出結構之物理系統參數。

Kalman【1】及 Bucy【2】於 60 年代發展了卡氏過濾器(Kalman filter)，其概念乃以估測誤差之最小平方為準則，由前一時刻的預測狀態及當前時刻的觀測值，預測出最符合真實系統狀態，以遞迴模式(Recursive Model)來呈現。林威志【3】藉由推廣卡爾曼過濾器，進行結構之振態參數識別。他先以數值模擬一五層樓扭轉耦合結構受 El Centro 地震之反應，根據其反應進行系統識別，並以中興大學土木環工大樓及台電大樓之實測地震反應資料進行振態識別，考慮了單向擾動及雙向擾動之振態參數識別模式，並從中探討結構之扭轉耦合效應。江奇融【4】藉由遞迴最小平方法結合卡爾曼濾波器識別結構之頻率、阻尼比等參數。他以 ARX 模型為基礎，發展了結合遞迴最小平方法之 RARX 模型，及結合遞迴最小平方法與卡爾曼

濾波器之 RARX-KF 模型，並對此三種模型進行單一輸入-單一輸出(SISO)之動力分析，其識別結果顯示在系統階數相同時 RARX-KF 模型優於其他兩種模型。實際案例為對國家地震中心之三層樓構架及台東消防分隊大樓進行系統識別。Feng Gao 及 Yong Lu【5】在時域分析下，將卡爾曼過濾器引入 ARX 模型，於考慮有雜訊之情況下進行結構之破壞診斷，並以一兩層樓混凝土結構之振動台實驗驗證其可行性。

Juang【6】於 1997 年提出信息矩陣之系統辨識理論(System Realization using Information Matrix；簡稱 SRIM)，其概念為藉由輸出與輸入量測資料間之相關性(correlation)組成信息矩陣，並利用奇異值分解萃取出系統之狀態空間參數，可針對多重輸入-多重輸出(MIMO)系統進行分析，適用於較複雜的結構模型。簡紹純【7】以 SRIM 針對三層樓鋼結構及中央百式大樓進行系統識別。楊淳皓【8】則藉由三層樓鋼結構之振動台試驗，及台東消防分隊大樓之實測資料應用 SRIM 技術作系統識別，並透過計算損壞指標進行結構損壞評估。

隨機子空間識別法(Stochastic Subspace Identification, SSI)之發展始於 Van Overschee 與 De Moor【9】於 1996 年提出的考慮含有雜訊之隨機子空間(Stochastic Subspace)之理論。SSI 依方法不同可分為協方差驅動(covariance-driven)及資料驅動(data-driven)兩種模式，B. Peeters 和 G. D. Roeck【10】詳細說明了此二種方法之差異。其中，SSI-COV 為透過輸出之協方差組成 Toeplitz 矩陣，藉由對 Toeplitz 矩陣作奇異值分解求得隱含系統參數之觀測矩陣。SSI-DATA 導入了卡爾曼濾波器及空間向量投影之觀念於其中，藉由將未來之輸出向量投射至過去之輸出向量空間，得到觀測矩陣及卡爾曼狀態向量乘積之投影向量，對此投影向量作奇異值分解求得觀測矩陣及卡爾曼狀態向量。劉奕成【11】將 SSI-DATA 及 SSI-COV 應用至廣州塔之系統識別並進行比較，其結果顯示 SSI-COV 較 SSI-DATA 更

能識別出較多模態及頻率，但由於協方差矩陣十分龐大，需花費較多的計算時間。另外，劉奕成也以奇異譜分析法(Singular Spectrum Analysis, SSA)結合 SSI-COV 發展一改良法，稱之為 SSA-SSI-COV，此方法有助於決定系統識別之系統最佳維度。Virote 與 Tharach 【12】藉由 SSI-DATA 法對橋梁進行顫振導數(flutter derivatives)識別，他們利用薄板模型及真實橋梁 Industrial-Ring-Road Bridge 之縮尺模型進行風洞試驗，以在平滑流場(smooth flow)及紊流場(turbulence flow)兩種情況中所得之振動反應進行分析。其研究結果顯示 SSI-DATA 可有效識別出橋梁之顫振導數。

龐大的結構輸出量測資料會造成輸出向量所組成的矩陣維度(dimensionality)過高，而使分析耗時且影響分析精確性。有鑑於此，透過系統降階(dimensionality reduction)的手段不但可節省計算時間，並能提高精度。Arun 及 Kung 【13】將多變量分析(Multivariate Analysis)應用至隨機過程之分析，其概念為透過找尋原變量之線性組合得到一降階之新變量，此新變量即包含了原變量主要之訊息。多變量分析法因代價函數之不同，而發展出包括局部最小平方法(Partial Least Squares, PLS)、典型相關分析法(Canonical Correlation Analysis, CCA)及多元迴歸分析法(Multiple Linear Regression, MLR)等。PLS 法的目的在找尋滿足獨立變量與相依變量間之協方差(Covariance)最大化之線性組合關係；CCA 法的目的在找尋滿足獨立變量與相依變量間有最大相關性(Correlation)之線性組合關係；而 MLR 即找尋一線性組合關係使得獨立變量以線性迴歸方式預測其相依變量之誤差最小化。為能將變量間之關係統一表示成一個特定之模式，Borga 【14】藉由廣義特徵值問題來描述變量間之關係將三種方法之模式統一成單一之形式，並與雷利商數(Rayleigh quotient)的概念對照證明其數學上為相同問題。Hong 【16】介紹了將多變量分析法導入至 SSI-DATA 中，藉由將過去、未來輸出向量以三種多變量分析法(PLS、CCA 及 MLR)求得一降階之

新向量，此向量即為卡爾曼狀態向量。有鑒於 CCA 對於噪音特別敏感【15】，Hong【16】遂提出了 Enhanced CCA 法加以改善，並於實例上應用至四層樓鋼構架實驗及美國 New Carquinez Bridge/Alfred Zampa 紀念橋梁之識別，且其識別之結果較於 Conet 等人【17】於 2008 年之結果，能識別出更多的模態。

結構損傷探測技術通常是藉由結構於受損前和受損後，其結構系統參數之變化，作為結構損傷的判斷依據。結構之勁度矩陣應是與結構受損最直接相關之物理參數，惟勁度矩陣易受高頻模態之影響，而高頻模態卻不易從量測之振動反應萃取而出，間接影響勁度矩陣之精確性。相較之下，結構之柔度矩陣對於高頻模態較不敏感，只需低階模態即可建立。因此，以柔度矩陣為基礎之損傷探測技術有較佳之發展性。Bernal【18】於 2002 年提出損傷定位向量法(Method of Damage Locationing Vector, 簡稱 DLV 法)，其概念係以結構於受損前、後之柔度差異矩陣為基礎所發展之損傷探測方法，並訂定一指標作為受損偵測之依據，且該研究以針對平面桁架結構進行分析為例，驗證 DLV 法之可行性。Duan【19】等人將比例柔度矩陣(proportional flexibility matrix, PFM)之理論導入 DLV 法中，以建立 PFM 取代 DLV 中之柔度矩陣，並以多自由度之彈簧質塊系統與平面桁架結構這兩個數值範例，說明其理論之可行性。林裕家【20】以 DLV 法進行數值模擬及針對實尺寸之三層樓鋼構架進行全域性損害檢測。涂哲維【21】以 ARX 結合 DLV 法針對抗彎構架進行數值模擬分析，並以五層樓鋼構架之振動台實驗，驗證其應用至抗彎構架之損傷探測確屬可行。陳逸軒【22】探討了 DLV 於不足觀測之條件下進行分析，並藉由模態向量間之正交性重建出結構系統主要之模態特徵向量，作為建立柔度矩陣及損傷探測分析之基礎，亦透過數值模擬及振動台實驗進行驗證。Bernal【23】於 2006 年提出在狀態空間(State-space)系統下建立柔度矩陣，並以此為基礎發展出有

別於之前的 DLV 法，本文稱為狀態空間 DLV 法，可藉由系統識別技術得到等效之系統參數進行損傷探測分析，有助於減少建立柔度矩陣時因質量矩陣或模態向量不準確所造成之誤差。王智洋【24】與吳柏霖【25】以 SRIM 結合狀態空間 DLV 法分別進行剪力構架及扭轉耦合結構之損傷探測分析，以五層樓鋼架之振動台式驗進行驗證。謝柏翰【26】結合 SRIM 系統識別分析與狀態空間 DLV 法進行扭轉耦合結構之損傷探測分析，已能從偵測樓層破壞之層次推展至受損桿件(柱)之定位。

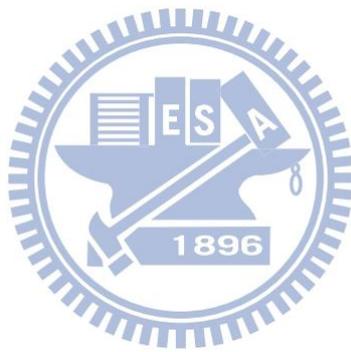
隨著結構健康診斷技術的發展，對於感應器之軟硬體性能要求也越來越高。傳統之有線感應器受限於環境因素，不利於大規模結構之動態反應監測，無線監測系統之應用乃實現結構健康監測技術之必然發展趨勢。傳統的有線感應及傳輸系統已無法滿足需求，智慧型無線感應器之技術發展也應運而生【27】。智慧型無線感應器係由多個子系統整合而成，其中包括感應端、計算核心及無線通訊介面等。Straser 及 Kiremidjian【28】於 1998 年發展了結合微控制器器(micro-controller)及無線電技術的無線組合式監測系統(wireless modular monitoring system, 簡稱 WiMMS)。Wang 等人【29】於 2007 年設計了更完善之 WiMMS，於硬體及軟體上皆有改進，且可同時執行多項功能(包括處理、轉換訊號及同時進行取樣)。盧恭君【30】以 Wang 等人之技術為基礎，發展了新的無線感測單元 NTU-WSU，並將這套智慧型感測系統於實例上應用至集鹿橋及牛鬥橋之野外結構微振動反應量測，取得良好之結果。

本研究將發展在隨機狀態空間系統架構之下，唯輸出結構之系統識別與損傷探測方法。本文採用 Hong【16】所提出之多變量分析法在唯輸出結構之系統識別分析，結合狀態空間 DLV 法進行結構破壞偵測。此外，本研究並規劃一系列的振動台試驗，針對一座單跨五層樓鋼結構模型進行地震模擬試驗，藉由拆除部分斜撐以模擬樓層之損傷狀況，進行結構損傷

探測分析。在結構動態反應之監測方面，則採用盧恭君【30】所發展之 NTU-WSU 智慧型感測系統，嘗試以無線感應傳輸系統作為動態反應監測與傳輸之工具，以探討無線感測(wireless sensing)未來於結構健康監測實務應用之潛力。

### 1.3 論文架構

本文共分六章，茲說明其內容如下：第一章為緒論，包括研究動機與目的、文獻回顧及論文架構。第二章為隨機預測狀態空間(Stochastic State-Space)系統識別方法之理論推導，包括 SSI-COV、卡爾曼濾波器及包含(補充...)等考量不同代價函數或其修正之多變量分析方法，並介紹萃取系統模態參數之過程。第三章為狀態空間 DLV 損傷探測分析之原理與應用。第四章以數值模擬驗證各種隨機預測狀態空間系統識別方法結合狀態空間 DLV 損傷探測法之可行性，透過 ETABS 建立結構模型，並給予不同之破壞條件進行分析。第五章以振動台試驗針對一座五層樓鋼結構模型在不同受損條件下進行地震模擬試驗與損傷探測分析，以驗證狀態空間 DLV 法應用於唯輸出結構之損傷探測之可行性。第六章為結論與建議。



## 第二章 SSI 系統識別分析理論

### 2.1 前言

系統識別技術是藉由結構物之動態反應，量測其輸出反應以求取其結構特性參數(如：自然頻率、振態或是勁度等)，這些參數有助於吾人進一步預估結構物之健康狀況。實務上，有許多情況吾人並無法有效取得外部輸入擾動的資訊(如：汽車或風力對於橋梁之擾動、洪水對橋墩之擾動等)，因此凡需提供外部輸入擾動資訊之系統識別方法並不適用。在此情況，考慮唯輸出(output-only)條件的系統識別法便因應而生。

Van Overschee 和 De Moor【9】於 1996 年提出隨機子空間識別法(Stochastic Subspace Identification)之理論。其主要概念為考慮過程(process)及量測(measurement)噪訊為零均值(zero-mean)的前提下，由狀態向量與輸出向量自身及相互間之協方差(covariance)，推導得知系統之  $A$ 、 $C$  矩陣即隱含於輸出向量之協方差矩陣(output covariance matrix)中。再利用過去(past)及未來(future)之輸出量測向量所組成的 Hankel 矩陣便可建立由輸出向量之協方差矩陣所組成的 Toeplitz 矩陣，進而萃取出系統之  $A$ 、 $C$  矩陣，並用於後續之結構損傷探測分析。

Hong【16】於 2010 年所發表的博士論文中，介紹了將卡爾曼濾波器(Kalman filter)及多變量分析(Multivariate analysis)應用至 SSI 技術的方法。卡爾曼濾波器為一有效降低訊號中噪訊影響之技術，其概念為透過前一時刻之觀測值以遞迴型式(recursive manner)預測系統當前時刻之狀態。由於在量測過程中若受到噪訊的影響，使得所量測之訊號中也會含有部分噪訊，而並非完全真實之量測值，利用卡爾曼濾波器吾人便可由某時刻前之量測值，預測出下一時刻狀態之最佳估計值，藉以減少噪訊之影響。

若結構之量測輸出向量所組成的矩陣維度(dimensionality)過高時，不僅分析上耗時且會影響精確度，透過系統降階(dimensionality reduction)的手段往往可節省所需計算時間並提高精確度。多變量分析之概念在於定義一代價函數(cost function)藉以描述變量間之關係，依據所描述之關係不同而發展出三種方法，分別為局部最小平方法(Partial least squares, PLS)、典型相關分析法(Canonical correlation analysis, CCA)及多元迴歸分析法(Multiple linear regression, MLR)。透過將代價函數最大化可得出原變量之主成分(principal component)，此主成分係由原變量經線性組合而成，它包含了原變量之所有特性，因而形成等效之降階系統。此外，Hong 更以三種方法中的典型相關分析法為基礎，提出了改良典型相關分析法(Enhanced CCA)以排除非高斯雜訊(non-Gaussian noise)之影響，提升識別分析結果之精度。這項技術並應用於四層樓鋼構架實驗及美國 New Carquinez Bridge/Alfred Zampa 紀念橋梁之結構系統識別，取得相當不錯之結果。

本章將介紹 SSI 之理論推導，以及如何將卡爾曼濾波器及多變量分析(Hong, 2010)應用至 SSI 分析中，藉以求得系統未知之  $A$ 、 $C$  矩陣，進而求取出系統之參數。

## 2.2 隨機預測子空間系統識別(SSI)理論回顧

隨機預測子空間系統識別法(Stochastic Subspace Identification, 簡稱 SSI)為近年來常用於處理唯輸出系統的參數識別方法。不同於確定性之狀態空間模型(Deterministic State-Space Model)考慮了輸入擾動函數，SSI 法係一種以隨機狀態空間(Stochastic State-Space System)為基本架構—將未知的輸入擾動視為一穩態隨機過程(stationary random process)—所建立的系統識別方法。本章節將回顧狀態空間系統以及 SSI 的相關理論發展。

## 2.2.1 狀態空間方程式

考慮一  $n$  自由度之結構系統，在受外力擾動作用下，其運動方程式可以二階常微分方程表示如下：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{\Xi}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}\mathbf{u}(t) \quad (2.1)$$

其中， $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{\Xi}$  及  $\mathbf{K}$  分別為  $\mathbf{R}^{n \times n}$  之質量、阻尼及勁度矩陣；

$\ddot{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{x}}(t)$  及  $\mathbf{x}(t)$  分別為  $\mathbf{R}^{n \times 1}$  之結構加速度、速度及位移向量；

$\mathbf{u}(t)$  為  $\mathbf{R}^{r \times 1}$  的外力向量， $r$  為外力輸入數量；

$\mathbf{E}$  為  $\mathbf{R}^{n \times r}$  的外力配置矩陣，其矩陣元素取決於外力擾動之分佈。

式(2.1)可表示成狀態空間系統如下：

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (2.2)$$

其中，

$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times 1}$  為連續時間狀態向量；

$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Xi} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  為連續時間系統矩陣；

$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times r}$  為連續時間輸入影響矩陣。

考慮輸出向量  $\mathbf{y}(t)$  係由  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{x}}(t)$  及  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  所組成，亦即：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_D \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_V \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_A \ddot{\mathbf{x}}(t) \quad (2.3)$$

其中， $\mathbf{C}_D$ 、 $\mathbf{C}_V$  及  $\mathbf{C}_A$  分別為  $\mathbf{R}^{m \times n}$  之位移、速度及加速度輸出影響矩陣。

由式(2.1)解得  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  並代入式(2.3)可得：

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_D - \mathbf{C}_A \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{C}_V - \mathbf{C}_A \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{C}_A \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{u}(t) \quad (2.4)$$

或簡化為：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cz}(t) + \mathbf{Du}(t) \quad (2.5)$$

其中， $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  為輸出狀態向量， $m$  為輸出狀態之維度；

$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$  輸出狀態影響矩陣；

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  為直接傳輸矩陣。

由於實際量測之結構動態反應資料為離散型式，故須將連續時間域之狀態空間方程式轉換為離散時間系統。將第  $k$  瞬時對應之時間  $k\Delta t$  ( $\Delta t$  為取樣週期) 簡化表示為離散時間  $k$ ，且考慮輸入擾動為零階變化(zero-order hold)，則離散時間狀態空間方程式可表示成：

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{Az}(k) + \mathbf{Bu}(k) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cz}(k) + \mathbf{Du}(k) \quad (2.7)$$

其中， $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$  為第  $k$  瞬時之離散時間狀態向量；

$\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  為第  $k$  瞬時之離散時間外力輸入向量；

$\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  為第  $k$  瞬時之離散時間輸出觀測向量；

$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  為離散時間系統矩陣；

$\mathbf{B} = \mathbf{A}_c^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{2n \times r}$  為離散時間輸入影響矩陣。

若取樣頻率高於最大等效自然頻率之兩倍時，則連續時間系統與離散時間系統參數可相互轉換如下【31】：

$$\mathbf{A}_c = \frac{\ln(\mathbf{A})}{\Delta t} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_c^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{B}_c, \quad (2.9)$$

## 2.2.2 隨機預測狀態方程式(Stochastic State-Space System)

茲考慮唯輸出(output-only)的情況。由於狀態方程式中之輸入 $\mathbf{u}(k)$ 無法得知，僅將其視為一包含輸入擾動及噪訊在內之穩態隨機過程，並考慮量測噪訊的存在，則式(2.6)與(2.7)可改寫為隨機預測狀態系統如下：

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{z}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (2.11)$$

其中， $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$  為隨機過程噪訊(process noise)，用以考量未知輸入擾動之影響； $\mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  為量測噪訊(measurement noise)，用以考量輸出狀態之量測誤差。 $\mathbf{w}(k)$  與  $\mathbf{v}(k)$  為未知，在此吾人假設其為零均值(zero-mean)之穩態隨機訊號，亦即高斯白噪訊(Gaussian white noise)。 $\mathbf{w}(k)$  與  $\mathbf{v}(k)$  之協方差矩陣(covariance matrices)可表示成：

$$\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{w}(k+\tau) \\ \mathbf{v}(k+\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T(k) & \mathbf{v}^T(k) \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ww}(\tau) & \mathbf{R}_{wv}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vw}^T(\tau) & \mathbf{R}_{vv}(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

其中， $\mathbf{R}_{ww}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{w}(k+\tau) \mathbf{w}^T(k) = \mathbb{E}[\mathbf{w}(k+\tau) \mathbf{w}^T(k)] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  ；

$$\mathbf{R}_{wv}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{w}(k+\tau) \mathbf{v}^T(k) = \mathbb{E}[\mathbf{w}(k+\tau) \mathbf{v}^T(k)] \in \mathbb{R}^{2n \times m} \text{ ；}$$

$$\mathbf{R}_{vv}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}(k+\tau) \mathbf{v}^T(k) = \mathbb{E}[\mathbf{v}(k+\tau) \mathbf{v}^T(k)] \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ 。}$$

## 2.2.3 隨機子空間系統識別—協方差法(SSI-COV)

### 2.2.3.1 隨機狀態系統

根據 2.2.2 節之假設— $\mathbf{w}(k)$  及  $\mathbf{v}(k)$  為零均值之高斯白噪訊，其協方差矩陣如式(2.12)所示。茲考慮第  $k$  瞬時之噪訊向量  $\mathbf{w}(k)$  及  $\mathbf{v}(k)$  與狀態向量

$\mathbf{z}(k)$ 之間無相關性，且與第  $s$  時刻 ( $s < k$ ) 的狀態向量  $\mathbf{z}(s)$  及輸出向量  $\mathbf{y}(k)$  之間無相關性，亦即：

$$E[\mathbf{w}(k+\tau)\mathbf{z}(k)^T] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}(k+\tau)\mathbf{z}(k)^T] = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

$$E[\mathbf{w}(k+\tau)\mathbf{y}(k)^T] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}(k+\tau)\mathbf{y}(k)^T] = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

狀態向量  $\mathbf{z}(k)$  之自協方差矩陣(auto-covariance matrix)  $\mathbf{R}_{zz}(0)$  定義如下：

$$\mathbf{R}_{zz}(0) = E[\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{zz}(0)\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ww}(0) \quad (2.15)$$

輸出向量  $\mathbf{y}(k)$  與狀態向量  $\mathbf{z}(k+1)$  之協方差矩陣  $\mathbf{R}_{zy}(1)$  定義如下：

$$\mathbf{R}_{zy}(1) = E[\mathbf{z}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{zz}(0)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{wv}(1) \quad (2.16)$$

輸出向量之協方差矩陣 (Output Covariance Matrix) 定義如下：

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = E[\mathbf{y}(k+\tau)\mathbf{y}^T(k)] \quad (2.17)$$

其中， $\tau$  代表任意之時間延遲步幅。

(1) 當  $\tau = 0$  時，

$$\mathbf{R}_{yy}(0) = E[\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{C}\mathbf{R}_{zz}(0)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{vv}(0) \quad (2.18)$$

(2) 當  $\tau = 1$  時，

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}(1) &= E[\mathbf{y}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] \\ &= E[\{\mathbf{C}\mathbf{z}(k+1) + \mathbf{v}(k+1)\}\mathbf{y}^T(k)] \\ &= \mathbf{C}\mathbf{R}_{zy}(1) \end{aligned} \quad (2.19)$$

(3) 當  $\tau = 2, 3, \dots$  時，輸出向量  $\mathbf{y}(k+\tau)$  可寫為

$$\mathbf{y}(k+\tau) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{\tau-1}\mathbf{z}(k+1) + \sum_{j=1}^{\tau-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{w}(k+\tau-j) + \mathbf{v}(k+\tau) \quad (2.20)$$

則式(2.17)可改寫為

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{yy}(\tau) &= E[\mathbf{y}(k+\tau)\mathbf{y}^T(k)] \\
&= E[\mathbf{C}\mathbf{A}^{\tau-1}\mathbf{z}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] + \sum_{j=1}^{\tau-1} E[\mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{w}(k+\tau-j)\mathbf{y}^T(k)] + E[\mathbf{v}(k+\tau)\mathbf{y}^T(k)] \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}^{\tau-1}\mathbf{R}_{zy}(1)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

觀察式(2.21)可知，輸出向量  $\mathbf{y}$  之協方差矩陣  $\mathbf{R}_{yy}(\tau)$  為系統矩陣  $\mathbf{A}$  與輸出影響矩陣  $\mathbf{C}$  之函數，具備馬可夫參數 (Markov parameters) 之型式。

### 2.2.3.2 隨機狀態空間系統之參數識別

考慮  $m$  個輸出量測點，其中每個輸出量測點中各有  $N$  筆資料，將其輸出量測向量依時序推移一個步幅由左而右排成  $j$  行，同時亦由上而下排成  $2i$  列得到 Hankel 矩陣如下：

$$\mathbf{Y}_{0|2i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \dots & \mathbf{y}(j-1) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \dots & \mathbf{y}(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(i-1) & \mathbf{y}(i) & \dots & \mathbf{y}(i+j-2) \\ \mathbf{y}(i) & \mathbf{y}(i+1) & \dots & \mathbf{y}(i+j-1) \\ \mathbf{y}(i+1) & \mathbf{y}(i+2) & \dots & \mathbf{y}(i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(2i-1) & \mathbf{y}(2i) & \dots & \mathbf{y}(2i+j-2) \end{bmatrix}_{2mi \times j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|i-1} \\ \mathbf{Y}_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

其中，下標  $(0|2i-1)$  表示輸出資料之初始之時間點及結束時間點， $\mathbf{Y}_p$  與  $\mathbf{Y}_f$  分別表示 Hankel 矩陣首行第  $i$  瞬時之前(不含)及未來(含)之量測資料所構成之輸出矩陣，下標  $p$  及  $f$  分別表示過去(past)及未來(future)。

由於 Hankel 矩陣元素中之時序由  $0$  至  $2i+j-1$  止共有  $N$  筆資料，因此  $j=N-2i+1$ 。理論上為達統計分析結果之收斂性， $j \rightarrow \infty$ ，相當於  $N \rightarrow \infty$ 。實作上則  $N$  值取愈大愈好； $i$  則為分析者可自行選擇之參數，惟至少應滿

足決定系統矩陣維度(2n)之所需，即  $mi \geq 2n$  或  $i \geq 2n/m$  之最小整數。

茲定義 Toeplitz 矩陣 ( $\mathbf{T}$ ) 如下：

$$\mathbf{T} = \frac{1}{N} \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(i) & \mathbf{R}_{yy}(i-1) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(2) & \mathbf{R}_{yy}(1) \\ \mathbf{R}_{yy}(i+1) & \mathbf{R}_{yy}(i) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(3) & \mathbf{R}_{yy}(2) \\ \mathbf{R}_{yy}(i+2) & \mathbf{R}_{yy}(i+1) & \ddots & \mathbf{R}_{yy}(4) & \mathbf{R}_{yy}(3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_{yy}(2i-1) & \mathbf{R}_{yy}(2i-2) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(i+1) & \mathbf{R}_{yy}(i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times mi} \quad (2.23)$$

令式(2.21)之  $\tau=i$  代入式(2.23)可得

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{CA}^{i-2} \mathbf{R}_{zy}(1) & \cdots & \mathbf{CA} \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{C} \mathbf{R}_{zy}(1) \\ \mathbf{CA}^i \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{R}_{zy}(1) & \cdots & \mathbf{CA}^2 \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{CA} \mathbf{R}_{zy}(1) \\ \mathbf{CA}^{i+1} \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{CA}^i \mathbf{R}_{zy}(1) & \cdots & \mathbf{CA}^3 \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{CA}^2 \mathbf{R}_{zy}(1) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{2i-2} \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{CA}^{2i-3} \mathbf{R}_{zy}(1) & \cdots & \mathbf{CA}^i \mathbf{R}_{zy}(1) & \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{R}_{zy}(1) \end{bmatrix} = \mathbf{O}_i \mathbf{\Gamma}_i \quad (2.24)$$

其中，

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times 2n} \quad (2.25)$$

為可觀測矩陣 (Observability Matrix)，

$$\mathbf{\Gamma}_i = (\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{R}_{zy}(1) \quad \mathbf{A}^{i-2} \mathbf{R}_{zy}(1) \quad \mathbf{A}^{i-3} \mathbf{R}_{zy}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{zy}(1)) \in \mathbb{R}^{2n \times mi} \quad (2.26)$$

為可控制矩陣 (Controllability Matrix)。

唯有  $\mathbf{O}_i$  和  $\mathbf{\Gamma}_i$  的秩(rank)等於系統階數(2n)時，該系統才為可觀測

(Observable) 與可控制 (Controllable)。

對  $\mathbf{T}$  作奇異值分解，則

$$\mathbf{T} = \mathbf{USV}^T = [\mathbf{U}_n \quad \mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} [\mathbf{V}_n \quad \mathbf{V}_0]^T = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T \quad (2.27)$$

其中， $\mathbf{U}_n \in \mathbb{R}^{mi \times 2n}$  為  $\mathbf{T}\mathbf{T}^T$  之非零特徵值(non-zero eigenvalues)所對應之左側單位特徵向量； $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}^{mi \times n_0}$  為  $\mathbf{T}\mathbf{T}^T$  之奇異值(singular values)所對應之左側單位特徵向量， $n_0 = mi - 2n$ ； $\mathbf{S}_n \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  為  $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$  之非零特徵值所組成之對角矩陣； $\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$  為  $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$  之奇異值所組成之對角矩陣； $\mathbf{V}_n \in \mathbb{R}^{mi \times 2n}$  為  $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量； $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{R}^{mi \times n_0}$  為  $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$  之奇異值所對應之右側單位特徵向量。比較式(2.24)、(2.25)、(2.26)及(2.27)，可得

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \quad (2.29)$$

由上式可知，可觀測矩陣  $\mathbf{O}_i$  可由 Toeplitz 矩陣  $\mathbf{T}$  之奇異值分解求得。接著將進一步說明如何由  $\mathbf{O}_i$  矩陣萃取出系統矩陣  $\mathbf{A}$  與輸出影響矩陣  $\mathbf{C}$ 。

系統矩陣  $\mathbf{A}$  與輸出狀態影響矩陣  $\mathbf{C}$  之萃取觀察式(2.25)可發現，可觀測矩陣  $\mathbf{O}_i$  之前  $m$  列即為輸出影響矩陣  $\mathbf{C}$ ，亦即

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}_i(1:m,:) \quad (2.30)$$

另，觀察式(2.28)可知，可推測矩陣  $\mathbf{\Gamma}_i$  之最後  $m$  行即為  $\mathbf{R}_{zy}(1)$  矩陣，亦即

$$\mathbf{R}_{zy}(1) = \mathbf{\Gamma}_i(:, m(i-1)+1:mi) \quad (2.31)$$

此外，

$$\mathbf{O}_i(m+1:mi,:) = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_i(1:(i-1)m,:) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

其中， $\mathbf{O}_i(m+1:mi,:)$  代表第  $m+1$  至  $mi$  列之所有行向量所組成之矩陣；

$\mathbf{O}_i(1:(i-1)m,:)$  代表第 1 至  $(i-1)m$  列之所有行向量所組成之矩陣。

式(2.32)可進一步整理為

$$\mathbf{O}_i(m+1:mi,:) = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-2} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{O}_i[1:m(i-1),:] \mathbf{A} \quad (2.33)$$

由上式即可求得  $\mathbf{A}$  矩陣如下：

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_i^*(1:(i-1)m,:) \mathbf{O}_i(m+1:im,:) \quad (2.34)$$

其中， $\mathbf{O}_i^* = [\mathbf{O}_i^T(1:(i-1)m,:) \mathbf{O}_i(1:(i-1)m,:)]^{-1} \mathbf{O}_i^T(1:(i-1)m,:) \in \mathbb{R}^{2n \times (i-1)m}$  為  $\mathbf{O}_i$  之擬逆 (pseudo-inverse) 矩陣。

上述過程說明 SSI 法係由已知足夠樣本數(N)之輸出訊號組成 Hankel 矩陣，由其中之  $\mathbf{Y}_p$  與  $\mathbf{Y}_f$  建立 Toeplitz 矩陣( $\mathbf{T}$ )，經 SVD 分解後得到  $\mathbf{O}_i$ ，繼而萃取出系統矩陣  $\mathbf{A}$  與輸出影響矩陣  $\mathbf{C}$ 。

## 2.3 卡爾曼濾波模型 (The Kalman filter model)

卡爾曼濾波模型的概念為考量存在量測噪訊的情況下，透過前一時刻之觀測值以遞迴型式(recursive manner)預測出系統當前時刻之狀態。

將式(2.10)及(2.11)之隨機狀態方程式重複如下：

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{z}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (2.11)$$

茲將系統中第  $k+1$  瞬間的狀態估計值表示成：

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{y}(k) \quad (2.35)$$

其中， $\hat{\mathbf{z}}(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  為第  $k$  瞬時的狀態估計值； $\mathbf{F}(k) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 、 $\mathbf{K}(k) \in \mathbb{R}^{2n \times m}$  皆為待定之時變性(time-variant)矩陣，可由狀態估計誤差指標之最小化求得。

茲定義狀態估計值  $\hat{\mathbf{z}}(k+1)$  與實際值  $\mathbf{z}(k+1)$  之間的誤差如下：

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1) \quad (2.36)$$

令  $E[\mathbf{e}(k)] = \mathbf{0}$ ，並將誤差平方之期望值最小化，亦即  $\min E[\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)]$ ，以期得到最佳之狀態估計值。將式(2.10)、(2.11)及(2.35)代入式(2.36)可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(k) + \mathbf{w}(k) - \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{K}(k)[\mathbf{C}\mathbf{z}(k) + \mathbf{v}(k)] \\ &= [\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{e}(k) + [\mathbf{A} - \mathbf{F}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\hat{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{v}(k) + \mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (2.37)$$

如先前之假設，考慮噪訊  $\mathbf{w}(k)$  與  $\mathbf{v}(k)$  為零均值(zero-mean)，即  $E[\mathbf{v}(k)] = E[\mathbf{w}(k)] = \mathbf{0}$ ，則對式(2.37)取期望值可得：

$$E[\mathbf{e}(k+1)] = (\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C})E[\mathbf{e}(k)] + (\mathbf{A} - \mathbf{F}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C})E[\hat{\mathbf{z}}(k)] \quad (2.38)$$

若欲  $E[\mathbf{e}(k+1)] = \mathbf{0}$ ，則必須滿足下列之條件：

$$\mathbf{F}(k) = \mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C} \quad (2.39)$$

及

$$\hat{\mathbf{z}}(0) = E[\mathbf{z}(0)] \quad (2.40)$$

其中式(2.40)是為了保證  $E[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{0}$ ，使得

$$E[\mathbf{e}(k+1)] = \{\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\}\{\mathbf{A} - \mathbf{K}(k-1)\mathbf{C}\}\cdots\{\mathbf{A} - \mathbf{K}(0)\mathbf{C}\}E[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{0}$$

為了求得能將狀態估計誤差最小化的  $\mathbf{K}(k)$ ，茲定義誤差協方差矩陣(error covariance matrix)如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(k+1) &= \mathbb{E}[\mathbf{e}(k+1)\mathbf{e}^T(k+1)] \\
&= \{\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\}\mathbf{P}(k)\{\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\}^T + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}_{vv}(0)\mathbf{K}^T(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{R}_{vw}(0) \\
&\quad - \mathbf{R}_{wv}(0)\mathbf{K}^T(k) + \mathbf{R}_{ww}(0)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

欲求將  $\mathbf{P}(k+1)$  最小化的  $\mathbf{K}(k)$ ，可將式(2.41)對  $\mathbf{K}(k)$  取偏微分並令其為  $\mathbf{0}$ ，亦即：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}(k+1)}{\partial \mathbf{K}(k)} &= -\{\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\}\{\mathbf{P}(k) + \mathbf{P}^T(k)\}\mathbf{C}^T + \mathbf{K}(k)\{\mathbf{R}_{vv}(0) + \mathbf{R}_{vv}^T(0)\} \\
&\quad - \{\mathbf{R}_{wv}(0) + \mathbf{R}_{vw}^T(0)\} \\
&= -2\{\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T + 2\mathbf{K}(k)\mathbf{R}_{vv}(0) - 2\mathbf{R}_{wv}(0) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

上式中考慮了  $\mathbf{P}(k)$ 、 $\mathbf{R}_{vv}(0)$  及  $\mathbf{R}_{wv}(0)$  等協方差矩陣之對稱性。由上式可解出

$$\mathbf{K}(k) = \{\mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{wv}(0)\}\{\mathbf{R}_{vv}(0) + \mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\}^{-1} \tag{2.43}$$

從式(2.41)可推知， $\mathbf{P}(k)$  係根據狀態  $k$  之誤差去修正，進而由式(2.43)更新  $\mathbf{K}(k)$ 。由於  $\mathbf{P}(k)$  很快便會收斂至穩定狀態，因此可考慮  $\mathbf{P}$  為穩定之誤差協方差矩陣，亦即  $\mathbf{K}(k)$  與  $\mathbf{F}(k)$  由時變性 (time-variant) 轉成非時變性 (time-invariant) 之矩陣  $\mathbf{K}$  及  $\mathbf{F}$ 。因此，式(2.39)和式(2.43)可分別簡化為

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{wv}(0)\}\{\mathbf{R}_{vv}(0) + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T\}^{-1} \tag{2.44}$$

及

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} \tag{2.45}$$

將式(2.44)代回式(2.41)，可得離散形式之 Riccati 方程式如下：

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T - \{\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{wv}(0)\}\{\mathbf{R}_{vv}(0) + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T\}^{-1}\{\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{wv}(0)\}^T + \mathbf{R}_{ww}(0) \tag{2.46}$$

當 Riccati 矩陣  $\mathbf{P}$  由式(2.46)解出後，代入式(2.44)即可求得  $\mathbf{K}$ ，稱之為卡爾曼濾波增益矩陣(Kalman filter gain matrix)。將式(2.45)代入式(2.35)可得：

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{K}\{\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(k)\} \quad (2.47)$$

其中， $\hat{\mathbf{z}}(k)$  為第  $k$  瞬時的卡爾曼狀態向量(Kalman state vector)；

$\mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(k)$  為預測的輸出向量 (predicted output vector)；

$\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(k)$  可視為輸出狀態的殘餘值(output residual)，具有零均及白噪訊的特性，且與  $\mathbf{y}(s)$  ( $s < k$ ) 無相關性。

令  $\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(k) \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ ，則式 (2.47)可改寫為：

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (2.49)$$

式(2.48)和式(2.49)即稱為卡爾曼濾波前置模型(forward Kalman filter model)。

第  $k$  瞬時的卡爾曼狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(k)$  可由初始狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(0)$  及第  $k$  瞬時之前的輸出量測值  $\mathbf{y}(s)$  ( $s < k$ ) 疊代如下：

$$\hat{\mathbf{z}}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})^k \hat{\mathbf{z}}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})^i \mathbf{K}\mathbf{y}(k-1-i) \quad (2.50)$$

由上式可知，第  $k$  瞬時的卡爾曼狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(k)$  係透過第  $k$  瞬時之前的輸出向量  $\mathbf{y}(i)$ ， $i=0, 1, \dots, k-1$  之線性組合而成，可視  $\hat{\mathbf{z}}(k)$  為第  $k$  瞬時之前的輸出向量所組成之向量空間  $\mathbf{Y}_k^-$  一即過去向量空間(past output vector space)之中。且  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k)$  與  $\hat{\mathbf{z}}(k)$  以及  $\mathbf{Y}_k^-$  中任何向量正交，如圖 2.1 所示。因此，卡爾曼狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(k)$  即為狀態向量  $\mathbf{z}(k)$  投影於過去向量空間  $\mathbf{Y}_k^-$  中之分量，記為：

$$\hat{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{z}(k) / \mathbf{Y}_k^- \quad (2.51)$$

第  $k$  瞬時之後的輸出向量  $\mathbf{y}(k+i)$  可表示如下：

$$\mathbf{y}(k+i) = \mathbf{CA}^i \mathbf{z}(k) + \sum_{s=1}^i \mathbf{CA}^{s-1} \mathbf{w}(k+i-s) + \mathbf{v}(k+i), \quad i \geq 0 \quad (2.52)$$

將  $\mathbf{y}(k+i)$  投影於過去向量空間  $\mathbf{Y}_k^-$  上可得

$$\mathbf{y}(k+i)/\mathbf{Y}_k^- = \mathbf{CA}^i \mathbf{z}(k)/\mathbf{Y}_k^- + \sum_{s=1}^i \mathbf{CA}^{s-1} \mathbf{w}(k+i-s)/\mathbf{Y}_k^- + \mathbf{v}(k+i)/\mathbf{Y}_k^- \quad (2.53)$$

由於噪訊向量  $\mathbf{w}$  及  $\mathbf{v}$  與輸出向量  $\mathbf{y}$  無相關性，因此

$$\sum_{s=1}^i \mathbf{CA}^{s-1} \mathbf{w}(k+i-s)/\mathbf{Y}_k^- = \mathbf{0} \text{ 且 } \mathbf{v}(k+i)/\mathbf{Y}_k^- = \mathbf{0}。 \text{ 結合式(2.51)，式(2.53)可改}$$

寫為：

$$\mathbf{y}(k+i)/\mathbf{Y}_k^- = \mathbf{CA}^i \hat{\mathbf{z}}(k) \quad (2.54)$$

由上式可知，將第  $k$  瞬時之後的輸出向量投影於過去向量空間 ( $\mathbf{Y}_k^-$ ) 上，即可求得卡爾曼狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(k)$ ，而其線性組合之係數矩陣即為系統矩陣  $\mathbf{A}$  與輸出影響矩陣  $\mathbf{C}$  之函數。因此，吾人若能建立卡爾曼狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(k)$ ，便可由式(2.54)求取  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{C}$  矩陣。後續章節將介紹如何透過多變量分析 (Multivariate Analysis) 技術，建立卡爾曼狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(k)$ 。

## 2.4 多變量分析(Multivariate Analysis)

前述章節說明了輸出向量可以第  $k$  瞬時為界，將其前後之狀態向量分成過去輸出向量 (past output vector,  $\mathbf{y}_k^-$ ) 及未來輸出向量 (future output vector,  $\mathbf{y}_k^+$ )。本章節將說明如何透過  $\mathbf{y}_k^-$  與  $\mathbf{y}_k^+$  之協方差，利用多變量分析技術建立卡爾曼狀態向量的方法。

多變量分析技術通常用於處理多個變量間之迴歸 (regression)、樣式辨識 (pattern recognition) 及降階 (dimensionality reduction) 等問題，這些都是基

於變量間的統計特性，如協方差(covariance)、相關性(correlation)等所發展而成。而在隨機預測系統之參數識別分析上，多變量分析技術主要是應用在系統之降階，因為系統降階問題與狀態預估問題之系統維度的決定有關。

#### 2.4.1 多變量統計分析之概念

給定兩個不同維度之向量變數  $\mathbf{x}$  與  $\mathbf{y}$  (此處  $\mathbf{x}$  與  $\mathbf{y}$  為通泛的變量，不必然等同於前述各章節中之各向量變數)，其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ，包含了  $n$  個獨立變數； $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  包含了  $m$  個相依於  $\mathbf{x}$  的變數。茲定義分別對應於由  $\mathbf{x}$  及  $\mathbf{y}$  所降階的變量  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  和  $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ ，其中降階後的維度  $r < \min(n, m)$ ， $\tilde{\mathbf{x}}$  係由  $\mathbf{x}$  中各分量線性組合而得， $\tilde{\mathbf{y}}$  則由  $\mathbf{y}$  中各分量線性組合而得。亦即

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_x^T \mathbf{x} \quad (2.55a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{w}_y^T \mathbf{y} \quad (2.55b)$$

其第  $i$  分量可分別表示為：

$$\tilde{x}_i = \mathbf{w}_{x,i}^T \mathbf{x} \quad (2.56a)$$

$$\tilde{y}_i = \mathbf{w}_{y,i}^T \mathbf{y} \quad (2.56b)$$

其中， $\mathbf{w}_{x,i} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  及  $\mathbf{w}_{y,i} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  分別為對應於  $\tilde{x}_i$  及  $\tilde{y}_i$  之方向向量 (direction vector)。  $\mathbf{w}_{x,i}$  和  $\mathbf{w}_{y,i}$  可正規化為單位向量如下：

$$\hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \mathbf{w}_{x,i} / \|\mathbf{w}_{x,i}\| \quad (2.57)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \mathbf{w}_{y,i} / \|\mathbf{w}_{y,i}\| \quad (2.58)$$

定義一代價函數(cost function)  $\rho(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  來描述  $\mathbf{x}$  與  $\mathbf{y}$  間的關係，如協方差(covariance)、相關性(correlation)...等，吾人可藉由代價函數之最大

化來求取正規化方向向量  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  及  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$ 。

Borga 【14】探討了三種系統降階之多變量分析方法，包括局部最小平方法(Partial Least Squares,PLS)、典型相關分析法(Canonical Correlation Analysis,CCA)及多元迴歸分析法(Multiple Linear Regression,MLR)，此三種方法的差異在於代價函數之不同，Borga 將其統一描述成廣義特徵值問題 (generalized eigenvalue problem)。這類廣義特徵值問題可統一描述如下：

$$\mathbf{N}_1 \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i \quad (2.59)$$

其中， $\mathbf{N}_1$  及  $\mathbf{N}_2$  的內涵因方法之不同而異； $\lambda_i$  及  $\mathbf{w}_i$  分別為特徵值及特徵向量。廣義特徵值問題又與雷利商數(Rayleigh quotient)息息相關，可表示如下：

$$r(\mathbf{w}_i) = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_1 \mathbf{w}_i}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i} \quad (2.60)$$

其中，當  $\mathbf{N}_1$  與  $\mathbf{N}_2$  為 Hermitian (即  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1^H$ 、 $\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_2^H$ ，上標 H 表示共軛轉置) 且  $\mathbf{N}_2$  為正定義(positive definite)時， $\lambda_i$  與  $\mathbf{w}_i$  為  $r(\mathbf{w}_i)$  於臨界點(critical point)之特徵值與特徵向量。 $r(\mathbf{w}_i)$  之臨界點須滿足式(2.60)對  $\mathbf{w}_i$  取偏微分等於零之條件，亦即：

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(\mathbf{w}_i)}{\partial \mathbf{w}_i} &= \frac{(\mathbf{N}_1^H + \mathbf{N}_1) \mathbf{w}_i (\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i) - (\mathbf{N}_2^H + \mathbf{N}_2) \mathbf{w}_i (\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_1 \mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i)^2} \\ &= \frac{2\mathbf{N}_1 \mathbf{w}_i (\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i) - 2r(\mathbf{w}_i) \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i (\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i)^2} \\ &= \frac{2}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i} [\mathbf{N}_1 \mathbf{w}_i - r(\mathbf{w}_i) \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i] = 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

由上式可求得

$$\mathbf{N}_1 \mathbf{w}_i = r(\mathbf{w}_i) \mathbf{N}_2 \mathbf{w}_i \quad (2.62)$$

比對式(2.59)與式(2.62)可知，雷利商數之臨界值求解問題，即相當於廣義特徵值問題。

由此一廣義特徵值問題中求得  $\mathbf{w}_i$  ( $\mathbf{w}_i = [\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \ \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T]^T$ ，即對應於前  $r$  組特徵值之特徵向量)，進而由式(2.55)與(2.56)建立  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  及  $\tilde{\mathbf{y}}_i$ 。經此過程降階後的  $\tilde{\mathbf{x}}$  與  $\tilde{\mathbf{y}}$  即稱為  $\mathbf{x}$  與  $\mathbf{y}$  之主成分(principal components)， $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T$  與  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T$  分別為對應其第  $i$  分量之主方向向量(principal direction vectors)。

## 2.4.2 局部最小平方法(Partial Least Squares, PLS)

局部最小平方法之概念在於找到  $r$  對  $(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  或亦相當於  $(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{y}}_i)$ ，使得  $\mathbf{x}$  與  $\mathbf{y}$  間之協方差(covariance)最大化，因此定義其代價函數如下：

$$\rho^{\text{PLS}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = E[\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{y}}_i^T] = \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T E[\mathbf{xy}^T] \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy}(0) \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.63)$$

式(2.63)分別對  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  及  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  偏微分並令其為零，可求得其臨界值。由於  $\rho^{\text{PLS}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之數值會受  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  及  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  之尺度(scale)所影響，欲使其有唯一解，須限制  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  及  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  之正規化條件。茲考慮  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  及  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  為單位向量，故其束制方程式可表示成：

$$f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}) = \|\hat{\mathbf{w}}_{x,i}\|^2 = \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 1 \quad (2.64a)$$

及

$$g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \|\hat{\mathbf{w}}_{y,i}\|^2 = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 1 \quad (2.64b)$$

吾人可透過拉格朗治函數(Lagrange function)將式(2.64a,b)之束制條件考慮在代價函數中，亦即：

$$\begin{aligned} L^{\text{PLS}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}; \ell_x, \ell_y) &= \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy}(0) \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + \ell_x [1 - f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i})] + \ell_y [1 - g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i})] \\ &= \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy}(0) \hat{\mathbf{w}}_{y,i} - \ell_x \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i} - \ell_y \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + \ell_x + \ell_y \end{aligned} \quad (2.65)$$

其中  $\ell_x$  和  $\ell_y$  分別為對應於  $f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i})$  及  $g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之拉格朗治乘子(Lagrange

multipliers)。此外，為簡化符號，上式中  $\mathbf{R}_{xy}(0)$  及  $\mathbf{R}_{yx}(0)$  分別簡化成  $\mathbf{R}_{xy}$  及

$\mathbf{R}_{yx}$ 。  $L^{PLS}$  之最大化須滿足：

$$\begin{cases} \frac{\partial L^{PLS}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{x,i}} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 2l_x \hat{\mathbf{w}}_{x,i} & (2.65a) \\ \frac{\partial L^{PLS}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{y,i}} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 2l_y \hat{\mathbf{w}}_{y,i} & (2.65b) \end{cases}$$

將式(2.65a)前乘  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T$  可得

$$\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 2l_x \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 2l_x \quad (2.66a)$$

同理，式(2.65b) 前乘  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T$  可得

$$\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 2l_y \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 2l_y \quad (2.66b)$$

由於  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  (因  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  為純量，其轉置後仍相同)，且

$\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 1$ ，故可推知  $l_x = l_y$ 。令  $2l_x = 2l_y = \lambda_i$ ，則式(2.66a,b)

可合併成矩陣之型式如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{xy} \\ \mathbf{R}_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

將式(2.67)中的  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  和  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  展開表示，可寫成

$$\mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \quad (2.68a)$$

及

$$\mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.68b)$$

將式(2.68a)前乘  $\mathbf{R}_{yx}$ ，可得

$$\mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \lambda_i (\lambda_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \lambda_i^2 \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.69a)$$

同理，將式(2.68b)前乘  $\mathbf{R}_{xy}$ ，可得

$$\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{yx}\hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \lambda_i\mathbf{R}_{xy}\hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i(\lambda_i\hat{\mathbf{w}}_{x,i}) = \lambda_i^2\hat{\mathbf{w}}_{x,i} \quad (2.69b)$$

如此即可將式(2.68)中之 $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$ 與 $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$ 去耦(decouple)後，各自獨立求解。重新整理如下：

$$\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{yx}\hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \lambda_i^2\hat{\mathbf{w}}_{x,i} \quad (2.70a)$$

$$\mathbf{R}_{yx}\mathbf{R}_{xy}\hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i^2\hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.70b)$$

其中， $\mathbf{R}_{yx}^T = \mathbf{R}_{xy} = \mathbf{R}_{PLS}$ ， $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$ 與 $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$ 即為 $\mathbf{R}_{xy}$ 之奇異值分解(singular value decomposition)的左側及右側特徵向量， $\lambda_i$ 為 $\mathbf{R}_{xy}$ 之奇異值。即

$$\mathbf{R}_{PLS} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_0]^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (2.71)$$

其中， $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 為 $\mathbf{R}_{PLS}\mathbf{R}_{PLS}^T$ 之非零特徵值所對應之左側單位特徵向量；

$\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ 為 $\mathbf{R}_{PLS}\mathbf{R}_{PLS}^T$ 之奇異值所對應之左側單位特徵向量；

$\mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 為 $\mathbf{R}_{PLS}^T\mathbf{R}_{PLS}$ 之非零特徵值所組成之對角矩陣；

$\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ 為 $\mathbf{R}_{PLS}^T\mathbf{R}_{PLS}$ 之奇異值所組成之對角矩陣；

$\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 為 $\mathbf{R}_{PLS}^T\mathbf{R}_{PLS}$ 之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

$\mathbf{V}_0 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ 為 $\mathbf{R}_{PLS}^T\mathbf{R}_{PLS}$ 之奇異值所對應之右側單位特徵向量。

因此可求得 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 之主成分向量 $\tilde{\mathbf{x}}$ 及 $\tilde{\mathbf{y}}$ 如下：

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^{PLS} = [\hat{\mathbf{w}}_{x,1} \quad \hat{\mathbf{w}}_{x,2} \quad \hat{\mathbf{w}}_{x,3} \cdots \hat{\mathbf{w}}_{x,r}]^T \mathbf{x} = \mathbf{U}_1^T \mathbf{x} \quad (2.72a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}^{PLS} = [\hat{\mathbf{w}}_{y,1} \quad \hat{\mathbf{w}}_{y,2} \quad \hat{\mathbf{w}}_{y,3} \cdots \hat{\mathbf{w}}_{y,r}]^T \mathbf{y} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{y} \quad (2.72b)$$

### 2.4.3 典型相關分析法(Canonical Correlation Analysis, CCA)

典型相關分析法之概念在於找到  $r$  對  $(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  或相當於  $(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{y}}_i)$ ，使得  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  之互相關性(cross correlation)最大化，因此定義其代價函數如下：

$$\rho^{\text{CCA}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \frac{E[\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{y}}_i]}{\sqrt{E[\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i]} \sqrt{E[\tilde{\mathbf{y}}_i \tilde{\mathbf{y}}_i]}} = \frac{\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}}{\sqrt{(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i})(\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i})}} \quad (2.73)$$

上式中  $\rho^{\text{CCA}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之值與  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  和  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  的尺度(scale)無關；此外， $\mathbf{R}_{xy}(0)$  及  $\mathbf{R}_{yx}(0)$  均分別簡化成  $\mathbf{R}_{xy}$  及  $\mathbf{R}_{yx}$ 。  $\rho^{\text{CCA}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之最大化即相當於其分子之最大化，同時可將分母的數值限制在 1，故可令其束制條件為

$$f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}) = \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 1 \quad (2.74a)$$

及

$$g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 1 \quad (2.74b)$$

如此，則其代價函數可簡化成：

$$\rho^{\text{CCA}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.75)$$

吾人可透過拉格朗治函數(Lagrange function) 將式(2.74a,b)之束制條件考慮在代價函數中，亦即：

$$\begin{aligned} L^{\text{CCA}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}; l_x, l_y) &= \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + l_x [1 - f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i})] + l_y [1 - g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i})] \\ &= \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} - l_x \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} - l_y \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + l_x + l_y \end{aligned} \quad (2.76)$$

其中  $l_x$  和  $l_y$  分別為對應於  $f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i})$  及  $g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之拉格朗治乘子(Lagrange multipliers)。  $L^{\text{CCA}}$  之最大化須滿足：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{L}^{CCA}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{x,i}} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 2\ell_x \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} & (2.77a) \\ \frac{\partial \mathbf{L}^{CCA}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{y,i}} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 2\ell_y \mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} & (2.77b) \end{cases}$$

將式(2.77a)前乘  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T$  可得

$$\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 2\ell_x \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \quad (2.78a)$$

同理，式(2.77b) 前乘  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T$  可得

$$\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 2\ell_y \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.78b)$$

由於  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  (因  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  為純量，其轉置後仍相同)，且

$\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 1$ ，故可推知  $\ell_x = \ell_y$ 。令  $2\ell_x = 2\ell_y = \lambda_i$ ，則式

(2.78a,b)可合併成矩陣之型式如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{xy} \\ \mathbf{R}_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

將式(2.79)中的  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  和  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  展開表示，可寫成

$$\mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \quad (2.80a)$$

及

$$\mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \lambda_i \mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.80b)$$

令  $\hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  且  $\hat{\mathbf{v}}_{y,i} = \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}$ ，則式(2.80a)可改寫為

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{y,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \quad (2.81b)$$

$$\mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_{y,i} \quad (2.81a)$$

令  $\mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} = \mathbf{R}_{CCA}$ ，則式(2.81a,b)可合併成矩陣之型式如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\text{CCA}} \\ \mathbf{R}_{\text{CCA}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{v}}_{y,i} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{v}}_{y,i} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

上式可再展開如下：

$$\mathbf{R}_{\text{CCA}} \hat{\mathbf{v}}_{y,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \quad (2.83a)$$

及

$$\mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_{y,i} \quad (2.83b)$$

式(2.83a)前乘  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}^T$  可得

$$\mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \mathbf{R}_{\text{CCA}} \hat{\mathbf{v}}_{y,i} = \lambda_i \mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \lambda_i^2 \hat{\mathbf{v}}_{y,i} \quad (2.84a)$$

同理，式(2.83b)前乘  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}$  可得

$$\mathbf{R}_{\text{CCA}} \mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \lambda_i \mathbf{R}_{\text{CCA}} \hat{\mathbf{v}}_{y,i} = \lambda_i^2 \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \quad (2.84b)$$

由式(2.84a,b)可知， $\hat{\mathbf{v}}_{x,i}$  和  $\hat{\mathbf{v}}_{y,i}$  為對  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}$  之奇異值分解(singular value decomposition)的左側及右側特徵向量， $\lambda_i$  為  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}$  之奇異值。亦即

$$\mathbf{R}_{\text{CCA}} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_0]^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (2.85)$$

其中， $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  為  $\mathbf{R}_{\text{CCA}} \mathbf{R}_{\text{CCA}}^T$  之非零特徵值所對應之左側單位特徵向量；

$\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  為  $\mathbf{R}_{\text{CCA}} \mathbf{R}_{\text{CCA}}^T$  之奇異值所對應之左側單位特徵向量；

$\mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  為  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \mathbf{R}_{\text{CCA}}$  之非零特徵值所組成之對角矩陣；

$\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  為  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \mathbf{R}_{\text{CCA}}$  之奇異值所組成之對角矩陣；

$\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  為  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \mathbf{R}_{\text{CCA}}$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

$\mathbf{V}_0 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  為  $\mathbf{R}_{\text{CCA}}^T \mathbf{R}_{\text{CCA}}$  之奇異值所對應之右側單位特徵向量。

由  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,i}$  及  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{y,i}$ ，

可求得主成分向量  $\tilde{\mathbf{x}}$  及  $\tilde{\mathbf{y}}$  如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^{\text{CCA}} &= [\hat{\mathbf{w}}_{x,1} \ \hat{\mathbf{w}}_{x,2} \ \hat{\mathbf{w}}_{x,3} \ \cdots \ \hat{\mathbf{w}}_{x,r}]^T \mathbf{x} \\ &= [\mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,1} \ \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,2} \ \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,3} \ \cdots \ \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,r}]^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_{xx}^{-T/2} \mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.86a)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}^{\text{CCA}} &= [\hat{\mathbf{w}}_{y,1} \ \hat{\mathbf{w}}_{y,2} \ \hat{\mathbf{w}}_{y,3} \ \cdots \ \hat{\mathbf{w}}_{y,r}]^T \mathbf{y} \\ &= [\mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{y,1} \ \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{y,2} \ \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{y,3} \ \cdots \ \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{y,r}]^T \mathbf{y} \\ &= \mathbf{V}_1^T \mathbf{R}_{yy}^{-T/2} \mathbf{y}\end{aligned}\quad (2.86b)$$

#### 2.4.4 多元迴歸分析法(Multiple Linear Regression, MLR)

多元迴歸分析法之概念在於找到適當的  $\tilde{\mathbf{x}}$  以精確預測出  $\mathbf{y}$ 。為了建立  $\tilde{\mathbf{x}}$ ，茲定義一預測向量  $\hat{\mathbf{y}}_i$  如下：

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \tilde{\mathbf{x}}_i = \alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x} \quad (2.87)$$

其中， $\alpha_i$  為迴歸係數(regression coefficient)。由式(2.87)可知，MLR 法相當於尋找最佳之  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$ 、 $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  以及  $\alpha_i$  使得  $\hat{\mathbf{y}}_i$  與  $\mathbf{y}$  之誤差函數的期望值最小，該誤差函數之定義如下：

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(\alpha_i, \hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) &= E[\|\mathbf{y} - \alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \tilde{\mathbf{x}}_i\|^2] \\ &= E[(\mathbf{y} - \alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x})] \\ &= E[\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \alpha_i \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{y} - \alpha_i \mathbf{y}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x} + \alpha_i^2 \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x}]\end{aligned}\quad (2.88)$$

因  $\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{y}$ 、 $\mathbf{y}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  及  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x}$  皆為純量，其轉置後仍相同，故式(2.88)可改寫成：

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(\alpha_i, \hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) &= E[\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x} \mathbf{y}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} - \alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x} \mathbf{y}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + \alpha_i^2 \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{x} (\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{w}}_{x,i})] \\ &= E[\mathbf{y}^T \mathbf{y}] - 2\alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + \alpha_i^2 \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}\end{aligned}\quad (2.89)$$

令上式之  $\varepsilon_i$  對  $\alpha_i$  微分為零，亦即

$$\frac{d\varepsilon_i}{d\alpha_i} = 2(\alpha_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} - \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = 0 \quad (2.90)$$

若令  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 1$ ，則由上式可求得  $\alpha_i$  如下：

$$\alpha_i = \frac{\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}}{\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}} \quad (2.91)$$

將式(2.91)代入式(2.89)，可得：

$$\varepsilon_i = E[\mathbf{y}^T \mathbf{y}] - \frac{(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i})^2}{\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}} \quad (2.92)$$

當式(2.92)中之第二項為最大值時誤差函數  $\varepsilon_i$  有最小值，因此其代價函數可定義為：

$$\rho^{\text{MLR}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \frac{\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}}{\sqrt{\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}}} \quad (2.93)$$

從上式可知， $\rho^{\text{MLR}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之值與  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  之尺度(scale)無關，但會受到  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  之尺度影響。為使  $\rho^{\text{MLR}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之最大化有唯一解，須將其分子最大化，同時將分母之數值限制在 1，並考慮將  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  正規化為單位向量，因此其代價函數可簡化成：

$$\rho^{\text{CCA}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.94)$$

其束制條件包括：

$$f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}) = \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 1 \quad (2.95a)$$

及

$$g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i}) = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 1 \quad (2.95b)$$

吾人可透過拉格朗治函數(Lagrange function) 將式(2.95a,b)之束制條件考慮在代價函數中，亦即：

$$\begin{aligned} L^{\text{MLR}}(\hat{\mathbf{w}}_{x,i}, \hat{\mathbf{w}}_{y,i}; l_x, l_y) &= \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + l_x [1 - f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i})] + l_y [1 - g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i})] \\ &= \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} + l_x (1 - \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}) + l_y (1 - \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i}) \end{aligned} \quad (2.96)$$

其中  $l_x$  和  $l_y$  分別為對應於  $f(\hat{\mathbf{w}}_{x,i})$  及  $g(\hat{\mathbf{w}}_{y,i})$  之拉格朗治乘子(Lagrange multipliers)。式(2.96)之最大化須滿足：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L^{\text{MLR}}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{x,i}} = 0 &\Rightarrow \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 2l_x \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \end{aligned} \right. \quad (2.97a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L^{\text{MLR}}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{y,i}} = 0 &\Rightarrow \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 2l_y \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{aligned} \right. \quad (2.97b)$$

將式(2.97a)前乘  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T$  可得

$$\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 2l_x \hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \quad (2.98a)$$

同理，式(2.97b) 前乘  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T$  可得

$$\hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = 2l_y \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.98b)$$

由於  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  (因  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  為純量，其轉置後仍相同)，

且  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}^T \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \hat{\mathbf{w}}_{y,i}^T \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = 1$ ，吾人可推知  $l_x = l_y$ 。令  $2l_x = 2l_y = \lambda_i$ ，則式(2.98)

可表示成：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{xy} \\ \mathbf{R}_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

將式(2.99)中的  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i}$  和  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  展開表示，可寫成

$$\mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} \quad (2.100a)$$

及

$$\mathbf{R}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.100b)$$

定義  $\hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \mathbf{R}_{xx}^{1/2} \hat{\mathbf{w}}_{x,i}$ ，則式(2.100a)可改寫為

$$\mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i \mathbf{R}_{xx} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,i}$$

或

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \mathbf{R}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \quad (2.101a)$$

此外，式(2.100b)則可改寫為

$$\mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.101b)$$

式(2.101a,b)可合併成矩陣之型式如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{MLR} \\ \mathbf{R}_{MLR}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \\ \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\text{其中，} \mathbf{R}_{MLR} = \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \mathbf{R}_{xy} \quad (2.103)$$

式(2.102)可再展開如下：

$$\mathbf{R}_{MLR} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \quad (2.104a)$$

及

$$\mathbf{R}_{MLR}^T \hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \lambda_i \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.104b)$$

式(2.104b)前乘  $\mathbf{R}_{MLR}$  可得

$$\mathbf{R}_{MLR} \mathbf{R}_{MLR}^T \hat{\mathbf{v}}_{x,i} = \lambda_i^2 \hat{\mathbf{v}}_{x,i} \quad (2.105a)$$

同理，式(2.104a)前乘  $\mathbf{R}_{MLR}^T$  可得

$$\mathbf{R}_{MLR}^T \mathbf{R}_{MLR} \hat{\mathbf{w}}_{y,i} = \lambda_i^2 \hat{\mathbf{w}}_{y,i} \quad (2.105b)$$

由式(2.105a,b)可知  $\hat{\mathbf{v}}_{x,i}$  和  $\hat{\mathbf{w}}_{y,i}$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之奇異值分解(singular value decomposition) 的左側及右側之特徵向量， $\lambda_i$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之奇異值。

$$\mathbf{R}_{\text{MLR}} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_0]^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (2.106)$$

其中， $\mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}} \mathbf{R}_{\text{MLR}}^T$  之非零特徵值所對應之左側單位特徵向量；

$\mathbf{U}_0 \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}} \mathbf{R}_{\text{MLR}}^T$  之奇異值所對應之左側單位特徵向量；

$\mathbf{S}_1 \in \mathbf{R}^{r \times r}$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之非零特徵值所組成之對角矩陣；

$\mathbf{S}_0 \in \mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之奇異值所組成之對角矩陣；

$\mathbf{V}_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

$\mathbf{V}_0 \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之奇異值所對應之右側單位特徵向量。

由  $\hat{\mathbf{w}}_{x,i} = \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,i}$

可求得主成分向量  $\tilde{\mathbf{x}}$  及  $\tilde{\mathbf{y}}$  如下：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^{\text{MLR}} &= [\hat{\mathbf{w}}_{x,1} \quad \hat{\mathbf{w}}_{x,2} \quad \hat{\mathbf{w}}_{x,3} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{w}}_{x,r}]^T \mathbf{x} \\ &= [\mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,1} \quad \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,2} \quad \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,3} \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1/2} \hat{\mathbf{v}}_{x,r}]^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-T/2} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.107a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}^{\text{MLR}} = [\hat{\mathbf{w}}_{y,1} \quad \hat{\mathbf{w}}_{y,2} \quad \hat{\mathbf{w}}_{y,3} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{w}}_{y,r}]^T \mathbf{y} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{y} \quad (2.107b)$$

## 2.5 卡爾曼狀態向量之多變量分析

### 2.5.1 卡爾曼輸出向量預估

考慮在第  $i$  瞬時的卡爾曼狀態向量  $\hat{\mathbf{z}}(i)$  受到過去的輸出向量  $(\mathbf{y}(s), s < i)$  所影響，且初始條件為零，亦即  $\hat{\mathbf{z}}(0) = 0$ ，則式(2.50)可改寫為：

$$\hat{\mathbf{z}}(i) = \Psi_i \mathbf{y}_i^- \quad (2.108)$$

其中， $\Psi_i = [\mathbf{K} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{K} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})^2 \mathbf{K} \quad \dots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})^{i-1} \mathbf{K}] \in \mathbb{R}^{2n \times mi}$ ，

$$\mathbf{y}_i^- = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(i-1) \\ \mathbf{y}(i-2) \\ \mathbf{y}(i-3) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times l} \quad (2.109)$$

$\mathbf{y}_i^-$  表示第  $i$  瞬間之前或過去(past)的輸出狀態。第  $i$  瞬間以後的輸出向量  $\mathbf{y}(s) (s \geq i)$  可由  $\hat{\mathbf{z}}(i)$  預測出，亦即：

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(s) + \boldsymbol{\varepsilon}(s) \quad , \quad s \geq i \quad (2.110)$$

(1) 當  $s = i$  時，

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(i) + \boldsymbol{\varepsilon}(i) \quad (2.111)$$

(2) 當  $s = i + 1$  時，

$$\mathbf{y}(i+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(i) + \mathbf{C}\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(i) + \boldsymbol{\varepsilon}(i+1)$$

(3) 當  $s = i + 2$  時，

$$\mathbf{y}(i+2) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{z}}(i) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(i) + \mathbf{C}\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(i+1) + \boldsymbol{\varepsilon}(i+2)$$

將式(2.109)至(2.111)合併成矩陣之型式，可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ \mathbf{y}(i+1) \\ \mathbf{y}(i+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(2i-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}(i) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CK} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAK} & \mathbf{CK} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{K} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{K} & \mathbf{CA}^{i-4}\mathbf{K} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(i) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(i+1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(i+2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}(2i-1) \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

或表示成：

$$\mathbf{y}_i^+ = \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{z}}(i) + \mathbf{W}^E \boldsymbol{\varepsilon}_i^+ \quad (2.113)$$

其中， $\mathbf{O}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times 2n}$  為可觀測矩陣(Observability matrix)；

$\mathbf{W}^E \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  為輸出殘餘係數矩陣；

$\mathbf{y}_i^+ \in \mathbb{R}^{m_i \times l}$  表示第  $i$  瞬時之後或未來(future)的輸出向量空間；

$\boldsymbol{\varepsilon}_i^+ \in \mathbb{R}^{m_i \times l}$ 。

將式(2.108)代入式(2.113)可得：

$$\mathbf{y}_i^+ = \mathbf{O}_i \boldsymbol{\Psi}_i \mathbf{y}_i^- + \mathbf{W}^E \boldsymbol{\varepsilon}_i^+ \quad (2.114)$$

式(2.114)中之  $\mathbf{y}_i^+$  與  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^+$  相互獨立， $\mathbf{W}^E \boldsymbol{\varepsilon}_i^+$  可視為由  $\mathbf{y}_i^-$  預測  $\mathbf{y}_i^+$  過程中的噪音或誤差； $\hat{\mathbf{z}}(i)$  為  $\mathbf{y}_i^-$  的線性組合。

令  $\mathbf{H} = E[\mathbf{y}_i^+ \mathbf{y}_i^{-T}] \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ， $\mathbf{H}$  為  $\mathbf{y}_i^+$  與  $\mathbf{y}_i^-$  之協方差；

$\mathbf{R}_+ = E[\mathbf{y}_i^+ \mathbf{y}_i^{+T}] \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ， $\mathbf{R}_+$  為  $\mathbf{y}_i^+$  與  $\mathbf{y}_i^+$  之協方差；

$\mathbf{R}_- = E[\mathbf{y}_i^- \mathbf{y}_i^{-T}] \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ， $\mathbf{R}_-$  為  $\mathbf{y}_i^-$  與  $\mathbf{y}_i^-$  之協方差。

$\mathbf{H}$  可表示成 Hankel 矩陣之型式如下：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(1) & \mathbf{R}_{yy}(2) & \mathbf{R}_{yy}(3) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(i) \\ \mathbf{R}_{yy}(2) & \mathbf{R}_{yy}(3) & \mathbf{R}_{yy}(4) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(i+1) \\ \mathbf{R}_{yy}(3) & \mathbf{R}_{yy}(4) & \mathbf{R}_{yy}(5) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(i+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{yy}(i) & \mathbf{R}_{yy}(i+1) & \mathbf{R}_{yy}(i+2) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(2i-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times mi} \quad (2.115)$$

此外， $\mathbf{R}_+$  與  $\mathbf{R}_-$  可表示成 Toeplitz 矩陣之型式如下：

$$\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_-^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(0) & \mathbf{R}_{yy}(-1) & \mathbf{R}_{yy}(-2) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(-i+1) \\ \mathbf{R}_{yy}(1) & \mathbf{R}_{yy}(0) & \mathbf{R}_{yy}(-1) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(-i+2) \\ \mathbf{R}_{yy}(2) & \mathbf{R}_{yy}(1) & \mathbf{R}_{yy}(0) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(-i+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{yy}(i-1) & \mathbf{R}_{yy}(i-2) & \mathbf{R}_{yy}(i-3) & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times mi} \quad (2.116)$$

對照第 2.4.1 節之多變量分析理論，卡爾曼狀態向量預估方法中的過去輸出向量  $\mathbf{y}_i^-$  即對應於自變量  $\mathbf{x}$ ，未來輸出向量  $\mathbf{y}_i^+$  則對應於因變量  $\mathbf{y}$ 。此外，比較式(2.108)與式(2.55)可知，自變量  $\mathbf{x}$  之主要分量  $\tilde{\mathbf{x}}$  即相當於卡爾曼狀態向量預估  $\hat{\mathbf{z}}(i)$ ， $\mathbf{x}$  之主方向向量組成之矩陣  $\mathbf{w}_x^T$  則對應於  $\Psi_i$ 。因此，吾人可利用多變量分析的方法找出  $\Psi_i$ ，然後由式(2.108)找出  $\hat{\mathbf{z}}(i)$ 。

### 2.5.2 透過局部最小平方法(PLS)建立卡爾曼狀態向量 $\hat{\mathbf{z}}(i)$

根據第 2.4.2 節之局部最小平方法，其多變量協方差矩陣

$$\mathbf{R}_{PLS} = \mathbf{R}_{xy} = \mathbf{R}_{\mathbf{y}_i^- \mathbf{y}_i^+} = \mathbf{H}^T \quad (2.117)$$

由於求  $\mathbf{y}_i^-$  主方向向量組成之矩陣  $\Psi_i^{PLS}$  即相當於求  $\mathbf{x}$  之主方向向量  $\mathbf{w}_x^T$ ，因此， $\Psi_i^{PLS}$  可由 Hankle 矩陣  $\mathbf{H}$  之奇異值分解求得。

$\mathbf{H}^T$  之奇異值分解如下：

$$\mathbf{H}^T = {}_p\mathbf{U}_p \mathbf{S}_p \mathbf{V}^T = [{}_p\mathbf{U}_1 \quad {}_p\mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} {}_p\mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_p\mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_p\mathbf{V}_1^T \\ {}_p\mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = {}_p\mathbf{U}_1 {}_p\mathbf{S}_1 {}_p\mathbf{V}_1^T \quad (2.118)$$

其中，

${}_p\mathbf{U}_1$  為  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$  之非零特徵值所對應之左側單位正交特徵向量；

${}_p\mathbf{U}_0$  為  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$  之奇異值所對應之左側單位正交特徵向量；

${}_p\mathbf{S}_1$  為  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  之非零特徵值所組成之對角矩陣；

${}_p\mathbf{S}_0$  為  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  之奇異值所組成之對角矩陣；

${}_p\mathbf{V}_1$  為  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  之非零特徵值所對應之右側單位正交特徵向量；

${}_p\mathbf{V}_0$  為  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  之奇異值所對應之右側單位正交特徵向量。

則

$$\Psi_i^{\text{PLS}} = {}_p\mathbf{U}_1^T \quad (2.119)$$

由於實作上  ${}_p\mathbf{S}_0$  未必為零，因此在決定  ${}_p\mathbf{U}_1$  時可取其前  $2n$  組，其中  $2n$  為系統矩陣之維度。卡爾曼狀態向量即為

$$\hat{\mathbf{z}}^{\text{PLS}}(i) = {}_p\mathbf{U}_1^T \mathbf{y}_i^- \quad (2.120)$$

另外，因  $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$ ，卡爾曼狀態向量也可表示如下：

$$\hat{\mathbf{z}}^{\text{PLS}}(i) = {}_p\mathbf{V}_1^T \mathbf{y}_i^- \quad (2.121)$$

其中， ${}_p\mathbf{V}_1$  為  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$  之非零特徵值所對應之右側單位正交特徵向量。

### 2.5.3 透過典型相關分析法(CCA)建立卡爾曼狀態向量 $\hat{\mathbf{z}}(i)$

根據第 2.4.3 節之典型相關分析法，其多變量協方差矩陣

$$\mathbf{R}_{CCA} = \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_{yy}^{-1/2} = \mathbf{R}_{y_i^- y_i^-}^{-1/2} \mathbf{R}_{y_i^- y_i^+} \mathbf{R}_{y_i^+ y_i^+}^{-1/2} = \mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_+^{-1/2} \quad (2.122)$$

由於求  $\mathbf{y}_i^-$  主方向向量組成之矩陣  $\Psi_i^{CCA}$  即相當於求  $\mathbf{x}$  之主方向向量  $\mathbf{w}_x^T$ ，因此， $\Psi_i^{CCA}$  可由  $\mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_+^{-1/2}$  之奇異值分解求得。

$\mathbf{R}_{CCA}$  可作奇異值分解如下：

$$\mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_+^{-1/2} = \begin{bmatrix} {}_c\mathbf{U}_1 & {}_c\mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c\mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_c\mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c\mathbf{V}_1^T \\ {}_c\mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = {}_c\mathbf{U}_1 {}_c\mathbf{S}_1 {}_c\mathbf{V}_1^T \quad (2.123)$$

其中，

${}_c\mathbf{U}_1$  為  $\mathbf{R}_{CCA} \mathbf{R}_{CCA}^T$  之非零特徵值所對應之左側單位正交特徵向量；

${}_c\mathbf{U}_0$  為  $\mathbf{R}_{CCA} \mathbf{R}_{CCA}^T$  之奇異值所對應之左側單位正交特徵向量；

${}_c\mathbf{S}_1$  為  $\mathbf{R}_{CCA}^T \mathbf{R}_{CCA}$  之非零特徵值所組成之對角矩陣；

${}_c\mathbf{S}_0$  為  $\mathbf{R}_{CCA}^T \mathbf{R}_{CCA}$  之奇異值所組成之對角矩陣；

${}_c\mathbf{V}_1$  為  $\mathbf{R}_{CCA}^T \mathbf{R}_{CCA}$  之非零特徵值所對應之右側單位正交特徵向量；

${}_c\mathbf{V}_0$  為  $\mathbf{R}_{CCA}^T \mathbf{R}_{CCA}$  之奇異值所對應之右側單位正交特徵向量。

則

$$\Psi_i^{CCA} = {}_c\mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \quad (2.124)$$

由於實作上  ${}_c\mathbf{S}_0$  未必為零，因此在決定  ${}_c\mathbf{U}_1$  時可取其前  $2n$  組，其中  $2n$  為系統矩陣之維度。卡爾曼狀態向量即為

$$\hat{\mathbf{z}}^{CCA}(i) = {}_c\mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \mathbf{y}_i^- \quad (2.125)$$

另外，因  $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{R}_- = \mathbf{R}_-^T$  及  $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_+^T$ ，卡爾曼狀態向量也可表示如下：

$$\hat{\mathbf{z}}^{CCA}(i) = {}_c\mathbf{V}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \mathbf{y}_i^- \quad (2.126)$$

其中， ${}_c\mathbf{V}_1$  為  $(\mathbf{R}_+^{-1/2}\mathbf{H}\mathbf{R}_-^{-T/2})^T(\mathbf{R}_+^{-1/2}\mathbf{H}\mathbf{R}_-^{-T/2})$  之非零特徵值所對應之右側單位正交特徵向量。

#### 2.5.4 透過多元迴歸分析法(MLR)建立卡爾曼狀態向量 $\hat{\mathbf{z}}(i)$

根據第 2.4.4 節之多元迴歸分析法，其多變量協方差矩陣

$$\mathbf{R}_{\text{MLR}} = \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1/2} \mathbf{R}_{\text{xy}} = \mathbf{R}_{\text{y}_i^-\text{y}_i^+}^{-1/2} \mathbf{R}_{\text{y}_i^-\text{y}_i^+} = \mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H}^T \quad (2.127)$$

由於求  $\mathbf{y}_i^-$  主方向向量組成之矩陣  $\Psi_i^{\text{MLR}}$  即相當於求  $\mathbf{x}$  之主方向向量  $\mathbf{w}_x^T$ ，

因此， $\Psi_i^{\text{MLR}}$  可由  $\mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H}^T$  之奇異值分解求得。

$\mathbf{R}_{\text{MLR}}$  可作奇異值分解如下：

$$\mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} {}_M\mathbf{U}_1 & {}_M\mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_M\mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_M\mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_M\mathbf{V}_1^T \\ {}_M\mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = {}_M\mathbf{U}_1 {}_M\mathbf{S}_1 {}_M\mathbf{V}_1^T \quad (2.128)$$

其中，

${}_M\mathbf{U}_1$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}} \mathbf{R}_{\text{MLR}}^T$  之非零特徵值所對應之左側單位正交特徵向量；

${}_M\mathbf{U}_0$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}} \mathbf{R}_{\text{MLR}}^T$  之奇異值所對應之左側單位正交特徵向量；

${}_M\mathbf{S}_1$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之非零徵值所組成之對角矩陣；

${}_M\mathbf{S}_0$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之奇異值所組成之對角矩陣；

${}_M\mathbf{V}_1$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之非零特徵值所對應之右側單位正交特徵向量；

${}_M\mathbf{V}_0$  為  $\mathbf{R}_{\text{MLR}}^T \mathbf{R}_{\text{MLR}}$  之奇異值所對應之右側單位正交特徵向量。

則

$$\Psi_i^{\text{MLR}} = {}_C\mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \quad (2.129)$$

由於實作上  ${}_M \mathbf{S}_0$  未必為零，因此在決定  ${}_M \mathbf{U}_1$  時可取其前  $2n$  組，其中  $2n$  為系統矩陣之維度。卡爾曼狀態向量即為

$$\hat{\mathbf{z}}^{\text{MLR}}(i) = {}_M \mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \mathbf{y}_i^- \quad (2.130)$$

另外，因  $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$  及  $\mathbf{R}_- = \mathbf{R}_-^T$ ，卡爾曼狀態向量也可表示如下：

$$\hat{\mathbf{z}}^{\text{MLR}}(i) = {}_M \mathbf{V}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \mathbf{y}_i^- \quad (2.131)$$

其中， ${}_M \mathbf{V}_1$  為  $(\mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-T/2})^T (\mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-T/2})$  之非零特徵值所對應之右側單位正交特徵向量。

### 2.5.5 改良典型相關分析(Enhanced CCA，簡稱 ECCA)

就理論而言，CCA 的方法比 PLS 及 MLR 等方法會有更好的識別結果，尤其存在未被顯著激盪之模態(weakly excited modes)時，但這只在雜訊為白噪音的理想情況下才成立。Arun 及 Kung 【15】驗證了 CCA 法對於噪音特別敏感，特別是系統存在振態相近(closely spaced poles)。主要原因是 CCA 法需要對未來之輸出狀態  $\mathbf{y}_p^+$  作正規化，此反映於式(2.122)

$\mathbf{R}_{\text{CCA}} = \mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_+^{-1/2}$  之矩陣  $\mathbf{R}_+^{-1/2}$  中。針對 CCA 法對於噪音特性的敏感度，

Hong 【16】提出了相關之探討，茲說明如下：

若將受雜訊污染的輸出狀態  $\mathbf{y}(k)$  分解成未受汙染(noise-free)的訊號  $\bar{\mathbf{y}}(k)$  及雜訊  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  之疊加，亦即

$$\mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{y}}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (2.132)$$

其中雜訊  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  不同於先前式(2.11)中之  $\mathbf{v}(k)$ ，主要是  $\mathbf{v}(k)$  代表具高斯特性之白噪音， $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  則不一定為高斯白噪音。

定義  $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(i) = E[\bar{\mathbf{y}}(k+i)\bar{\mathbf{y}}^T(k)]$  且  $\bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}(i) = E[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k+i)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k)]$ ，假設  $\bar{\mathbf{y}}(k)$  與  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  無

相關性，則輸出狀態  $\mathbf{y}$  之協方差  $\mathbf{R}_{yy}(i)$  為

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{yy}(i) &= E[\mathbf{y}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] = E[\{\bar{\mathbf{y}}(k+1) + \boldsymbol{\varepsilon}(k+1)\}\{\bar{\mathbf{y}}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(k)\}^T] \\ &= E[\bar{\mathbf{y}}(k+1)\bar{\mathbf{y}}^T(k)] + E[\boldsymbol{\varepsilon}(k+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(k)] \\ &= \bar{\mathbf{R}}_{yy}(i) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(i)\end{aligned}\quad (2.133)$$

因此，式(2.116)可改寫為

$$\mathbf{R}_+ = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{yy}(0) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(0) & \bar{\mathbf{R}}_{yy}(-1) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(-1) & \dots & \bar{\mathbf{R}}_{yy}(-p+1) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(-p+1) \\ \bar{\mathbf{R}}_{yy}(1) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(1) & \bar{\mathbf{R}}_{yy}(0) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(0) & \dots & \bar{\mathbf{R}}_{yy}(-p+2) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{R}}_{yy}(p-1) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(p-1) & \bar{\mathbf{R}}_{yy}(p-2) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(p-2) & \dots & \bar{\mathbf{R}}_{yy}(0) + \mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}(0) \end{bmatrix}\quad (2.134)$$

若  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  為白噪音，則  $\bar{\mathbf{R}}_{\varepsilon\varepsilon}(i) = \mathbf{0}$  當  $i \neq 0$  時。因此，上式中非對角線之元素上的  $\bar{\mathbf{R}}_{\varepsilon\varepsilon}(i)$  為零；反之，若  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  不為白噪音，則  $\bar{\mathbf{R}}_{\varepsilon\varepsilon}(i) \neq \mathbf{0}$ ，這些噪音的協方差並不能忽略。當吾人將輸出狀態作正規化時需計算  $\mathbf{R}_+$  平方根之逆矩陣即  $\mathbf{R}_+^{-1/2}$ ，即使  $\mathbf{R}_+$  之非對角線上的元素數值不大，其逆矩陣都會造成非白噪音訊號的影響。有鑑於此，Hong 提出 Enhanced CCA 法加以改善，主要是將  $\mathbf{y}_i^+$  之正規化由整組訊號一致性的正規化改為將個別瞬時狀態獨立進行正規化，亦即考慮

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(i) \\ \hat{\mathbf{y}}(i+1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}(2i-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}^{-1/2}(0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{yy}^{-1/2}(0) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R}_{yy}^{-1/2}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ \mathbf{y}(i+1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(2i-1) \end{bmatrix}\quad (2.135)$$

或

$$\hat{\mathbf{y}}_i^+ = \mathbf{R}_+^{0-1/2} \mathbf{y}_i^+ \quad (2.136)$$

其中

$$\mathbf{R}_+^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{yy}(0) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{yy}(0) \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

因此， $\mathbf{R}_{CCA} = \mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_+^{-1/2}$  修正為  $\mathbf{R}_{ECCA} = \mathbf{R}_-^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_+^{0-1/2}$ 。滿足 ECCA 條件下

之卡爾曼狀態估計值  $\hat{\mathbf{z}}^{ECCA}(i)$  可估算如下：

$$\hat{\mathbf{z}}^{ECCA}(i) = \mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \mathbf{y}_i^- \quad (2.138)$$

其中， $\mathbf{U}_1$  為對應於  $\mathbf{R}_{ECCA} \mathbf{R}_{ECCA}^T$  之非零特徵值所對應之左側單位正交特徵向量。

另外，因  $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$  及  $\mathbf{R}_- = \mathbf{R}_-^T$ ，卡爾曼狀態向量也可表示如下：

$$\hat{\mathbf{z}}^{ECCA}(i) = \mathbf{V}_1^T \mathbf{R}_-^{-T/2} \mathbf{y}_i^- \quad (2.139)$$

其中， $\mathbf{V}_1$  為  $(\mathbf{R}_+^{0-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-T/2})^T (\mathbf{R}_+^{0-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-T/2})$  之非零特徵值所對應之右側單位正交特徵向量。



## 2.6 隨機狀態空間系統之參數識別

考慮輸出量測  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ，其中每個輸出量測分量中各有  $N$  筆資料，由式(2.108)可知，第  $i$  瞬時的卡爾曼狀態向量可表示為：

$$\hat{\mathbf{z}}(i) = \mathbf{\Psi}_i \mathbf{y}_i^-$$

現將由第  $i$  瞬時至第  $(i+j-1)$  瞬時共  $j$  組卡爾曼狀態向量所組成的序列可表示成：

$$\hat{\mathbf{Z}}_{i:i+j-1} = \mathbf{\Psi}_i \mathbf{Y}_{i:i+j-1}^- \quad (2.140)$$

其中， $\hat{\mathbf{Z}}_{ii+j-1} = [\hat{\mathbf{z}}(i) \ \hat{\mathbf{z}}(i+1) \ \hat{\mathbf{z}}(i+2) \ \cdots \ \hat{\mathbf{z}}(i+j-1)] \in \mathbf{R}^{2n \times j}$  (2.141)

$$\mathbf{Y}_{ii+j-1}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \cdots & \mathbf{y}(j-1) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \cdots & \mathbf{y}(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(i-1) & \mathbf{y}(i+1) & \cdots & \mathbf{y}(i+j) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{mi \times j}$$
 (2.142)

根據式(2.113)及(2.114)可將 $\mathbf{Y}_{ii+j-1}^+$ 表示成：

$$\mathbf{Y}_{ii+j-1}^+ = \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{Z}}_{ii+j-1} + \mathbf{W}_i^E \mathbf{E}_{ii+j-1}^+ \quad (2.143)$$

或

$$\mathbf{Y}_{ii+j-1}^+ = \mathbf{O}_i \Psi_i \mathbf{Y}_{ii+j-1}^- + \mathbf{W}_i^E \mathbf{E}_{ii+j-1}^+ \quad (2.144)$$

其中，

$$\mathbf{Y}_{ii+j-1}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) & \mathbf{y}(i+1) & \cdots & \mathbf{y}(i+j-1) \\ \mathbf{y}(i+1) & \mathbf{y}(i+2) & \cdots & \mathbf{y}(i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(2i-1) & \mathbf{y}(i+h) & \cdots & \mathbf{y}(2i+j-2) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{mi \times j}$$
 (2.145)

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{mi \times 2n}$$
 (2.146)

$$\mathbf{W}_i^E = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CK} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAK} & \mathbf{CK} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{K} & \mathbf{CA}^{i-2} \mathbf{K} & \mathbf{CA}^{i-3} \mathbf{K} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{mi \times mi}$$
 (2.147)

$$\mathbf{E}_{ii+j-1}^+ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(i) & \boldsymbol{\varepsilon}(i+1) & \boldsymbol{\varepsilon}(i+2) & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}(i+j-1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(i+1) & \boldsymbol{\varepsilon}(i+2) & \boldsymbol{\varepsilon}(i+3) & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}(i+j) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(i+2) & \boldsymbol{\varepsilon}(i+3) & \boldsymbol{\varepsilon}(i+4) & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}(i+j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}(2i-1) & \boldsymbol{\varepsilon}(2i) & \boldsymbol{\varepsilon}(2i+1) & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}(2i+j-2) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{mi \times j} \quad (2.148)$$

其中， $\mathbf{O}_i$  為觀測矩陣， $\mathbf{E}_{ii+j-1}^+$  為未來輸出向量的殘餘誤差矩陣， $\mathbf{W}_i^E$  為  $\mathbf{E}_{ii+j-1}^+$  的影響係數矩陣。

定義

$$\mathbf{Y}_{ii+j-1} = \mathbf{Y}_{0|2i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|j-1} \\ \mathbf{Y}_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \dots & \mathbf{y}(j-1) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \dots & \mathbf{y}(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(i-1) & \mathbf{y}(i) & \dots & \mathbf{y}(i+j-1) \\ \mathbf{y}(i) & \mathbf{y}(i+1) & \dots & \mathbf{y}(i+j-1) \\ \mathbf{y}(i+1) & \mathbf{y}(i+2) & \dots & \mathbf{y}(i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(2i-1) & \mathbf{y}(2i) & \dots & \mathbf{y}(2i+j-2) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2mi \times j} \quad (2.149)$$

式(2.149)中  $\mathbf{Y}_{0|2i-1}$  可表示成兩個 Hankel 矩陣，且由於 Hankel 矩陣須疊代  $i$  次，並取  $j$  筆資料，故矩陣  $\mathbf{Y}_{0|2i-1}$  之行數  $j = N - 2i + 1$ 。為達統計分析之穩定性，理論上  $j \rightarrow \infty$ ，亦即  $N \rightarrow \infty$ ，實務上  $N$  愈大愈好； $i$  則為分析者可自行選擇之參數，惟至少滿足決定系統矩陣維度( $2n$ )之所需，即  $mi \geq 2n$  或  $i \geq 2n/m$  之最小整數。

在數值計算上，可透過  $\mathbf{Y}_{0|2i-1}$  之 LQ 分解以建立  $\hat{\mathbf{Z}}_{0|2i-1}$ 。 $\mathbf{Y}_{0|2i-1}$  之 LQ 分解表示如下：

$$\mathbf{Y}_{0|2i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

其中， $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{2mi \times 2mi}$  為一下三角矩陣， $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{j \times 2mi}$  為一單位正交矩陣，即

$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2mi \times 2mi}$ 。而  $\mathbf{L}_{11} \in \mathbb{R}^{mi \times mi}$ ， $\mathbf{L}_{21} \in \mathbb{R}^{mi \times mi}$ ， $\mathbf{L}_{22} \in \mathbb{R}^{mi \times mi}$ ；

$\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{j \times mi}$ ， $\mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{j \times mi}$ 。

將式(2.150)改寫成：

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T \quad (2.151)$$

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T \quad (2.152)$$

從式(2.151)和式(2.144)可觀察到  $\mathbf{Q}_1^T$  為  $\mathbf{Y}_p$  之列空間單位正交基底， $\mathbf{Q}_2^T$  為  $\mathbf{E}_{02i-1}^+$  之列空間單位正交基底，因此  $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$ ， $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$  且  $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$ 。

$\mathbf{O}_i \hat{\mathbf{Z}}_{ii+j-1}$  可視為  $\mathbf{Y}_f$  投影至  $\mathbf{Y}_p$  向量空間之向量，基於向量投影定義可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p &= \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T (\mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_p^T)^* \mathbf{Y}_p \\ &= (\mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T) (\mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T)^T [(\mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T) (\mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T)^T]^* \mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T \\ &= (\mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T) [(\mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T)^T]^* (\mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T)^* \mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T \\ &= \mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T \end{aligned} \quad (2.153)$$

其中，上標\*表示擬逆矩陣(pseudo inverse)，其定義為  $\mathbf{M}^* = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$ 。

因此，

$$\mathbf{O}_i \hat{\mathbf{Z}}_{02i-1} = \mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T \quad (2.154)$$

則

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T \hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^* \quad (2.155)$$

觀察式(2.146)發現  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{C}$  矩陣隱含  $\mathbf{O}_i$  中，因此若能求得  $\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}$ ，便可得到  $\mathbf{O}_i$ 。

現根據 2.5 節所介紹之方法建立  $\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}$ 。將輸出協方差矩陣表示成：

$$\mathbf{H} = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T = (\mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T)(\mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T)^T = \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T \quad (2.156)$$

$$\mathbf{R}_- = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T = \mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T (\mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T)^T = \mathbf{L}_{11} \mathbf{L}_{11}^T \quad (2.157)$$

$$\mathbf{R}_+ = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_f^T = (\mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T)(\mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T)^T = \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{21}^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{L}_{22}^T \quad (2.158)$$

Hong [16] 定義  $\mathbf{R}_0$  為  $\mathbf{R}_+$  之對角線元素組成之對角矩陣； $\mathbf{L}_{11}$  可視為

$$\mathbf{R}_-^{1/2}。$$

則式(2.122)及(2.127)可改寫如下：

$$\mathbf{R}_+^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T} = (\mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T)^{-1/2} (\mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T) (\mathbf{L}_{11}^{-T}) = (\mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T)^{-1/2} \mathbf{L}_{21} \quad (2.159)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T} = (\mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T) (\mathbf{L}_{11}^{-T}) = \mathbf{L}_{21} \quad (2.160)$$

$$\mathbf{R}_0^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T} = \mathbf{R}_0^{-1/2} (\mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T) (\mathbf{L}_{11}^{-T}) = \mathbf{R}_0^{-1/2} \mathbf{L}_{21} \quad (2.161)$$

根據式(2.121)、(2.126)、(2.131)及(2.139)，吾人所求得之卡爾曼狀態向量分別表示如下：

$$\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{PLS}} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T \quad (2.162a)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{CCA}} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{Q}_1^T \quad (2.162b)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{MLR}} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{Q}_1^T \quad (2.163c)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{ECCA}} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{Q}_1^T \quad (2.162d)$$

其中， $\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{PLS}}$  為由 PLS 法所建立之卡爾曼狀態向量；

$\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{CCA}}$  為由 CCA 法所建立之卡爾曼狀態向量；

$\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{MLR}}$  為由 MLR 法所建立之卡爾曼狀態向量；

$\hat{\mathbf{Z}}_{02i-1}^{\text{ECCA}}$  為由 ECCA 法所建立之卡爾曼狀態向量；

$\mathbf{V}_1^T$  為  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

$\mathbf{V}_1^T$  為  $(\mathbf{R}_+^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T})^T (\mathbf{R}_+^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T})$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

$\mathbf{V}_1^T$  為  $(\mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T})^T (\mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T})$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

$\mathbf{V}_1^T$  為  $(\mathbf{R}_0^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T})^T (\mathbf{R}_0^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_-^{-1/2T})$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量。

將式(2.162)代入式(2.155)即可求得  $\mathbf{O}_i$ 。

$$\text{令 } \mathbf{O}_i(m+1:mi,:) = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix}, \mathbf{O}_i(1:(i-1)m,:) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-2} \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

其中  $\mathbf{O}_i(m+1:mi,:)$  代表  $\mathbf{O}_i$  矩陣中  $m+1$  至  $mi$  列所組成之矩陣，

$\mathbf{O}_i(1:m(i-1),:)$  代表  $\mathbf{O}_i$  矩陣中 1 至  $m(i-1)$  列所組成之矩陣。將式(2.163)

改寫成：

$$\mathbf{O}_i(m+1:mi,:) = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-2} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{O}_i(1:m(i-1),:) \mathbf{A} \quad (2.164)$$

求得  $\mathbf{A}$  矩陣

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_i(1:m(i-1),:) \mathbf{O}_i(m+1:mi,:)^* \quad (2.165)$$

其中， $\mathbf{O}_i^* = [\mathbf{O}_i(1:(i-1)m,:)]^T \mathbf{O}_i(1:(k-1)m,:)^{-1} \mathbf{O}_i(1:(i-1)m,:)^T \in \mathbf{R}^{2n \times (i-1)m}$

為  $\mathbf{O}_i$  之擬逆 (pseudo-inverse) 矩陣。

觀察  $\mathbf{O}_i$  矩陣可得知其前  $m$  列即為  $\mathbf{C}$  矩陣

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}_i(1:i,:)$$
 (2.166)

## 2.7 萃取系統模態參數

由於模態參數即隱含於  $\mathbf{A}$  與  $\mathbf{C}$  矩陣中，因此只需針對兩者計算，便可求得系統等效之自然頻率、阻尼比與模態參數。首先，對  $\mathbf{A}$  矩陣作特徵分析可得：

$$\mathbf{A}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}\mathbf{\Lambda}$$
 (2.167)

其中，

$$\mathbf{\Pi} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{2n}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$
 (2.168)

兩者皆是共軛複數之形式，特徵矩陣  $\mathbf{\Pi}$  是由特徵向量組成； $\mathbf{\Lambda}$  為特徵值所組成之對角矩陣。特徵向量  $\mathbf{\Pi}$  為系統之模態向量矩陣，可透過  $\mathbf{C}$  矩陣將其轉換到模態座標上，即可求得降階系統之模態向量矩陣【32】：

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}\mathbf{\Pi}$$
 (2.169)

$\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$ 。而系統之等效頻率及阻尼比，可由  $\mathbf{\Lambda}_c$  的實部與虛部求得，將  $\mathbf{\Lambda}$

轉換為  $\mathbf{\Lambda}_c$  如下：

$$\mathbf{\Lambda}_c = \frac{\ln(\mathbf{\Lambda})}{\Delta t}, \quad \mathbf{\Lambda}_c = \begin{bmatrix} \lambda_{c,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{c,2n} \end{bmatrix}$$
 (2.170)

$$\text{其中，} \lambda_{c,i} = \alpha_i \pm j\beta_i = -\xi_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}$$
 (2.171)

$\omega_i$  為系統第  $i$  模態之自然頻率； $\xi_i$  為系統第  $i$  模態之阻尼比。由式(2.171)可求得：

$$\omega_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \quad (2.172a)$$

$$\xi_i = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \quad (2.172b)$$

由於特徵值  $\Lambda$  與特徵向量  $\Pi$  為共軛複數之形式，因此所求得之等效自然頻率、阻尼比與模態數量均為系統自由度的兩倍，且以兩兩共軛成對出現，故實際上所求得之參數仍與自由度數量相同。

## 2.8 數值範例

本節將以一棟阻尼比為 0.01 之五層樓二維剪力屋架(圖 2.2)進行數值模擬驗證，結構系統之參數歸納於表 2.1。考慮一 White noise 且調整尖峰地表加速度(peak ground acceleration, 簡稱 PGA)至 0.1g 作為輸入擾動(圖 2.3)，並分別以使用 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 與 SSI-ECCA 這五種識別方法進行分析。識別之結果歸納於表 2.2 至 2.7 及圖 2.4 至 2.8。

為評估模態向量識別結果之準確性，茲定義一誤差指標  $E_k$  如下：

$$E_i = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \varepsilon_{i,k}} \quad (2.173)$$

$$\text{其中，} \varepsilon_{i,k} = \frac{(\hat{\phi}_{i,k} - \phi_{i,k})^2}{\phi_{i,k}^2} ;$$

$\hat{\phi}_{i,k}$  為由系統識別所求出之第  $i$  模態向量的第  $k$  元素；

$\phi_{i,k}$  為由特徵分析得到之第  $i$  模態向量的第  $k$  元素；

觀察表 2.7 及圖 2.4 至 2.8 可得知，第一模態與第二模態之識別結果 SSI-COV 與 SSI-PLS 並無太大之差別，而 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 之誤差指標( $E_1$  及  $E_2$ )皆小於 SSI 約 20~25%。於第三模態之識別結果中，SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 之誤差指標( $E_3$ )皆小於 SSI-COV，其中 SSI-PLS 約小於 50%，其餘三者則較 SSI-COV 小了約 70%。於第四模態之識別結果中，SSI-PLS 之誤差指標( $E_4$ )為最大，而 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 皆較 SSI-COV 小。於第五模態之識別結果中，五種識別法之誤差指標相較於前幾模態大了許多，顯示五種識別法於高頻振態識別之能力已有所不足，但其中 SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 之誤差指標仍小於 SSI-COV，說明 SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 在模態識別上確實優於 SSI-COV，而在低頻模態識別上，以 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 較佳。



表 2.1 五層樓結構系統之參數(特徵分析)

結構參數						
Floor	1F	2F	3F	4F	5F	
$m_i$ (kgf $\times$ s <sup>2</sup> /m)	25.8	25.8	25.8	25.8	25.8	
$k_i$ (kgf/m)	$4\times 10^6$					
模態參數						
Mode	1	2	3	4	5	
Frequency(Hz)	17.84	52.07	79.8	82.08	94.61	
Damping Ratio(%)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
Mode shapes	5F	1	1	1	1	
	4F	0.92	0.31	-0.72	-1.83	-2.68
	3F	0.76	-0.59	-1.2	0.52	3.51
	2F	0.55	-1.09	0.37	1.4	-3.23
	1F	0.28	-0.83	1.31	-1.68	1.92

表 2.2 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithm=SSI-COV)

Mode	1	2	3	4	5	
Frequency(Hz)	17.86	52.00	80.52	82.51	94.07	
Damping Ratio(%)	1.19	0.88	1.59	0.51	1.51	
Mode shapes	5F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4F	0.92	0.31	-0.76	-1.82	0.47
	3F	0.76	-0.59	-1.15	0.53	-2.04
	2F	0.55	-1.09	0.38	1.35	0.80
	1F	0.28	-0.83	1.30	-1.64	1.32

表 2.3 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithm=SSI-PLS)

Mode	1	2	3	4	5	
Frequency(Hz)	17.88	51.96	76.60	82.09	93.65	
Damping Ratio(%)	1.18	0.88	1.29	1.03	0.91	
Mode shapes	5F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4F	0.92	0.31	-0.70	-1.84	-1.46
	3F	0.76	-0.59	-1.23	0.55	0.91
	2F	0.55	-1.09	0.36	1.37	1.32
	1F	0.28	-0.83	1.29	-1.73	1.54

表 2.4 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithm=SSI-MLR)

Mode		1	2	3	4	5
Frequency(Hz)		17.87	51.99	79.62	82.16	94.37
Damping Ratio(%)		1.18	0.88	1.28	1.01	0.96
Mode shapes	5F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4F	0.92	0.31	-0.71	-1.84	-1.80
	3F	0.76	-0.59	-1.22	0.56	1.97
	2F	0.55	-1.09	0.39	1.38	-1.91
	1F	0.28	-0.83	1.31	-1.73	1.61

表 2.5 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithm=SSI-CCA)

Mode		1	2	3	4	5
Frequency(Hz)		17.87	51.99	79.61	82.15	94.36
Damping Ratio(%)		1.19	0.88	1.28	1.02	0.97
Mode shapes	5F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4F	0.92	0.31	-0.71	-1.84	-0.71
	3F	0.76	-0.59	-1.22	0.56	-1.22
	2F	0.55	-1.09	0.38	1.38	0.38
	1F	0.28	-0.83	1.31	-1.73	1.31

表 2.6 五層樓結構系統之模態識別結果(Algorithm=SSI-ECCA)

Mode		1	2	3	4	5
Frequency(Hz)		17.86	52.00	79.75	82.15	94.47
Damping Ratio(%)		1.19	0.87	1.27	1.01	1.03
Mode shapes	5F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4F	0.92	0.31	-0.71	-1.84	-1.80
	3F	0.76	-0.59	-1.22	0.56	1.96
	2F	0.55	-1.09	0.39	1.38	-1.90
	1F	0.28	-0.83	1.31	-1.73	1.62

表 2.7 五層樓結構系統之模態參數誤差( $E_i$ )比較

Algorithm	Mode( <i>i</i> )				
	1	2	3	4	5
SSI-COV	8.47E-04	2.06E-03	2.99E-02	2.80E-02	3.39E+00
SSI-PLS	8.69E-04	1.99E-03	1.55E-02	2.86E-02	2.41E+00
SSI-MLR	6.57E-04	1.49E-03	8.45E-03	2.75E-02	9.98E-01
SSI-CCA	6.63E-04	1.49E-03	8.17E-03	2.79E-02	2.82E+00
SSI-ECCA	6.55E-04	1.49E-03	8.59E-03	2.76E-02	1.00E+00



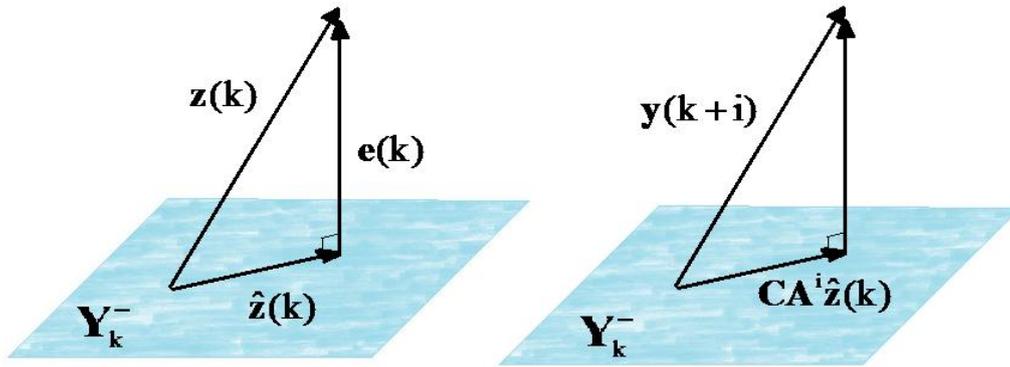


圖 2.1 子空間向量投影示意圖【16】

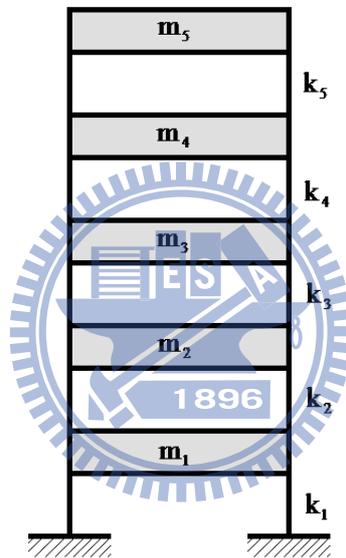


圖 2.2 五層樓二維剪力屋架示意圖

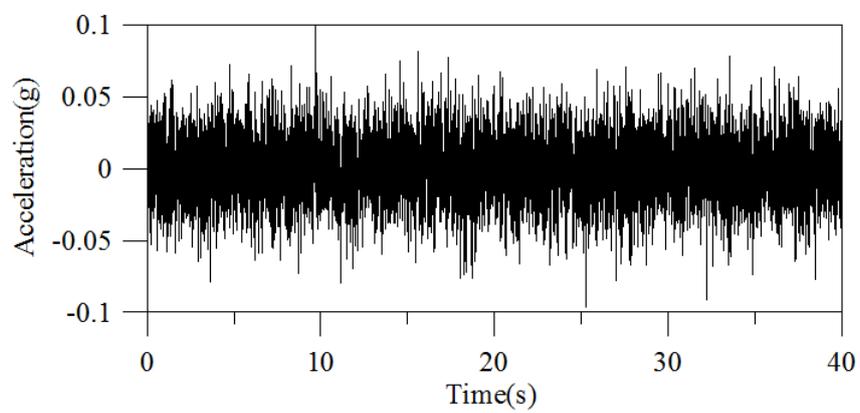


圖 2.3 White noise 加速度歷時圖(PGA=0.1g)

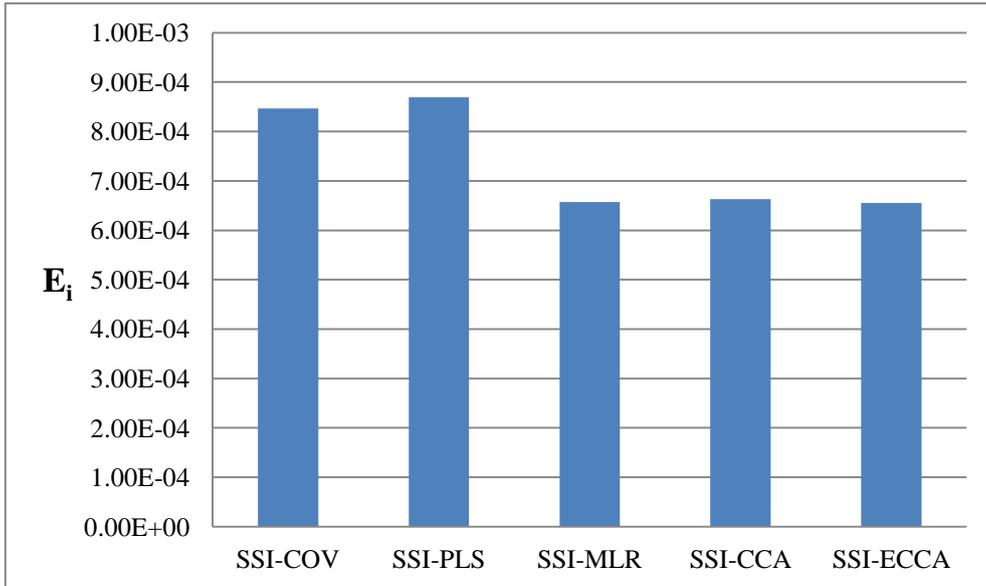


圖 2.4 Mode1 之系統識別誤差比較

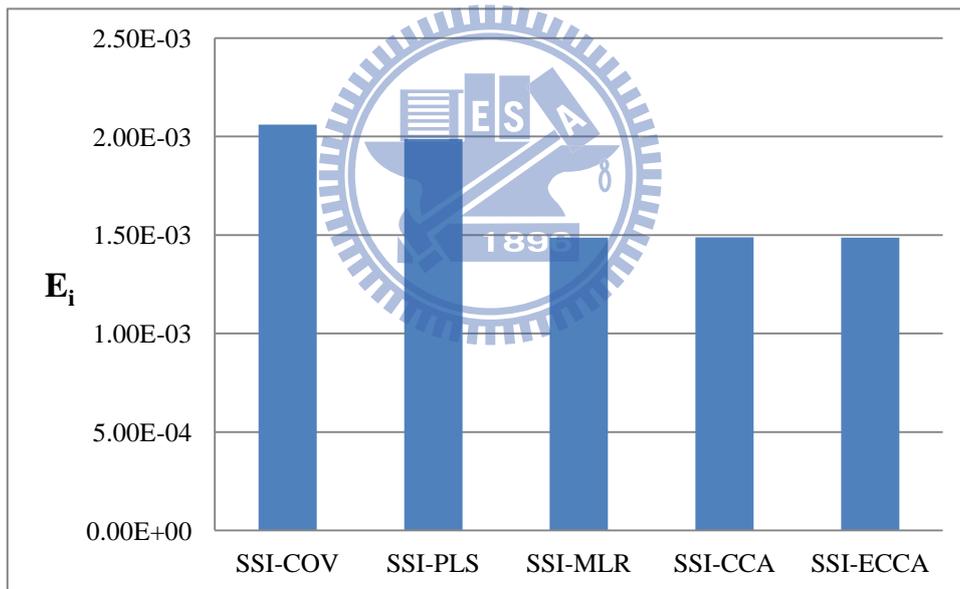


圖 2.5 Mode2 之系統識別誤差比較

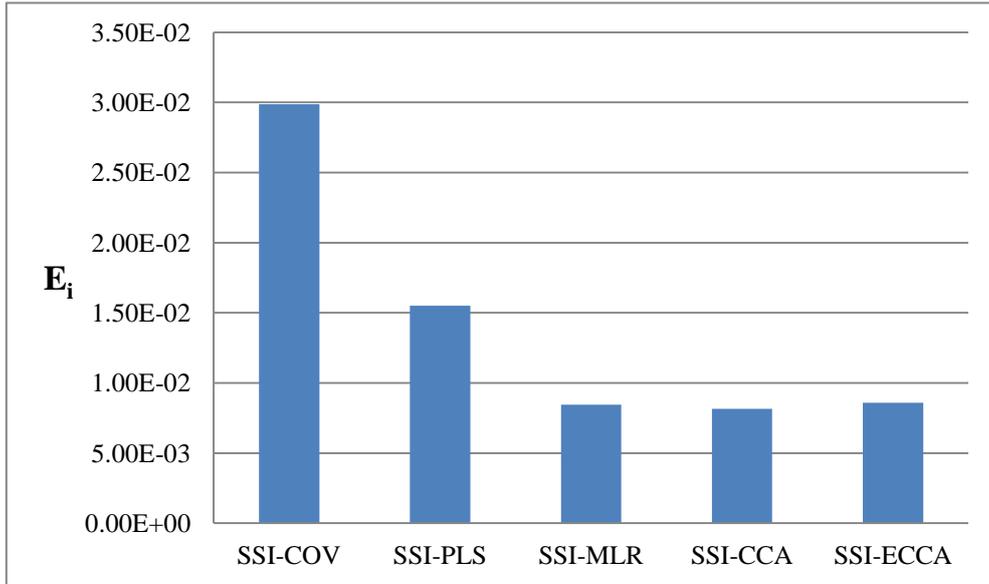


圖 2.6 Mode3 之系統識別誤差比較

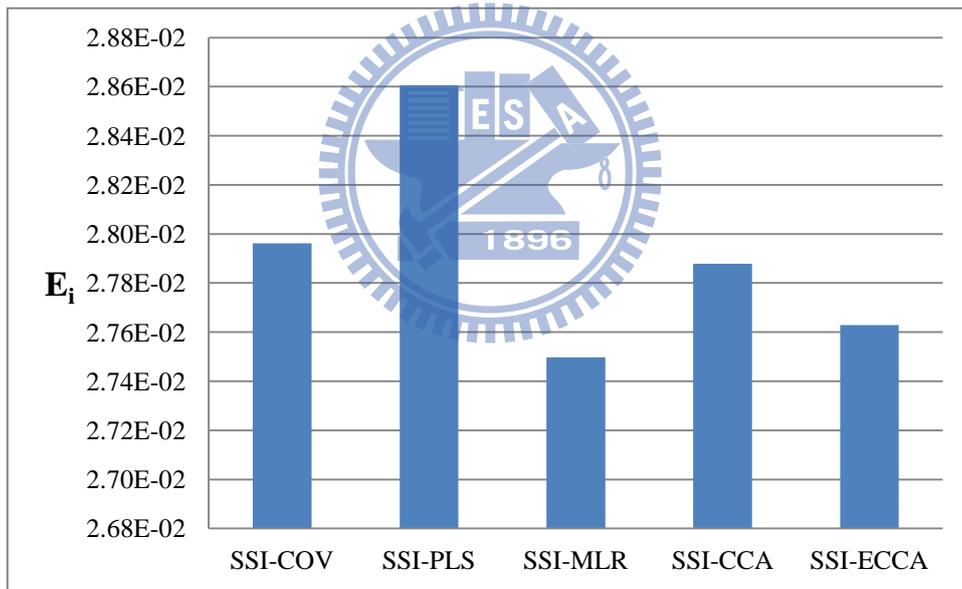


圖 2.7 Mode4 之系統識別誤差比較

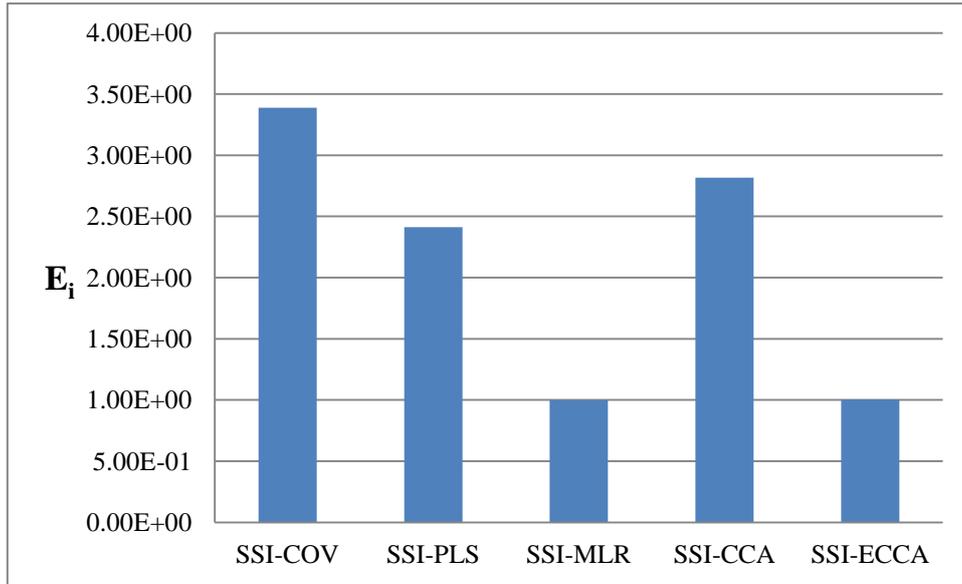
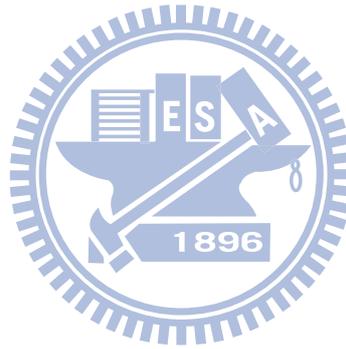


圖 2.8 Mode5 之系統識別誤差比較





## 第三章 DLV 損傷探測分析之理論與數值驗證

### 3.1 前言

結構損傷探測係藉由結構於受損前、後之動態或是力學特性等變化，以推估結構受損位置與受損程度。台灣受其地理位置因素影響，導致地震頻繁，結構損傷探測技術的發展，可幫助吾人在地震後研判結構物是否受損，及其受損位置，以利後續補強工作。Bernal【18】於 2002 年提出損傷定位向量法(Method of Damage Locating Vectors, 簡稱 DLV 法), 係一種以結構柔度矩陣變化為基礎的結構損傷探測方法, 其概念為透過將結構受損前、後柔度差異矩陣作奇異值分解(singular value decomposition, 簡稱 SVD), 以得到對應於零特徵值之特徵向量最作荷載, 施加於破壞之前結構上, 由其應力分佈結果研判受損構件, 作為結構損傷探測之依據。

Bernal【23】並於 2006 年提出改良的 DLV 法, 結合狀態空間模型建立結構柔度矩陣, 並以此為基礎發展出新的結構損傷探測方法(本文稱之為狀態空間 DLV 法), 結合系統識別分析方法, 如前章節所介紹的 SSI 識別法, 則吾人可由識別出的狀態系統之參數進行損傷探測分析。本章將回顧 Bernal 所提出的損傷探測理論。

## 3.2 DLV 損傷探測理論

### 3.2.1 DLV 法之理論回顧

考慮一  $n$  個自由度之結構系統，其健康狀態之柔度矩陣為  $\mathbf{F}^i$ ，受損狀態之柔度矩陣為  $\mathbf{F}^d$ 。假設存在一荷載向量，將其分別作用在健康及受損之結構系統時，會產生相同之變位，則定義此荷載向量為  $\mathbf{L}$ 。柔度矩陣  $\mathbf{F}$  與荷載向量  $\mathbf{L}$  之關係式可表示成：

$$\mathbf{F}^d \mathbf{L} = \mathbf{F}^i \mathbf{L} \quad (3.1)$$

式(3.1)可進一步表示成：

$$(\mathbf{F}^d - \mathbf{F}^i) \mathbf{L} = \mathbf{D}_F \mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

式(3.2)中的  $\mathbf{D}_F = \mathbf{F}^d - \mathbf{F}^i$  為健康結構與受損結構之柔度矩陣的變化量。在數學上，有三種情況可滿足式(3.2)：(1)  $\mathbf{D}_F = \mathbf{0}$ ，表示結構系統之柔度矩陣的變化量為零，即結構並無發生破壞，不具討論意義；(2)  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ ，表示此荷載向量不存在，因此也不具討論意義；(3)  $\text{rank}(\mathbf{D}_F) < n$ ，表示  $\mathbf{D}_F$  為秩缺(rank deficient)之情況，即荷載向量  $\mathbf{L}$  為零空間(null space)之基底(basis)。滿足情況(3)之荷載向量  $\mathbf{L}$ ，即稱之為破壞定位向量(DLV)。

DLV 可由對  $\mathbf{D}_F$  作奇異值分解而得，即：

$$\mathbf{D}_F = \mathbf{U}_{D_F} \mathbf{S}_{D_F} \mathbf{V}_{D_F}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n & \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}^T \quad (3.3)$$

其中，

${}_{D_F} \mathbf{U}_n$  為  $\mathbf{D}_F \mathbf{D}_F^T$  之非零特徵值所對應之左側單位特徵向量；

${}_{D_F} \mathbf{U}_0$  為  $\mathbf{D}_F \mathbf{D}_F^T$  之奇異值所對應之左側單位特徵向量；

${}_{D_F} \mathbf{S}_n$  為  $\mathbf{D}_F^T \mathbf{D}_F$  之非零特徵值所組成之對角矩陣；

${}_{D_F} \mathbf{S}_0$  為  $\mathbf{D}_F^T \mathbf{D}_F$  之奇異值所組成之對角矩陣；

${}_{D_F} \mathbf{V}_n$  為  $\mathbf{D}_F^T \mathbf{D}_F$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

${}_{D_F} \mathbf{V}_0$  為  $\mathbf{D}_F^T \mathbf{D}_F$  之奇異值所對應之右側單位特徵向量。

將式(3.3)後乘上  ${}_{D_F} \mathbf{V}^T$  可得到：

$$\mathbf{D}_F ({}_{D_F} \mathbf{V}^T) = {}_{D_F} \mathbf{U}_{D_F} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}_{D_F} \mathbf{U}_n & {}_{D_F} \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{D_F} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{D_F} \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

由於  ${}_{D_F} \mathbf{V}$  為正交矩陣，即  ${}_{D_F} \mathbf{V}^T = {}_{D_F} \mathbf{V}^{-1}$ 。式(3.4)可改寫成：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_F ({}_{D_F} \mathbf{V}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_F ({}_{D_F} \mathbf{V}_n) & \mathbf{D}_F ({}_{D_F} \mathbf{V}_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}_{D_F} \mathbf{U}_n {}_{D_F} \mathbf{S}_n & {}_{D_F} \mathbf{U}_0 {}_{D_F} \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{D_F} \mathbf{U}_n {}_{D_F} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中， $\mathbf{D}_F ({}_{D_F} \mathbf{V}_0) = \mathbf{0}$ 。將其與式(3.2) 比較，可知  ${}_{D_F} \mathbf{V}_0$  即為破壞定位向量。

在現實中，數值計算所造成之誤差或訊號量測受雜訊影響而產生的誤差，皆會使得  ${}_{D_F} \mathbf{S}_0$  無法完全為零。為了將奇異值分解後的矩陣  ${}_{D_F} \mathbf{S}$  有效的區分出零空間大小，Bernal 提出一指標係數  $svn_i$  (singular value normalize) 作為零空間篩選之依據，其定義如下：

$$svn_i = \sqrt{\frac{\mathbf{d}_F \mathbf{S}_i \|\mathbf{d}_F \mathbf{V}_i\|_\infty^2}{\max(\mathbf{d}_F \mathbf{S}_i \|\mathbf{d}_F \mathbf{V}_i\|_\infty^2)}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

其中， $\mathbf{d}_F \mathbf{S}_i$  為柔度變化矩陣  $\mathbf{D}_F$  之第  $i$  個奇異值； $\|\mathbf{d}_F \mathbf{V}_i\|_\infty^2$  為  $\mathbf{d}_F \mathbf{S}_i$  所對應特徵向量  $\mathbf{d}_F \mathbf{V}_i$  之無窮範數(infinity norm)，即向量  $\mathbf{d}_F \mathbf{V}_i$  中之絕對值最大者。Bernal 建議，凡滿足  $svn_i \leq 0.2$  者，其所對應特徵向量  $\mathbf{d}_F \mathbf{V}_i$  即視為零空間，據以挑選出結構系統之破壞定位向量  $\mathbf{L}_i$ 。

此外，Bernal 並定義結構系統於第  $i$  組破壞定位向量  $\mathbf{L}_i$  荷載作用下之正規化應力指標  $nsi_{j,i}$  (normalized stress index) 如下：

$$nsi_{j,i} = \left| \frac{\sigma_{j,i}}{\sigma_{j,i}^{\max}} \right| \quad j = 1, 2, \dots, n, \forall i \quad (3.7)$$

其中， $\sigma_{j,i}$  為對應於第  $i$  組破壞定位向量  $\mathbf{L}_i$  作用下第  $j$  個元素之應力或內力。

另外，Bernal 定義一加權應力指標  $\mathbf{WSI}_j$  (weighted stress index) 作為判斷結構損傷之依據如下：

$$\mathbf{WSI}_j = \frac{\sum_{i=1}^{nDLV} \overline{nsi_{j,i}}}{nDLV} \quad (3.8)$$

其中， $\overline{nsi_{j,i}} = \max(svn_i, 0.015)$ ， $nDLV$  為破壞定位向量總數。根據計算出對應於各桿件之加權應力指標  $\mathbf{WSI}_j$ ，由其中相對數值較小者，判斷出可能受損之元素。

### 3.2.2 狀態空間 DLV 法之理論回顧

由 2.2.1 節中可知，一有  $n$  個自由度的結構系統，在受外力作用下，其狀態空間方程式可表示為：

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.9)$$

或

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.10)$$

其中， $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ ，為連續時間之狀態向量；

$\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  為連續時間之系統矩陣；

$\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{2n \times r}$  為連續時間之輸入影響矩陣。

假設初始條件為零的情況下，對式(3.10)作拉普拉斯轉換(Laplace transform)，則

$$s\mathbf{z}(s) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}(s) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(s) \quad (3.11)$$

或

$$\mathbf{z}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(s) \quad (3.12)$$

考慮位移狀態的部分：

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{C}_0 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(s) \quad (3.13)$$

其中， $\mathbf{C}_0 = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$  為位移狀態輸出矩陣。

當  $s=0$  時(靜態)，即可求得結構之柔度矩陣  $\mathbf{F}$  為，亦即：

$$\mathbf{F} = -\mathbf{C}_0 \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c \quad (3.14)$$

現將式(3.10)乘上  $C_0$  可得速度狀態如下：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C_0 A_c \mathbf{z}(t) + C_0 B_c \mathbf{u}(t) \quad (3.15)$$

將上式對  $t$  微分可得加速度狀態如下：

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = C_0 A_c \dot{\mathbf{z}}(t) + C_0 B_c \dot{\mathbf{u}}(t) = C_0 A_c^2 \mathbf{z}(t) + C_0 A_c B_c \mathbf{u}(t) + C_0 B_c \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (3.16)$$

其中， $C_0 B_c = 0$ ，則式(3.15)與(3.16)可改寫為：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C_0 A_c \mathbf{z}(t) \quad (3.17a)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = C_0 A_c^2 \mathbf{z}(t) + C_0 A_c B_c \mathbf{u}(t) \quad (3.17b)$$

另外， $\dot{\mathbf{x}}(t)$  與  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  也可表式成：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C_1 \mathbf{z}(t) \quad (3.18a)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = C_2 \mathbf{z}(t) + \tilde{D} \mathbf{u}(t) \quad (3.18b)$$

其中， $C_1 = [0 \quad I] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$  為速度狀態輸出矩陣；

$C_2 = C_0 A_c^2 \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$  為加速度狀態輸出矩陣；

$\tilde{D} = C_0 A_c B_c \in \mathbb{R}^{n \times r}$  為加速度直接傳輸矩陣。

比較式(3.17)及(3.18)可推得：

$$C_1 = C_0 A_c ; C_0 = C_1 A_c^{-1} \quad (3.19)$$

以及

$$C_2 = C_0 A_c^2 = C_1 A_c = [-M^{-1}E \quad -M^{-1}E] ; C_0 = C_2 A_c^{-2} \quad (3.20)$$

此外

$$\tilde{D} = C_0 A_c B_c = M^{-1}E \quad (3.21)$$

利用  $C_0$ 、 $C_1$ 、 $C_2$  之關係，式(3.14)與(3.21)可表示成：

$$\mathbf{F} = -\mathbf{C}_0 \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c = -\mathbf{C}_1 \mathbf{A}_c^{-2} \mathbf{B}_c = -\mathbf{C}_2 \mathbf{A}_c^{-3} \mathbf{B}_c \quad (3.22)$$

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{B}_c = \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c = \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_c^{-2} \mathbf{B}_c \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{C}_0 \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c = \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_c = \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c \quad (3.24)$$

式(3.22)、(3.23)及(3.24)可簡化成

$$\mathbf{F} = -\mathbf{C}_g \mathbf{A}_c^{-(g+1)} \mathbf{B}_c \quad (3.25)$$

$$\mathbf{C}_g \mathbf{A}_c^{-g} \mathbf{B}_c = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{C}_g \mathbf{A}_c^{1-g} \mathbf{B}_c \quad (3.27)$$

其中， $\mathbf{C}_g \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ ，可為  $\mathbf{C}_0$ 、 $\mathbf{C}_1$  或  $\mathbf{C}_2$ ， $g$  由量測輸出訊號之物理量而定，

$g=0$  對應於位移狀態， $g=1$  對應於速度狀態， $g=2$  對應於加速度狀態。

將式(3.26)及(3.27)合併可得：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_g \mathbf{A}_c^{-g} \\ \mathbf{C}_g \mathbf{A}_c^{1-g} \end{bmatrix} \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.28)$$

或

$$\mathbf{H} \mathbf{B}_c = \mathbf{J} \tilde{\mathbf{D}}; \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J} \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.29)$$

其中， $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ， $g=0,1 \text{ or } 2$ ， $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ 。

將式(3.29)代入式(3.25)可將結構之柔度矩陣改寫為：

$$\mathbf{F} = -\mathbf{C}_g \mathbf{A}_c^{-(g+1)} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{J} \tilde{\mathbf{D}}) = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.30)$$

其中，

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{C}_g \mathbf{A}_c^{-(g+1)} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J} \quad (3.31)$$

根據式(3.31)計算結構物破壞前、後之柔度差異矩陣：

$$\mathbf{D}_F = \mathbf{F}^d - \mathbf{F}^i = \mathbf{Q}^d \tilde{\mathbf{D}}^d - \mathbf{Q}^i \tilde{\mathbf{D}}^i \quad (3.32)$$

其中，上標 i、d 分別表示未破壞(intact)與破壞(damaged)之結構狀態。

令  $\Delta \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}^d - \tilde{\mathbf{D}}^i$  並代入式(3.32)可得：

$$\mathbf{D}_F = (\mathbf{Q}^d - \mathbf{Q}^i) \tilde{\mathbf{D}}^i + \mathbf{Q}^d \Delta \tilde{\mathbf{D}} = \Delta \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{D}}^i + \mathbf{Q}^d \Delta \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.33)$$

若結構系統受損前後系統之質量並無變化，則由式(3.21)可知：

$$\Delta \tilde{\mathbf{D}} = \Delta(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

將式(3.34)代入式(3.33)，可得：

$$\mathbf{D}_F = \Delta \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{D}}^i \quad (3.35)$$

由於柔度矩陣為對稱，因此柔度差異矩陣同樣為對稱，即  $\mathbf{D}_F^T = \mathbf{D}_F$ 。

將式(3.35)表示成：

$$\mathbf{D}_F^T = (\tilde{\mathbf{D}}^i)^T \Delta \mathbf{Q}^T = \mathbf{D}_F \quad (3.36)$$

對  $\Delta \mathbf{Q}^T$  作奇異值分解可得：

$$\Delta \mathbf{Q}^T = {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{U} {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{S} {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{U}_n & {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{V}_n & {}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}^T \quad (3.37)$$

其中，

${}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{U}_n$  為  $\Delta \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{Q}$  之非零特徵值所對應之左側單位特徵向量；

${}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{U}_0$  為  $\Delta \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{Q}$  之奇異值所對應之左側單位特徵向量；

${}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{S}_n$  為  $\Delta \mathbf{Q} \Delta \mathbf{Q}^T$  之非零特徵值所組成之對角矩陣；

${}_{\Delta \mathbf{Q}^T} \mathbf{S}_0$  為  $\Delta \mathbf{Q} \Delta \mathbf{Q}^T$  之奇異值所組成之對角矩陣；

${}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_n$  為  $\Delta \mathbf{Q} \Delta \mathbf{Q}^T$  之非零特徵值所對應之右側單位特徵向量；

${}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_0$  為  $\Delta \mathbf{Q} \Delta \mathbf{Q}^T$  之零特徵值所對應之右側單位特徵向量。

將式(3.37)後乘上  ${}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}^{-T}$  可得到：

$$\Delta \mathbf{Q}^T {}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}^{-T} = {}_{\Delta Q^T} \mathbf{U} {}_{\Delta Q^T} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}_{\Delta Q^T} \mathbf{U}_n & {}_{\Delta Q^T} \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

由於  ${}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}$  為正交矩陣，即  ${}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}^T = {}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}^{-1}$ 。式(3.38)可改寫成：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}^T {}_{\Delta Q^T} \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Q}^T {}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_n & \Delta \mathbf{Q}^T {}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}_{\Delta Q^T} \mathbf{U}_n {}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_n & {}_{\Delta Q^T} \mathbf{U}_0 {}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{\Delta Q^T} \mathbf{U}_n {}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

其中， $\Delta \mathbf{Q}^T {}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ 。現將式(3.36)後乘  ${}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_0$  可得：

$$\mathbf{D}_{F \Delta Q^T} \mathbf{V}_0 = (\tilde{\mathbf{D}}^i)^T \Delta \mathbf{Q}^T {}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_0 = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

由上式可知  ${}_{\Delta Q^T} \mathbf{V}_0$  即為  $\mathbf{D}_F$  之破壞定位向量  $\mathbf{L}$ 。

實際上，SVD 分解會因為數值計算及系統識別所產生之誤差而無法得到理想的奇異值( ${}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_0$ )，因此 Bernal 定義一指標  $q$ ，作為破壞定位向量之數量篩選標準：

$$q = 0.5 \left[ \text{No. of } \gamma_i \leq 0.1, \gamma_i = \sqrt{\frac{{}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_i}{\max({}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_i)}} \right] \quad (3.41)$$

其中， ${}_{\Delta Q^T} \mathbf{S}_i$  為  $\Delta \mathbf{Q}^T$  第  $i$  個奇異值。此外，定義於第  $i$  組破壞定位向量  $\mathbf{L}_i$  作

用下之正規化應力指標  $nsi_{j,i}$ ，如下：

$$nsi_{j,i} = \left| \frac{\sigma_{j,i}}{\sigma_{j,i}^{\max}} \right| \quad (3.42)$$

其中， $\sigma_{j,i}$  為對應於第  $i$  組破壞定位向量  $\mathbf{L}_i$  作用下第  $j$  個元素之應力或內力。

此外，重新定義加權應力指標  $\mathbf{WSI}_j$ ，其計算方式如下：

$$\mathbf{WSI}_j = \sum_{i=1}^q n s_{j,i} \quad (3.49)$$

Bernal 認為凡  $\mathbf{WSI}_j \leq 0.1(\mathbf{WSI}_j)_{\max}$  者，則視該桿件或樓層 ( $j$ ) 為可能受損

(Potentially Damaged, PD) 的元素，亦即：

$$\text{PD} = \left\{ \text{element}_j \text{'s } \forall \mathbf{WSI}_j \leq 0.1(\mathbf{WSI}_j)_{\max} \right\} \quad (3.50)$$

代表結構系統可能受損之元素。



### 3.3 結合 SSI 系統識別之損傷探測分析

於實務應用上，欲以狀態空間 DLV 法偵測出損傷元件，必須先由系統識別分析出結構於健康及損傷後之連續時間系統矩陣與狀態輸出影響矩陣。本節將以第二章所發展的 SSI 識別分析方法，識別出結構系統之系統矩陣與狀態輸出影響矩陣，作為狀態空間 DLV 法分析之基礎，以驗證結合 SSI 與狀態空間 DLV 法之可行性。

以 SSI 系統識別所得到的離散時間系統矩陣  $\bar{\mathbf{A}}$  與狀態輸出影響矩陣  $\bar{\mathbf{C}}_g$ ，未必全等於式(2.8)中之  $\mathbf{A}$  與  $\mathbf{C}_g$ 。惟  $\bar{\mathbf{A}}$  與  $\mathbf{A}$  為相似矩陣(similar matrices)，其特徵值均相同且特徵向量亦為線性相關。此外，根據式(2.9a)，可將離散時間系統矩陣  $\bar{\mathbf{A}}$  轉換為連續時間系統矩陣  $\bar{\mathbf{A}}_c$  如下：

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \frac{\ln(\bar{\mathbf{A}})}{\Delta t} \quad (3.51)$$

將式(3.31)中之  $\mathbf{A}_c$  及  $\mathbf{C}_g$  分別以  $\bar{\mathbf{A}}_c$  及  $\bar{\mathbf{C}}_g$  取代，可改寫成：

$$\bar{\mathbf{Q}} = -\bar{\mathbf{C}}_g \bar{\mathbf{A}}_c^{-(g+1)} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{J} \quad (3.52)$$

其中，

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_g \bar{\mathbf{A}}_c^{-g} \\ \bar{\mathbf{C}}_g \bar{\mathbf{A}}_c^{1-g} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}, \quad g = 0, 1 \text{ or } 2 \quad (3.53a)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times n} \quad (3.53b)$$

綜上所述，吾人可由位移、速度或加速度輸出訊號，識別出結構系統之  $\bar{\mathbf{A}}$  及  $\bar{\mathbf{C}}_g$  矩陣，並將  $\bar{\mathbf{A}}$  轉換為  $\bar{\mathbf{A}}_c$  後，再以式(3.52)進行狀態空間 DLV 法損傷探測分析。狀態空間 DLV 損傷探測法分析流程歸納於圖 3.1。



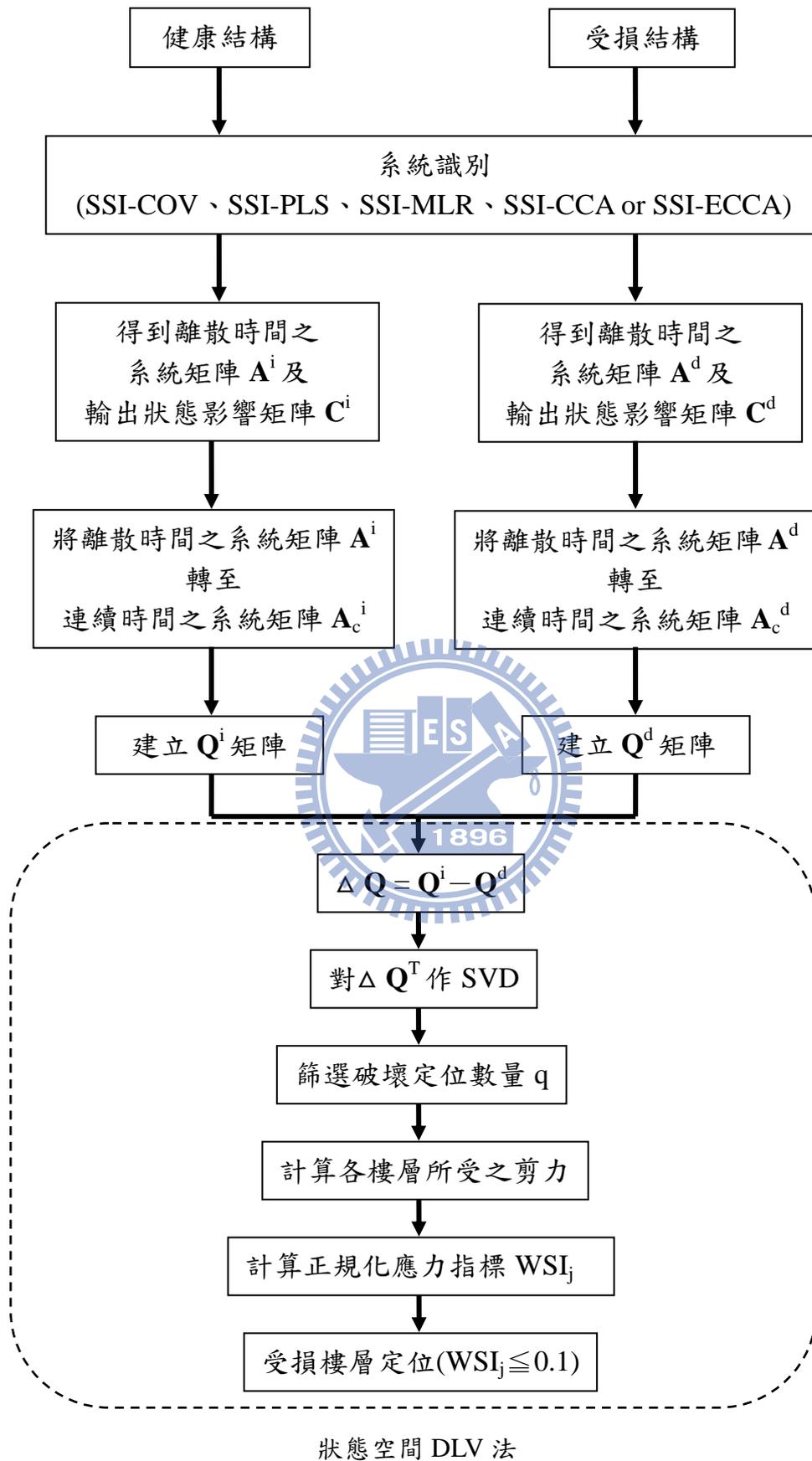


圖 3.1 狀態空間 DLV 損傷探測分析之流程

## 第四章 狀態空間 DLV 法之數值模擬驗證

### 4.1 前言

為了驗證唯輸出系統以第二章所介紹之系統識別法結合狀態空間 DLV 法之可行性，本章將透過 ETABS 建立一棟五層樓剪力屋架結構模型(圖 4.1)，考慮在白噪訊及 El Centro 地震下之動態反應進行損傷探測分析。分析時考慮之破壞情況包括單一樓層受損(1F~5F)及複數樓層(1&5F、1、3&5F)受損，並探討各種識別法結合狀態空間 DLV 法於有雜訊情況下之適應性及不同程度受損情況下之敏感性。

本研究設定之破壞狀態，係以調整受損樓層之斜撐勁度來模擬該樓層之破壞，並以不同程度縮減該樓層斜撐之楊氏係數(Young's modulus)來模擬該樓層之受損，以探討其敏感性。

### 4.2 五層樓剪力屋架之結構損傷探測

本節將以一棟五層樓剪力屋架結構進行數值分析模擬，結構之參數歸納於表 4.1。樓層之受損狀況以移除該樓層之斜撐，或以縮減受損樓層斜撐之楊氏係數代表結構不同程度之受損條件。使用白噪音 (white noise) (圖 4.2)及 El Centro 地震(圖 4.3)作為外部輸入之擾動源進行分析，並調整尖峰地表加速度(PGA)至 0.1g。分析時考慮之受損情況分別包括單一樓層受損包括 1 樓受損、2 樓受損、3 樓受損、4 樓受損及 5 樓受損等五種案例；複數樓層受損包括 1 及 5 樓受損以及 1、3 及 5 樓受損等兩種案例。

#### 4.2.1 單一樓層受損情況之診斷分析

本節考慮單一樓層受損之情況，以移除受損樓層之斜撐模擬該樓層之破壞。分別輸入白噪訊及 El Centro 地震作為擾動源進行分析，並調整地表尖峰加速度(PGA)至 0.1g。考慮五種不同受損案例分別如下：

CASE A1(B1)：模擬 1 樓破壞，受損狀態為移除 1 樓斜撐。

CASE A2(B2)：模擬 2 樓破壞，受損狀態為移除 2 樓斜撐。

CASE A3(B3)：模擬 3 樓破壞，受損狀態為移除 3 樓斜撐。

CASE A4(B4)：模擬 4 樓破壞，受損狀態為移除 4 樓斜撐。

CASE A5(B5)：模擬 5 樓破壞，受損狀態為移除 5 樓斜撐。

分別以 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 五種識別法結合狀態空間 DLV 法進行結構損傷探測分析，其結果歸納於表 4.2 至表 4.3 與圖 4.4 至圖 4.13。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

##### A. White Noise

##### CASE A1(1 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.4 至圖 4.8。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **CASE A2(2 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.4 至圖 4.8。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **CASE A3(3 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.4 至圖 4.8。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **CASE A4(4 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.4 至圖 4.8。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### CASE A5(5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.4 至圖 4.8。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### B. El Centro 地震

#### CASE B1(1 樓受損)：



各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.9 至圖 4.13。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### CASE B2(2 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.9 至圖 4.13。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 2 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 2 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置並未完全

一致。除了預設之 2 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓可能為誤判。

#### **CASE B3(3 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.9 至圖 4.13。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ 。故判定 1 樓與 3 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 3 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓可能為誤判。



#### **CASE B4(4 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.9 至圖 4.13。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 4 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ 。故判定 1 樓與 4 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 4 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓可能為誤判。

#### **CASE B5(5 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.9 至圖 4.13。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ 。故判定 1

樓與 5 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 5 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓可能為誤判。

#### 4.2.2 複數樓層受損情況之診斷分析

本節考慮複數樓層受損之情況，以移除複數樓層之斜撐模擬複數樓層之破壞。輸入白噪訊及 El Centro 地震作為擾動源進行分析，並調整地表尖峰加速度(PGA)至 0.1g。考慮兩種不同受損案例分別如下：

CASE A15(B15)：模擬 1 及 5 樓破壞，受損狀態為移除 1 及 5 樓斜撐。

CASE A135(B135)：模擬 1、3 及 5 樓破壞，受損狀態為移除 1、3 及 5 樓斜撐。

分別以 SSI、SSI+PLS、SSI+MLR、SSI+CCA 及 SSI+ECCA 五種識別法結合 DLV 損傷識別法進行破壞診斷分析，其結果歸納於表 4.2 至表 4.3 與圖 4.4 至圖 4.13。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

##### A. White Noise

##### CASE A15(1、5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.4 至圖 4.8。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### CASE A135(1、3 及 5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.4 至圖 4.8。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓、3 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 1 樓、3 樓與 5 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### B. El Centro 地震

#### CASE B15(1、5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.9 至圖 4.13。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### CASE B135(1、3 及 5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.9 至圖 4.13。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，SSI-COV 及 SSI-PLS 之 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，此兩種識別法均未將預設受損之 5 樓定

位出。而 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 之 1 樓、3 樓與 5 樓  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{max} = 0.1$ ，故判定 1 樓、3 樓與 5 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，此三種方法皆能成功定位出破壞樓層。

由 4.2.1 節及 4.2.2 節之分析結果顯示，SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法在輸入擾動為 white noise 時，均能在各個案例中將受損位置定位出。在輸入擾動為 El Centro 地震時，雖能將受損位置定位出，但均會有 1 樓受損的誤判情況，應是輸入擾動非穩態隨機過程，與 SSI 理論之前提假設有所牴觸所致。

### 4.3 結構損傷探測於噪訊中之分析

由 4.2 節中可知，在以移除斜撐為結構受損狀態之條件下，於白噪訊中不論是單一樓層破壞還是複數樓層破壞之案例，五種識別方法結合狀態空間 DLV 法皆能判別出受損樓層。本節將考慮存在噪訊之情況下進行結構損傷探測分析，為模擬真實情況下受環境干擾或感應器之量測噪音，乃於  $m$  組原始輸出訊號中分別加入等比例之噪音，定義兩者之比例關係 (noise-to-signal ratio，簡稱  $NSR_m$ ) 為：

$$NSR_m = \frac{RMS_{N,m}}{RMS_{S,m}} \times 100\% \quad (4.1)$$

其中， $RMS_{N,m}$  與  $RMS_{S,m}$  分別表示第  $m$  組之加入噪音及對應樓層原始輸出訊號之均方根值 (root mean square，簡稱 RMS)。加入之白噪音以 MATLAB® 指令 randn 建立。

現以白噪訊 (white noise) 作為輸入擾動源，並調整尖峰地表加速度 (PGA) 至  $0.1g$ 。分別考慮  $NSR_m$  為 10%、20% 及 50% 等情況，進行 DLV 損

傷探測分析，藉以探討 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種方法結合狀態空間 DLV 損傷探測分析對於雜訊之適應性。不同噪訊比( $NSR_m$ )之健康結構加速度歷時歸納於圖 4.14 及圖 4.16。

#### 4.3.1 單一樓層受損情況之診斷分析

本節考慮單一樓層受損之情況，並考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

CASE N1：模擬 1 樓破壞，受損狀態為移除 1 樓斜撐，考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

CASE N2：模擬 2 樓破壞，受損狀態為移除 2 樓斜撐，考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

CASE N3：模擬 3 樓破壞，受損狀態為移除 3 樓斜撐，考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

CASE N4：模擬 4 樓破壞，受損狀態為移除 4 樓斜撐，考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

CASE N5：模擬 5 樓破壞，受損狀態為移除 5 樓斜撐，考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

分別以 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 五種識別法結合 DLV 損傷識別法進行破壞診斷分析，其結果歸納於表 4.4 至表 4.6 與圖 4.17 至圖 4.31。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

##### CASE N1(1 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.17 至圖 4.31。其中，

##### (1)NSR=10%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識

別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **(2)NSR=20%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **(3)NSR=50%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

## **CASE N2(2 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.17 至圖 4.31。其中，

### **(1)NSR=10%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能

成功定位出破壞樓層。

### **(2)NSR=20%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **(3)NSR=50%**

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 2 樓與 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓與 4 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 4 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### **CASE N3(3 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.17 至圖 4.31。其中，

### **(1)NSR=10%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能

成功定位出破壞樓層。

### **(2)NSR=20%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **(3)NSR=50%**

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 2 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓與 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 2 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### **CASE N4(4 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.17 至圖 4.31。其中，

### **(1)NSR=10%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能

成功定位出破壞樓層。

### **(2)NSR=20%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### **(3)NSR=50%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。



### **CASE N5(5 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.17 至圖 4.31。其中，

### **(1)NSR=10%**

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

## (2)NSR=20%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

## (3)NSR=50%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。



### 4.3.2 複數樓層受損情況之診斷分析

本節考慮複數樓層受損之情況，並考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。  
CASE N15：模擬 1、5 樓破壞，受損狀態為移除 1、5 樓斜撐，考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

CASE S135：模擬 1、3 及 5 樓破壞，受損狀態為移除 1、3 及 5 樓斜撐，考慮噪訊比為 10%、20% 及 50%。

分別以 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 五種識別法結合 DLV 損傷識別法進行破壞診斷分析，其結果歸納於表 4.4 至表 4.6 與圖 4.17 至圖 4.31。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

### CASE N15(1、5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.17 至圖 4.31。其中，

#### (1)NSR=10%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### (2)NSR=20%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### (3)NSR=50%

由 SSI-PLS 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 5 樓並未被判別出。SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。以 SSI-COV 分析時則未能定位出任何破壞之樓層。

### CASE N135(1、3 及 5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.17 至圖 4.31。其中，

#### (1)NSR=10%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1、3 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、3 及 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### (2)NSR=20%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1、3 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、3 及 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### (3)NSR=50%

由 SSI-PLS 識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 1 樓及 5 樓並未被判別出。由 SSI-MLR 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 3 樓及 5 樓並未被判別出。SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1、3 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，

故判定 1、3 及 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。以 SSI-COV 分析時則未能定位出任何破壞之樓層。

有關敏感度分析結果歸納於表 4.7。其中，依據識別結果之良窳分為 4 種狀況：

- (1) Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。
- (2) Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個為受損樓層誤判為受損。
- (3) Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個為受損樓層誤判為受損；或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。
- (4) Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。

由表 4.7 可看出，在單一樓層受損之案例中，當 SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 可成功識別出所有受損樓層，SSI-COV 則在 NSR=50% 時會有誤判的情況。在複數樓層受損案例中，SSI-CCA 及 SSI-ECCA 可成功識別出所有受損樓層，SSI-COV、SSI-PLS 及 SSI-MLR 在 NSR=50% 會出現無法判別出受損樓層之情況。

## 4.4 結構損傷探測之敏感度分析

本節將從靈敏度的角度進行探討，考慮以不同程度縮減受損樓層斜撐之勁度來模擬受損狀態，並以白噪訊(white noise)作為輸入擾動源進行分析，且調整尖峰地表加速度(PGA)至 0.1g。

### 4.3.1 單一樓層受損情況之診斷分析

本節考慮單一樓層受損之情況，並分別以縮減樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5% 模擬樓層之受損程度。

CASE S1：模擬 1 樓破壞，分別縮減該樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5%。

CASE S2：模擬 2 樓破壞，分別縮減該樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5%。

CASE S3：模擬 3 樓破壞，分別縮減該樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5%。

CASE S4：模擬 4 樓破壞，分別縮減該樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5%。

CASE S5：模擬 5 樓破壞，分別縮減該樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5%。

分別以 SSI、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 五種識別法結合 DLV 損傷識別法進行破壞診斷分析，其結果歸納於表 4.8 至表 4.11 與圖 4.32 至圖 4.51。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

#### CASE S1(1 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.32 至圖 4.51。其中，

##### (1)斜撐之勁度縮減 50%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

##### (2)斜撐之勁度縮減 20%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小

於 $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 5 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於 $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### (3)斜撐之勁度縮減 10%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於 $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 5 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於 $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### (4)斜撐之勁度縮減 5%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於 $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### CASE S2(2 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.32 至圖 4.51。其中，

### (1)斜撐之勁度縮減 50%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 2 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### (2)斜撐之勁度縮減 20%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 2 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### (3)斜撐之勁度縮減 10%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1、2、3 與 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、2、3 與 4 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1、3 及 4 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受

損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

#### (4)斜撐之勁度縮減 5%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1、2 與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1、2 與 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1 樓及 3 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 2 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

#### CASE S3(3 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.32 至圖 4.51。其中，



#### (1)斜撐之勁度縮減 50%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

#### (2)斜撐之勁度縮減 20%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識

別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (3)斜撐之勁度縮減 10%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 3 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 5 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### (4)斜撐之勁度縮減 5%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

## CASE S4(4 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.32 至圖 4.51。其中，

### (1)斜撐之勁度縮減 50%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識

別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (2)斜撐之勁度縮減 20%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (3)斜撐之勁度縮減 10%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (4)斜撐之勁度縮減 5%

由 SSI-PLS 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 4 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1 樓受損應為誤判。SSI-COV、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。



## CASE S5(5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.32 至圖 4.51。其中，

### (1)斜撐之勁度縮減 50%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1、2 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、2 及 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1 與 2 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

### (2)斜撐之勁度縮減 20%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (3)斜撐之勁度縮減 10%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 1 樓受損應為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析



結果與預設之受損位置相同。

#### (4)斜撐之勁度縮減 5%

由 SSI-MLR 識別法所分析之結果顯示，其 2 與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 2 與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，顯示 2 樓受損應為誤判。SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等兩種識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。以 SSI-COV 及 SSI-PLS 分析時則未能定位出破壞之樓層。

#### 4.3.2 複數樓層受損情況之診斷分析

本節考慮複數樓層受損之情況，並分別以縮減樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5% 模擬樓層之受損。

CASE S15：模擬 1、5 樓破壞，分別縮減該樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5%。

CASE S135：模擬 1、3 及 5 樓破壞，分別縮減該樓層斜撐之勁度 50%、20%、10% 及 5%。

分別以 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI+-ECCA 五種識別法結合 DLV 損傷識別法進行破壞診斷分析，其結果歸納於表 4.8 至表 4.11 與圖 4.32 至圖 4.51。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

#### CASE S15(1、5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.32 至圖 4.51。其中，

### (1)斜撐之勁度縮減 50%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (2)斜撐之勁度縮減 20%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (3)斜撐之勁度縮減 10%

由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

### (4)斜撐之勁度縮減 5%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 5 樓並未被判別出。SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆



小於  $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。以 SSI-PLS 分析時則未能定位出任何破壞之樓層。

### CASE S135(1、3 及 5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 4.32 至圖 4.51。其中，

#### (1)斜撐之勁度縮減 50%

由 SSI-CCA 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 5 樓並未被判別出。SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1、3 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1、3 及 5 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。

#### (2)斜撐之勁度縮減 20%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 3 樓與 5 樓並未被判別出。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j\max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 5 樓並未被判別出。

### (3)斜撐之勁度縮減 10%

由 SSI-PLS 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 3 樓與 5 樓並未被判別出。SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 5 樓並未被判別出。以 SSI-COV 分析時則是未能判別出任何破壞之樓層。

### (4)斜撐之勁度縮減 5%

由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 1 樓與 3 樓並未被判別出。由 SSI-PLS 識別法所分析之結果顯示，其 2 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 2 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 1 樓與 3 樓並未被判別出，且 2 樓受損應為誤判。SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j,max} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，受損之 5 樓並未被判別出。

有關敏感度分析結果歸納於表 4.12。其中，依據識別結果之良窳分為 4 種狀況：

- (1) Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。
- (2) Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個為受損樓層誤判為受損。
- (3) Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個為受損樓層誤判為受損；或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。
- (4) Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。

由表 4.12 可看出，在單一樓層受損之案例中 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 可成功辨識出所有受損樓層，而其中只有 SSI-MLR 在受損 5% 時出現一個誤判。SSI-COV 及 SSI-PLS 則未能判別出所有受損樓層，且其中 SSI-COV 隨著受損程度之降低，其誤判之情況也隨之增加。在複數樓層受損之案例中，五種識別法在受損低於 20% 時均有未能辨識出受損樓層之情況，但其中 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 出現 Poor 以下之案例仍就低於 SSI-COV 及 SSI-PLS。



#### 4.4 小結

4.2 節中針對五層樓剪力構架以白噪音及 El Centro 地震作為外部輸入擾動，進行狀態空間 DLV 損傷探測分析。其結果顯示，當輸入之擾動為白噪音時，五種識別法結合狀態空間 DLV 皆能判別出受損的樓層；當輸入之擾動為 El Centro 地震時，雖能判別出受損的樓層，但皆會發生一樓誤判之情況，其原因可能在於 SSI-COV 理論中將輸入擾動假設為穩態隨機過程，由於真實地震並非穩態之隨機過程，因而影響分析結果之精確性。不過就整體而言，因受損樓層皆能辨識出來，還是有一定程度之穩健性 (robustness)。

4.3 節中探討了五種識別法結合狀態空間 DLV 法於噪訊中之適應性，當噪訊比為 10% 及 20% 時，各種識別法皆能判別出受損的樓層。當噪訊比為 50% 時，SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 於單一樓層破壞

情況下仍能判別出受損的樓層，而 SSI-COV 則有部分誤判的情況發生；於複數樓層破壞的情況下，SSI-COV、SSI-PLS 及 SSI-MLR 則有未能判別出受損樓層的情況發生，由此可顯示 SSI-CCA 及 SSI-ECCA 在有雜訊的情況下有較佳之適應性。

4.4 節中探討了五種識別法結合狀態空間 DLV 法對於不同程度受損情況之敏感性，當受損情況為 50% 時，各種識別法皆能判別出受損的樓層。當受損情況低於 20% 時，SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 於單一樓層破壞情況下仍能判別出受損的樓層，而 SSI-COV 及 SSI-PLS 則有部分誤判或是未能判別的情況發生；於 1、3、5 樓破壞情況下，五種識別法雖然皆未能判別出 5 樓破壞，但 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 於受損程度低於 20% 之情況中仍能判別出 1、3 樓破壞，SSI-COV 及 SSI-PLS 則未能判別出受損樓層。整體而言，SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種方法之敏感性較 SSI-COV 及 SSI-PLS 要來得好。



表 4.1 五層樓剪力屋架結構參數

長度(m)	2
寬度(m)	2
1 樓樓高(m)	2
2 樓樓高(m)	2
3 樓樓高(m)	2
4 樓樓高(m)	2
5 樓樓高(m)	2
1 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	143.8
2 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	143.8
3 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	143.8
4 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	143.8
5 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	112.7
柱斷面尺寸(mm)	266.7×147.6×7.6×13
梁斷面尺寸(mm)	266.7×147.6×7.6×13
斜撐斷面尺寸(mm)	152.1×152.1×5.8×6.6

表 4.2 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0549	0.2237	0.2500	0.3500	0.2005	0.0541	0.0081
2F	1.0000	0.0354	0.4830	0.9245	0.9094	1.0000	0.3500
3F	0.5204	1.0000	0.0264	1.0000	1.0000	0.4103	0.0458
4F	0.7068	0.7101	0.4833	0.0330	0.4989	0.1626	1.0000
5F	0.5340	0.7874	1.0000	0.9745	0.0896	0.0133	0.0205
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0121	0.2552	0.2375	0.3816	0.2795	0.0018	0.0683
2F	0.2620	0.0357	0.5366	0.1990	0.7800	0.3478	0.5096
3F	0.9546	1.0000	0.0386	0.8591	1.0000	1.0000	0.0034
4F	0.9531	0.3672	0.2981	0.0003	0.7811	0.4089	1.0000
5F	1.0000	0.9996	1.0000	1.0000	0.0775	0.0857	0.0272
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0183	0.1904	0.1093	0.2805	0.1726	0.0521	0.0270
2F	0.3775	0.0374	0.4249	0.2935	1.0000	0.7723	0.2786
3F	0.7554	1.0000	0.0517	0.7348	0.7301	1.0000	0.0286
4F	1.0000	0.1536	0.5859	0.0082	0.4628	0.2108	1.0000
5F	0.9285	0.7005	1.0000	1.0000	0.0287	0.0431	0.0154
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0261	0.9052	0.9664	0.6338	1.0000	0.0469	0.0386
2F	0.5542	0.0110	0.4021	0.1608	0.9215	1.0000	0.8249
3F	0.7373	0.9525	0.0204	1.0000	0.5778	0.3357	0.0004
4F	0.3126	0.8105	1.0000	0.0201	0.2645	0.5156	1.0000
5F	1.0000	1.0000	0.4946	0.8623	0.0289	0.0577	0.0297
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0143	0.2060	0.2005	0.3083	0.1284	0.0633	0.0843
2F	0.3321	0.0362	0.2675	0.2674	1.0000	0.9872	1.0000
3F	0.9285	1.0000	0.0389	0.7646	0.7489	1.0000	0.0097
4F	0.9767	0.2948	1.0000	0.0060	0.4697	0.3527	0.1609
5F	1.0000	0.7988	0.4013	1.0000	0.0293	0.0364	0.0440

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.3 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0001	*0.0001	*0.0009	*0.0001	*0.0004	0.0001	0.0005
2F	*0.0924	0.0455	0.5084	0.7453	0.7445	0.5403	0.6262
3F	0.6103	1.0000	0.0223	1.0000	0.8801	0.8108	0.0175
4F	0.8019	0.8411	1.0000	0.0519	1.0000	1.0000	1.0000
5F	1.0000	0.9105	0.9126	0.8689	0.0422	0.0378	#0.1303
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0001	*0.0001	*0.0003	*0.0004	*0.0004	0.0002	0.0001
2F	0.1261	0.0394	0.7251	0.8850	0.5962	0.4146	0.7217
3F	1.0000	0.9637	0.0270	0.9646	0.7613	0.5438	0.0112
4F	0.7306	0.6570	0.9215	0.0584	1.0000	1.0000	1.0000
5F	0.9926	1.0000	1.0000	1.0000	0.0553	0.0119	#0.1408
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0001	*0.0007	*0.0007	*0.0010	*0.0005	0.0000	0.0000
2F	0.6046	0.0401	1.0000	0.6476	0.5530	1.0000	0.7535
3F	0.6599	0.7644	0.0279	0.6195	0.6210	0.8739	0.0017
4F	0.8728	0.7401	0.4561	0.0327	1.0000	0.7831	1.0000
5F	1.0000	1.0000	0.9871	1.0000	0.0653	0.0607	0.1011
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0000	*0.0001	*0.0012	*0.0011	*0.0047	0.0029	0.0009
2F	0.3045	0.0061	0.5164	1.0000	0.6372	0.6727	0.1164
3F	0.4920	0.1612	0.0250	0.3703	0.8309	0.7270	0.0035
4F	0.8371	0.9464	0.8659	0.0536	1.0000	1.0000	1.0000
5F	1.0000	1.0000	1.0000	0.8793	0.0877	0.0770	0.0365
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0001	*0.0007	*0.0007	*0.0010	*0.0001	0.0000	0.0000
2F	0.6154	0.0444	0.9859	0.6861	1.0000	0.5794	0.7633
3F	0.6600	0.8139	0.0248	0.6002	0.9797	0.7993	0.0084
4F	0.8696	0.7553	0.3953	0.0304	0.9820	1.0000	1.0000
5F	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0504	0.0207	0.0816

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.4 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, NSR=10%)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0169	0.3788	1.0000	0.3650	0.6793	0.0187	0.0160
2F	0.2384	0.0273	0.7492	0.2529	0.5716	0.6550	1.0000
3F	0.5135	0.8623	0.0062	0.8627	1.0000	1.0000	0.0464
4F	0.8372	0.3672	0.8815	0.0019	0.6318	0.4219	0.3154
5F	1.0000	1.0000	0.7376	1.0000	0.0481	0.0950	0.0295
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0531	0.2173	0.3518	0.8662	0.7739	0.0557	0.0299
2F	1.0000	0.0000	0.3115	0.6732	0.6285	1.0000	0.6219
3F	0.2495	0.3109	0.0556	1.0000	0.8591	0.6874	0.0314
4F	0.1924	0.9816	1.0000	0.0091	1.0000	0.7490	1.0000
5F	0.4463	1.0000	0.3535	0.9551	0.0165	0.0130	0.0456
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0199	0.3260	1.0000	1.0000	1.0000	0.0513	0.0289
2F	0.4369	0.0531	0.4376	0.1508	0.3632	1.0000	1.0000
3F	0.5927	0.6345	0.0431	0.9098	0.3840	0.2439	0.0341
4F	0.2856	0.5028	0.8386	0.0475	0.5845	0.8872	0.4219
5F	1.0000	1.0000	0.8689	0.3416	0.0569	0.0572	0.0541
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0245	0.2385	0.5727	0.6207	0.8646	0.0615	0.0345
2F	0.3196	0.0241	0.2319	0.1404	0.2095	1.0000	1.0000
3F	0.2038	0.6829	0.0030	1.0000	1.0000	0.4341	0.0056
4F	0.8815	0.4045	0.3092	0.0255	0.2077	0.4565	0.3444
5F	1.0000	1.0000	1.0000	0.7489	0.0446	0.0042	0.0332
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0115	0.2644	0.2150	0.2264	0.1789	0.0174	0.0805
2F	0.2061	0.0525	0.5048	0.5736	0.1262	0.4922	0.3695
3F	0.3116	1.0000	0.0250	1.0000	1.0000	0.2258	0.0721
4F	1.0000	0.4458	1.0000	0.0219	0.1550	1.0000	1.0000
5F	0.6485	0.9839	0.3692	0.5641	0.0731	0.0410	0.0426

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.5 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, NSR=20%)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0468	0.7948	0.1982	0.9235	0.1450	0.0140	0.0402
2F	1.0000	0.0347	0.7456	0.9936	0.9622	0.1828	1.0000
3F	0.3543	0.6292	0.0660	0.7450	0.1800	0.2812	0.0103
4F	0.1577	0.5067	0.5212	0.0030	1.0000	1.0000	0.7536
5F	0.9211	1.0000	1.0000	1.0000	0.0596	0.0399	0.0390
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0190	0.2498	0.2710	0.0714	0.4252	0.0323	0.0173
2F	0.5917	0.0453	1.0000	0.3222	1.0000	0.3979	1.0000
3F	0.5265	1.0000	0.0201	0.7512	0.1548	0.7209	0.0675
4F	1.0000	0.1734	0.7221	0.0018	0.7308	1.0000	0.2519
5F	0.1794	0.5993	0.3282	1.0000	0.0553	0.0638	0.0943
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0138	0.2463	0.4834	0.1965	0.1139	0.0192	0.0295
2F	0.4148	0.0398	1.0000	1.0000	0.1694	1.0000	1.0000
3F	1.0000	0.8089	0.0493	0.3862	0.4947	0.6687	0.0785
4F	0.7854	1.0000	0.2928	0.0196	1.0000	0.3669	0.6034
5F	0.2832	0.1888	0.8157	0.3003	0.0313	0.0538	0.0258
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0070	0.7132	0.5290	0.2068	1.0000	0.0293	0.0397
2F	0.1796	0.0284	0.2584	0.3333	0.1271	0.3952	1.0000
3F	0.1997	1.0000	0.0469	0.6811	0.8821	0.7282	0.0174
4F	0.8846	0.3538	0.1498	0.0080	0.1723	1.0000	0.8780
5F	1.0000	0.7105	1.0000	1.0000	0.0411	0.0769	0.0549
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0326	0.3149	0.4297	0.8361	1.0000	0.0168	0.0771
2F	0.6830	0.0375	1.0000	1.0000	0.3808	0.5340	1.0000
3F	1.0000	0.5545	0.0537	0.1935	0.2064	0.6847	0.0645
4F	0.7687	1.0000	0.9463	0.0152	0.4280	1.0000	0.8938
5F	0.6310	0.5222	0.5031	0.4167	0.0386	0.0935	0.0567

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.6 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, NSR=50%)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0677	0.7355	1.0000	0.6891	1.0000	#0.2077	#0.1281
2F	0.2069	0.0801	0.0912	0.2345	0.4647	0.6574	1.0000
3F	1.0000	1.0000	*0.1015	0.8151	0.1790	0.2739	#0.1803
4F	0.4398	*0.0842	0.8994	0.0226	0.4724	0.2635	0.3343
5F	0.4488	0.6264	0.2626	1.0000	0.0861	#1.0000	#0.6809
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0865	0.1551	0.8036	0.9403	1.0000	0.0285	#0.1602
2F	0.4549	0.0109	0.7667	0.5052	0.6515	0.7540	0.9583
3F	0.1902	0.5312	0.0375	1.0000	0.3539	0.3084	0.1067
4F	1.0000	0.5603	1.0000	0.0036	0.5697	1.0000	1.0000
5F	0.5530	1.0000	0.6457	0.9931	0.0373	#0.1593	#0.1265
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0085	1.0000	1.0000	0.3658	0.5562	0.0462	0.0242
2F	0.9139	0.0210	0.4266	1.0000	1.0000	0.3408	1.0000
3F	1.0000	0.3645	0.0697	0.1458	0.9938	1.0000	#0.2148
4F	0.9843	0.9493	0.5806	0.0033	0.1786	0.6383	0.8019
5F	0.6562	0.2707	0.5309	0.6094	0.0265	0.0320	#0.1469
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0263	0.8068	1.0000	0.8468	0.7736	0.0674	0.0929
2F	1.0000	0.0959	0.3679	0.3718	0.8123	1.0000	1.0000
3F	0.6812	0.3006	0.0062	1.0000	0.9685	0.5715	0.0579
4F	0.2679	1.0000	0.7294	0.0329	1.0000	0.2138	0.7549
5F	0.2118	0.6090	0.7806	0.4418	0.0815	0.0782	0.0854
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0213	0.3187	1.0000	0.5356	0.5357	0.0551	0.0612
2F	1.0000	0.0520	0.2142	0.5548	1.0000	1.0000	1.0000
3F	0.1542	0.4812	0.0356	0.8573	0.1387	0.7811	0.0409
4F	0.6825	1.0000	0.3004	0.0289	0.7316	0.2110	0.6565
5F	0.1530	0.3957	0.1733	1.0000	0.0669	0.0545	0.0682

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.7 不同系統識別方法結合 DLV 法之損傷探測於噪訊中分析歸納表

Algorithm		SSI-COV			SSI-PLS			SSI-MLR			SSI-CCA			SSI-ECCA		
NSR (%)		10	20	50	10	20	50	10	20	50	10	20	50	10	20	50
Case	N1	Good	Good	Good	Good	Good	Good									
	N2	Good	Good	Fair	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	N3	Good	Good	Fair	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	N4	Good	Good	Good	Good	Good	Good									
	N5	Good	Good	Good	Good	Good	Good									
	N15	Good	Good	Fail	Good	Good	Poor	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	N135	Good	Good	Fail	Good	Good	Fail	Good	Good	Fail	Good	Good	Good	Good	Good	Good

Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。

Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個未受損樓層誤判為受損。

Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個未受損樓層誤判為受損；或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。

Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。

表 4.8 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, 樓層斜撐受損 50%)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0210	*0.0025	*0.0264	0.2163	*0.1048	0.0203	0.0234
2F	0.3175	0.0121	0.8428	0.7945	*0.0835	1.0000	1.0000
3F	0.5562	0.0985	0.0125	1.0000	1.0000	0.7966	0.0575
4F	1.0000	0.3385	1.0000	0.0002	0.6090	0.4558	0.7753
5F	0.3096	1.0000	0.1330	0.7167	0.0108	0.0164	0.0962
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0273	0.1547	1.0000	0.1423	0.2208	0.0321	0.0261
2F	0.4534	0.0216	0.1234	1.0000	0.2122	0.6935	0.7639
3F	0.7621	0.3703	0.0042	0.7890	1.0000	0.5299	0.0169
4F	1.0000	0.2614	0.2264	0.0171	0.8630	1.0000	1.0000
5F	0.4899	1.0000	0.3489	0.8394	0.0423	0.0616	0.1031
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0258	0.1730	1.0000	0.4836	1.0000	0.0680	0.0413
2F	0.3108	0.0083	0.6874	0.2943	0.2330	0.8813	1.0000
3F	0.6298	0.1186	0.0047	1.0000	0.2869	1.0000	0.0337
4F	1.0000	0.7456	0.9879	0.0303	0.2360	0.9790	0.8818
5F	0.4835	1.0000	0.3561	0.8488	0.0331	0.0560	0.0977
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0166	0.5360	1.0000	0.4449	1.0000	0.0609	0.1082
2F	0.2132	0.0371	0.1915	0.3658	0.5078	1.0000	1.0000
3F	0.5206	0.2847	0.0032	1.0000	0.3122	0.9498	0.0324
4F	1.0000	0.8231	0.4439	0.0249	0.2926	0.4426	0.9400
5F	0.4140	1.0000	0.3508	0.7095	0.0442	0.0755	#0.1156
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0362	0.1843	1.0000	0.4287	0.4838	0.0700	0.0409
2F	0.6130	0.0203	0.3706	0.6909	1.0000	0.9841	1.0000
3F	0.9992	0.2676	0.0043	1.0000	0.7560	1.0000	0.0341
4F	1.0000	0.4609	0.6504	0.0134	0.3727	0.9847	0.8812
5F	0.6029	1.0000	0.3583	0.7108	0.0244	0.0615	0.0977

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.9 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, 樓層斜撐受損 20%)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0221	*0.0245	0.2067	0.3232	0.2294	0.0047	0.0006
2F	0.2633	0.0192	1.0000	1.0000	0.7423	0.1700	0.9213
3F	0.5073	0.1492	0.0100	0.8982	1.0000	1.0000	#0.1748
4F	1.0000	0.2218	0.7275	0.0289	0.3693	0.2338	1.0000
5F	0.1023	1.0000	0.2877	0.9446	0.0405	0.0342	#0.3942
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0294	0.2466	0.1139	0.2954	0.1835	0.0035	0.0903
2F	0.3918	0.0301	0.3568	0.9820	0.7415	0.1971	0.9123
3F	0.6885	0.3623	0.0158	0.9322	1.0000	1.0000	0.0389
4F	1.0000	1.0000	0.1442	0.0268	0.3589	0.2412	1.0000
5F	0.2690	0.5793	1.0000	1.0000	0.0390	0.0310	#0.2441
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0168	0.7363	0.6841	0.3192	0.8853	0.0423	0.0926
2F	0.3454	0.0354	1.0000	0.8468	1.0000	0.6723	1.0000
3F	0.4861	0.3466	0.0770	1.0000	0.9827	1.0000	0.0530
4F	0.2498	0.8022	0.8971	0.0304	0.4580	0.4916	0.9730
5F	1.0000	1.0000	0.1525	0.9861	0.0068	0.0161	#0.2682
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0391	0.5026	0.5167	0.2684	0.4835	0.0490	0.0932
2F	0.5897	0.0186	0.7433	0.5528	1.0000	0.7603	1.0000
3F	0.8995	0.1962	0.0910	1.0000	0.8558	1.0000	0.0513
4F	1.0000	0.6579	1.0000	0.0262	0.3734	0.5284	0.9515
5F	0.8593	1.0000	0.3721	0.9334	0.0150	0.0097	#0.2586
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0417	0.8449	0.3232	0.3332	0.2888	0.0367	0.0745
2F	0.3112	0.0431	0.6093	0.9773	1.0000	0.5900	0.7779
3F	0.7167	0.4187	0.0008	0.9822	0.7472	1.0000	0.0090
4F	0.2379	0.8904	1.0000	0.0310	0.3231	0.4357	1.0000
5F	1.0000	1.0000	0.3748	1.0000	0.0177	0.0231	#0.2079

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.10 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise,PGA=0.1g, 樓層斜撐受損 10%)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0242	*0.0146	0.2236	0.2667	*0.1023	0.0023	#0.1662
2F	0.2696	0.0166	0.9401	0.5976	0.3400	0.2818	0.2813
3F	0.5391	0.1012	0.0363	1.0000	1.0000	1.0000	#0.2812
4F	1.0000	*0.0599	1.0000	0.0289	0.3217	0.2947	1.0000
5F	*0.0882	1.0000	*0.0973	0.9364	0.0785	0.0693	#0.1483
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0136	0.3785	0.4407	0.2901	0.9302	#0.1000	0.1007
2F	0.3977	0.0233	0.5718	0.7853	1.0000	0.3743	0.3522
3F	1.0000	0.2387	0.0567	1.0000	0.8503	1.0000	#0.2240
4F	0.9148	0.4546	1.0000	0.0105	0.4714	0.4266	1.0000
5F	0.4680	1.0000	0.6112	0.6658	0.0372	0.0716	#0.1212
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0095	0.4968	1.0000	0.2472	0.4074	0.0416	0.0754
2F	0.2548	0.0286	0.5910	1.0000	0.9747	0.7578	0.9194
3F	0.3469	0.2012	0.0869	0.7315	1.0000	1.0000	0.0650
4F	0.2815	0.7058	0.9131	0.0282	0.4006	0.5447	1.0000
5F	1.0000	1.0000	0.2484	0.7768	0.0723	0.0509	#0.3276
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0435	0.3778	1.0000	0.2978	0.4188	0.0310	0.0763
2F	0.2204	0.0191	0.5847	0.2008	0.9595	0.5662	0.8739
3F	0.4692	0.1286	0.0975	1.0000	1.0000	1.0000	0.0499
4F	0.1878	0.6168	0.7734	0.0246	0.3767	0.3910	1.0000
5F	1.0000	1.0000	0.4678	0.8514	0.0746	0.0664	#0.3063
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0274	0.7121	1.0000	0.2880	0.5331	0.0394	0.0964
2F	0.2848	0.0498	0.5839	1.0000	0.9955	0.7158	0.8944
3F	0.3592	0.3144	0.0857	0.8612	1.0000	1.0000	0.0428
4F	1.0000	1.0000	0.9230	0.0302	0.4171	0.5302	1.0000
5F	0.5245	0.8411	0.2116	0.8871	0.0694	0.0558	#0.2427

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.11 結構損傷偵測數值模擬分析結果(Input=White noise, PGA=0.1g, 樓層斜撐受損 5%)

Algorithm=SSI-COV							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0229	*0.0016	0.1802	0.1785	0.1593	0.0006	#0.1943
2F	0.2266	0.0126	0.8475	0.5263	0.1492	0.2713	0.1892
3F	0.4812	0.0359	0.0381	1.0000	1.0000	0.6031	#0.1975
4F	1.0000	0.1808	1.0000	0.0243	0.3411	1.0000	1.0000
5F	0.3429	1.0000	0.2045	0.9221	#0.1156	#0.1245	0.0696
Algorithm=SSI-PLS							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0167	0.1794	0.7197	0.5261	0.2663	#0.1116	#0.1740
2F	0.3965	0.0087	0.4804	*0.0998	0.4808	0.4556	*0.0370
3F	0.8872	0.1533	0.0931	0.7519	1.0000	1.0000	*0.1955
4F	0.3353	0.3340	0.2814	0.0319	0.1945	0.4063	1.0000
5F	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	#0.1554	#0.1121	0.0754
Algorithm=SSI-MLR							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0148	1.0000	1.0000	0.2687	1.0000	0.0491	0.0736
2F	0.2009	*0.1119	0.3028	0.3940	0.0943	1.0000	0.7551
3F	0.3856	0.7849	0.1015	1.0000	0.1599	0.5878	0.0406
4F	1.0000	0.3753	0.4852	0.0247	0.2193	0.8598	1.0000
5F	0.4640	0.1618	0.4299	0.9018	0.0112	0.0230	#0.2239
Algorithm=SSI-CCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0347	0.2716	0.9105	0.4040	1.0000	0.0271	0.0780
2F	0.3252	0.0137	0.7749	0.2642	0.1979	1.0000	0.7374
3F	0.5187	0.1190	0.0869	1.0000	0.2858	0.1370	0.0244
4F	1.0000	0.3576	1.0000	0.0295	0.2769	0.7531	1.0000
5F	0.3431	1.0000	0.3697	0.8968	0.0069	0.0203	#0.1888
Algorithm=SSI-ECCA							
WSI <sub>j</sub>	受損樓層						
	1F	2F	3F	4F	5F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0088	0.8600	0.5148	0.2518	1.0000	0.0636	0.0683
2F	0.1229	0.1001	0.7266	0.5870	0.4932	1.0000	0.7302
3F	0.1640	0.4368	0.0886	1.0000	0.5468	0.7543	0.0394
4F	0.5654	1.0000	1.0000	0.0273	0.2593	0.7848	1.0000
5F	1.0000	0.7574	0.3772	0.9352	0.0003	0.0525	#0.2145

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 4.12 不同系統識別方法結合 DLV 法之損傷探測敏感度分析歸納表

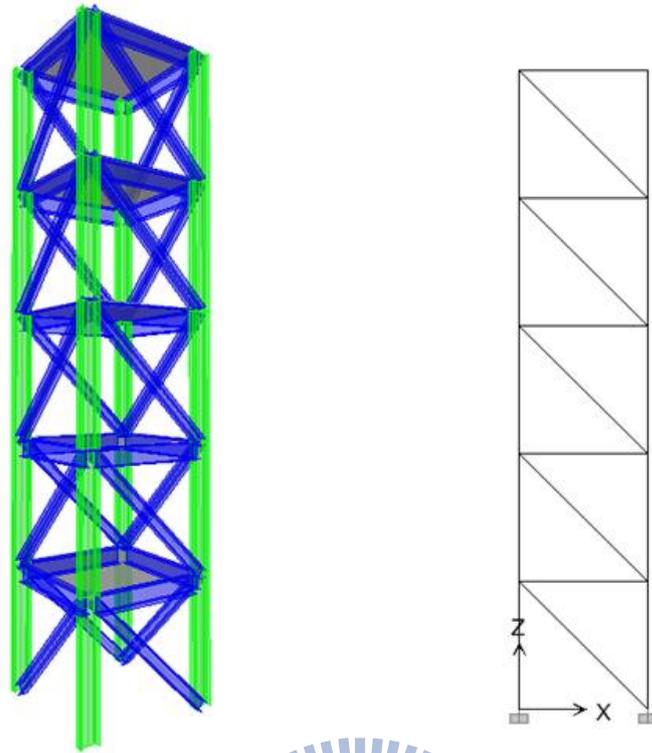
Algorithm		SSI-COV				SSI-PLS				SSI-MLR				SSI-CCA				SSI-ECCA				
Damaged (%)		50	20	10	5	50	20	10	5	50	20	10	5	50	20	10	5	50	20	10	5	
Case	S1	Good	Fair	Fair	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	S2	Fair	Fair	Poor	Poor	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	S3	Fair	Good	Fair	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	S4	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Fair	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	S5	Poor	Good	Fair	Fail	Good	Good	Good	Fail	Good	Good	Good	Fair	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	S15	Good	Good	Good	Poor	Good	Good	Good	Fail	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good	Good
	S135	Good	Fail	Fail	Poor	Good	Poor	Poor	Poor	Good	Poor	Poor	Poor	Fair	Poor	Poor	Poor	Good	Poor	Poor	Poor	Poor

Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。

Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個未受損樓層誤判為受損。

Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個未受損樓層誤判為受損；或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。

Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。



(a) 3D 立體圖

(b) 正視圖

圖 4.1 五層樓剪力屋架結構模型

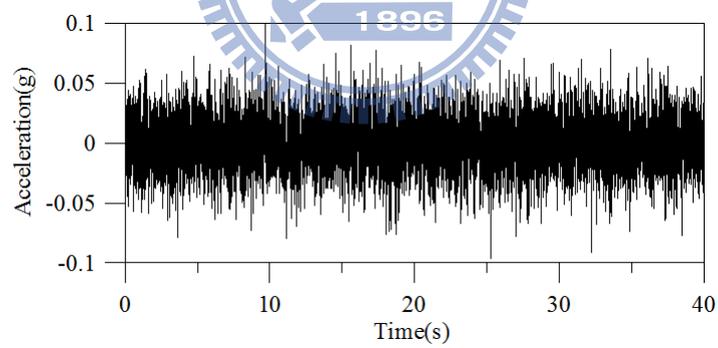


圖 4.2 White noise 加速度歷時圖(PGA=0.1g)

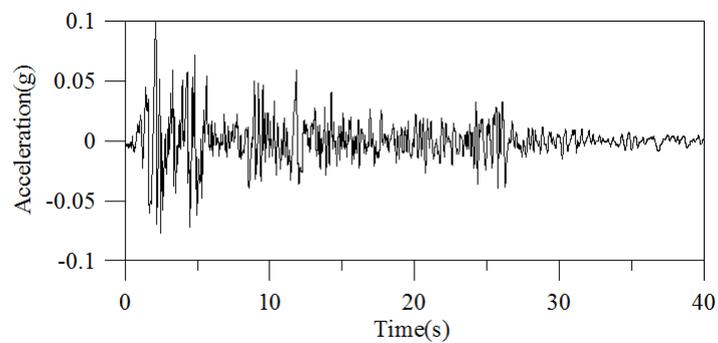


圖 4.3 El Centro 加速度歷時圖(PGA=0.1g)

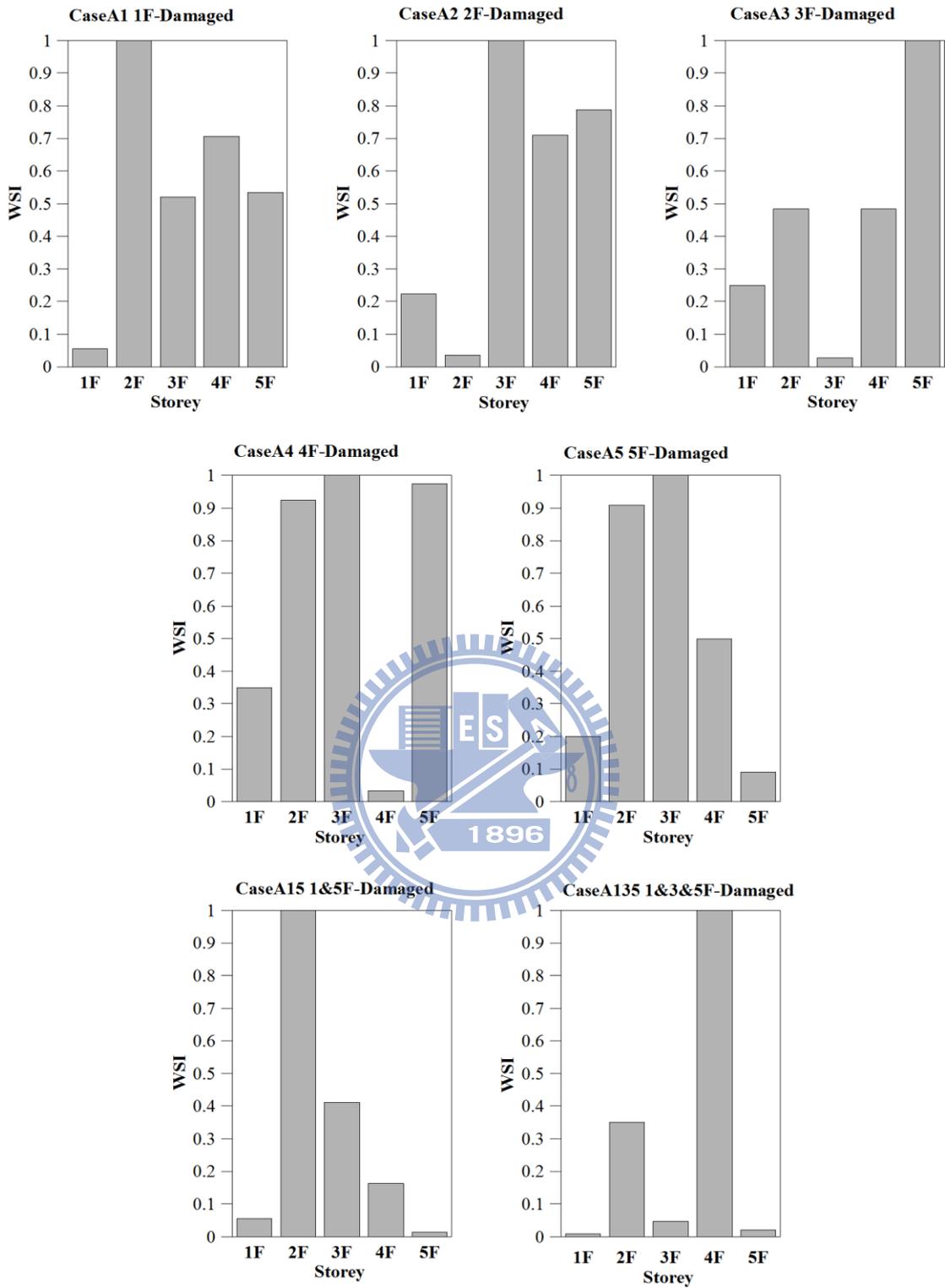


圖 4.4 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV)

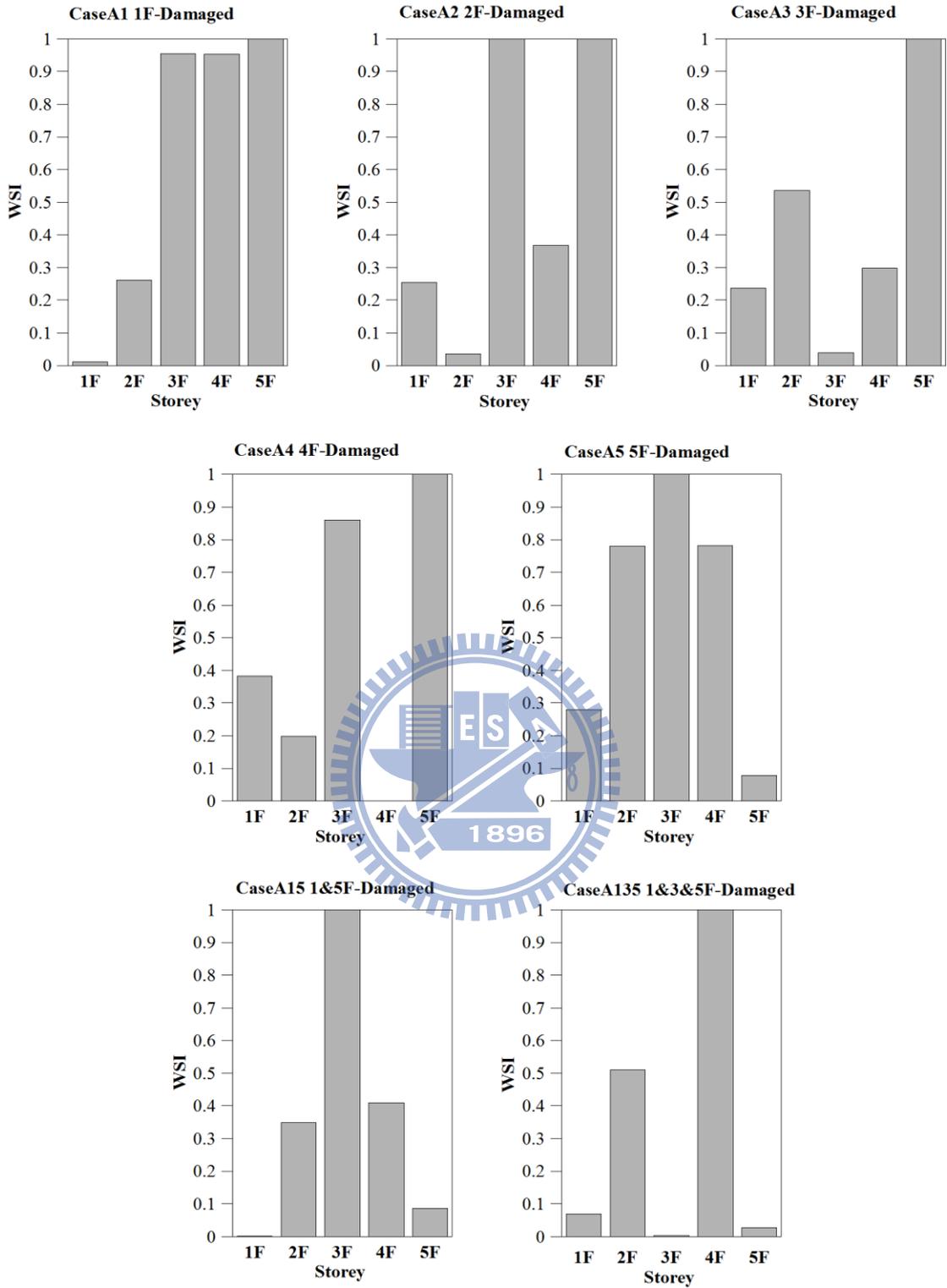


圖 4.5 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS)

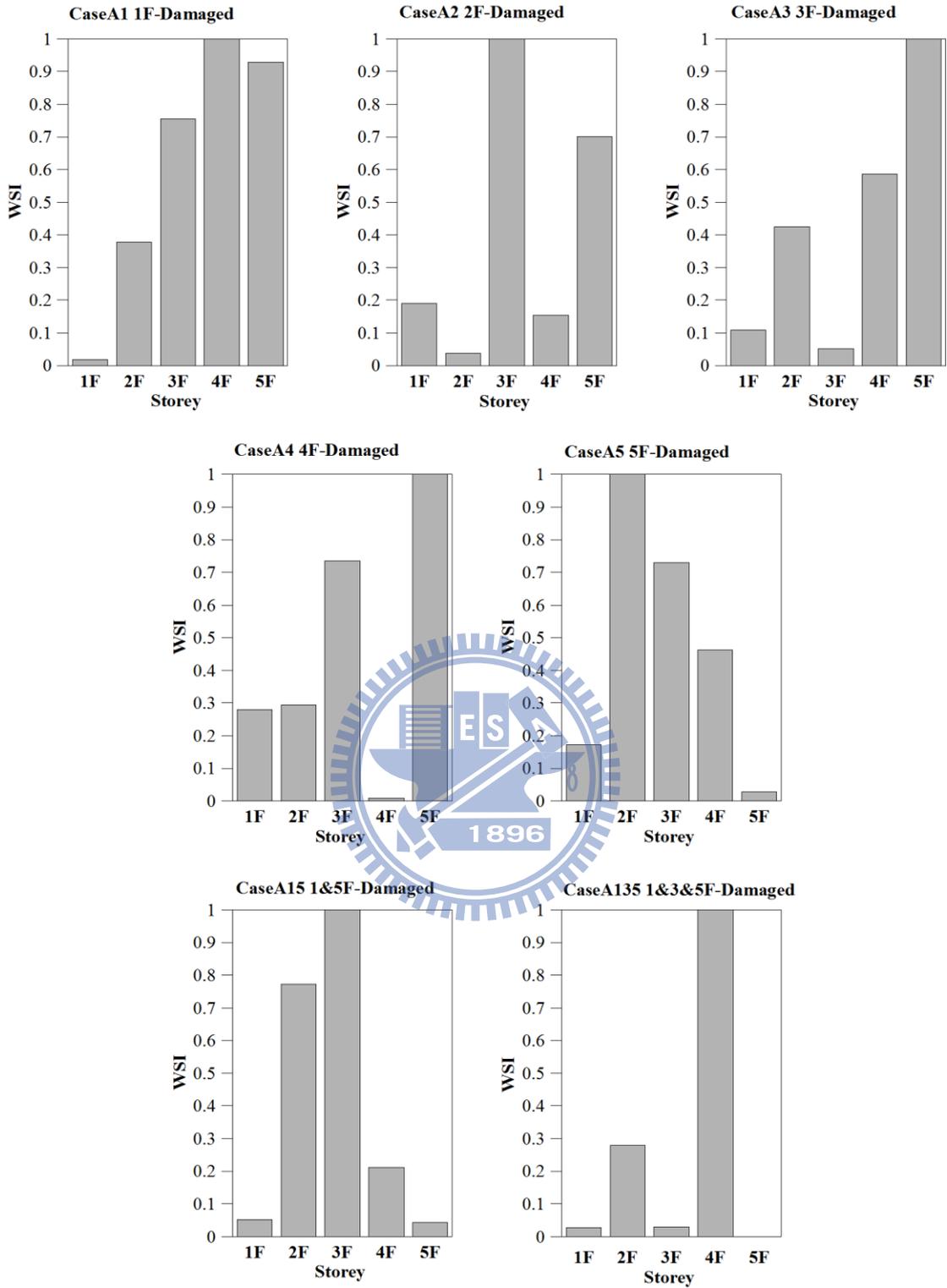


圖 4.6 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR)

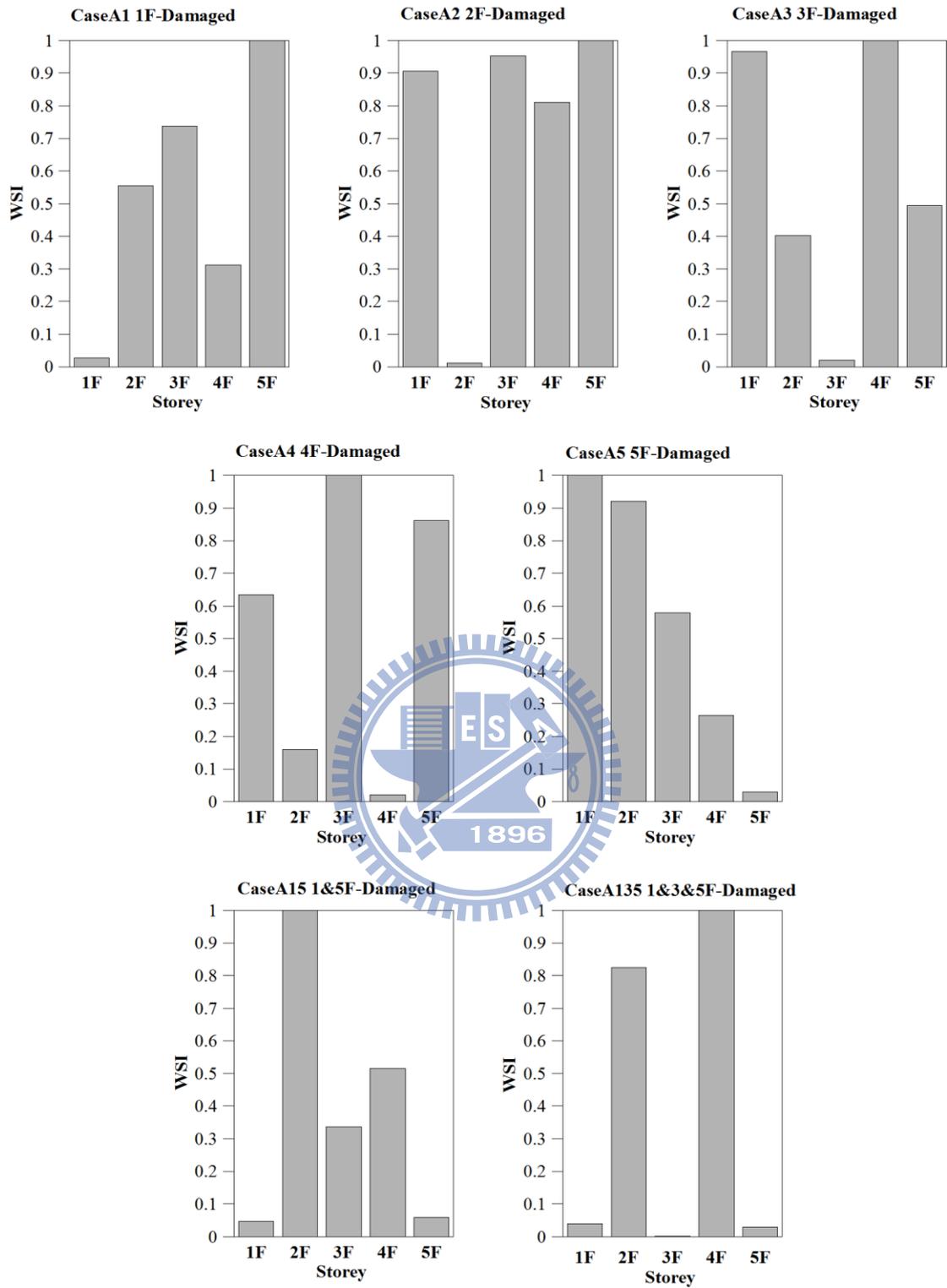


圖 4.7 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA)

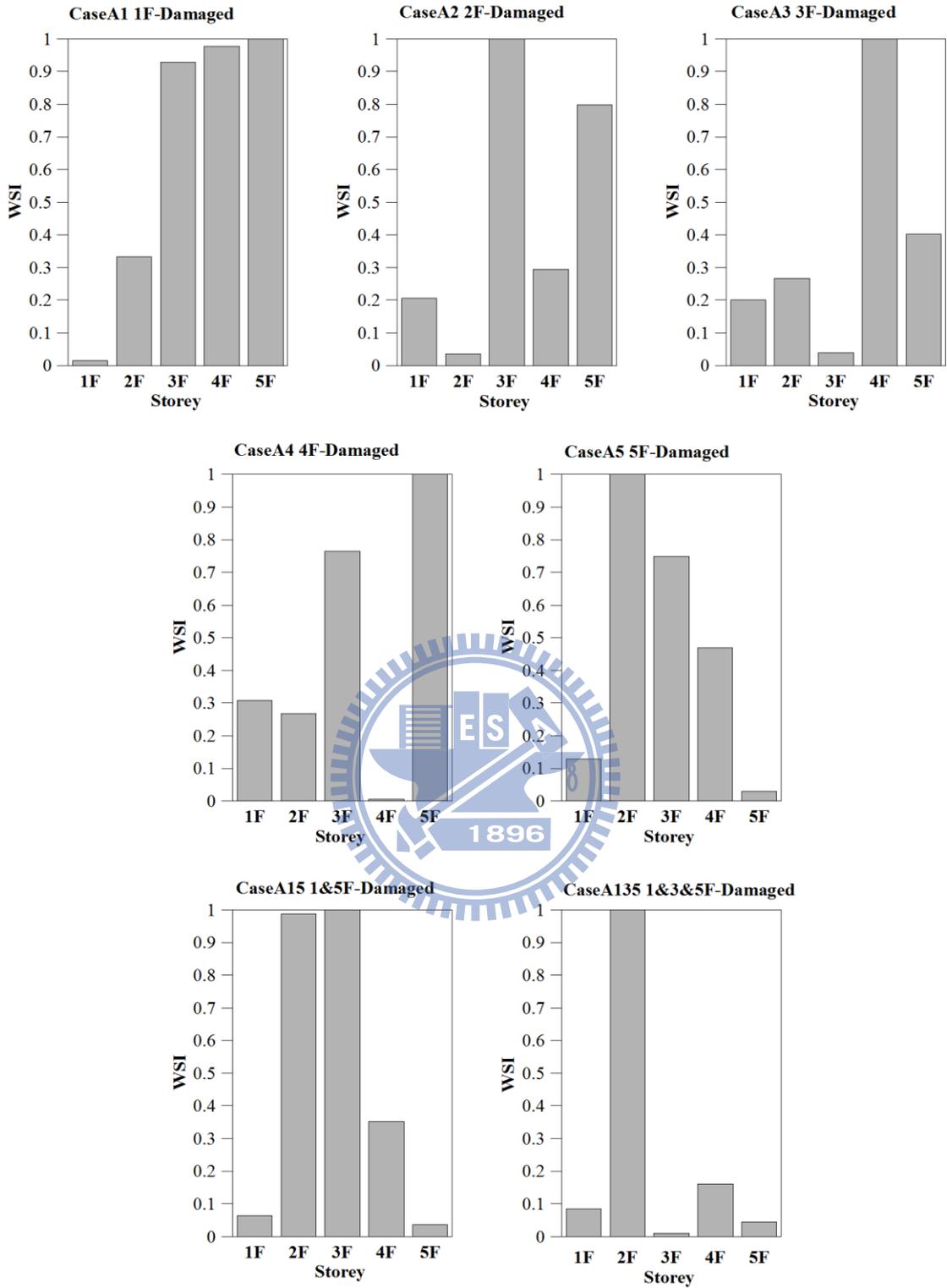


圖 4.8 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA)

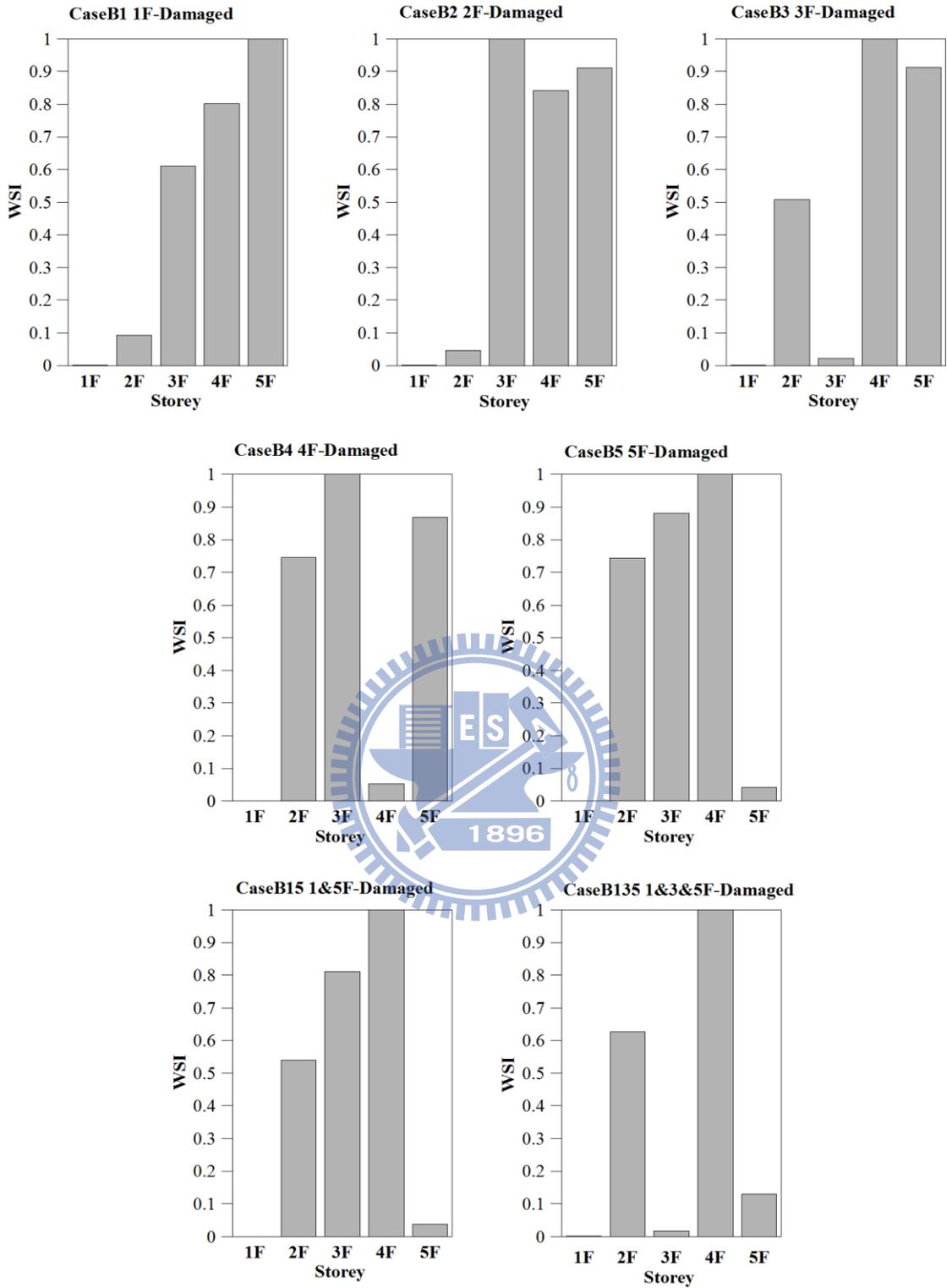


圖 4.9 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV)

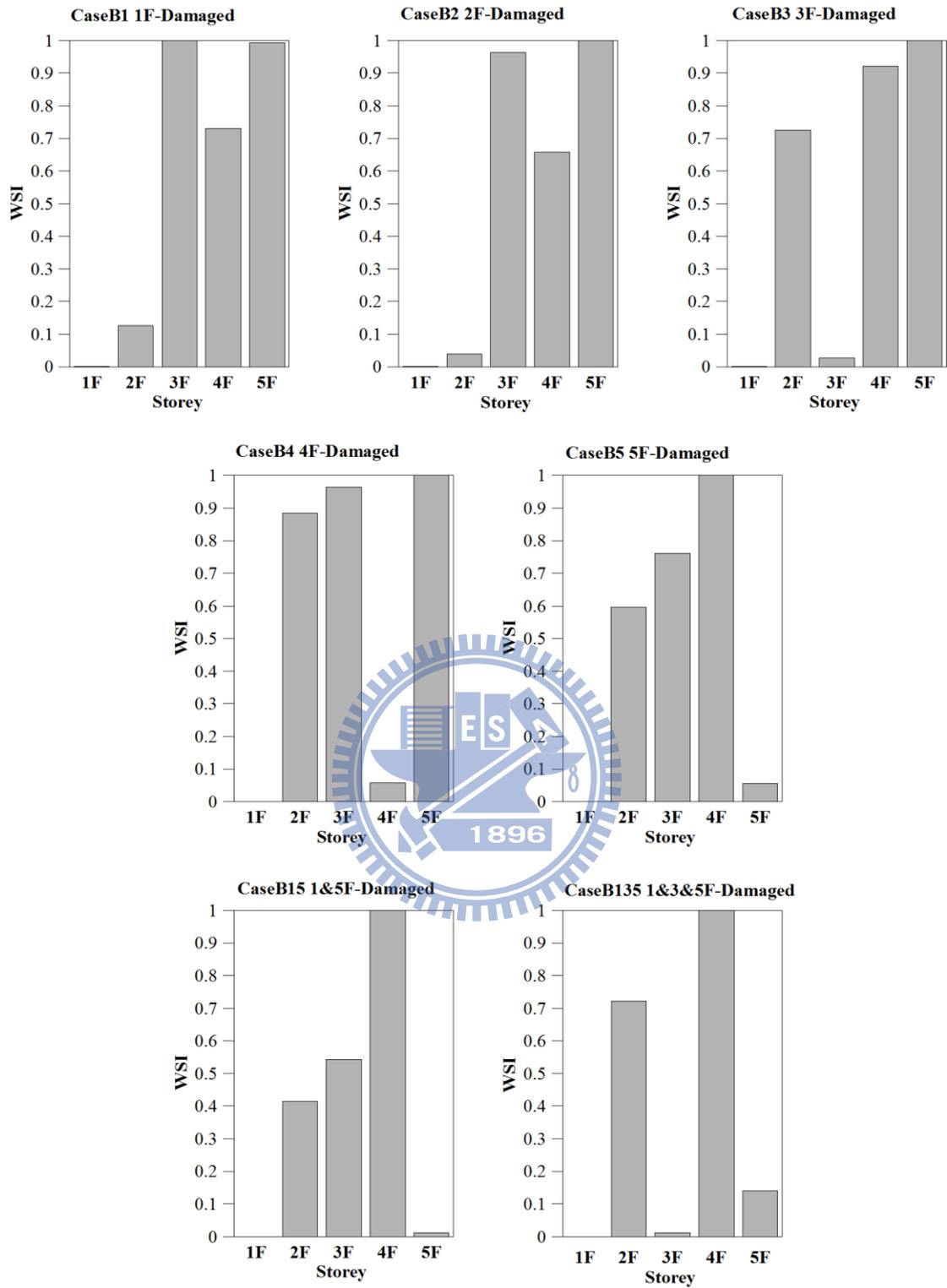


圖 4.10 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS)

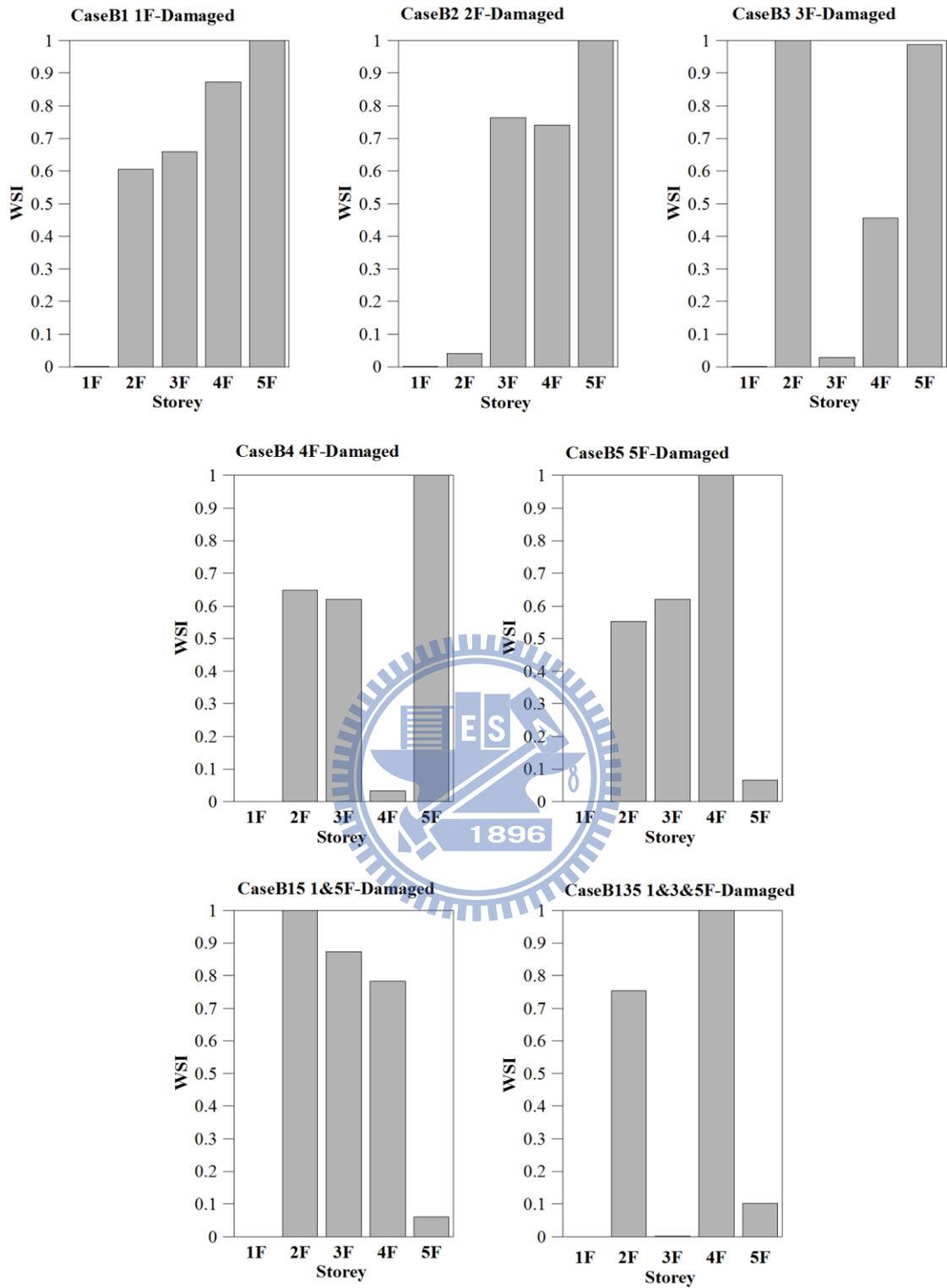


圖 4.11 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR)

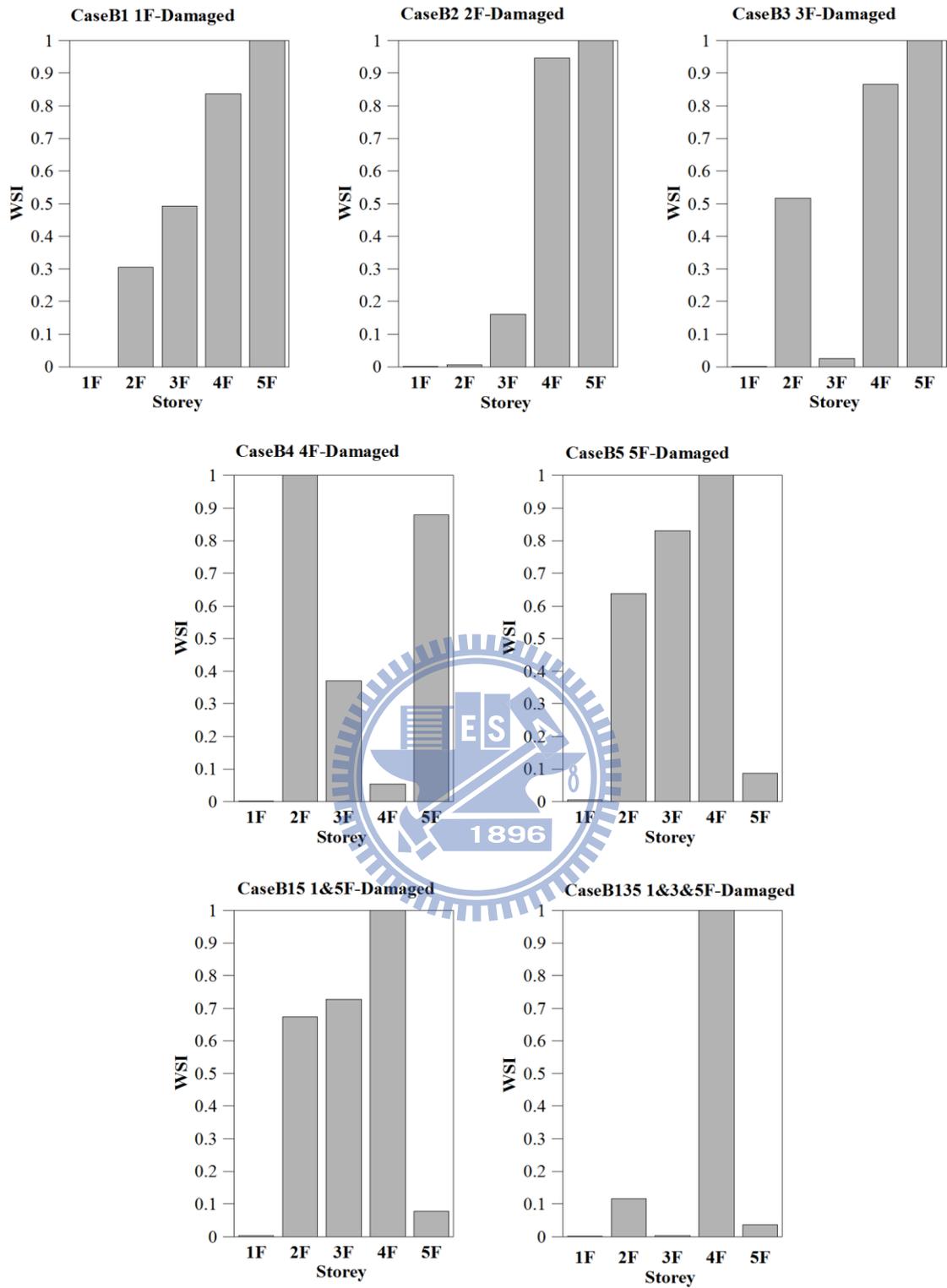


圖 4.12 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA)

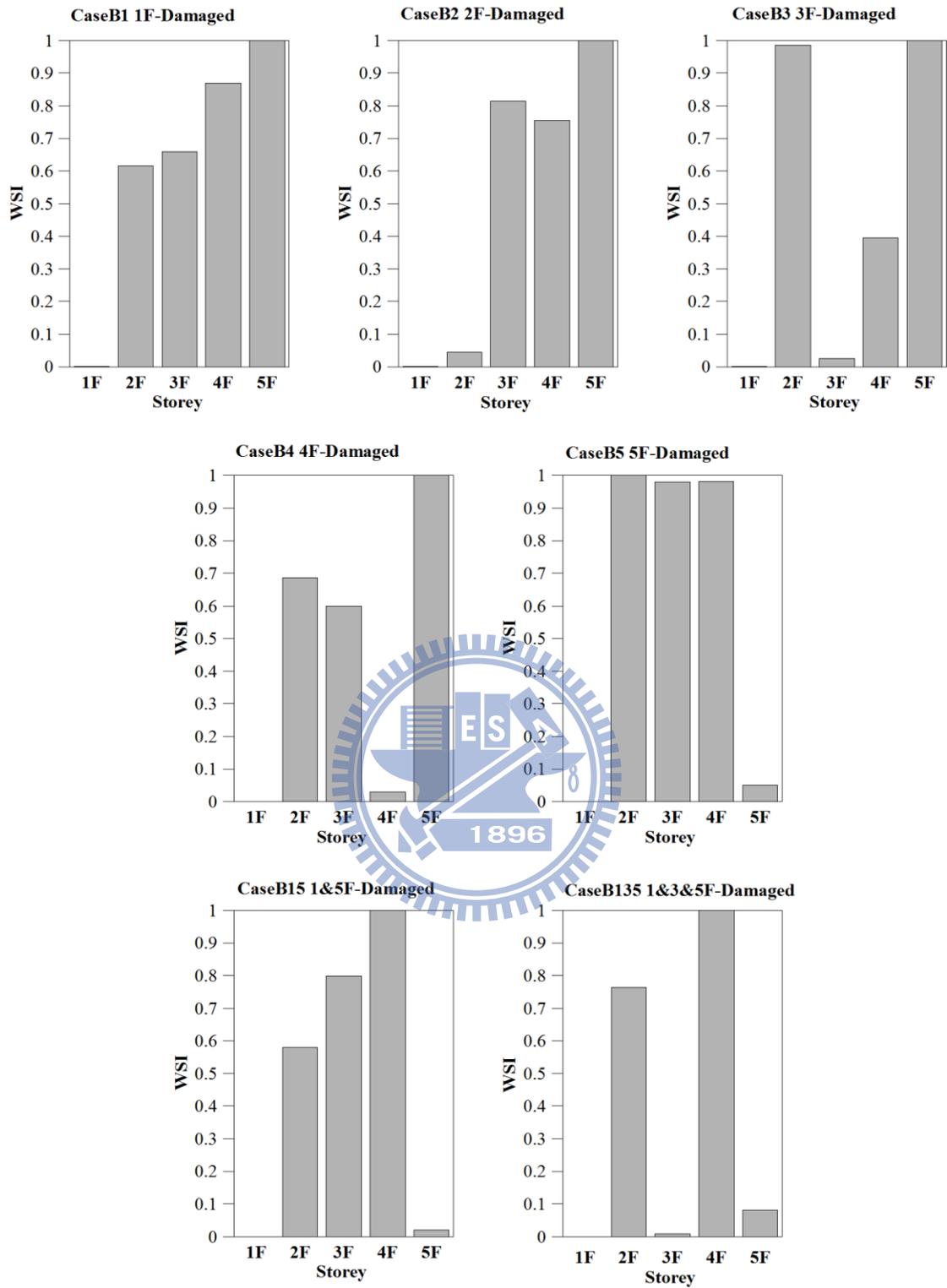


圖 4.13 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA)

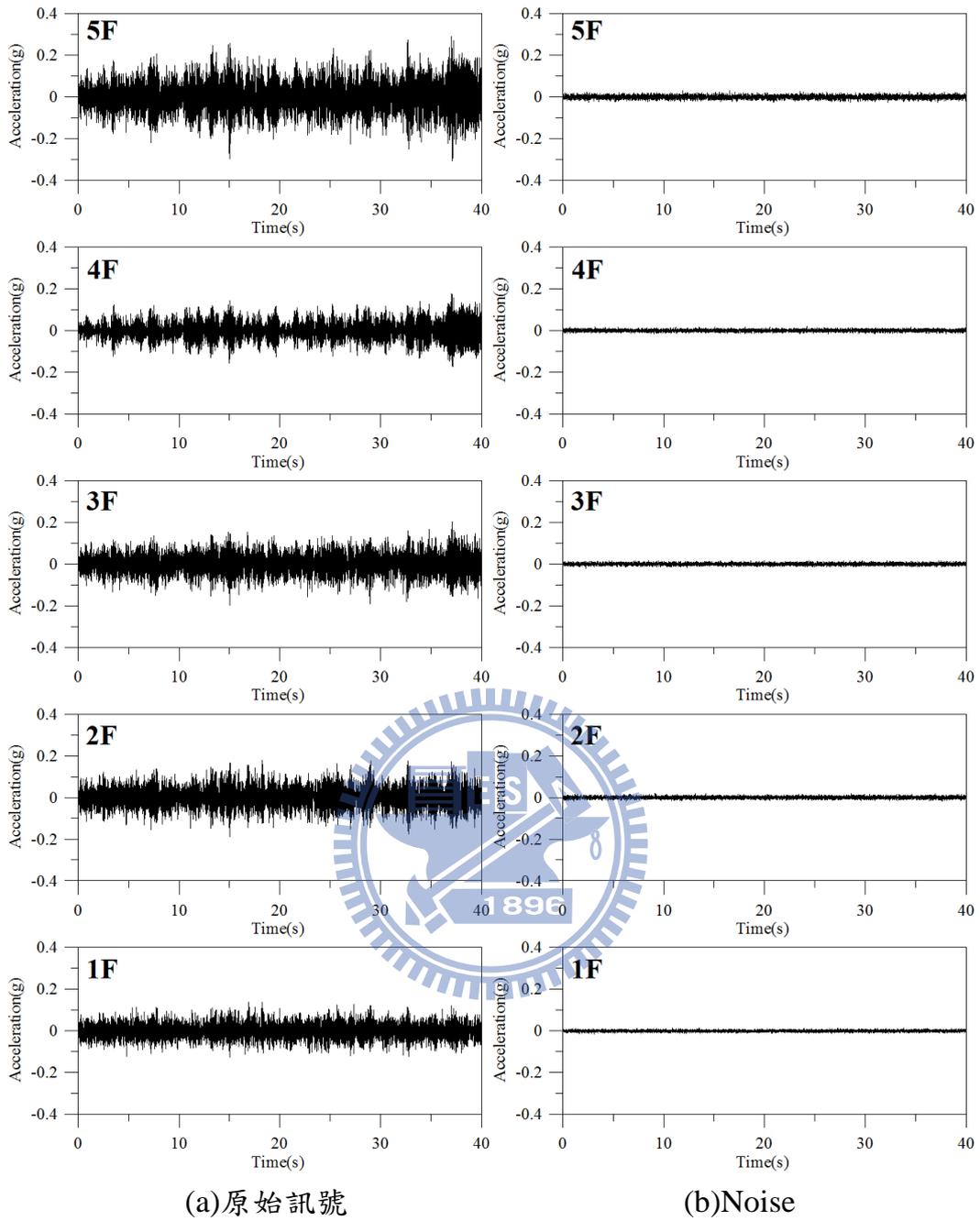


圖 4.14 結構健康狀態之各層樓加速度歷時(NSR=10%)

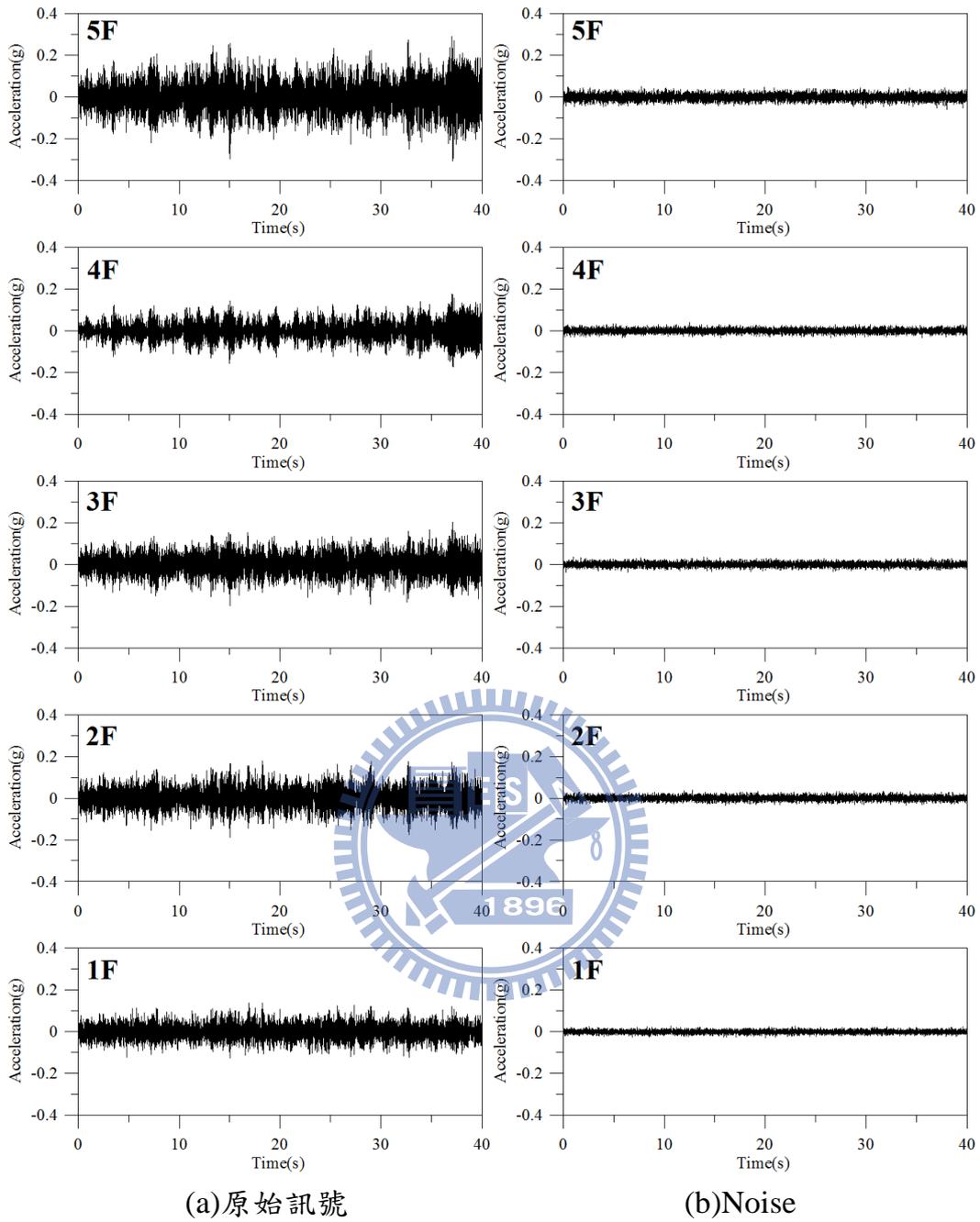


圖 4.15 結構健康狀態之各層樓加速度歷時(NSR=20%)

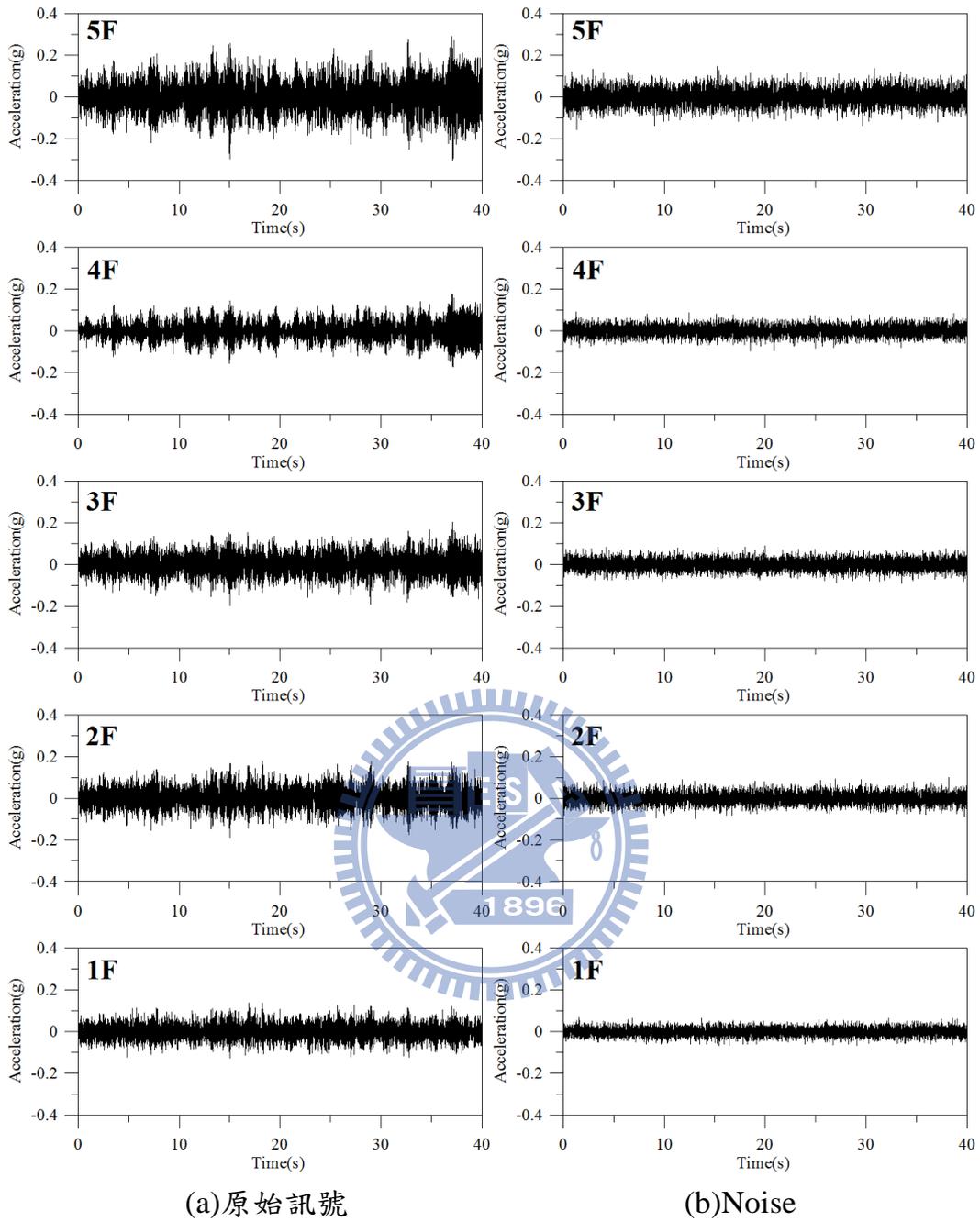


圖 4.16 結構健康狀態之各層樓加速度歷時(NSR=50%)

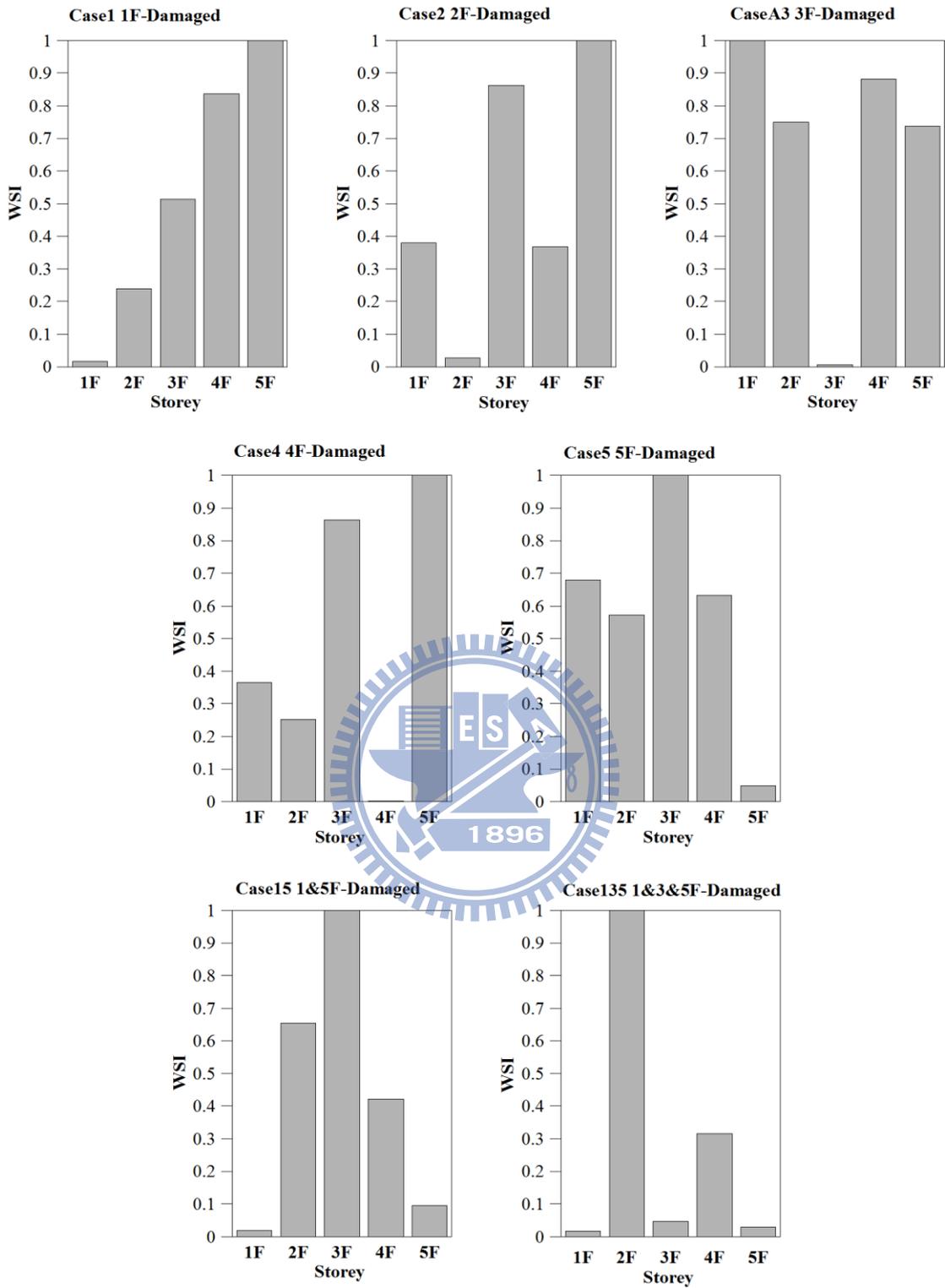


圖 4.17 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV, NSR=10%)

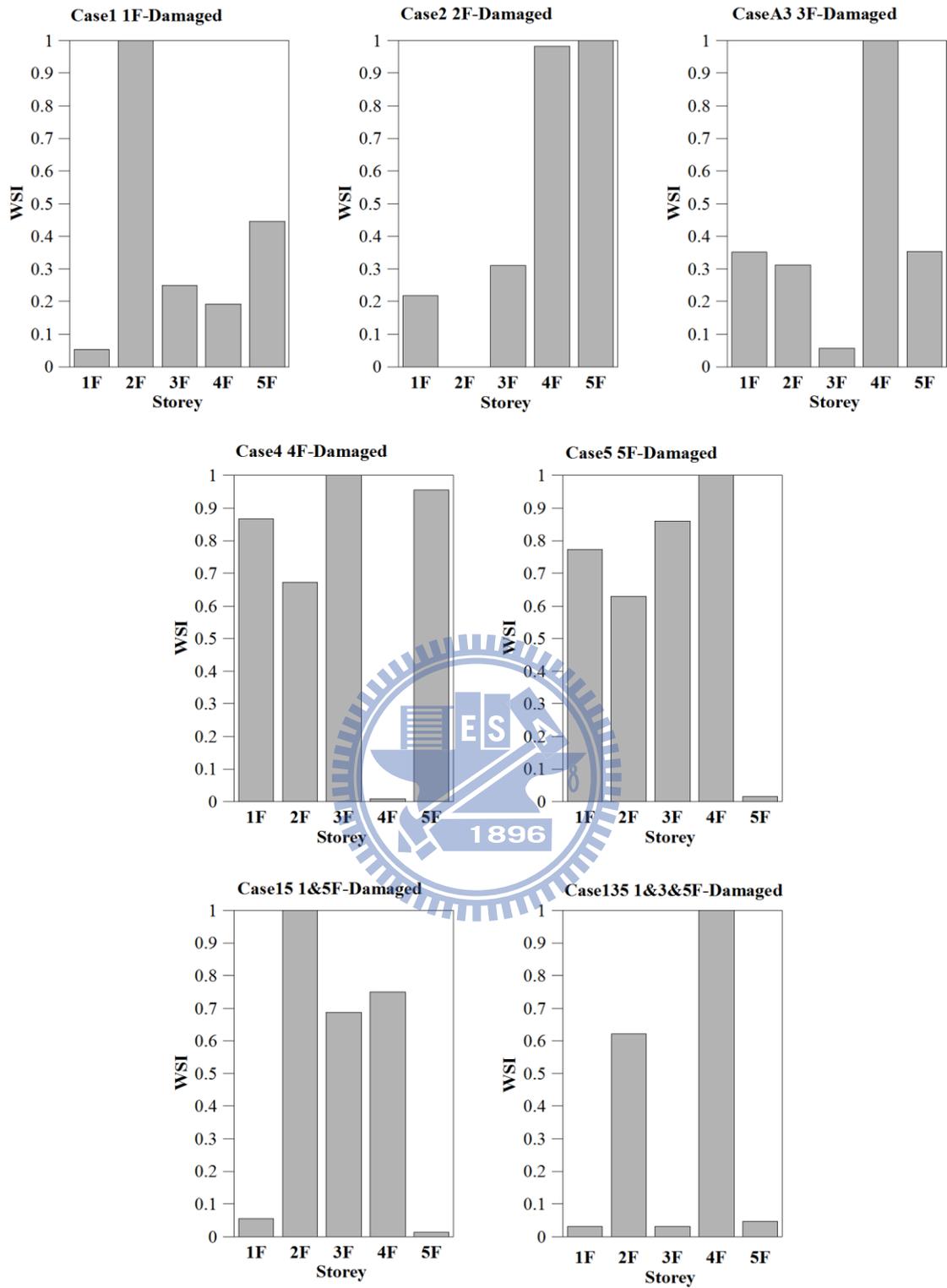


圖 4.18 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS, NSR=10%)

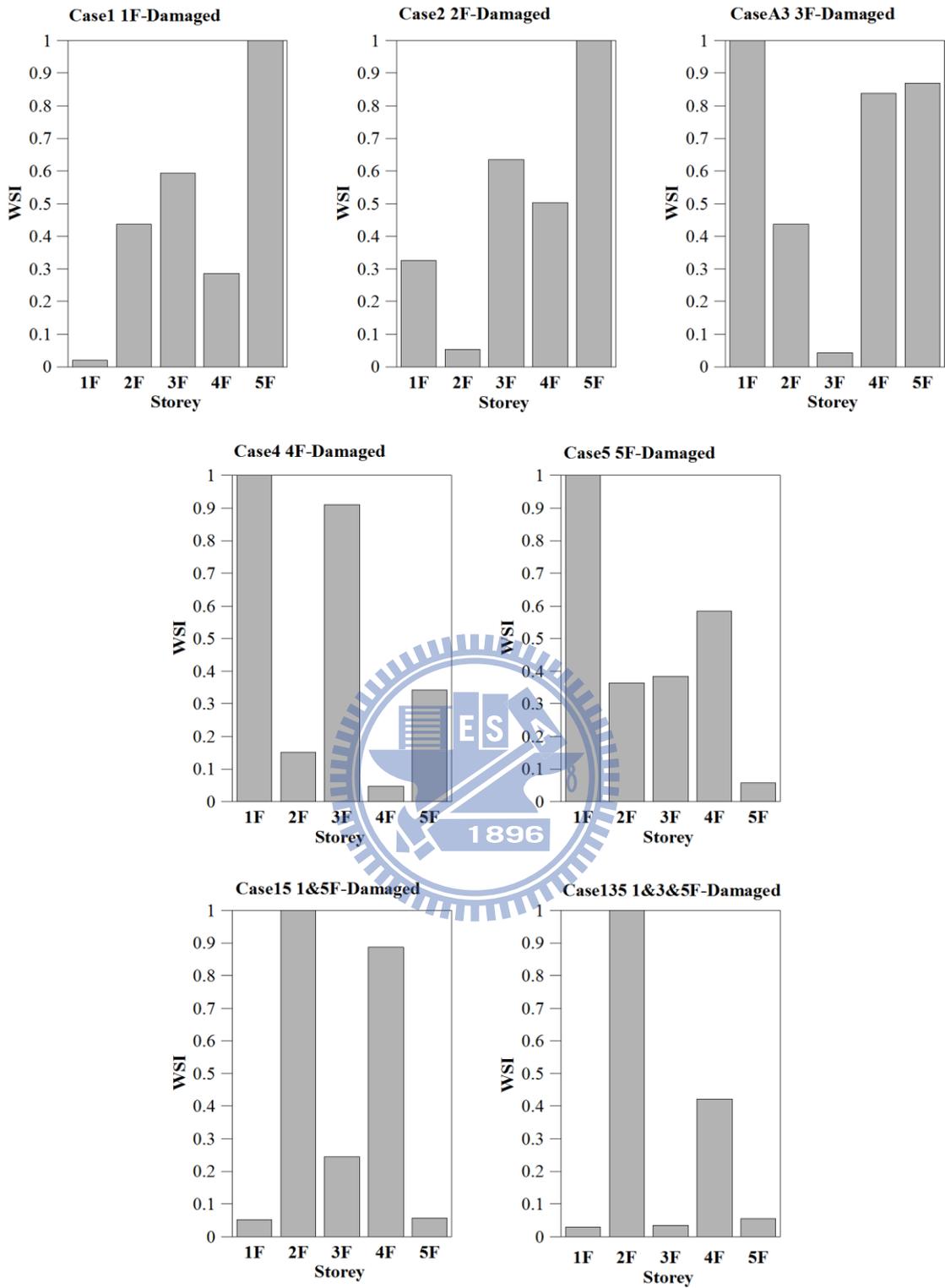


圖 4.19 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, NSR=10%)

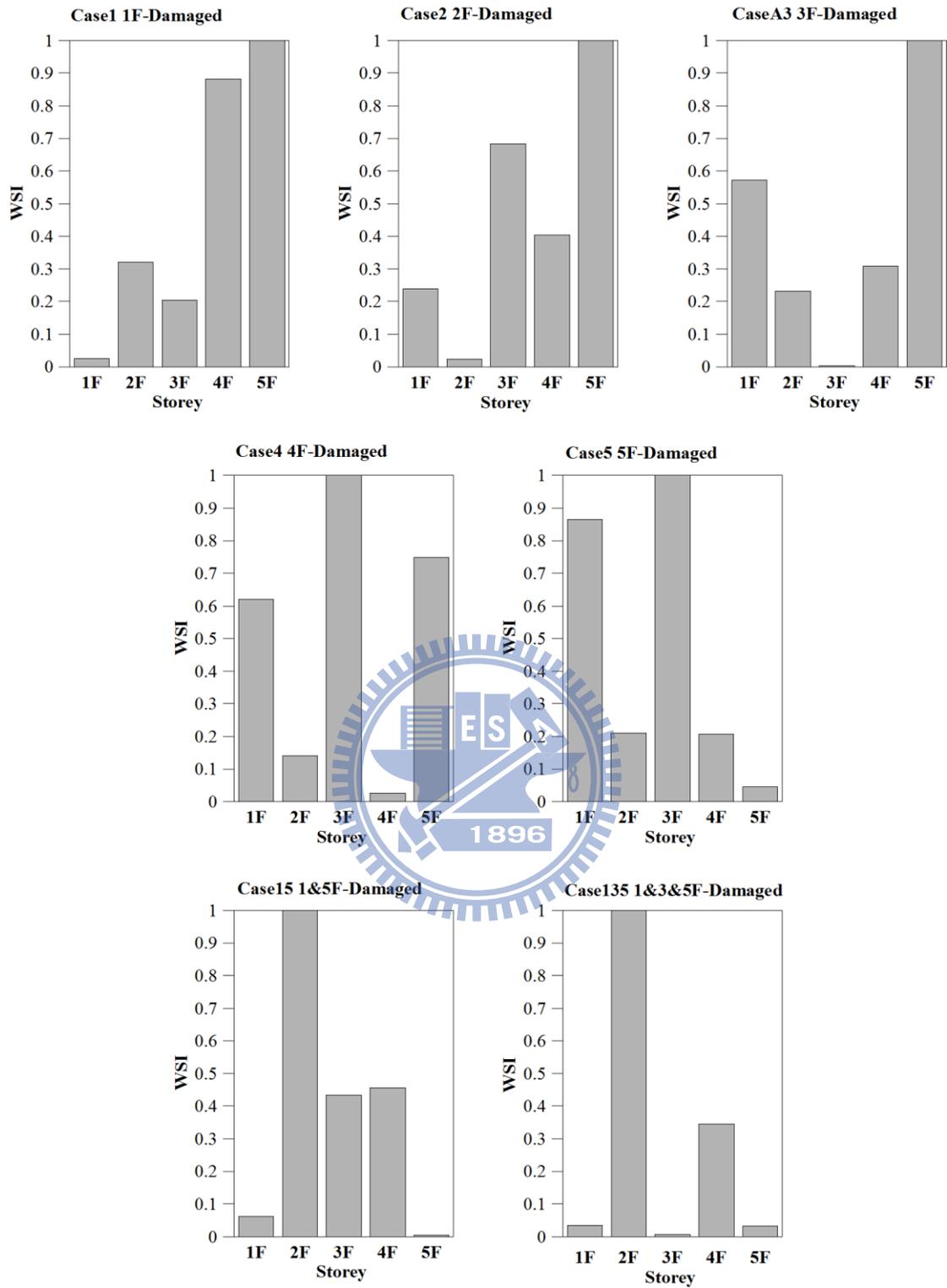


圖 4.20 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, NSR=10%)

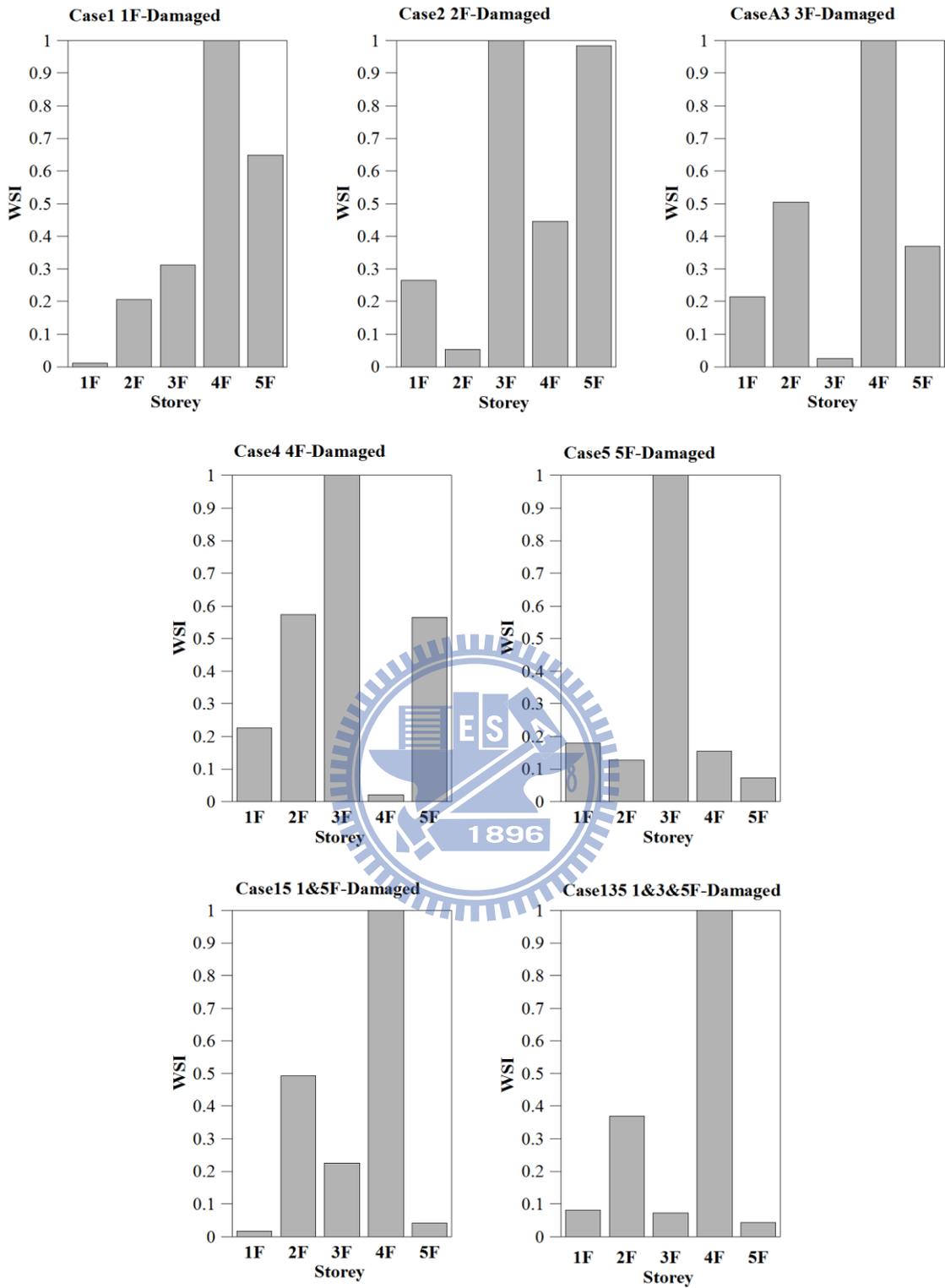


圖 4.21 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA, NSR=10%)

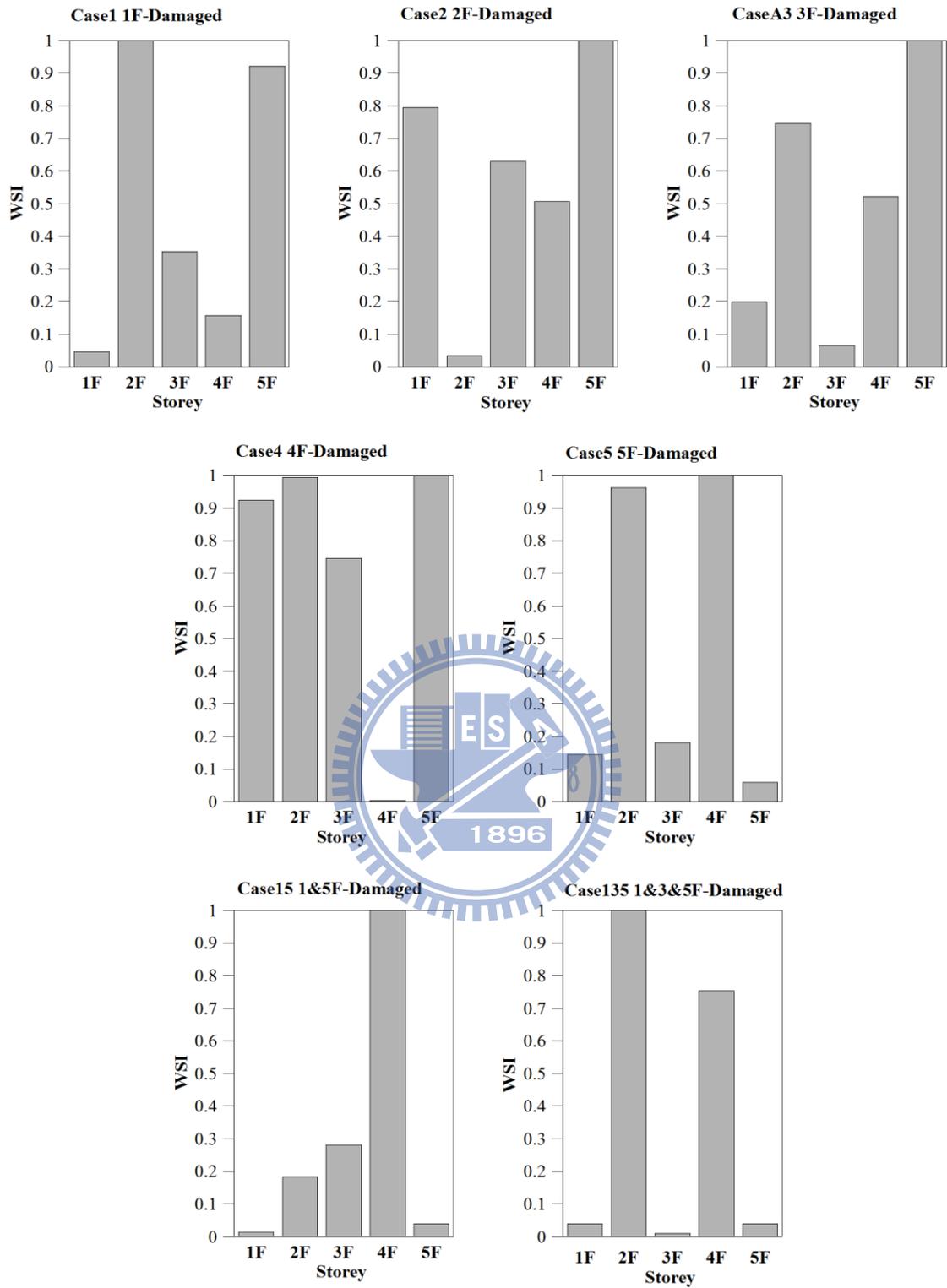


圖 4.22 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV, NSR=20%)

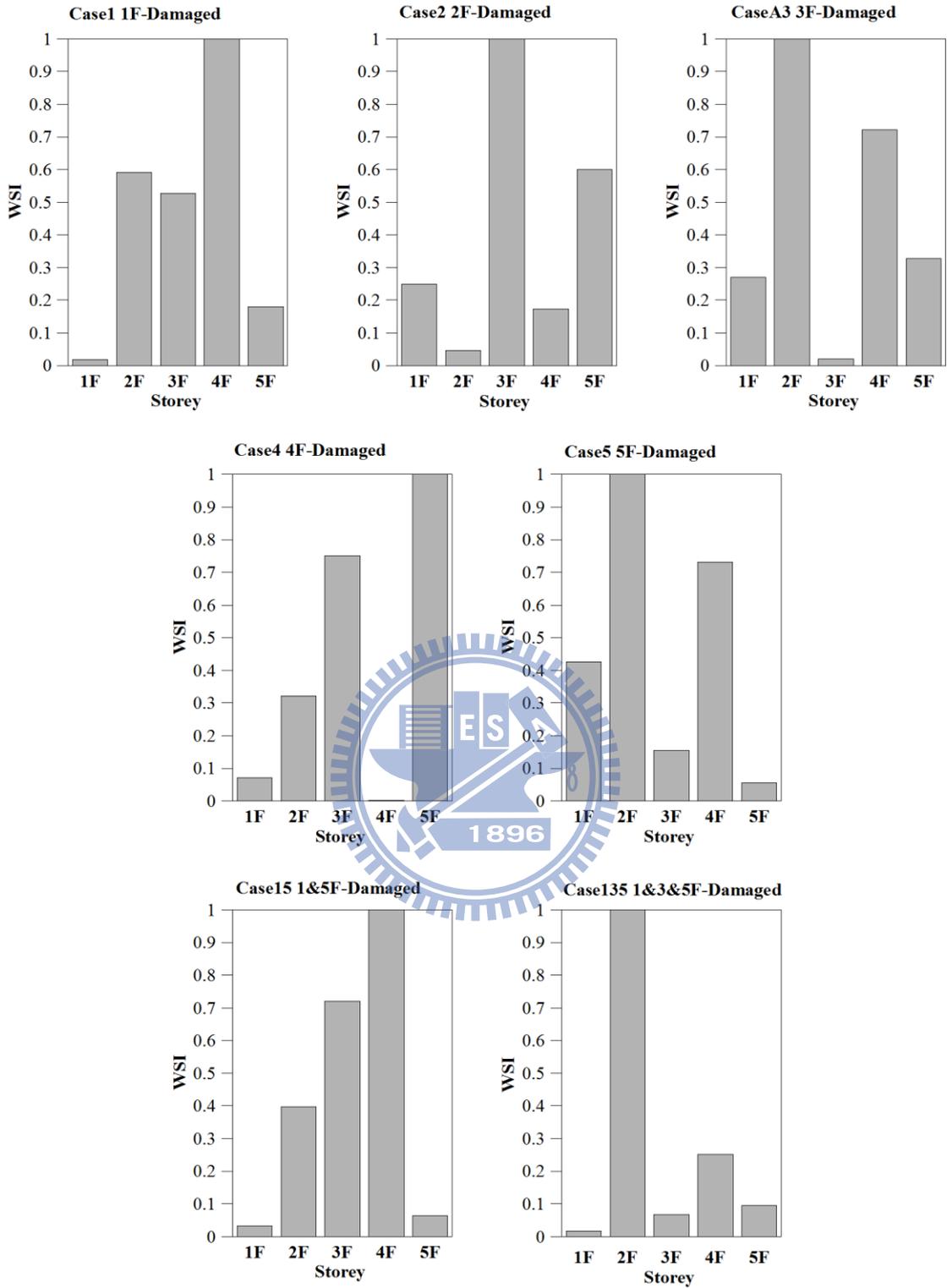


圖 4.23 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS, NSR=20%)

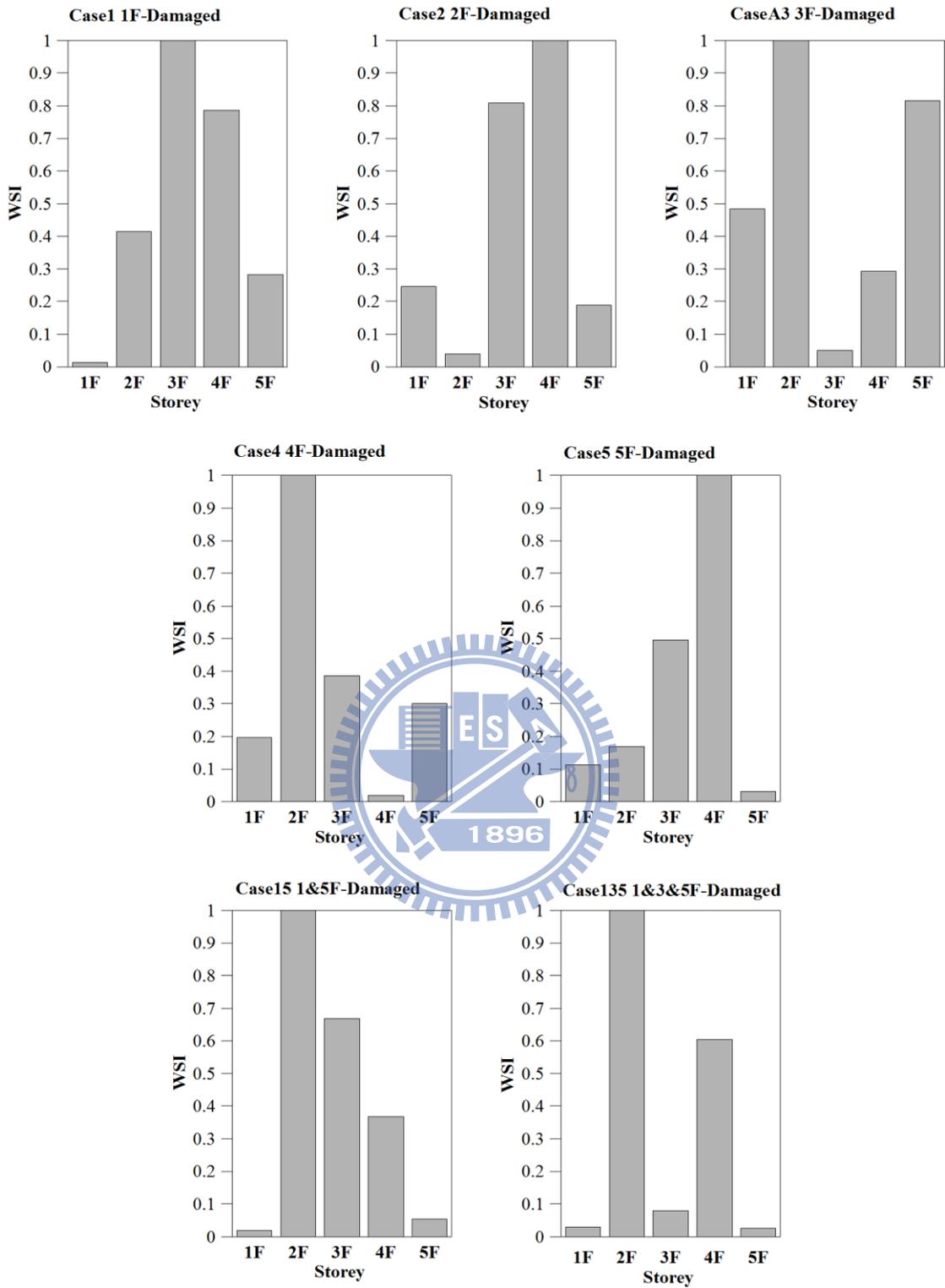


圖 4.24 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, NSR=20%)

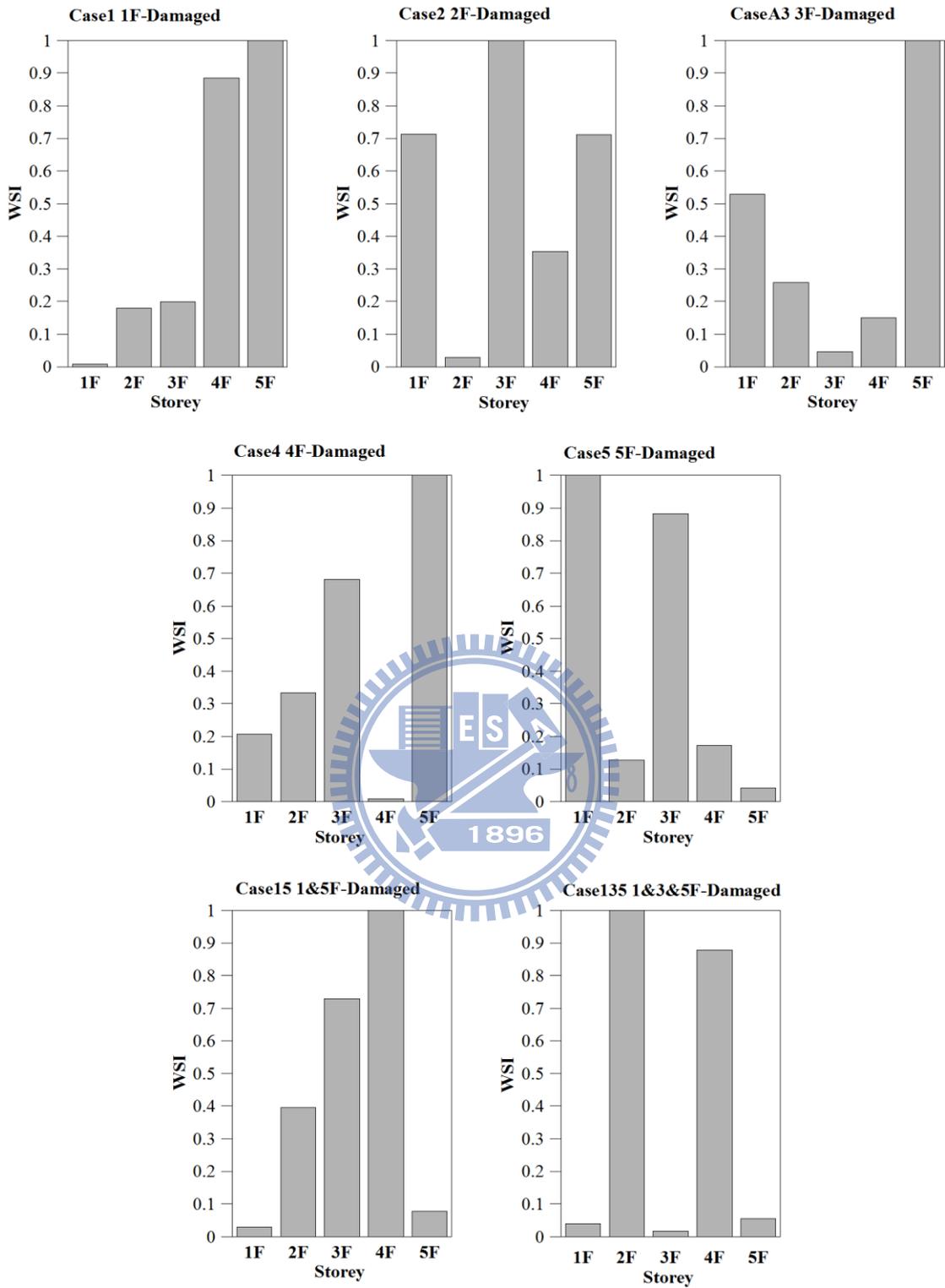


圖 4.25 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, NSR=20%)

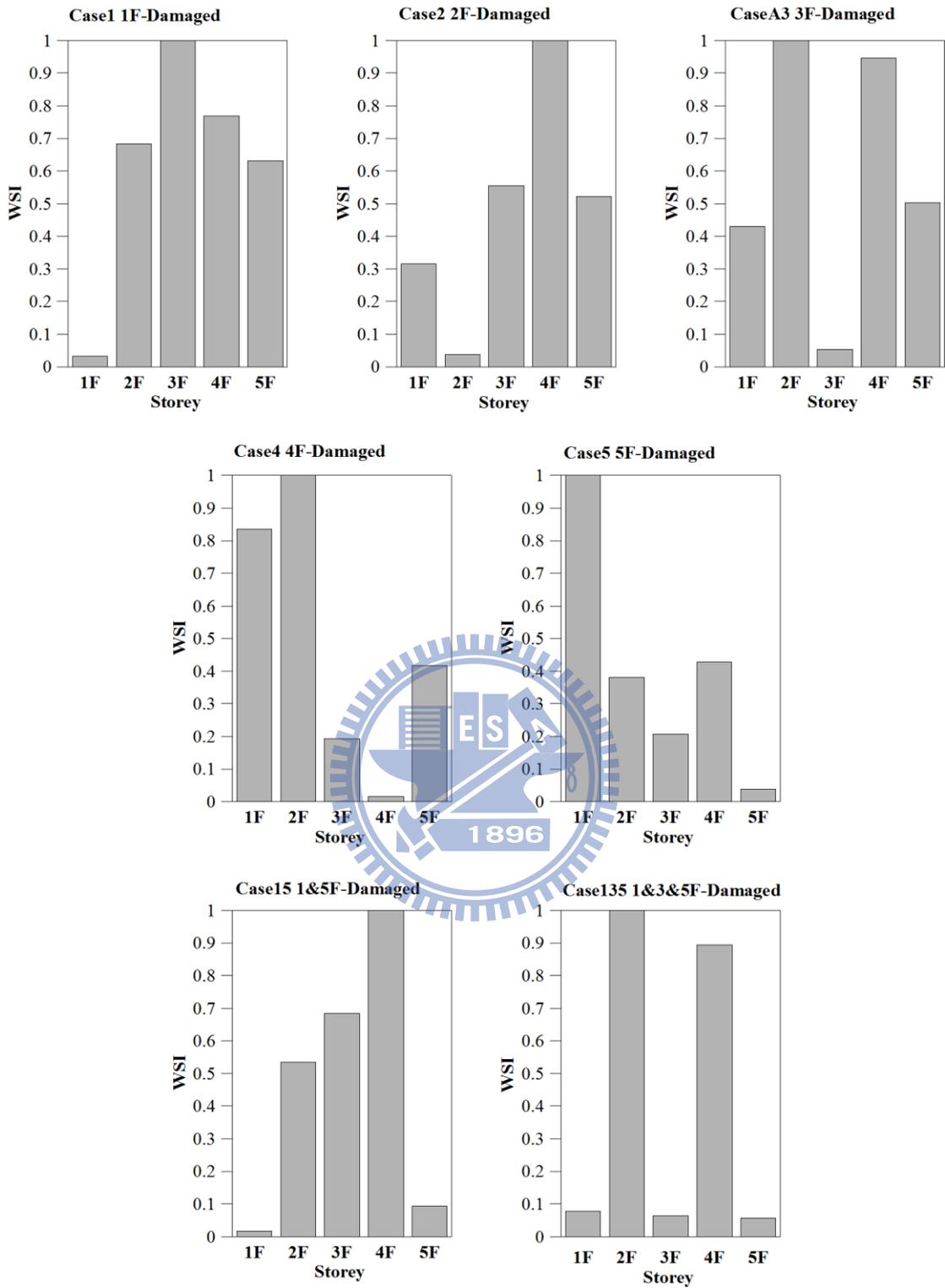


圖 4.26 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA, NSR=20%)

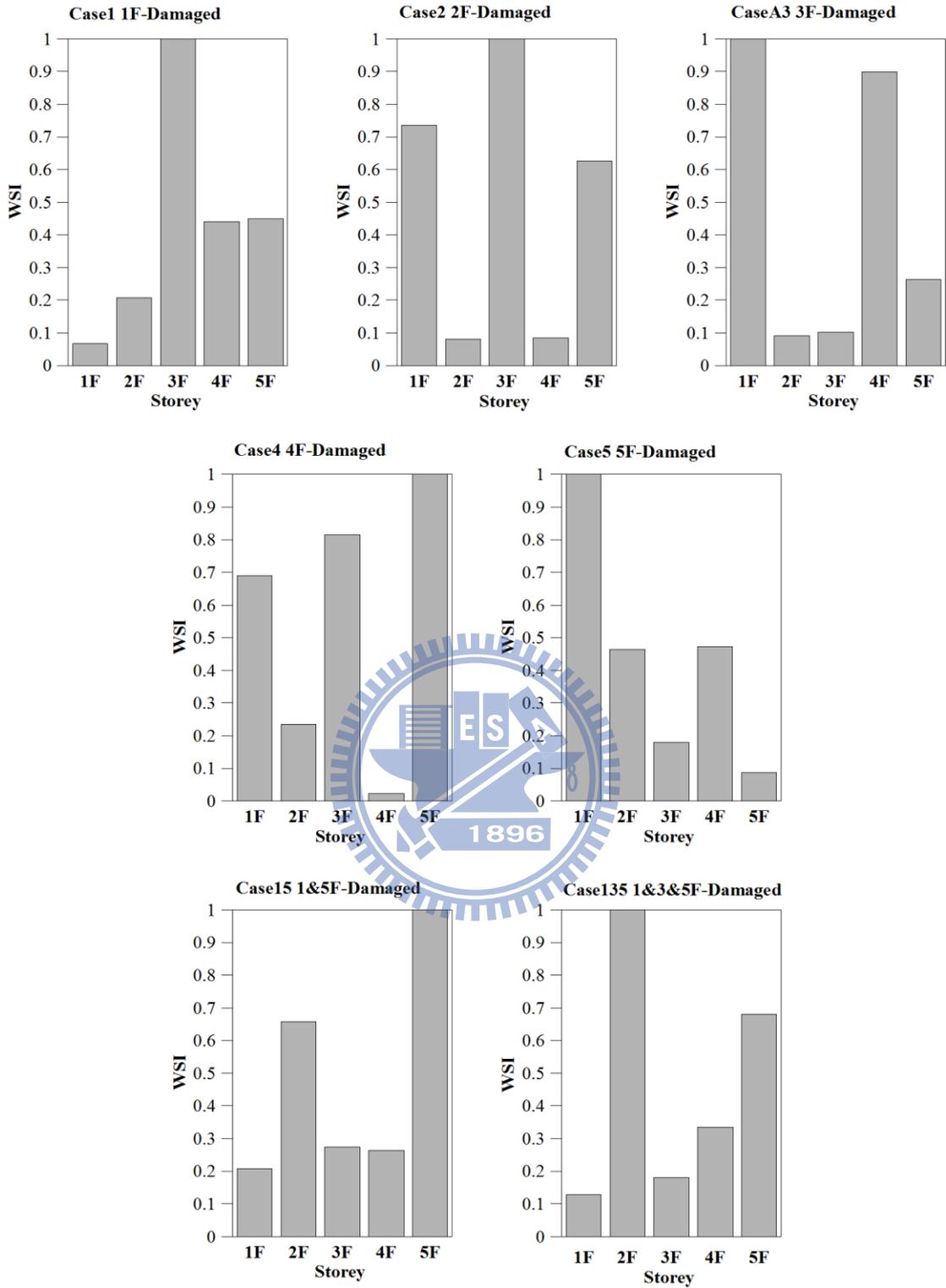


圖 4.27 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV, NSR=50%)

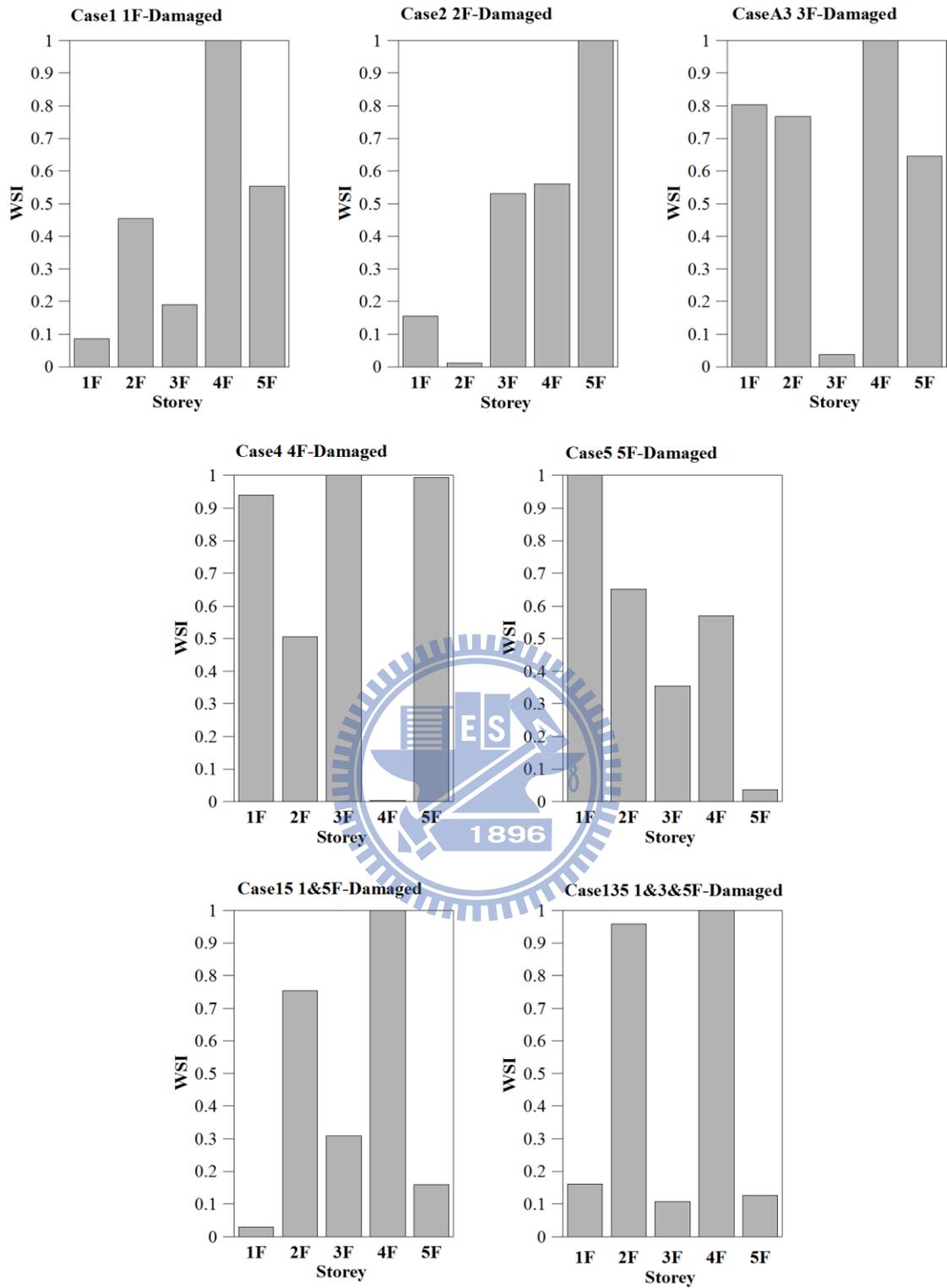


圖 4.28 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS, NSR=50%)

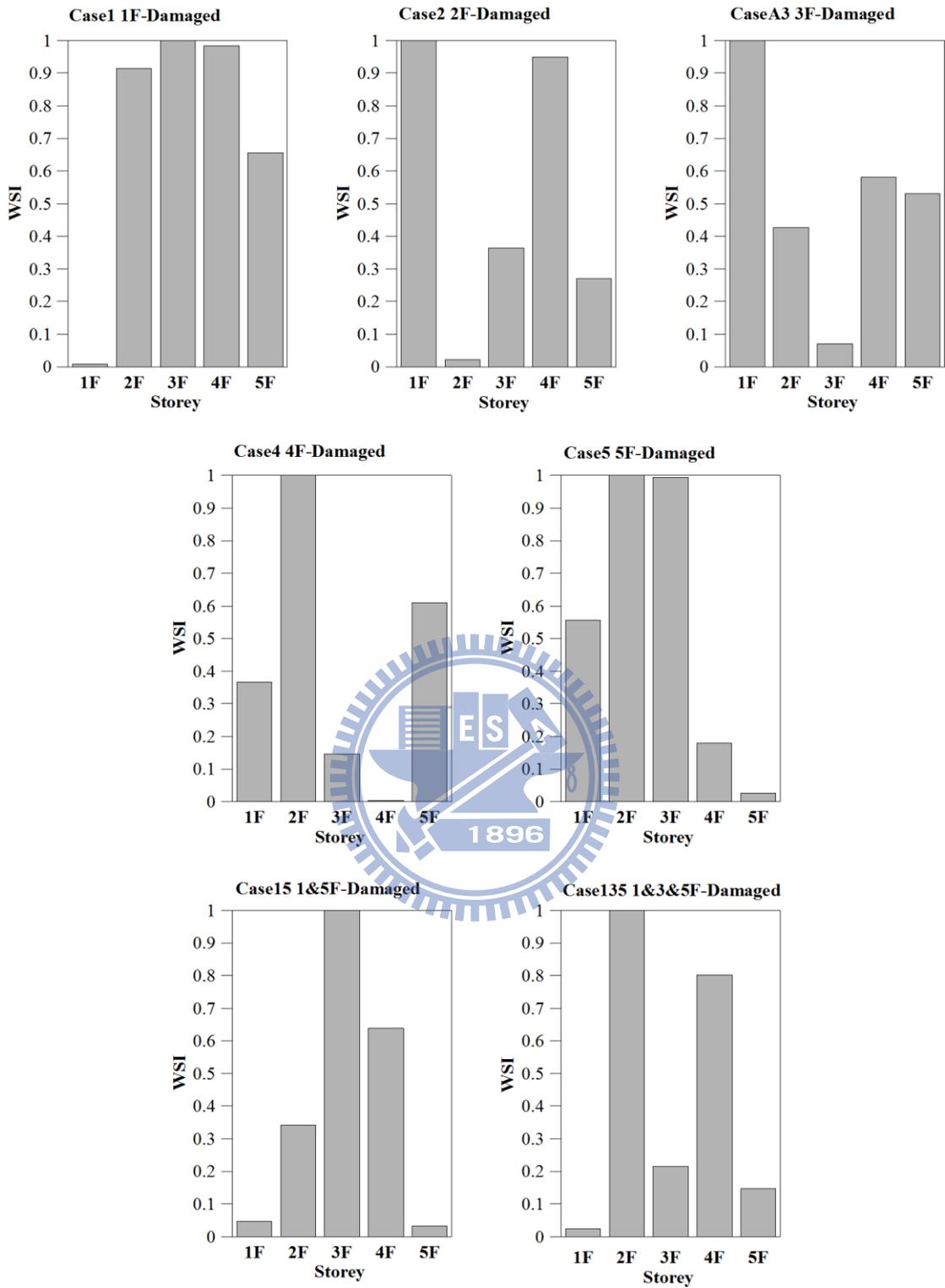


圖 4.29 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, NSR=50%)

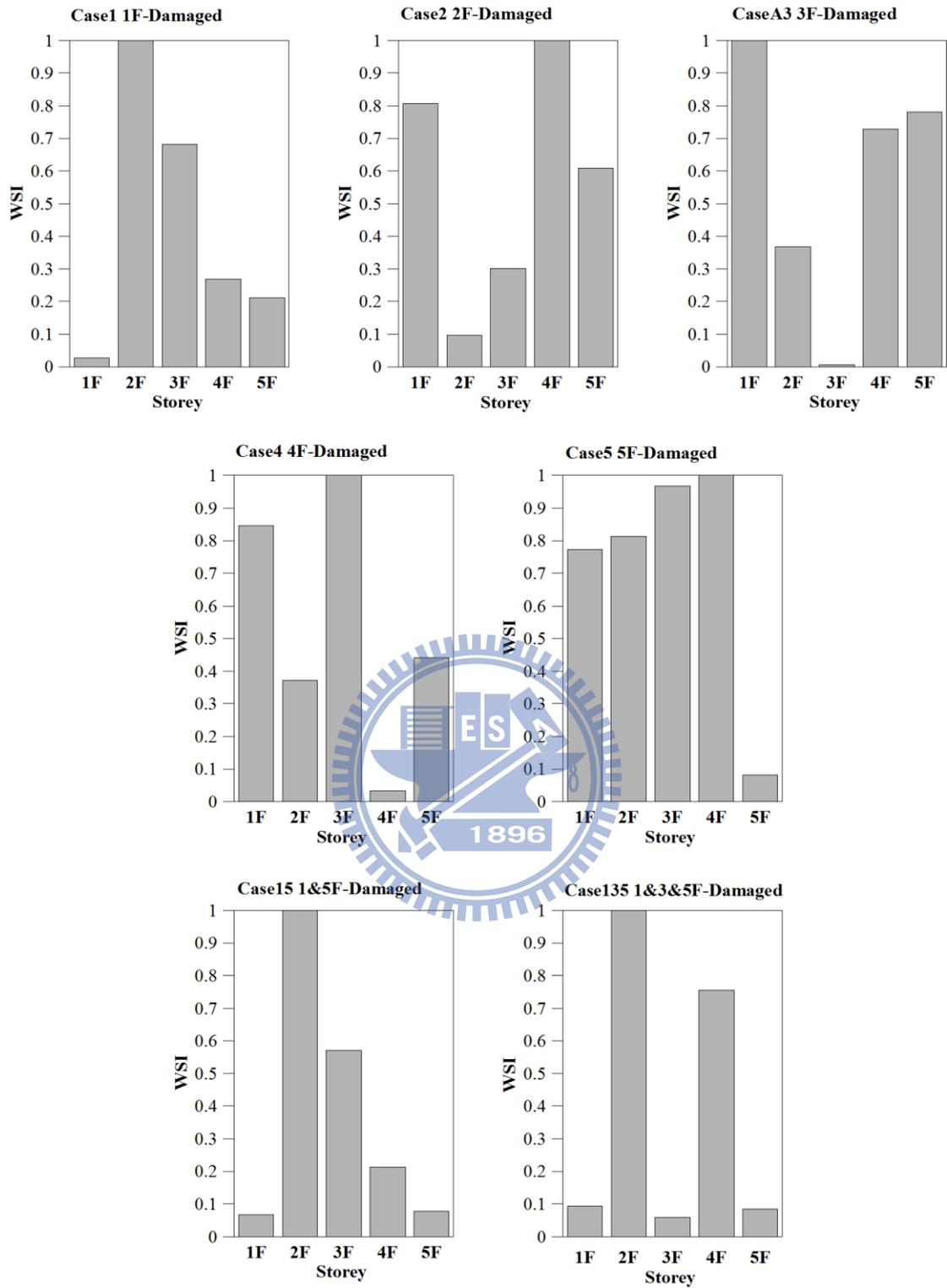


圖 4.30 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, NSR=50%)

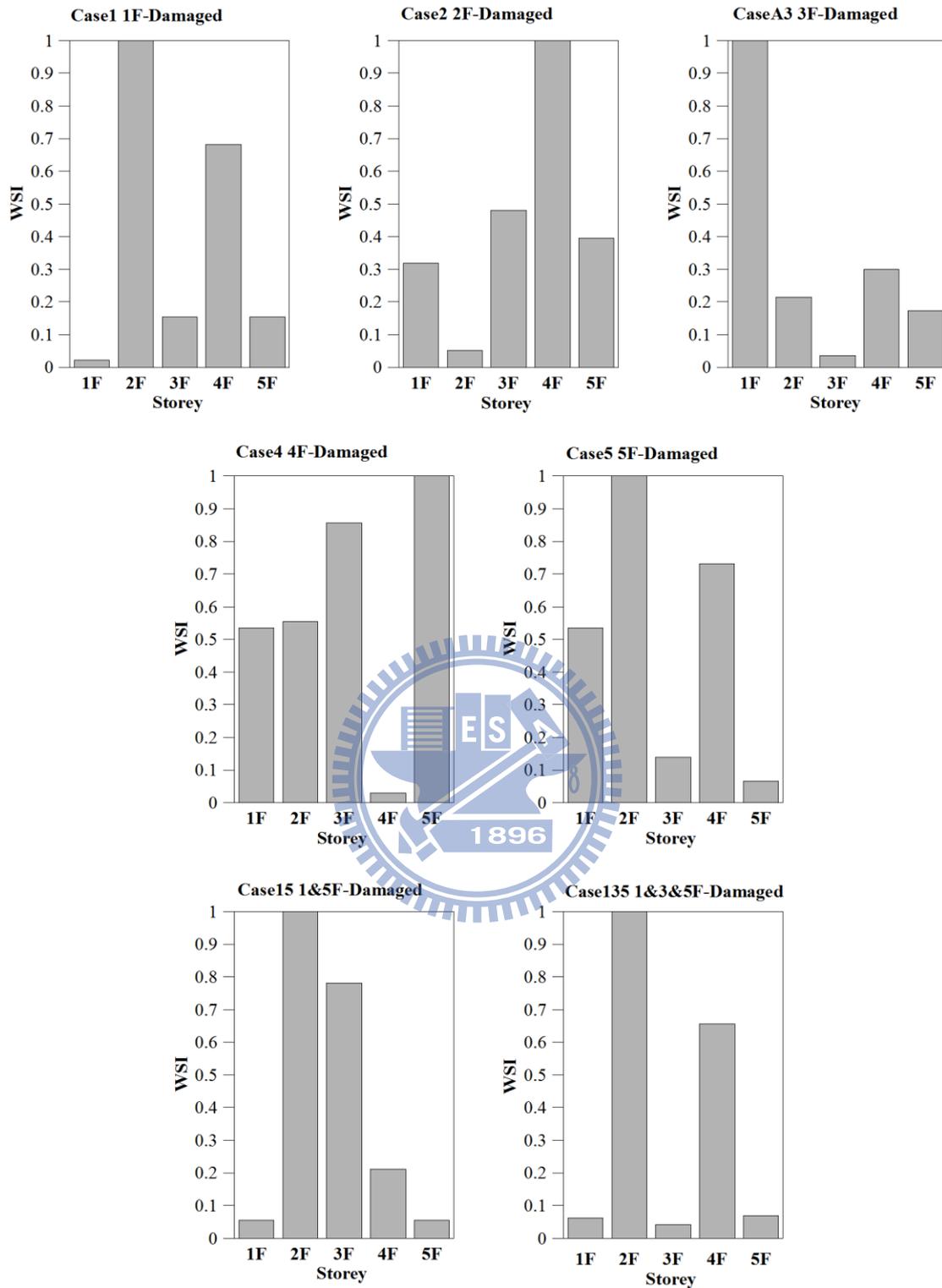


圖 4.31 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA, NSR=50%)

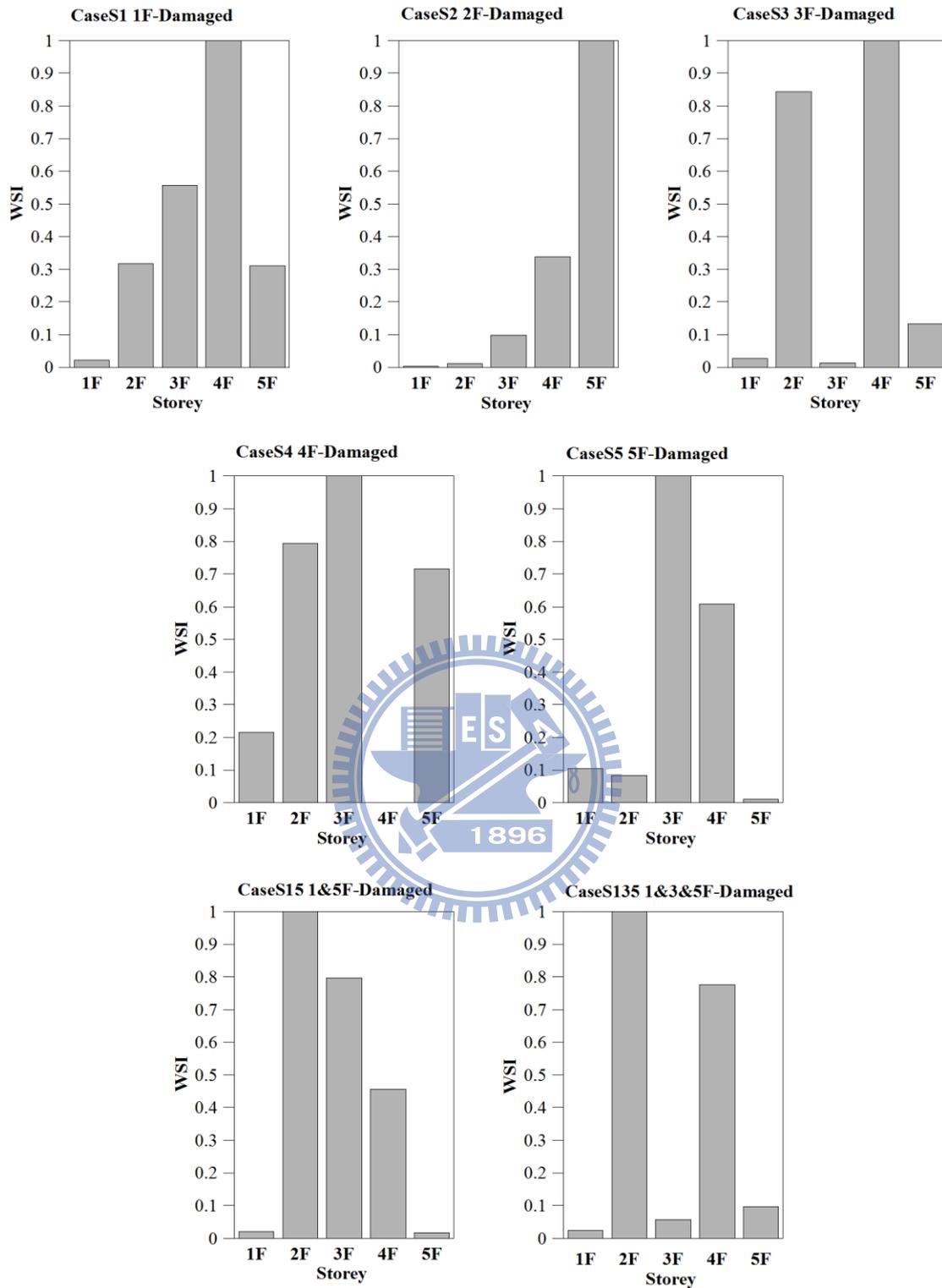


圖 4.32 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 50%)

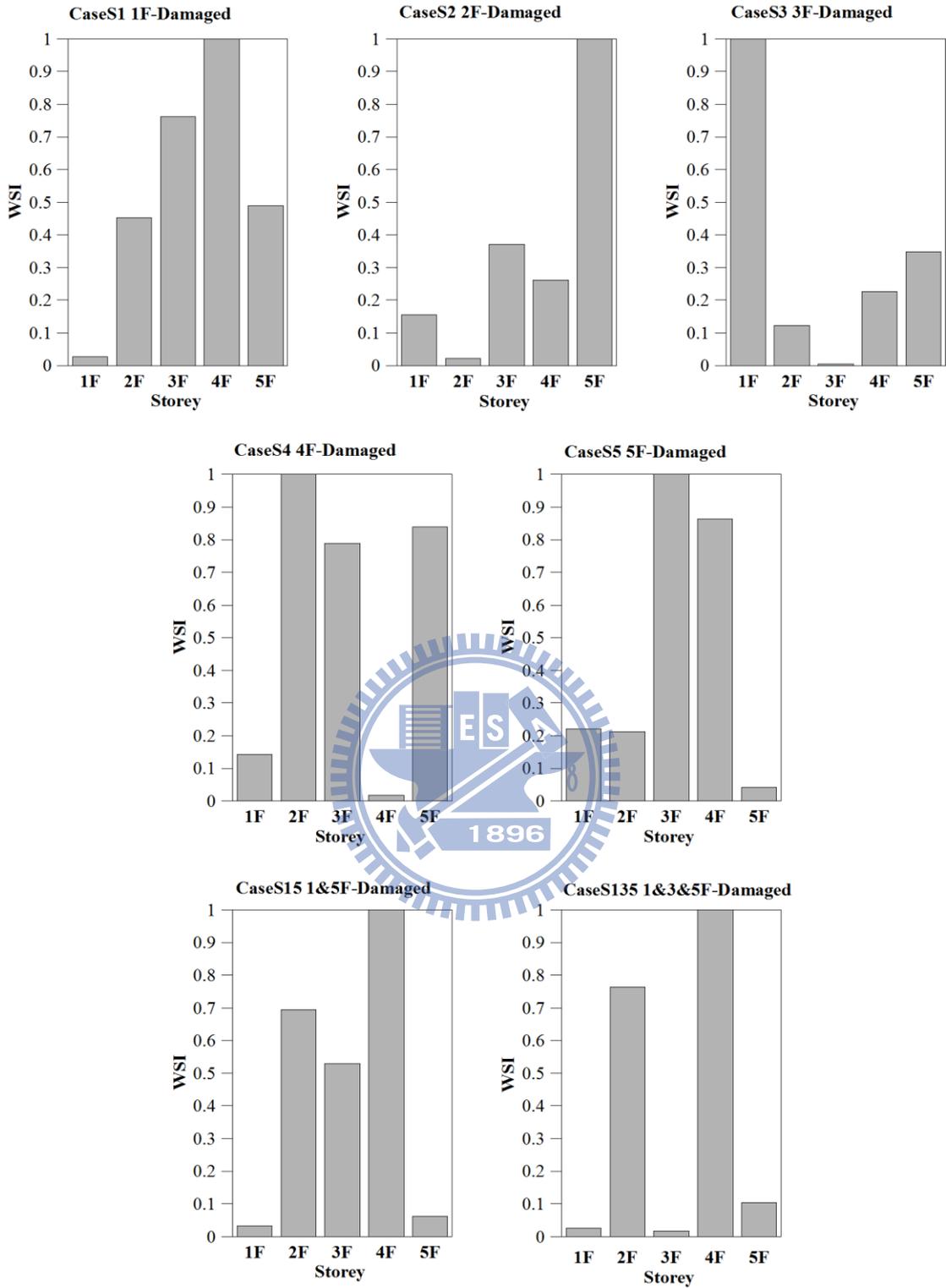


圖 4.33 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 50%)

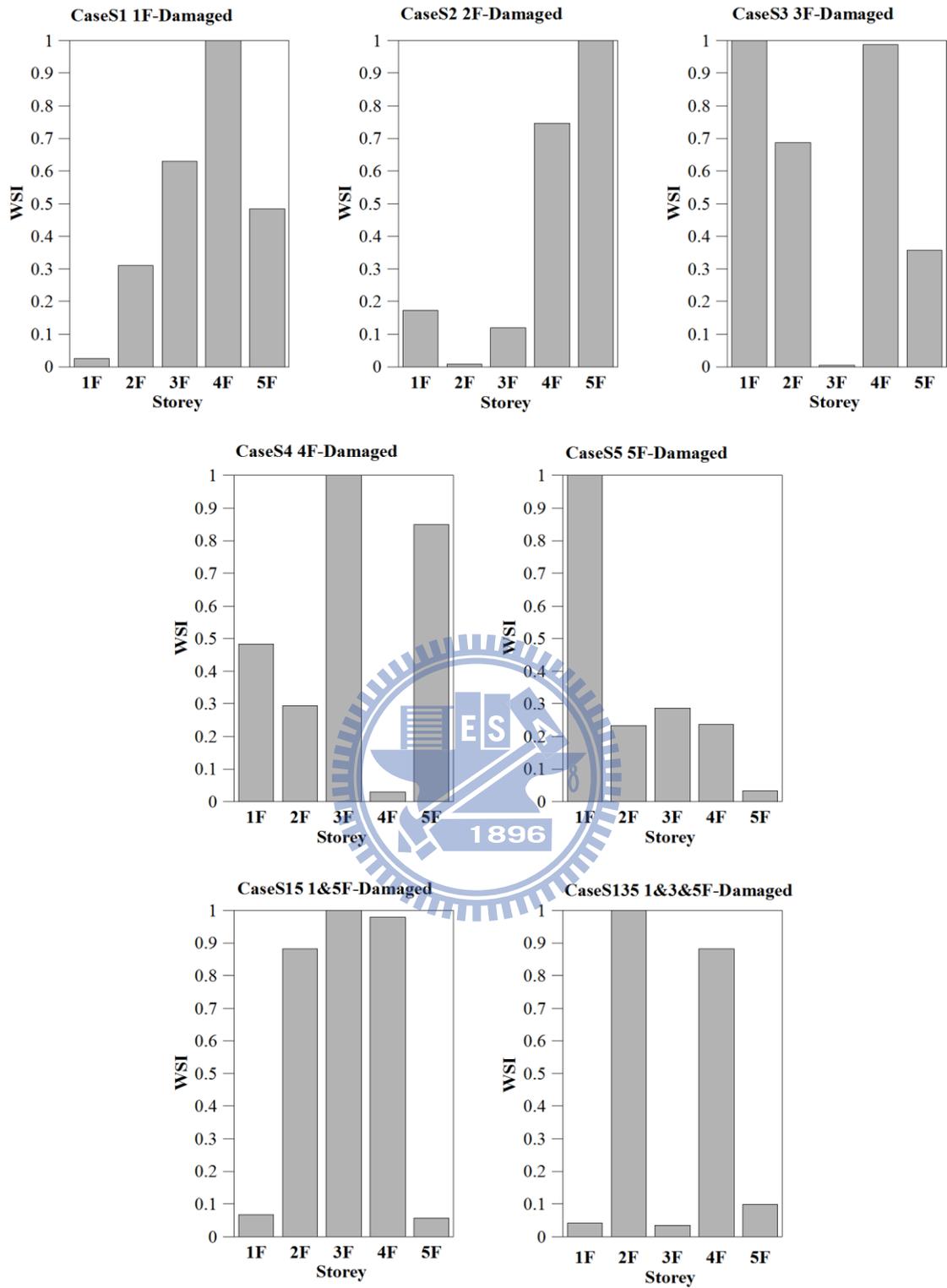


圖 4.34 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, 樓層受損 50%)

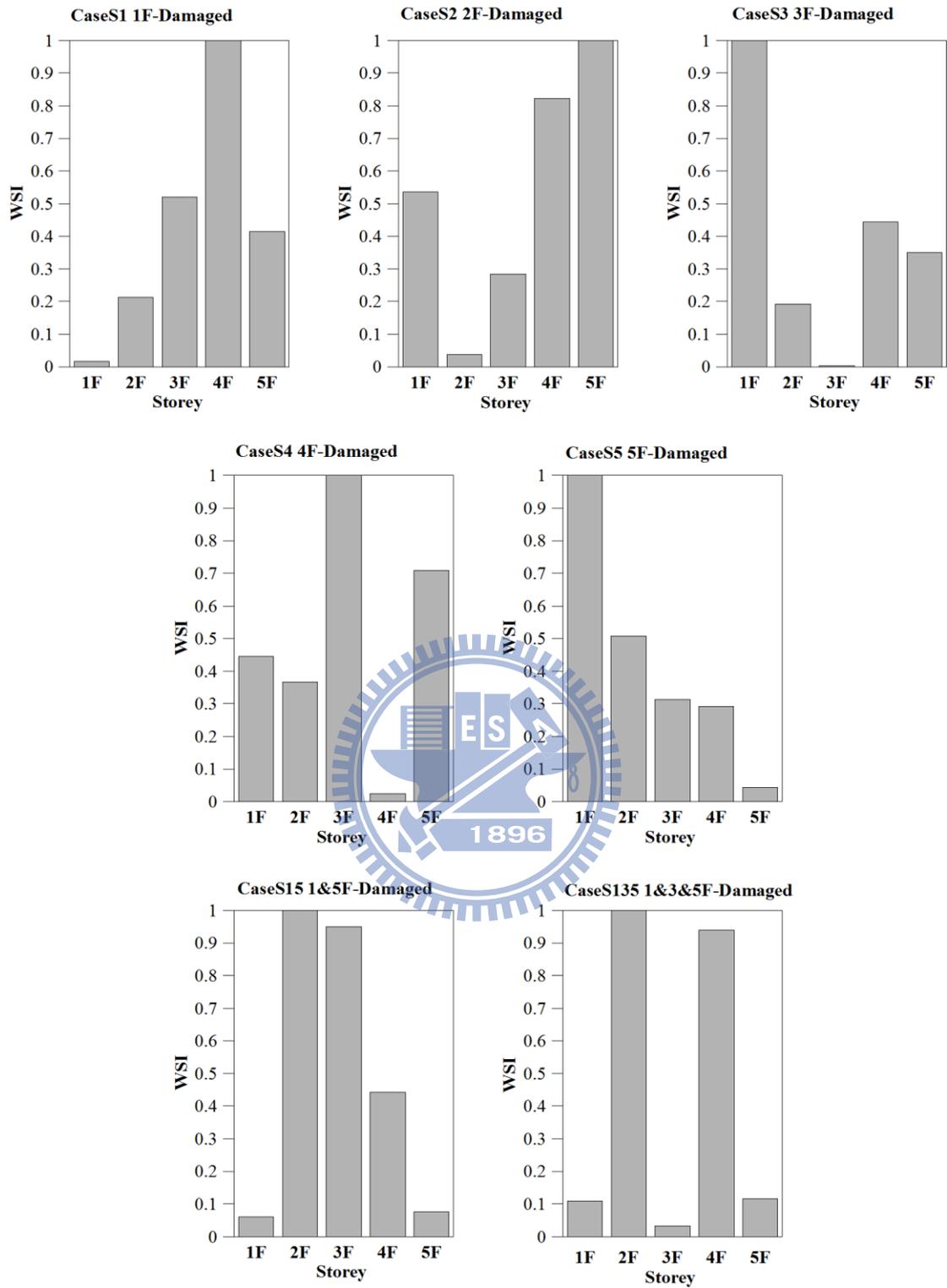


圖 4.35 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, 樓層受損 50%)

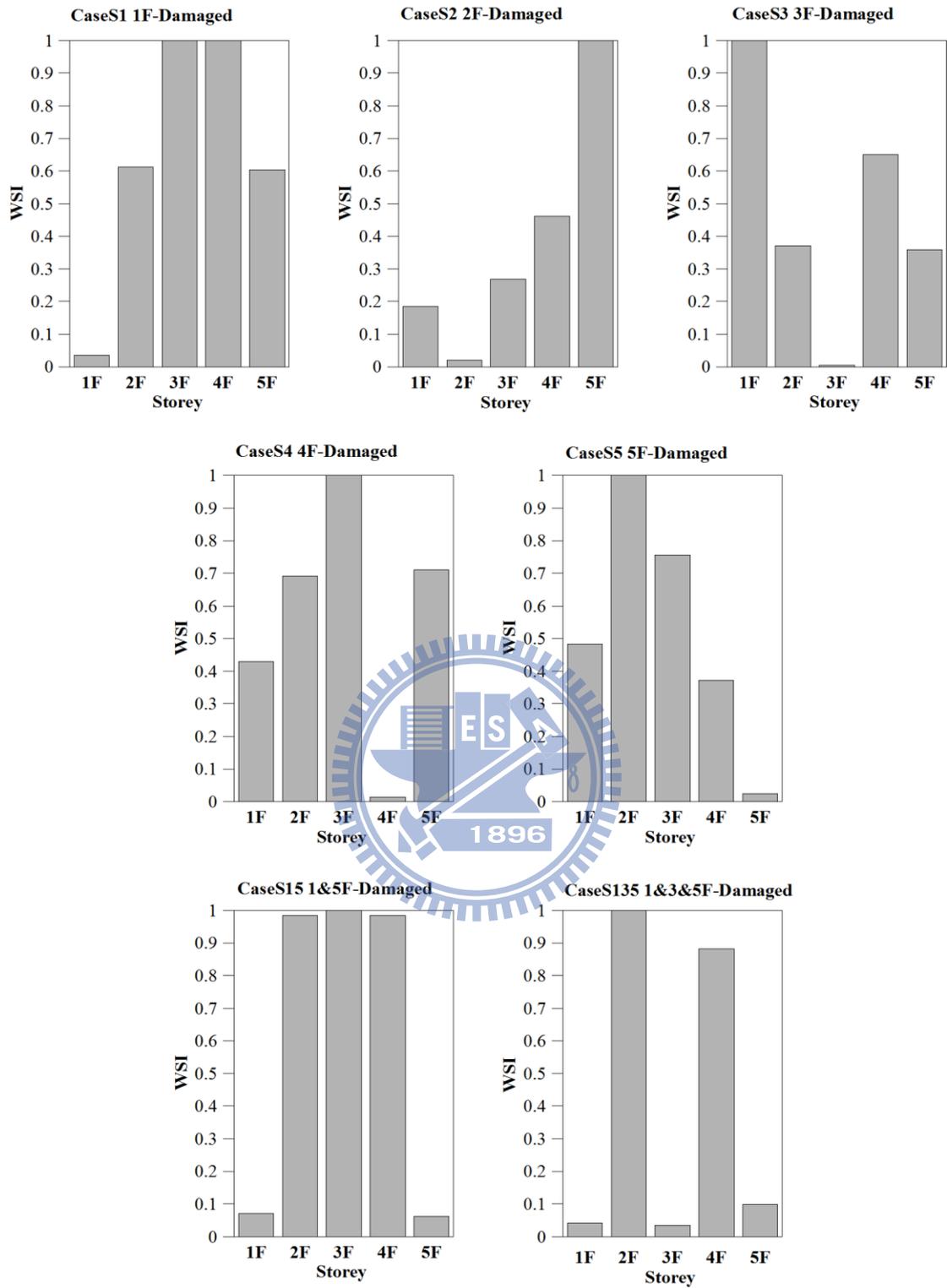


圖 4.36 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 50%)

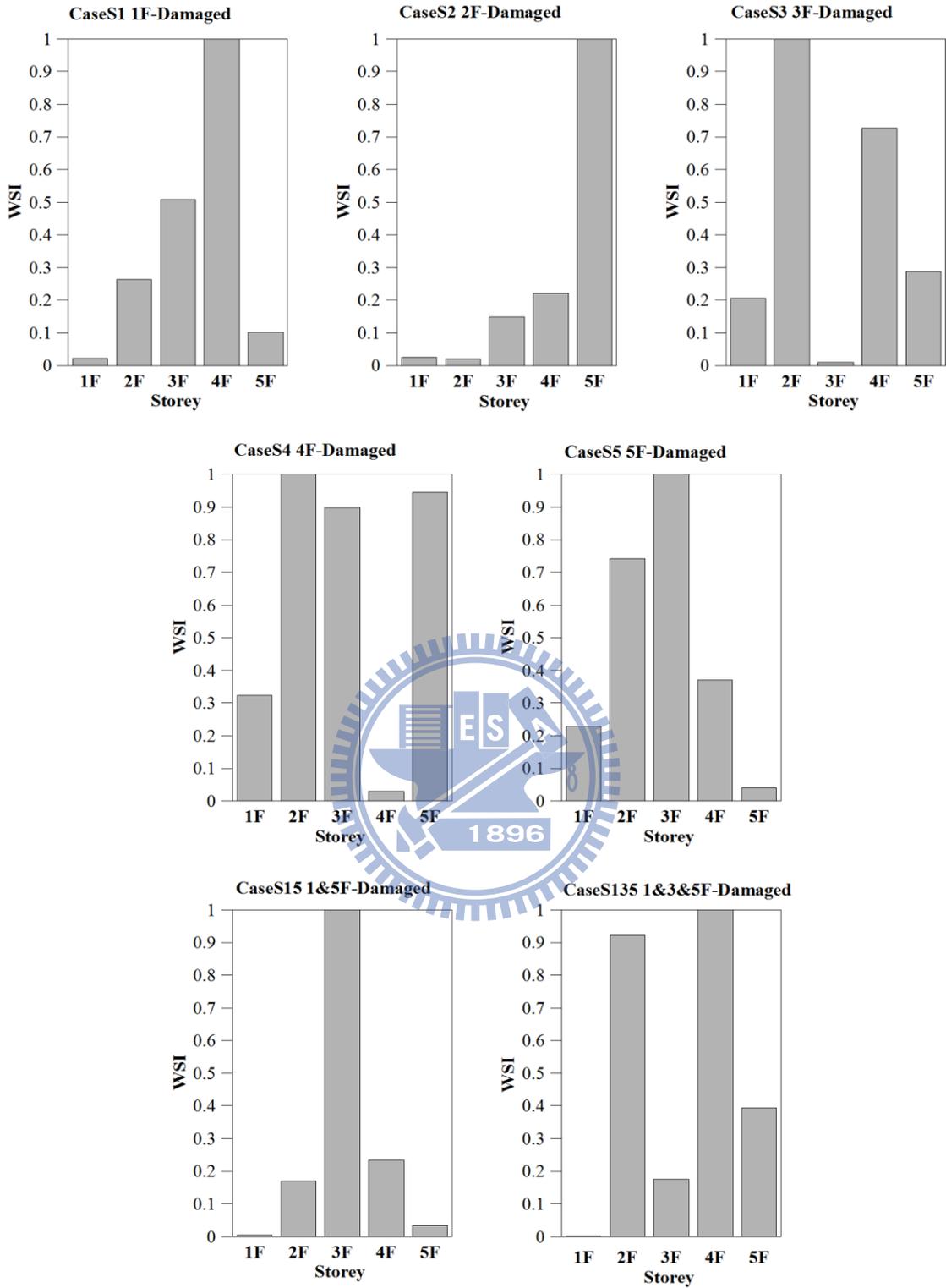


圖 4.37 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 20%)

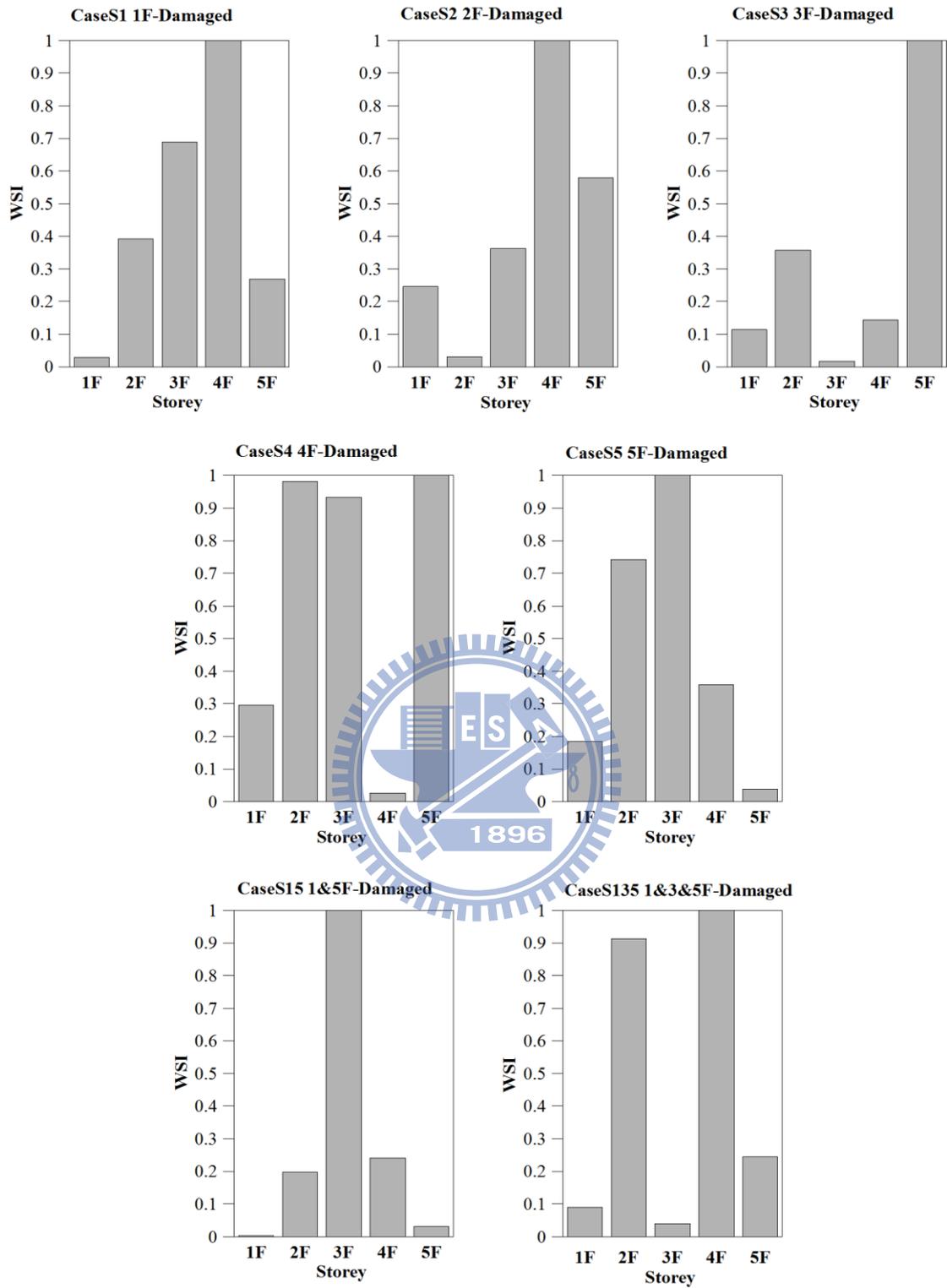


圖 4.38 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 20%)

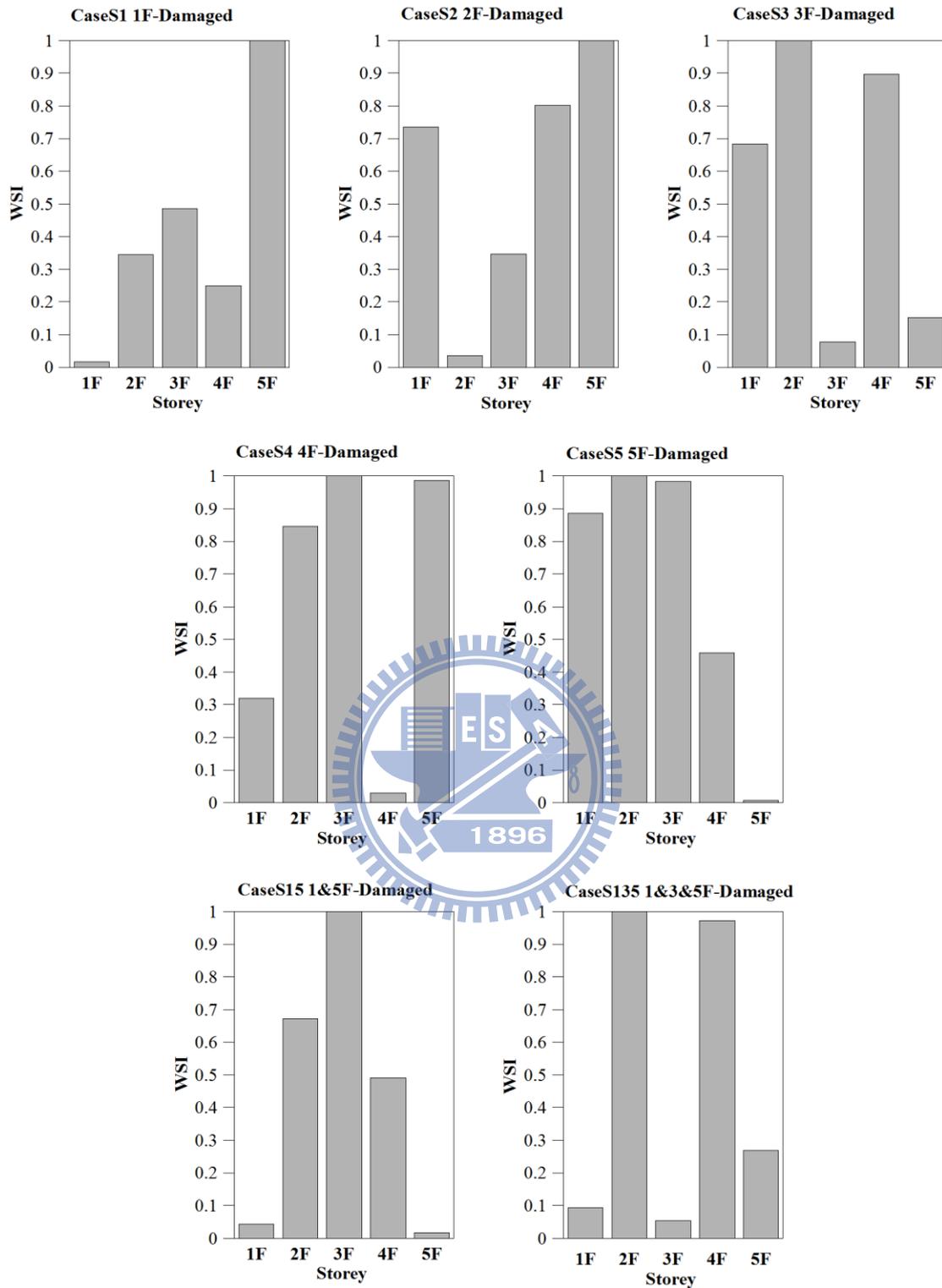


圖 4.39 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, 樓層受損 20%)

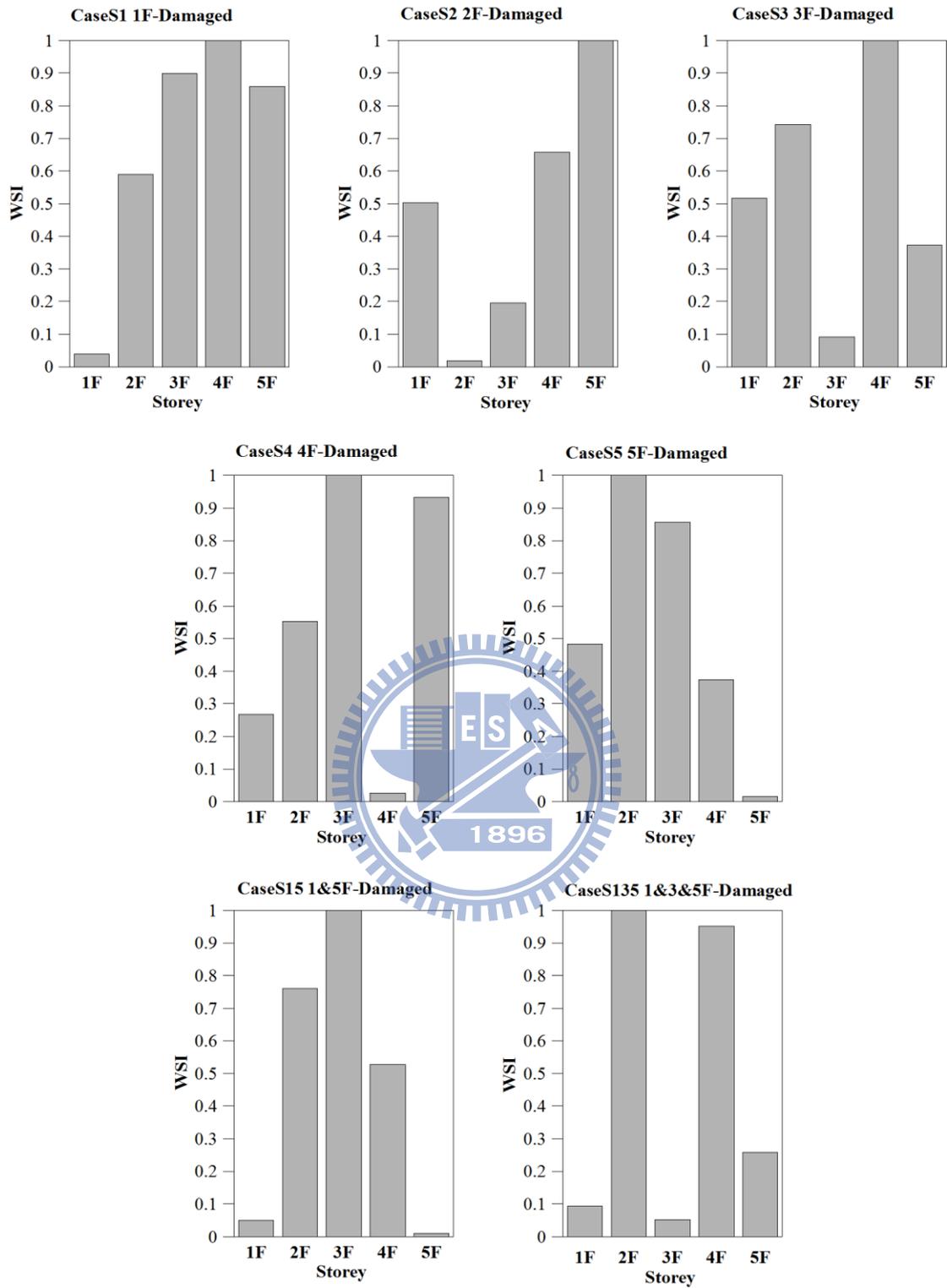


圖 4.40 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, 樓層受損 20%)

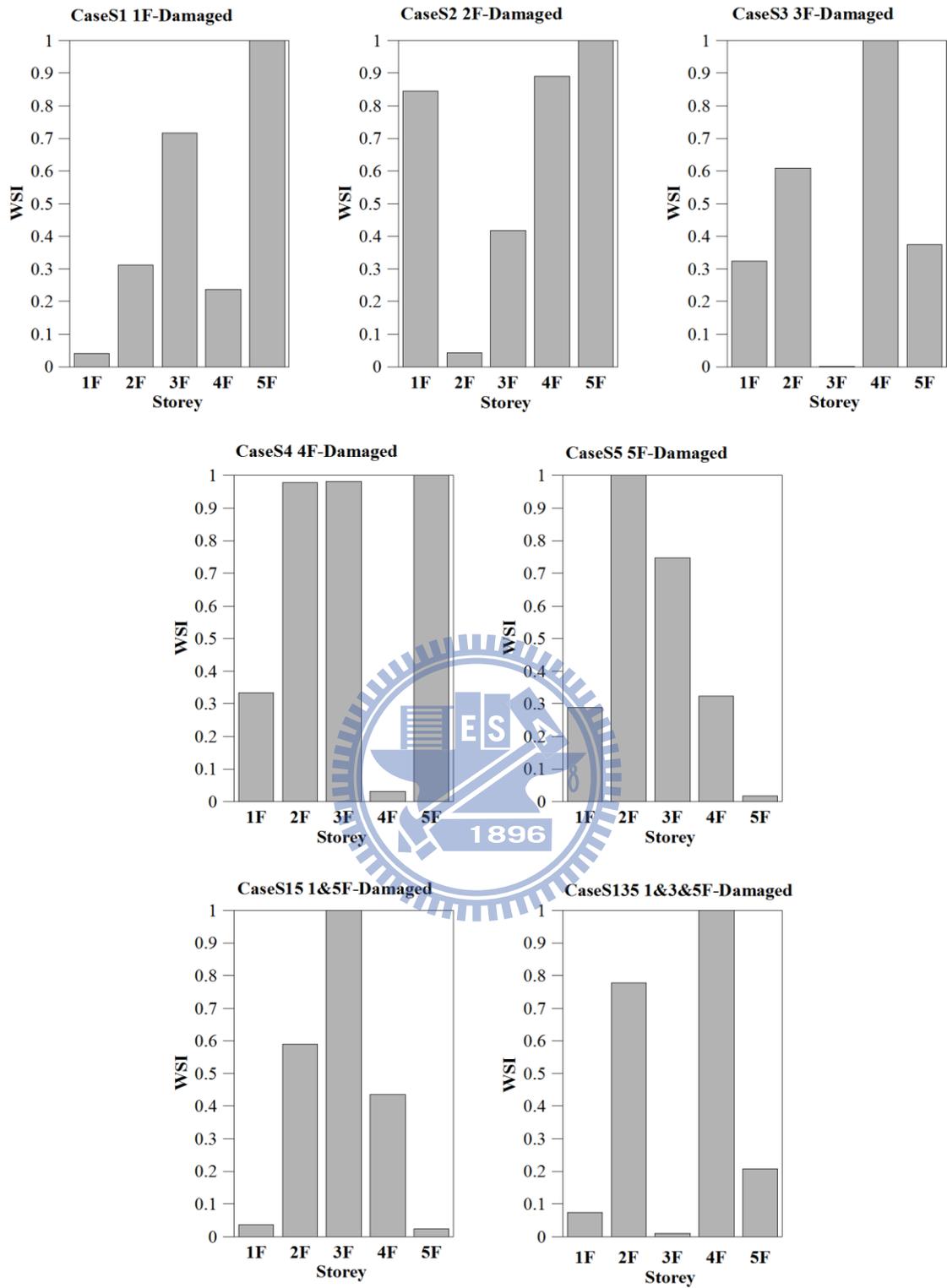


圖 4.41 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 20%)

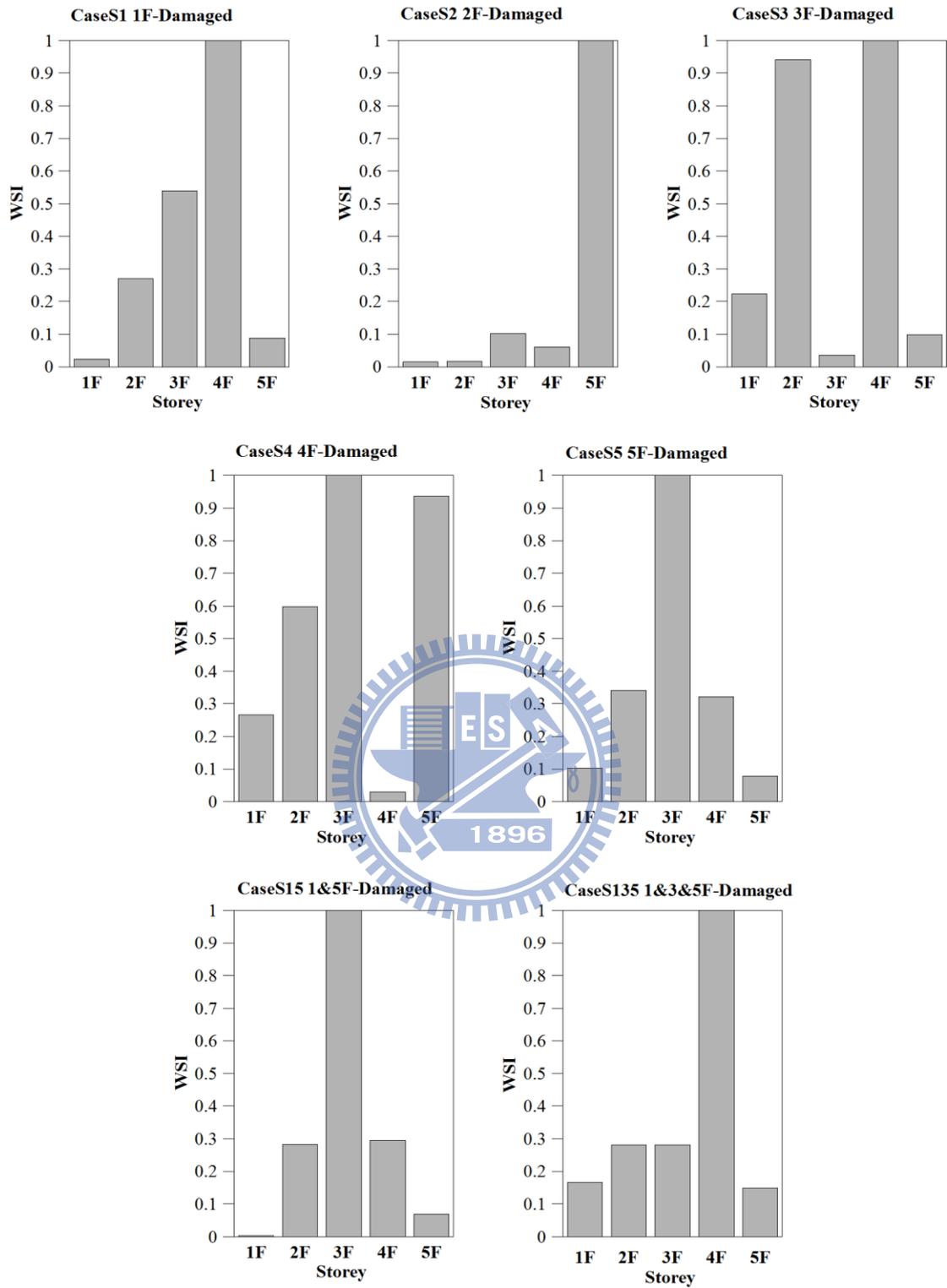


圖 4.42 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 10%)

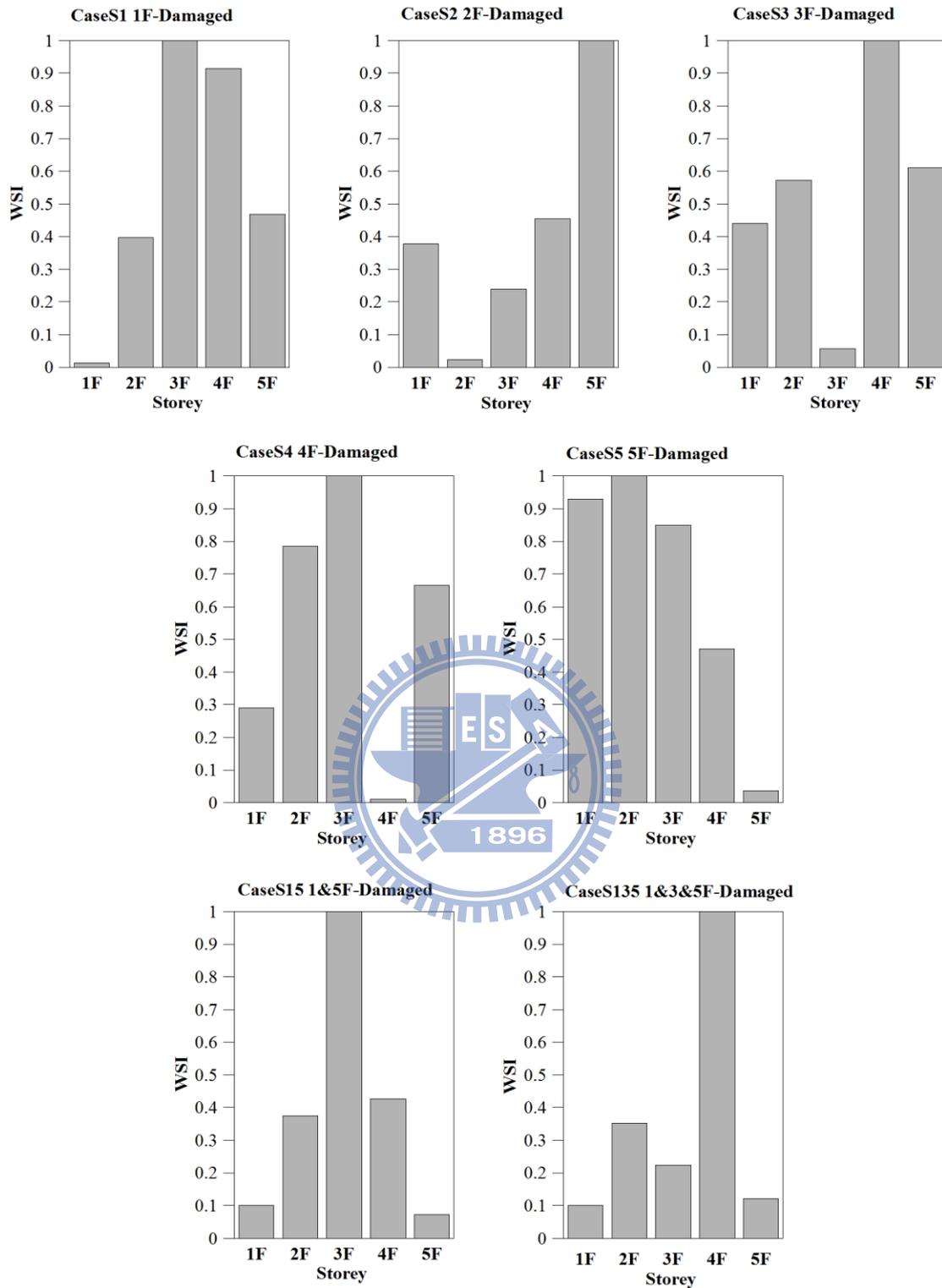


圖 4.43 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 10%)

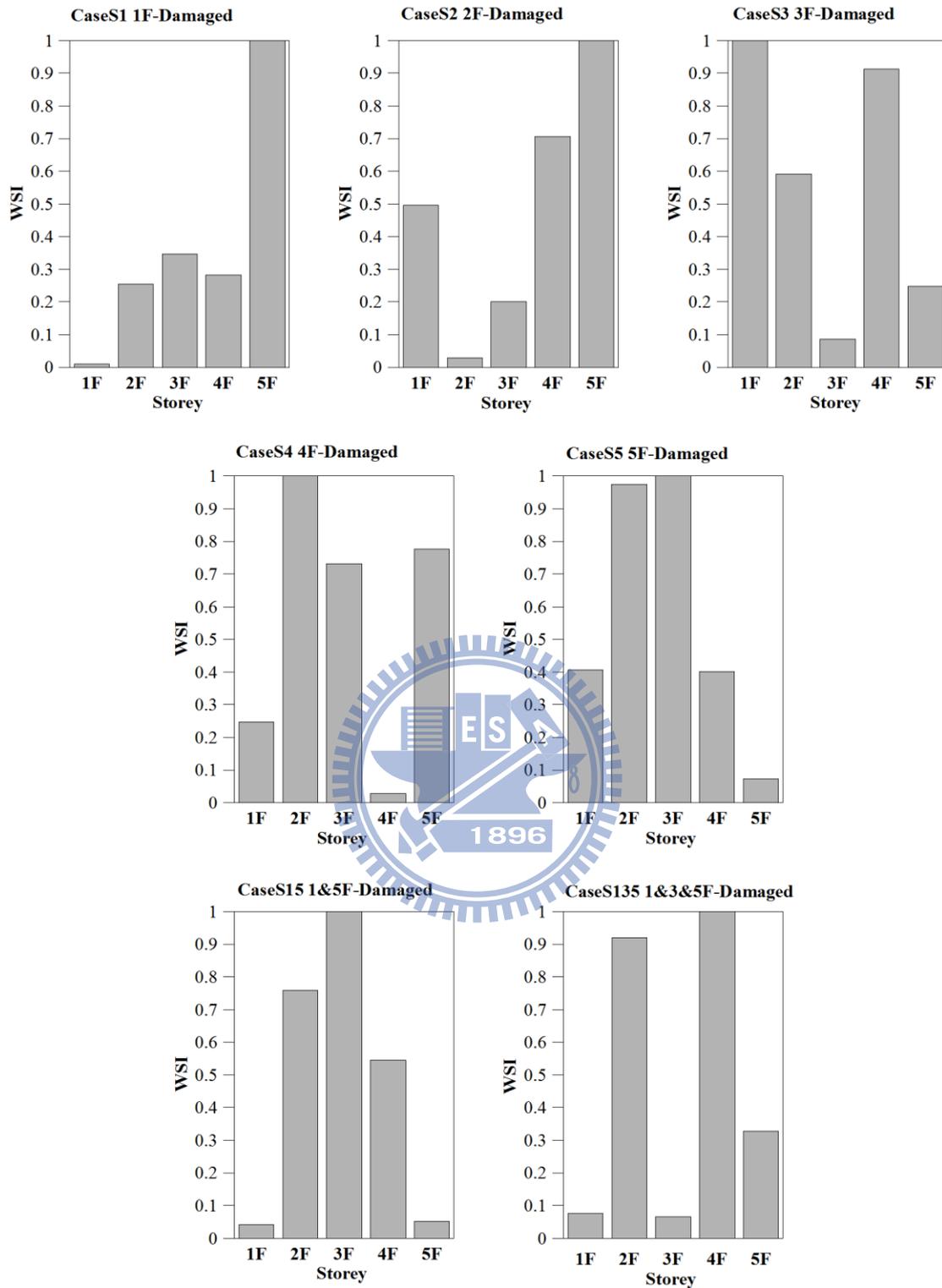


圖 4.44 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR, 樓層受損 10%)

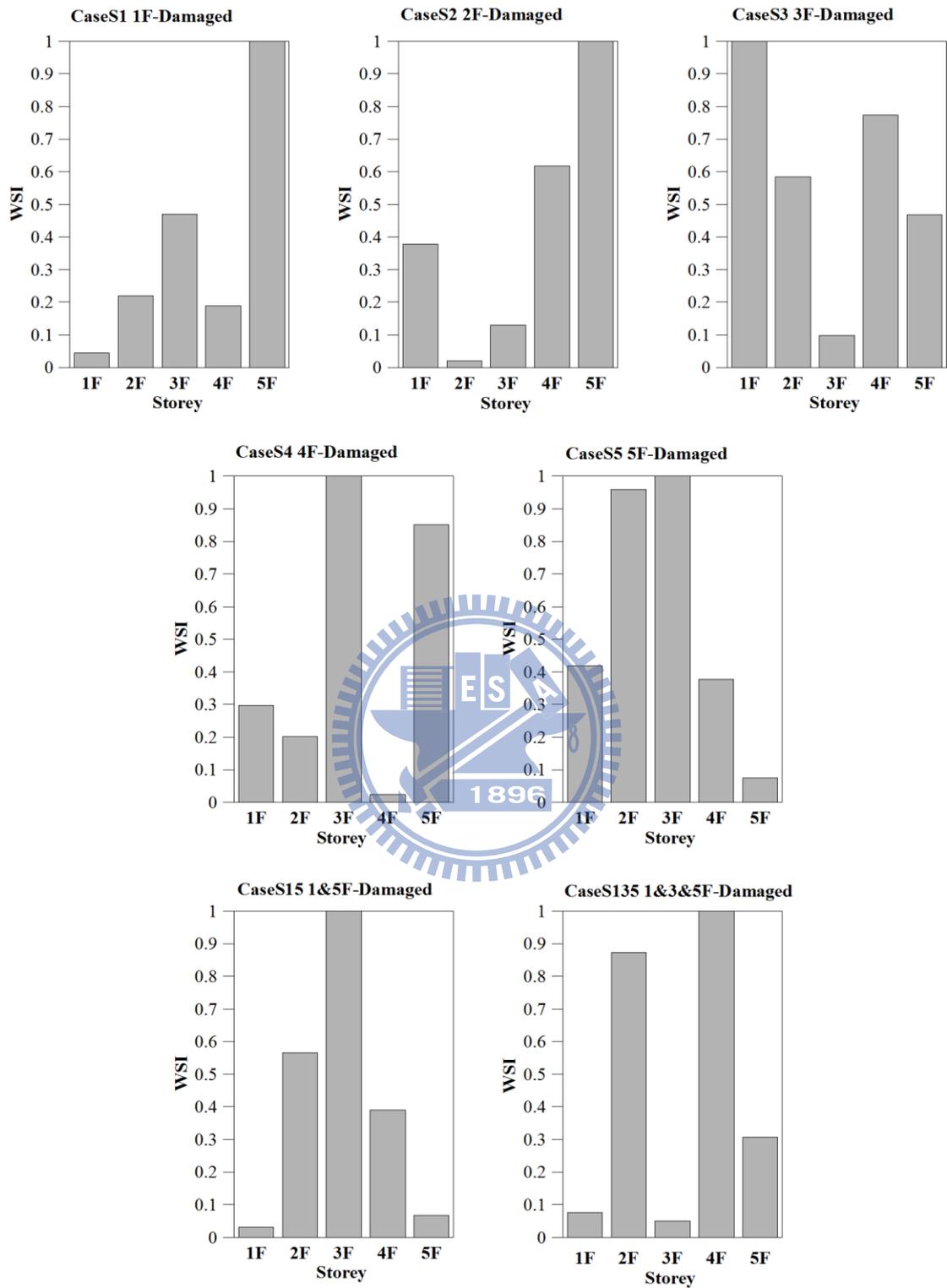


圖 4.45 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA, 樓層受損 10%)

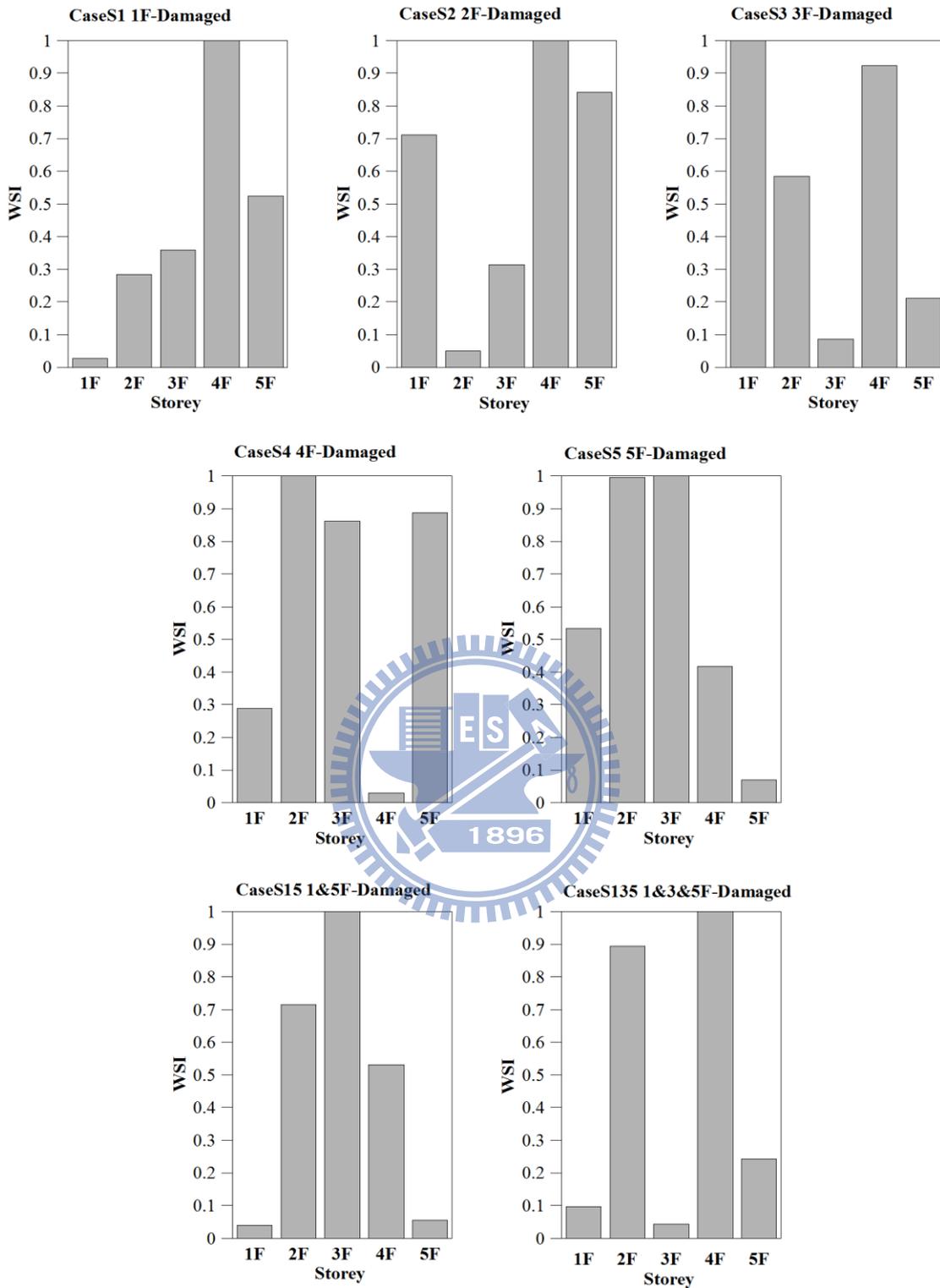


圖 4.46 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 10%)

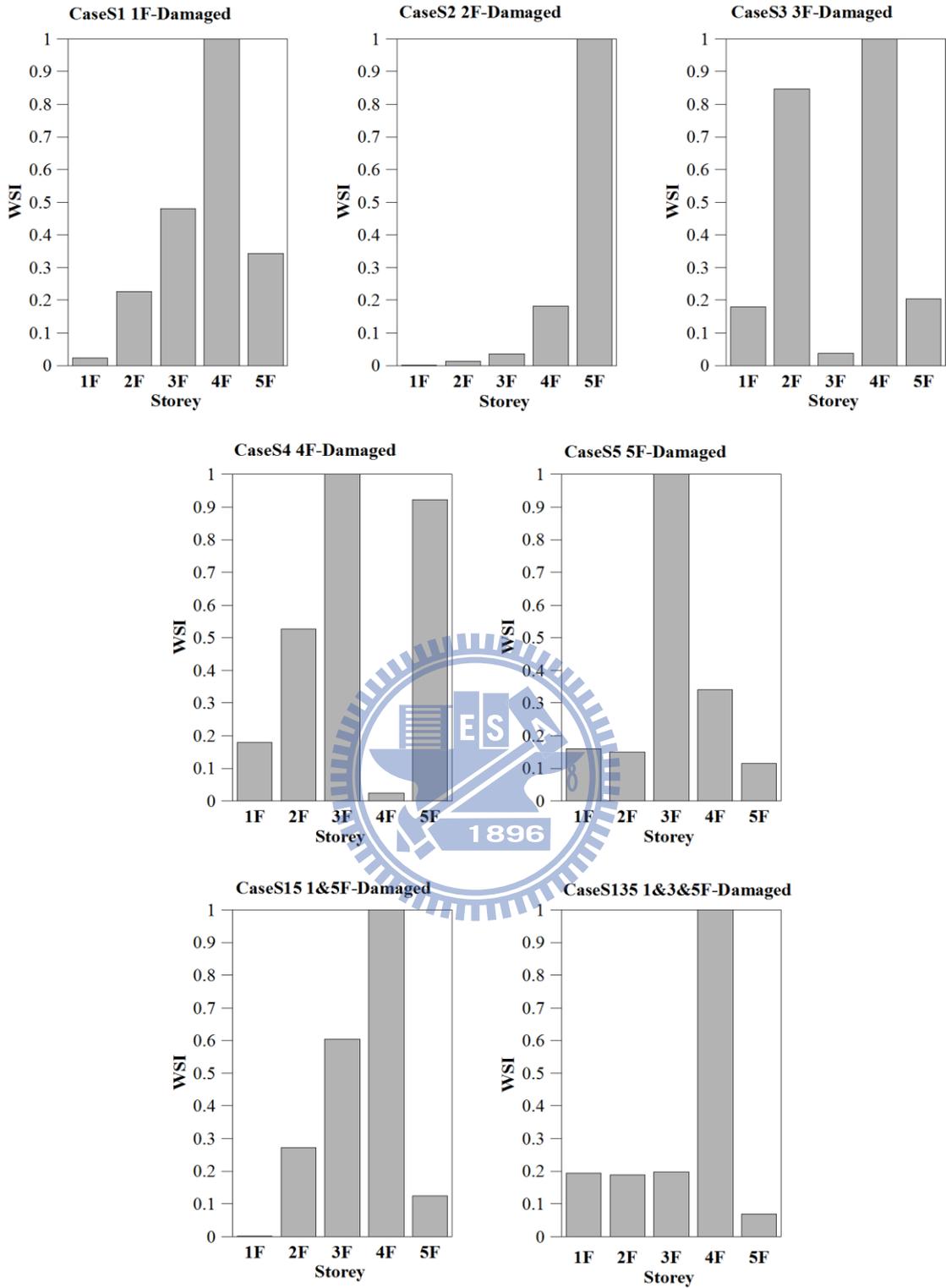


圖 4.47 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV,樓層受損 5%)

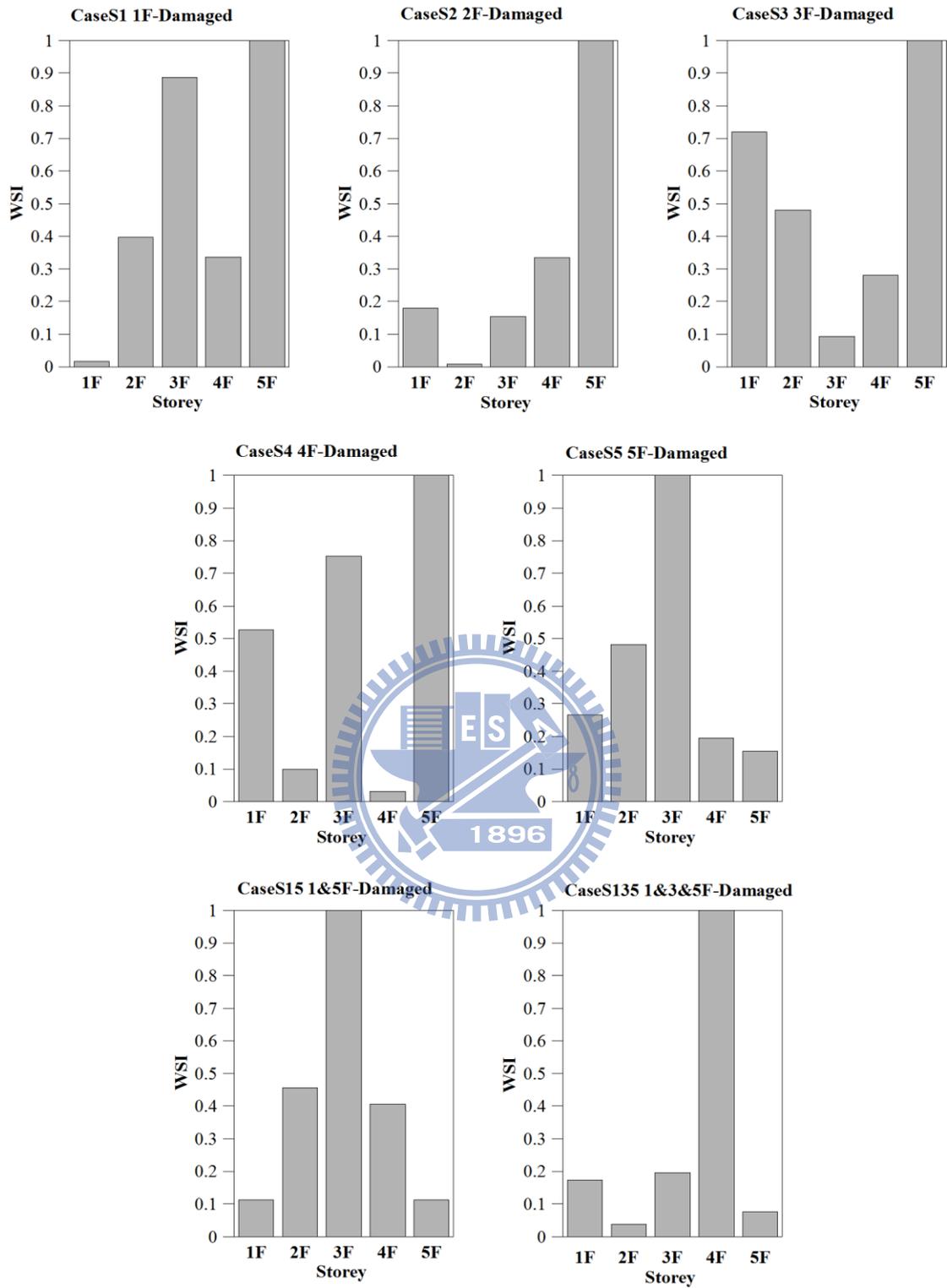


圖 4.48 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS,樓層受損 5%)

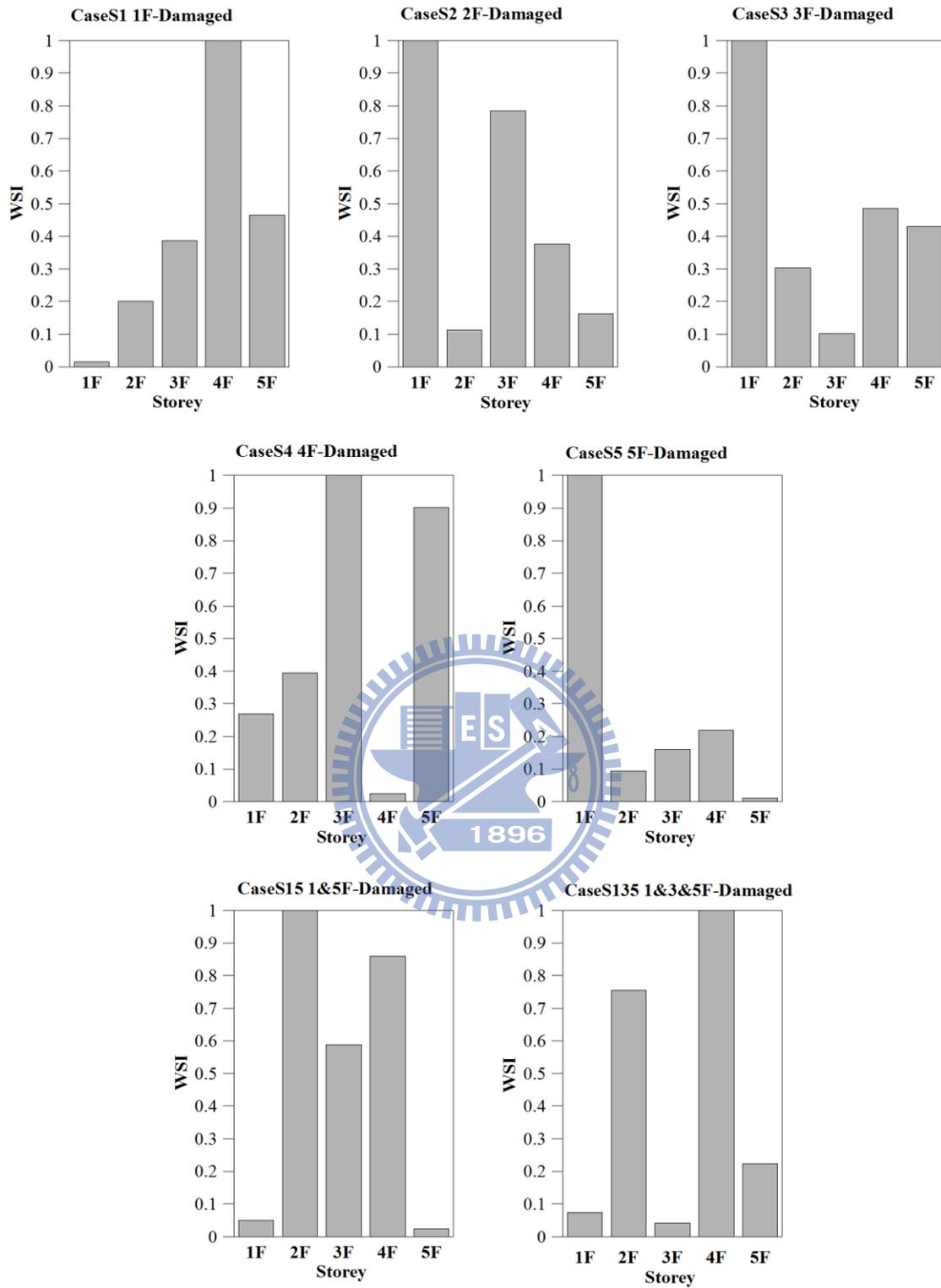


圖 4.49 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR,樓層受損 5%)

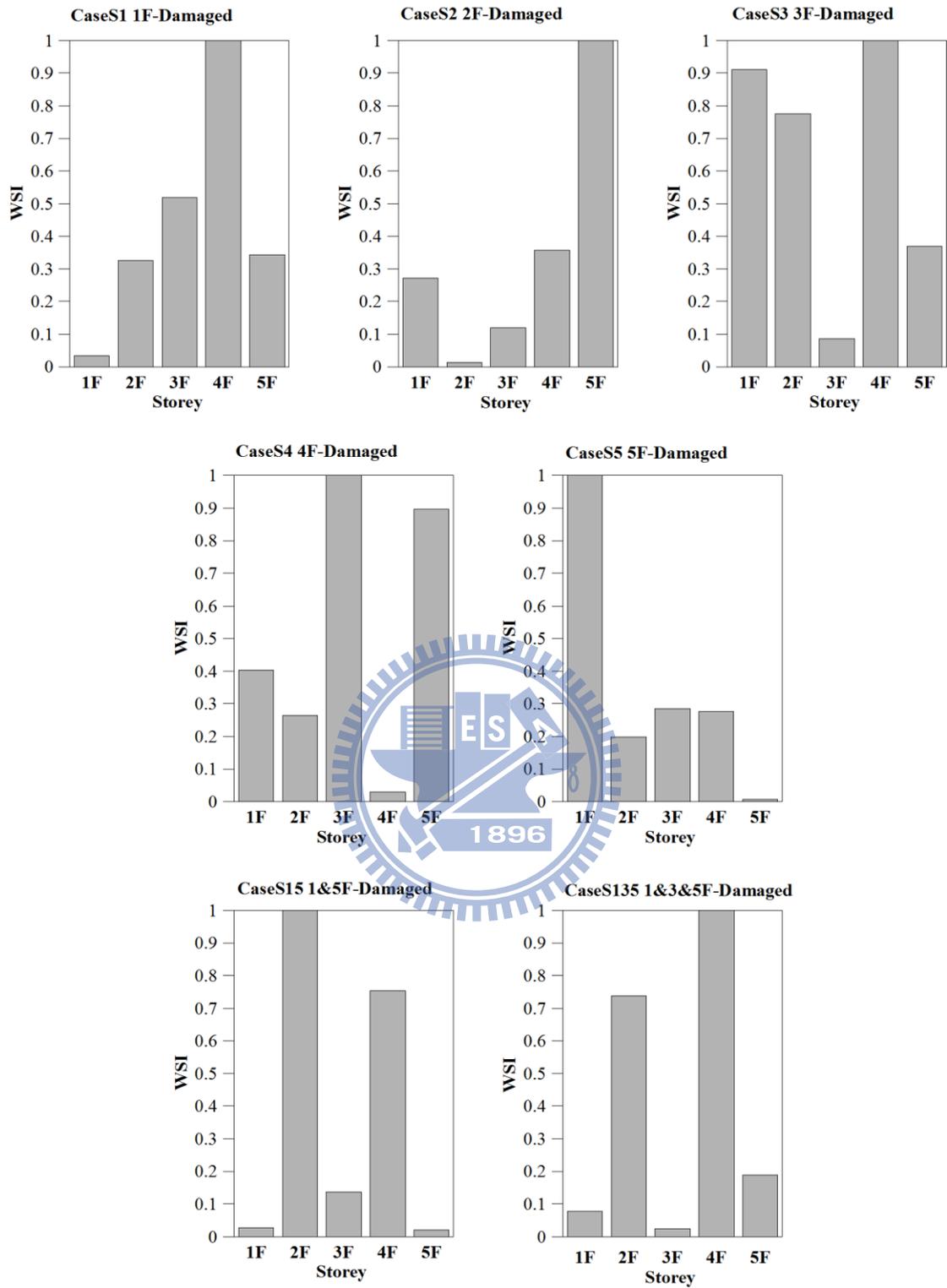


圖 4.50 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA,樓層受損 5%)

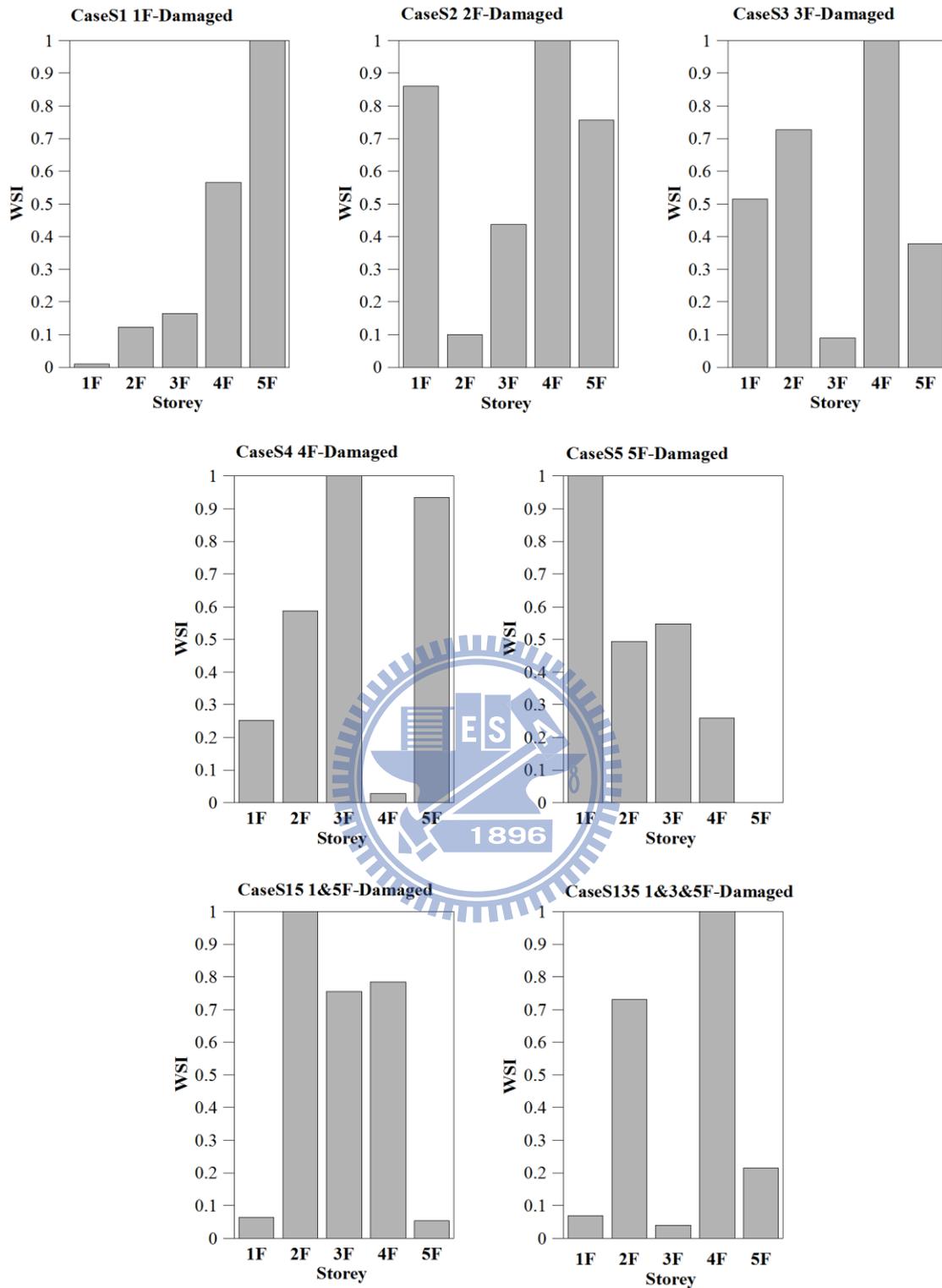
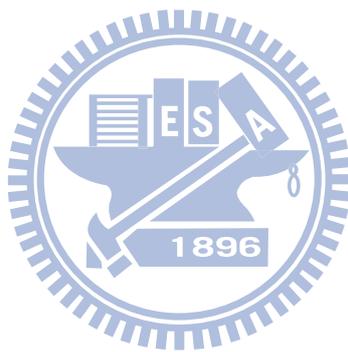


圖 4.51 結構損傷偵測數值模擬分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA,樓層受損 5%)



## 第五章 無線監測技術於結構損傷探測試驗驗證

### 5.1 前言

為驗證 DLV 損傷探測技術應用於真實結構破壞診斷之可行性，本研究遂利用交通大學土木結構實驗室之單軸向地震模擬振動台，進行一系列結構損傷探測之試驗與分析。試驗對象為一座五層樓含斜撐之鋼構架，並以移除受損樓層斜撐模擬樓層之受損狀態。

另外，本系列試驗將以無線感應器取代傳統有線感應器來進行結構振動反應之監測及資料收集。其中，無線感應器包括速度規 VSE-15D，以及由台灣大學【30】所研發之無線感測單元 NTU-WSU。

本章係以結構於受損前、後之地震反應記錄為依據，利用第二章所介紹之 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種空間參數識別法，識別出結構系統之  $A$  及  $C$  矩陣，進而計算出與柔度矩陣相關 (flexibility-related) 之  $Q$  矩陣，再依第三章所介紹之 DLV 損傷識別法進行破壞定位偵測。

### 5.2 試驗設備

茲說明試驗所使用之設備如下：

#### 1. 地震模擬振動台

交通大學地震模擬振動台之台面尺寸為 3m 見方，如圖 5.1 所示，振動台本體重為 5tf，試體結構之最大容許重量可達 10tf。振動台係由一支油

壓致動器(圖 5.2)來驅動，其將油壓動力轉化成機械動力，以驅動振動台及其承載之試體，其最大行程為 $\pm 12.5\text{cm}$ ，在滿載情況下最大加速度可達 $1g$ 。

## 2.控制系統

控制系統使用 MTS407 控制器之位移控制模式操控振動台，如圖 5.3 所示。MTS407 控制器內含造波器，可提供矩形波、三角形波及正弦波等類比訊號以驅動致動器，並提供一外在輸入管道可接受任意形式之隨機訊號，故得以輸入地震波以模擬地表運動。

## 3.鋼結構試驗模型

五層樓鋼結構模型為平面 $2\text{m}$ 見方，樓高 $6.7\text{m}$ ，重約 $6\text{tf}$ 之縮尺鋼骨房屋結構模型，各樓層之各面構架(東、西、南、北)均置有斜撐及模擬樓板質量之鋼板，如圖 5.4 所示。該鋼結構模型之結構參數如表 5.1 所示。本系列試驗中以結構之弱軸方向為測試方向，故結構之架設係以柱之弱軸方向與振動台運動方向平行。

## 4.振動感應計

試驗所使用之感應器以一加速度/速度規(accelerometer/velocity meter)與無線感測單元(wireless sensing unit)為一組，共計 6 組(圖 5.5)，其中一組裝置於振動台上以量測地表加速度，其餘五組裝置於鋼構架各層樓之樓板質心位置。速度規使用東京測振公司型號 VSE-15D 之伺服型速度感應器，它可同時輸出速度及加速度兩種訊號，所對應之最大振動量測範圍分別為 $\pm 0.1\text{m/s}$ 及 $\pm 2000\text{gal}$ ，有效頻率為 $0.2$ 至 $70\text{Hz}$ ，使用 $\pm 15\text{V}$ 之直流電。

VSE-15D 之詳細規格可參見表表 5.2。

無線感應單元主要之功能為提供感應器電源、訊號取樣、及透過無線傳輸方式與使用端或中繼端進行通訊。本試驗所使用之無線感測單元為台灣大學所研製之 NTU-WSU 系統，為一種嵌入式系統(Embedded System)，由一計算核心(computation core)、無線模組(wireless module)、訊號調節及數位化模組(signal conditioning and digitalization module)及系統電源模組(system powering module)四個子系統組成。茲說明如下：計算核心之功能在於整合協調其他三個模組，核心中之微控制器(microcontroller)會依先前寫入之控制迴圈程序下達指令予其餘子系統，使系統能有效率的運作。除此之外，計算核心也會進行運算。無線模組提供了感測單元與其他設備之間的溝通管道，負責將訊號以無線電之方式傳遞出去。值得注意的是，NTU-WSU 兼容兩組使用不同頻帶(2.4GHz 及 900MHz)之無線模組，其中 2.4GHz 為廣泛使用於各個國家之頻帶，因此 NTU-WSU 可適用於大部份之國家。但也由於目前許多無線通訊設備皆為使用 2.4GHz 頻帶(藍芽、Wi-Fi 等)，因此 NTU-WSU 可依環境情況選擇 900MHz 之頻帶以避免與其他通訊設備相互干擾。有時訊號會因環境因素而影響其品質，NTU-WSU 中之訊號調節及數位化模組即針對此情況加以改良。模組中之增益(gain)放大器可將訊號放大，共有四種增益 (1、10、100 及 1000V/V) 可供選擇；此模組中另設有一類比數位轉換器(Analog-to-Digital Converter)，可將感應器之電壓訊號轉成可供電腦使用之數位訊號。系統電源模組負責供應感應器及感測單元所需之電源，包括一組鋰電池(7.4V/3200mAh)及三組電壓調整器。其中，鋰電池負責供應整個系統電源，而三組電壓調整器則將電壓轉換成無線電波所需電壓值(5V/1W)、感應器 VSE-15D 與增益放大器所需電壓值(+/-15V/3W)及其餘系統所需電壓值(5V/1W)。

NTU-WSU 之運作流程如下：當感應器 VSE-15D 量測到結構動態反應

時，會將其以電壓訊號之型式傳送至無線感測單元(NTU-WSU)，這些電壓訊號會先透過 NTU-WSU 中的增益器放大訊號，將其轉換至類比數位轉換器取樣之範圍進行訊號取樣，而得到離散之數位訊號。當微控制器獲得這些訊號後可將其暫存於緩衝區中，或透過無線模組以無線傳輸之型式傳送至其他接收端—如個人電腦、中繼工作站...等，再進行後續之分析。

### 5.2.1 無線感應器與原有線感應器之比較

無線感應器 (VSE-15D+NTU-WSU) 與本系原有之有線感應器 (Crossbow+ $\mu$ -MUCIS) 之量測訊號比較可參見圖 5.6。由圖 5.6 可看出本次使用之無線感應器其訊號較原有線感應器之訊號更為清晰。現以白噪音 (white noise) 作為輸入擾動源，並將由無線感應器及原有線感應器所量測之訊號分別進行 DLV 損傷探測分析，考慮單一樓層受損案例(2 樓破壞)及複數樓層受損案例(1、5 樓破壞)，其結果歸納於表 5.3 及圖 5.7 至圖 5.11。

由分析結果顯示，在 2 樓破壞的案例中以原有線感應器所量測之訊號進行 DLV 損傷探測分析，五種識別法中 SSI-ECCA 雖然有將未受損之 1 樓判別為受損樓層之誤判情況，但仍能將受損之 2 樓判別出來，而其餘四種識別法則皆未能將受損樓層判別出；以無線感應器所量測之訊號進行 DLV 損傷探測分析，五種識別法雖然有將未受損之 1 樓判別為受損樓層之誤判情況，但仍皆能將受損之 2 樓判別出來。在 1、5 樓破壞的案例中，以原有線感應器所量測之訊號進行 DLV 損傷探測分析，五種識別法中 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR 及 SSI-ECCA 皆只能判別出 5 樓為受損樓層而未能將受損之 1 樓判別出，SSI-CCA 則是未能判別出受損之 1 樓及 5 樓；以無線感應器所量測之訊號進行 DLV 損傷探測分析，五種識別法皆能將所有受損樓層判別出。上述結果顯示，無線感應器相比於原有線感應

器，以前者所量測之訊號進行 DLV 損傷探測分析有較佳之結果。因此，本文後續之分析將以無線量測系統記錄之資料進行分析。

### 5.3 DLV 損傷探測分析

本系列振動台試驗係以白噪音(white noise)及 El Centro 地震作為輸入擾動源進行分析，並調整尖峰地表加速度(PGA)至 0.1g。結構之健康狀態係於鋼構架各層樓之強、弱軸方向處裝設斜撐，如圖 5.12(a)所示；結構之受損狀態為移除樓層弱軸方向之雙邊斜撐，因此仍維持平面結構之行為，如圖 5.12(b)所示。健康結構各層樓之加速度歷時如圖 5.13 及圖 5.14 所示。



#### A. White Noise

分析時考慮 8 種受損情況，其表示如下：

CASE A1：模擬 1 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.15 所示。

CASE A2：模擬 2 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.16 所示。

CASE A3：模擬 3 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.17 所示。

CASE A4：模擬 4 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.18 所示。

CASE A5：模擬 5 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.19 所示。

CASE A13：模擬 1、3 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.20 所示。

CASE A15：模擬 1、5 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.21 所示。

CASE A135：模擬 1、3 及 5 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.22 所示。

分別以 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 五種識別法結合 DLV 損傷識別法進行破壞診斷分析，其結果歸納於表 5.4 及圖 5.23 至圖 5.27。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

### CASE A1(1 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 2 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 2 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，2 樓受損係為誤判。SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置相同。

### CASE A2(2 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 2 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 2 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 2 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓係為誤判，造成此情況之原因，應是輸入擾動並非為具備穩態特性之隨機過程所致。

### CASE A3(3 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 3 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓係為誤判。

#### CASE A4(4 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 4 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 4 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 4 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓為誤判。

#### CASE A5(5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1、3 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、3 及 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，1 樓與 3 樓受損係為誤判。由 SSI-MLR 識別法所分析之結果顯示，其 1、2 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、2 及 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，1 樓與 2 樓受損係為誤判。由 SSI-PLS、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，1 樓受損係為誤判。

#### CASE A13(1、3 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓

應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### **CASE A15(1、5 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### **CASE A135(1、3 及 5 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.23 至圖 5.27。由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1、2 及 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、2 及 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，2 樓受損係為誤判，而 5 樓受損則未被辨識出。由 SSI-PLS、識別法所分析之結果顯示，其 1、2 及 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、2 及 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，2 樓受損應係為誤判，而 3 樓之受損情況則未被辨識出。由 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1、3 及 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、3 及 5 樓應為可能之受損樓層。此一分析結果與預設之受損位置相同。這三種方法皆能成功定位出破壞樓層。

有關敏感度分析結果歸納於表 5.5。其中，依據識別結果之良窳分為 4 種狀況：

- (1) Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。
- (2) Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個未受損樓層誤判為損。
- (3) Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個為未損樓層誤判為受損；或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。
- (4) Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。

其中顯示出，在單一樓層受損之案例中 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法之分析結果中，雖然都有 1 樓受損之誤判情況，但整體來說仍能將受損樓層辨識出來，而其中 SSI-COV 及 SSI-MLR 有較多誤判之情況；在複數樓層受損之案例中，SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種識別法均能將所有受損樓層辨識出來，而 SSI-COV 及 SSI-PLS 則有未能將受損樓層辨識出之情況發生。

## B. El Centro 地震

分析時考慮 8 種受損情況，其表示如下：

CASE B1：模擬 1 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.28 所示。

CASE B2：模擬 2 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.29 所示。

CASE B3：模擬 3 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.30 所示。

CASE B4：模擬 4 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.31 所示。

CASE B5：模擬 5 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.32 所示。

CASE B13：模擬 1、3 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.33 所示。

CASE B15：模擬 1、5 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.34 所示。

CASE B135：模擬 1、3 及 5 樓破壞，各層樓之加速度歷時如圖 5.35 所示。

分別以 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 五種

識別法結合 DLV 損傷識別法進行破壞診斷分析，其結果歸納於表 5.6 及圖 5.36 至圖 5.40。茲針對各個案例之分析結果討論如下：

#### **CASE B1(1 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置相同，五種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### **CASE B2(2 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 2 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 2 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 2 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓係為誤判。造成此情況之原因，在於 El Centro 地震非穩態隨機過程所致。

#### **CASE B3(3 樓受損)：**

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{jmax} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 3 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓係為誤判。

#### CASE B4(4 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-CCA 識別法所分析之結果顯示，其 4 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 4 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置相同。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 4 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 4 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 4 樓受損樓層外，四種識別法皆顯示未破壞之 1 樓係為誤判。

#### CASE B5(5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致。除了預設之 5 樓受損樓層外，五種識別法皆顯示未破壞之 1 樓係為誤判。

#### CASE B13(1、3 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 1、2 及 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、2 及 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，2 樓受損應係為誤判。由 SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等四種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為可能之受損樓層。此一分析

結果與預設之受損位置相同。四種方法皆能成功定位出破壞樓層。

#### CASE B15(1、5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-COV 及 SSI-ECCA 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置相同。兩種方法皆能成功定位出破壞樓層。由 SSI-PLS、SSI-MLR 及 SSI-CCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，5 樓受損並未被辨識出。

#### CASE B135(1、3 及 5 樓受損)：

各樓層之正規化應力指標  $WSI_j$  值歸納於圖 5.36 至圖 5.40。由 SSI-COV 識別法所分析之結果顯示，其 3 樓與 5 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓與 5 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，1 樓受損未被辨識出。由 SSI-PLS、識別法所分析之結果顯示，其 3 樓之  $WSI_j$  值小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，而 1 樓與 5 樓受損未被辨識出。由 SSI-CCA 識別法所分析之結果顯示，其 1 樓與 3 樓之  $WSI_j$  值皆小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1 樓與 3 樓應為可能之受損樓層，此一分析結果與預設之受損位置並未完全一致，5 樓受損未被辨識出。由 SSI-MLR 及 SSI-ECCA 等三種識別法所分析之結果顯示，其 1、3 及 5 樓之  $WSI_j$  值均小於  $0.1WSI_{j_{max}} = 0.1$ ，故判定 1、3 及 5 樓應為可能之受損樓

層。此一分析結果與預設之受損位置相同，兩種方法皆能成功定位出破壞樓層。

有關敏感度分析結果歸納於表 5.7。其中，依據識別結果之良窳分為 4 種狀況：

- (1) Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。
- (2) Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個未受損樓層誤判為損。
- (3) Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個為未損樓層誤判為受損；或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。
- (4) Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。

其中顯示出，在單一樓層受損之案例中 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法之分析結果中，雖然都有 1 樓受損之誤判情況，但整體來說仍能將受損樓層辨識出來；在複數樓層受損之案例中只有 SSI-ECCA 能將所有受損樓層辨識出來，其於四種識別法均未能將所有受損樓層辨識出來。

## 5.4 小結

由 5.2.1 節之分析結果顯示，以無線感應器所量測之訊號進行 DLV 損傷探測分析，其結果相較於使用原有之有線感應器要來的好，且在訊號的品質表現上，無線感應器確實較原有之有線感應器更為清晰。

由 5.3 節之分析結果顯示，當輸入之擾動為 white noise 時，SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法在單一樓層破壞之情況下皆能將受損樓層判別出來，但五種識別法於各個案例中皆發生將未破壞之 1 樓誤判成受損樓層的情況。於 4.4 節中曾說明 SSI 之理論中假設輸入擾動為穩態隨機過程，因此 4.3 節中以 El Centro 地震作為輸入擾

動之模擬分析結果皆有 1 樓誤判的現象，然而 5.3 節中以 white noise 作為輸入擾動之分析卻也發生類似之情況，研判應是進行振動台試驗時，驅動振動台的油壓致動器受設備因素所影響，導致所給予的擾動並非具備穩態特性之隨機過程，因此發生 1 樓誤判之情況。圖 5.41(a)為吾人預定給予的擾動之頻譜圖；圖 5.42(b)則為油壓致動器真實給予的擾動之頻譜圖，從其中之差異即可看出油壓致動器所給予的擾動並非具備穩態特性之隨機過程，也驗證吾人先前之推測。除卻 1 樓誤判之問題，SSI-COV 則另有將其他未破壞之樓層誤判受損情況發生。於複數樓層破壞之案例中，SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 這三種識別法皆能將受損樓層判別出，SSI-COV 及 SSI-PLS 於 1、3、5 樓破壞案例中則未能將全部受損樓層判別出。

當輸入之擾動為 El Centro 地震時，同樣有 1 樓被誤判的情況發生。在單一樓層破壞之案例中，SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 皆能將受損樓層判別出，但 SSI SSI-COV 則另有將其他未破壞之樓層誤判受損情況發生。於複數樓層破壞之案例中，只有 SSI-ECCA 於各案例中將受損樓層成功判別出，其他四種識別法皆未能完全正確判別出受損樓層。由上述結果顯示出，五種識別法結合狀態空間 DLV 法於一系列試驗中，以 SSI-ECCA 有較佳之表現。

表 5.1 五層樓鋼結構之結構參數

長度(m)	2
寬度(m)	2
1 樓之樓高(m)	1.5
2~5 樓之樓高(m)	1.3
1 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	85.73
2 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	85.36
3 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	85.36
4 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	85.36
5 樓質量(kgf · s <sup>2</sup> /m)	82.97
柱斷面尺寸(mm)	100×50×5×7
大梁斷面尺寸(mm)	100×50×5×7
小梁斷面尺寸(mm)	100×50×5×7

表 5.2 VSE-15D 規格

量測頻率	0.1-70Hz
量測模式	水平、垂直
量測範圍	速度：±0.1m/s
	加速度：±2000gal
靈敏度	速度(Low)：100V/m/s
	速度(High)：1000V/m/s
	加速度：5mV/gal
分辨率	10 <sup>-5</sup> gal
最大輸出範圍	±10V
供給電源	±15VDC
消耗電流	約 15mA
外觀尺寸	55×69.5×72mm

表 5.3 原有線感應器與無線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果

Algorithm=SSI-COV							
Wired	WSI <sub>j</sub>	受損樓層		Wireless	WSI <sub>j</sub>	受損樓層	
		2F	1&5F			2F	1&5F
	1F	0.3724	#0.4302		1F	*0.0065	0.0028
2F	#0.2400	0.6552	2F	0.0036	1.0000		
3F	0.0775	1.0000	3F	0.2020	0.1906		
4F	1.0000	0.5499	4F	0.6522	0.3248		
5F	0.5587	0.0715	5F	1.0000	0.0088		
Algorithm=SSI-PLS							
Wired	WSI <sub>j</sub>	受損樓層		Wireless	WSI <sub>j</sub>	受損樓層	
		2F	1&5F			2F	1&5F
	1F	0.6066	#0.5148		1F	*0.0131	0.0047
2F	#0.6374	1.0000	2F	0.0137	0.9128		
3F	0.9596	0.8471	3F	0.5439	0.5593		
4F	1.0000	0.8462	4F	1.0000	1.0000		
5F	0.5675	0.0725	5F	0.9592	0.0300		
Algorithm=SSI-MLR							
Wired	WSI <sub>j</sub>	受損樓層		Wireless	WSI <sub>j</sub>	受損樓層	
		2F	1&5F			2F	1&5F
	1F	0.3748	#0.5505		1F	*0.0033	0.0052
2F	#0.3296	1.0000	2F	0.0090	1.0000		
3F	0.1408	0.8551	3F	0.4117	0.3866		
4F	0.8596	0.9667	4F	1.0000	0.5737		
5F	1.0000	0.0322	5F	0.6092	0.0249		
Algorithm=SSI-CCA							
Wired	WSI <sub>j</sub>	受損樓層		Wireless	WSI <sub>j</sub>	受損樓層	
		2F	1&5F			2F	1&5F
	1F	*0.1038	#0.2853		1F	*0.0196	0.0070
2F	#0.1153	1.0000	2F	0.0059	0.9759		
3F	0.7286	0.6986	3F	0.4335	0.4157		
4F	0.3281	0.4983	4F	0.8709	1.0000		
5F	1.0000	#0.5220	5F	1.0000	0.0079		
Algorithm=SSI-ECCA							
Wired	WSI <sub>j</sub>	受損樓層		Wireless	WSI <sub>j</sub>	受損樓層	
		2F	1&5F			2F	1&5F
	1F	*0.0244	#0.6102		1F	*0.0042	0.0016
2F	0.0162	0.5745	2F	0.0171	0.4329		
3F	0.4356	0.4341	3F	0.2681	0.5576		
4F	0.4059	1.0000	4F	1.0000	1.0000		
5F	1.0000	0.0338	5F	0.7888	0.0060		

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層

#表示未判別出受損樓層

表 5.4 結構損傷偵測試驗分析結果(Input=White noise,PGA=0.1g)

Algorithm=SSI-COV								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0039	*0.0065	*0.0244	*0.0183	*0.0237	0.0077	0.0028	0.0526
2F	*0.0617	0.0036	0.6577	0.2720	1.0000	0.1792	1.0000	*0.0422
3F	0.2628	0.2020	0.0099	0.4187	*0.0425	0.0131	0.1906	0.0962
4F	0.7416	0.6522	1.0000	0.0097	0.1665	0.6211	0.3248	1.0000
5F	1.0000	1.0000	0.7335	1.0000	0.0228	1.0000	0.0088	#0.1235
Algorithm=SSI-PLS								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0042	*0.0131	*0.0115	*0.0138	*0.0238	0.0115	0.0047	0.0678
2F	0.2227	0.0137	0.8809	1.0000	1.0000	1.0000	0.9128	*0.1057
3F	0.6000	0.5439	0.0072	0.1380	0.1975	0.0137	0.5593	#0.1109
4F	1.0000	1.0000	0.2519	0.0099	0.6650	0.4078	1.0000	1.0000
5F	0.9790	0.9592	1.0000	0.9697	0.0126	0.8757	0.0300	0.0785
Algorithm=SSI-MLR								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0059	*0.0033	*0.0185	*0.0179	*0.0101	0.0058	0.0052	0.0666
2F	0.1217	0.0090	0.3984	0.4388	*0.1064	0.1175	1.0000	0.2092
3F	0.3040	0.4117	0.0126	0.2346	0.5346	0.0004	0.3866	0.0578
4F	1.0000	1.0000	0.4643	0.0016	1.0000	0.6235	0.5737	1.0000
5F	0.9016	0.6092	1.0000	1.0000	0.0041	1.0000	0.0249	0.0305
Algorithm=SSI-CCA								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0038	*0.0196	*0.0610	*0.0472	*0.0049	0.0771	0.0070	0.0580
2F	0.1853	0.0059	0.5039	0.9371	1.0000	0.9197	0.9759	0.1989
3F	0.2592	0.4335	0.0220	0.3451	0.4525	0.0515	0.4157	0.0453
4F	1.0000	0.8709	0.0851	0.0179	0.9829	0.8412	1.0000	1.0000
5F	0.5271	1.0000	1.0000	1.0000	0.0115	1.0000	0.0079	0.0040
Algorithm=SSI-ECCA								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0033	*0.0042	*0.0306	*0.0730	*0.0043	0.0063	0.0016	0.0485
2F	0.1589	0.0171	0.1797	0.3495	0.8198	0.1506	0.4329	0.1947
3F	0.2837	0.2681	0.0070	0.2925	0.4941	0.0037	0.5576	0.0653
4F	1.0000	1.0000	0.1857	0.0048	1.0000	0.6273	1.0000	1.0000
5F	0.7276	0.7888	1.0000	1.0000	0.0029	1.0000	0.0060	0.0446

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 5.5 不同系統識別法結合 DLV 法之損傷探測試驗分析結果歸納表

(Input=White noise,PGA=0.1g)

Algorithm		SSI-COV	SSI-PLS	SSI-MLR	SSI-CCA	SSI-ECCA
Case	A1	Good	Good	Good	Good	Good
	A2	Fair	Fair	Fair	Fair	Fair
	A3	Fair	Fair	Fair	Fair	Fair
	A4	Fair	Fair	Fair	Fair	Fair
	A5	Poor	Poor	Poor	Fair	Fair
	A13	Good	Good	Good	Good	Good
	A15	Good	Good	Good	Good	Good
	A135	Poor	Poor	Good	Good	Good

Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。

Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個未受損樓層誤判為受損。

Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個未受損樓層誤判為受損；

或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。

Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。



表 5.6 結構損傷偵測試驗分析結果(Input=El Centro 地震,PGA=0.1g)

Algorithm=SSI-COV								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0351	*0.0022	*0.0234	*0.0222	*0.0010	0.0187	0.0336	#0.1127
2F	0.2796	0.0058	0.1309	0.4568	0.5942	*0.0570	0.3857	0.2609
3F	1.0000	1.0000	0.0114	0.9055	1.0000	0.0432	1.0000	0.0494
4F	0.7645	0.0887	0.1282	0.0108	0.4618	1.0000	0.5564	1.0000
5F	0.1321	0.8452	1.0000	1.0000	0.0102	0.7892	0.0899	0.0376
Algorithm=SSI-PLS								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0089	*0.0389	*0.0045	*0.0540	*0.0396	0.0824	0.0192	#0.1306
2F	0.5382	0.0203	0.4834	1.0000	0.7192	0.6221	0.4022	0.3216
3F	0.7996	0.7520	0.0079	0.8677	0.5027	0.0019	1.0000	0.0131
4F	1.0000	0.6417	0.2820	0.0117	1.0000	0.4074	0.6260	1.0000
5F	0.8209	1.0000	1.0000	0.1626	0.0500	1.0000	#0.1323	#0.1322
Algorithm=SSI-MLR								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0084	*0.0200	*0.0053	*0.0228	*0.0157	0.0182	0.0129	0.0249
2F	0.4561	0.0042	1.0000	0.4062	0.3486	0.3175	0.2805	0.1708
3F	0.8014	1.0000	0.0224	1.0000	0.6177	0.0175	0.8710	0.0630
4F	0.5058	0.2175	0.5005	0.0293	1.0000	0.5665	0.6079	1.0000
5F	1.0000	0.6752	0.4477	0.4266	0.0265	1.0000	#1.0000	0.0333
Algorithm=SSI-CCA								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0875	*0.0170	*0.0274	0.1354	*0.0991	0.0959	0.0502	0.0994
2F	1.0000	0.0056	0.5685	0.7865	0.8506	1.0000	1.0000	0.3393
3F	0.5667	1.0000	0.0186	1.0000	1.0000	0.0674	0.7508	0.0774
4F	0.2071	0.2674	0.3893	0.0098	0.3865	0.3104	0.3189	1.0000
5F	0.2078	0.5642	1.0000	0.5259	0.0079	0.5757	#0.4803	#0.2488
Algorithm=SSI-ECCA								
WSI <sub>j</sub>	受損樓層							
	1F	2F	3F	4F	5F	1&3F	1&5F	1&3&5F
1F	0.0005	*0.0064	*0.0067	*0.0026	*0.0030	0.0110	0.0000	0.0854
2F	0.8565	0.0015	0.7532	0.4692	0.6146	0.4190	0.6431	0.2744
3F	0.5058	0.4658	0.0073	0.3786	1.0000	0.0040	1.0000	0.0415
4F	1.0000	1.0000	0.3455	0.0078	0.3655	0.7068	0.4371	1.0000
5F	0.6034	0.5473	1.0000	1.0000	0.0038	1.0000	0.0115	0.0740

灰底表示 WSI<sub>j</sub> ≤ 0.1

\*表示將未受損樓層誤判為受損樓層 #表示未判別出受損樓層

表 5.7 不同系統識別法結合 DLV 法之損傷探測試驗分析結果歸納表

(Input=El Centro 地震,PGA=0.1g)

Algorithm		SSI-COV	SSI-PLS	SSI-MLR	SSI-CCA	SSI-ECCA
Case	B1	Good	Good	Good	Good	Good
	B2	Fair	Fair	Fair	Fair	Fair
	B3	Fair	Fair	Fair	Fair	Fair
	B4	Fair	Fair	Fair	Good	Fair
	B5	Fair	Fair	Fair	Fair	Fair
	B13	Fair	Good	Good	Good	Good
	B15	Good	Poor	Poor	Poor	Good
	B135	Poor	Poor	Good	Poor	Good

Good：表示受損樓層被成功辨識出來，且無誤判之情況。

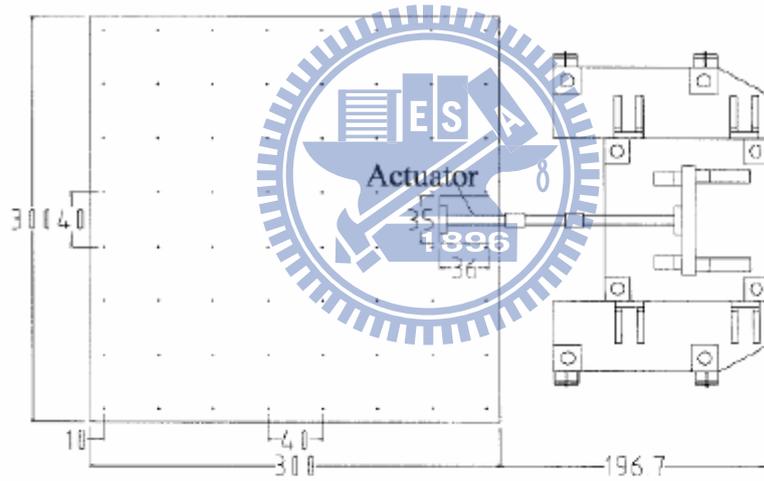
Fair：表示受損樓層被成功辨識出來，但有一個未受損樓層誤判為受損。

Poor：表示受損樓層被成功辨識出來，但有多個未受損樓層誤判為受損；

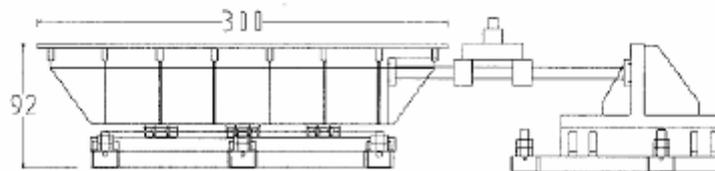
或多重受損案例，有一個樓層未被成功辨識。

Fail：表示完全未能辨別出受損樓層。





地震模擬振動台上視圖  
單位：cm



地震模擬振動台側視圖  
單位：cm

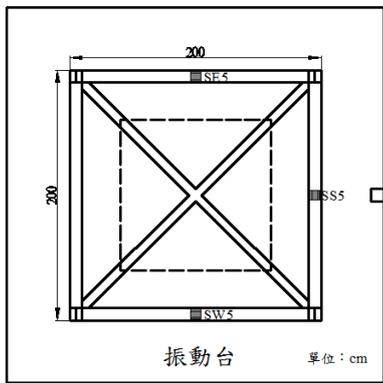
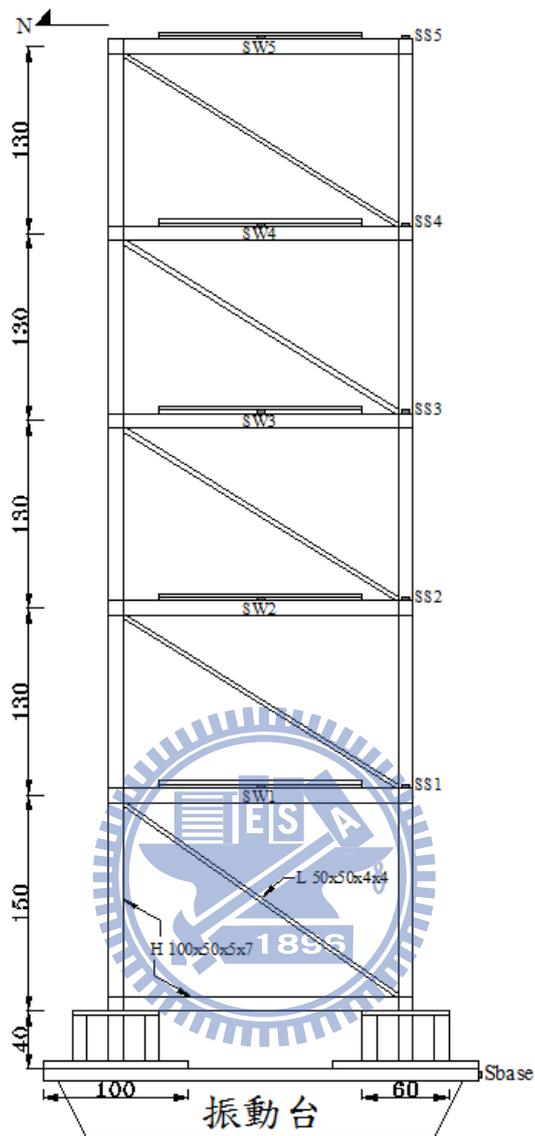
圖 5.1 交通大學地震模擬振動台尺寸詳圖



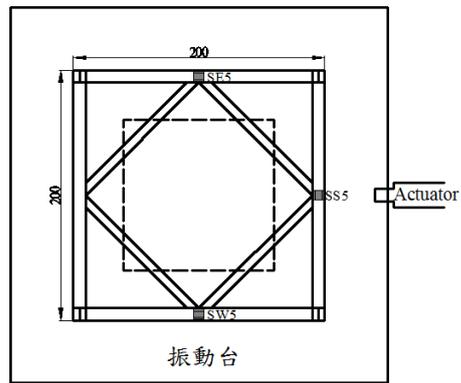
圖 5.2 油壓致動器



圖 5.3 MTS407 控制器



基層上視圖



一樓至頂樓上視圖

圖 5.4 五層樓鋼構架示意圖(單位：cm)



圖 5.5 無線感應器(a)VSE-15D (b)NTU-WSU

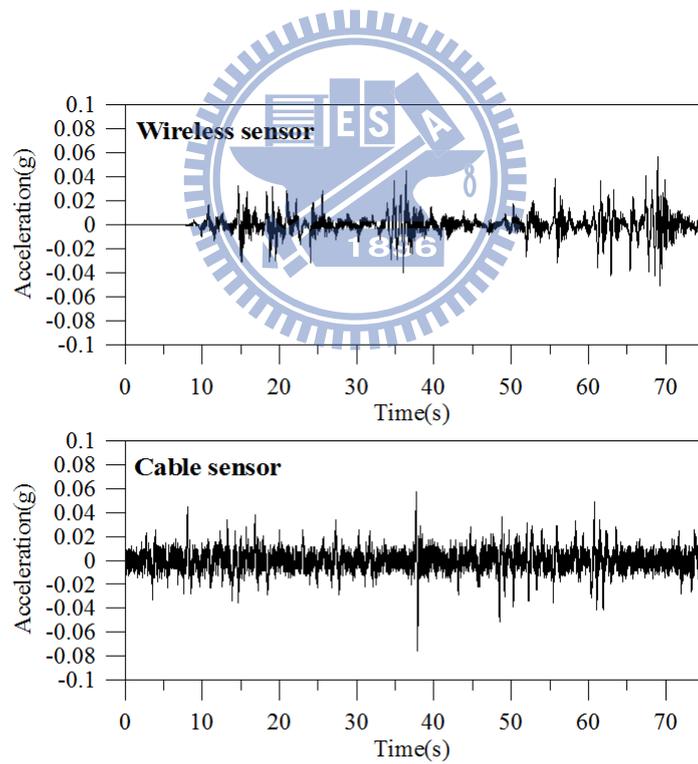


圖 5.6 無線感應器與有線感應器之訊號比較圖

(Input=White noise, PGA=0.1g, 感應器位於振動台面上)

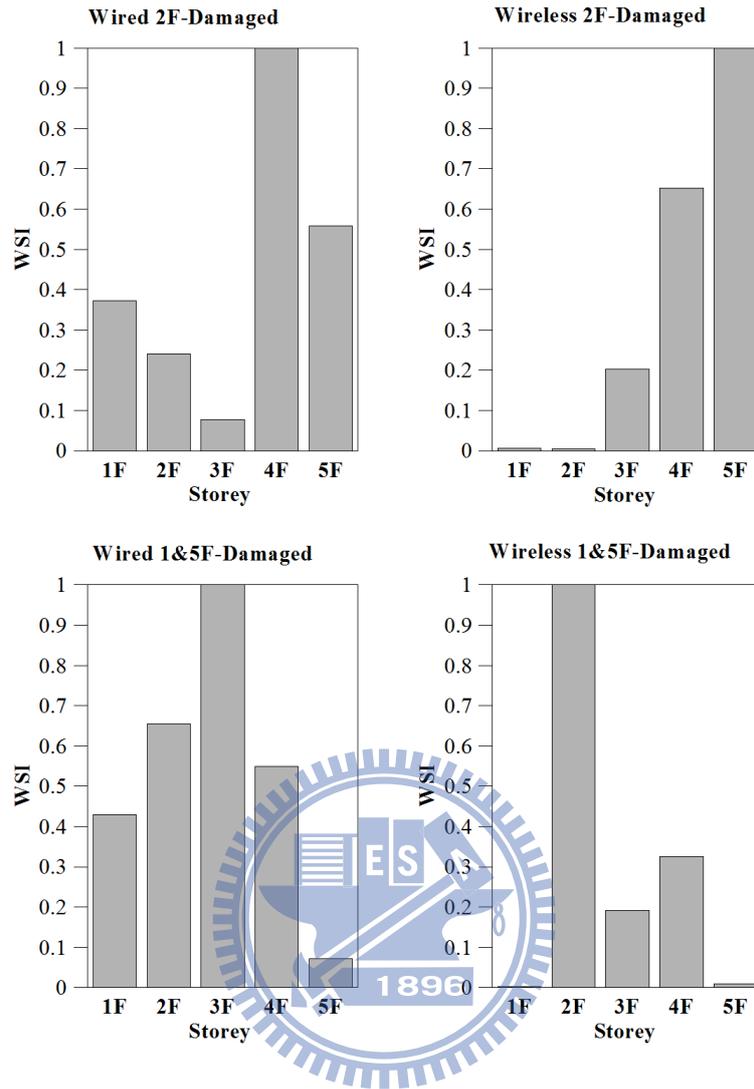


圖 5.7 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果  
(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV)

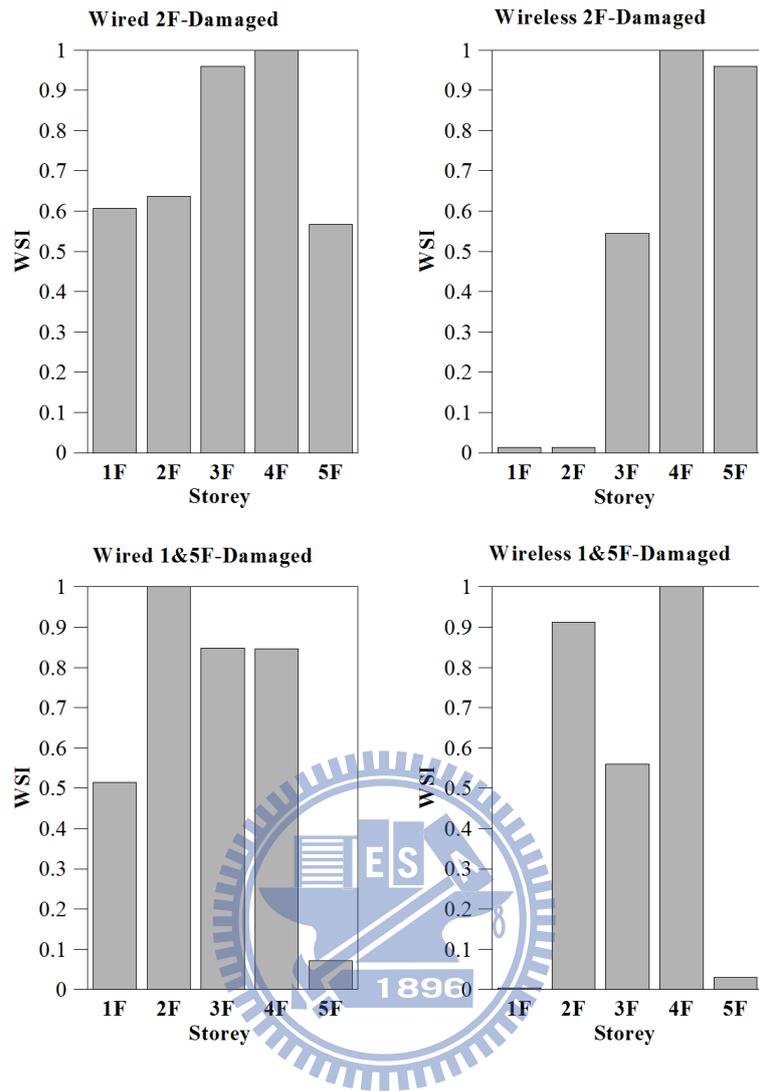


圖 5.8 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果  
(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS)

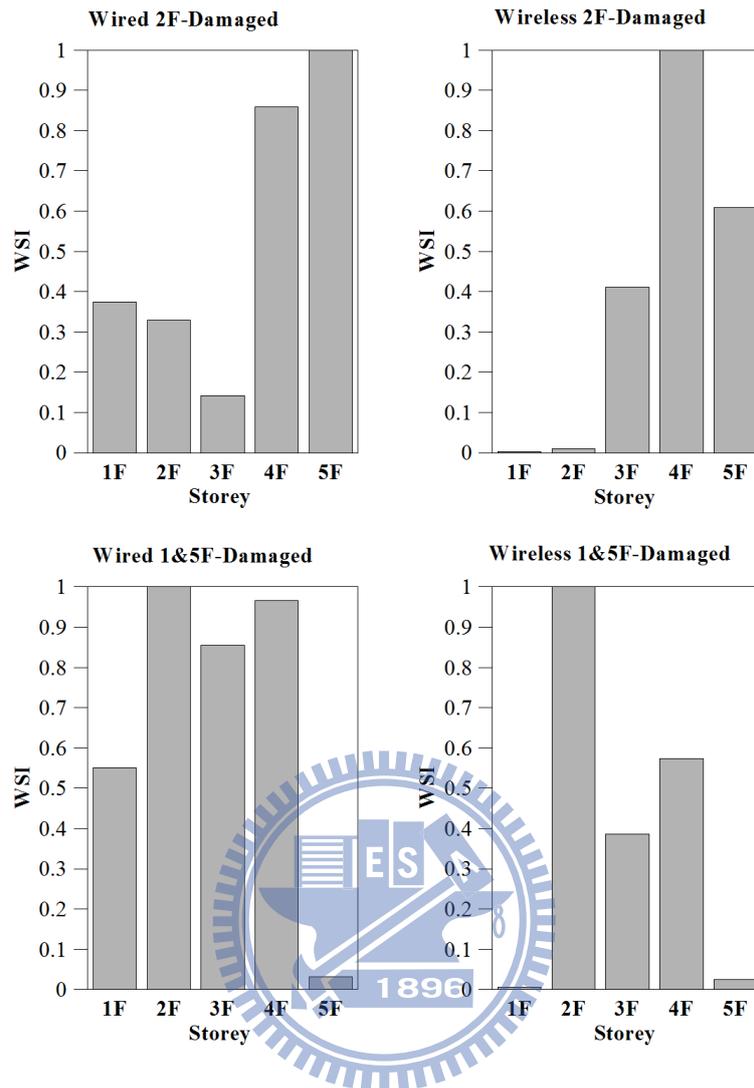


圖 5.9 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果  
(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR)

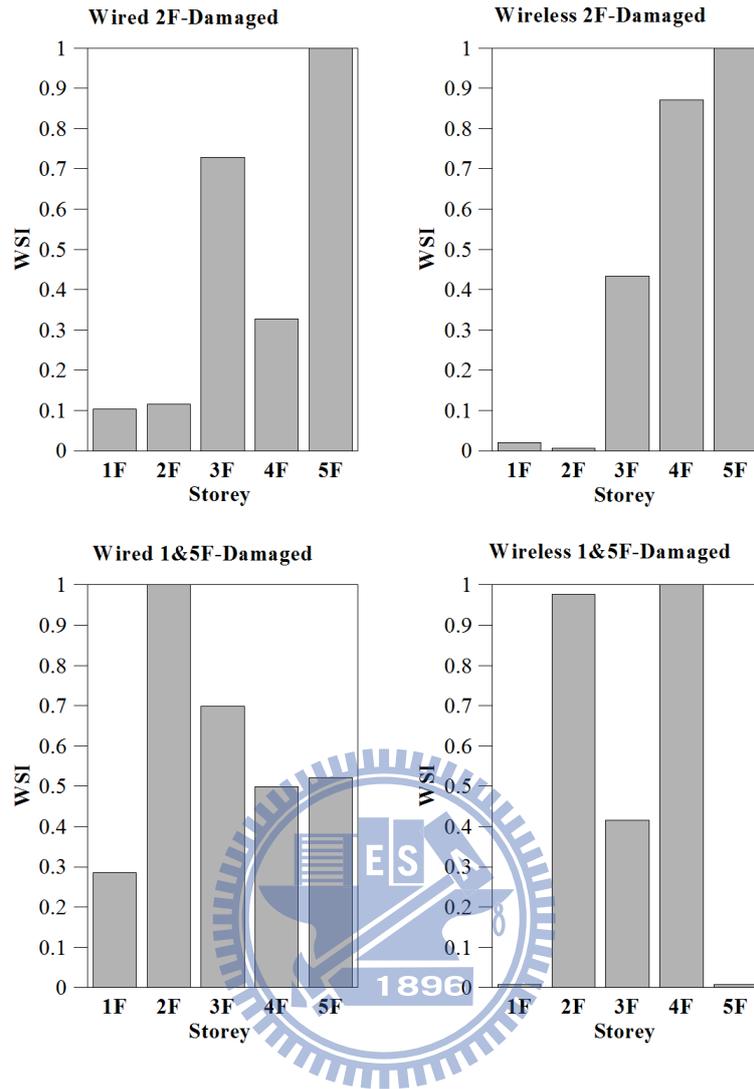


圖 5.10 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果  
(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA)

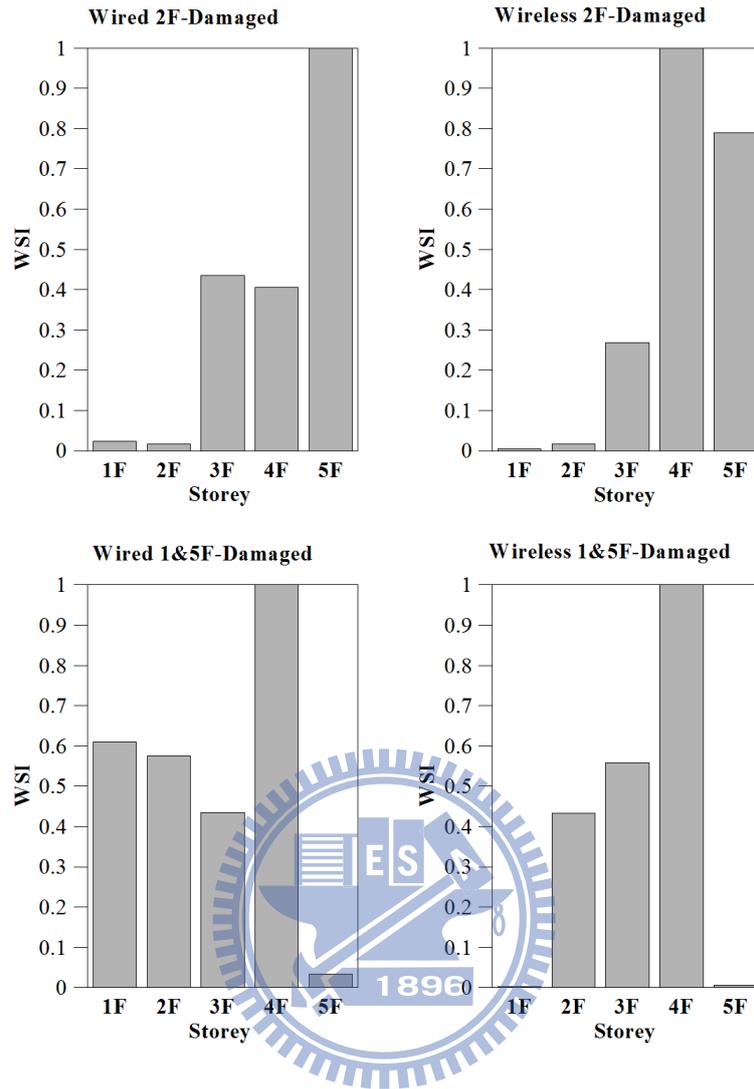


圖 5.11 無線感應器與原有線感應器之結構損傷偵測試驗分析結果  
(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA)



(a)健康狀態



(b)二樓受損



圖 5.12 五層樓鋼結構

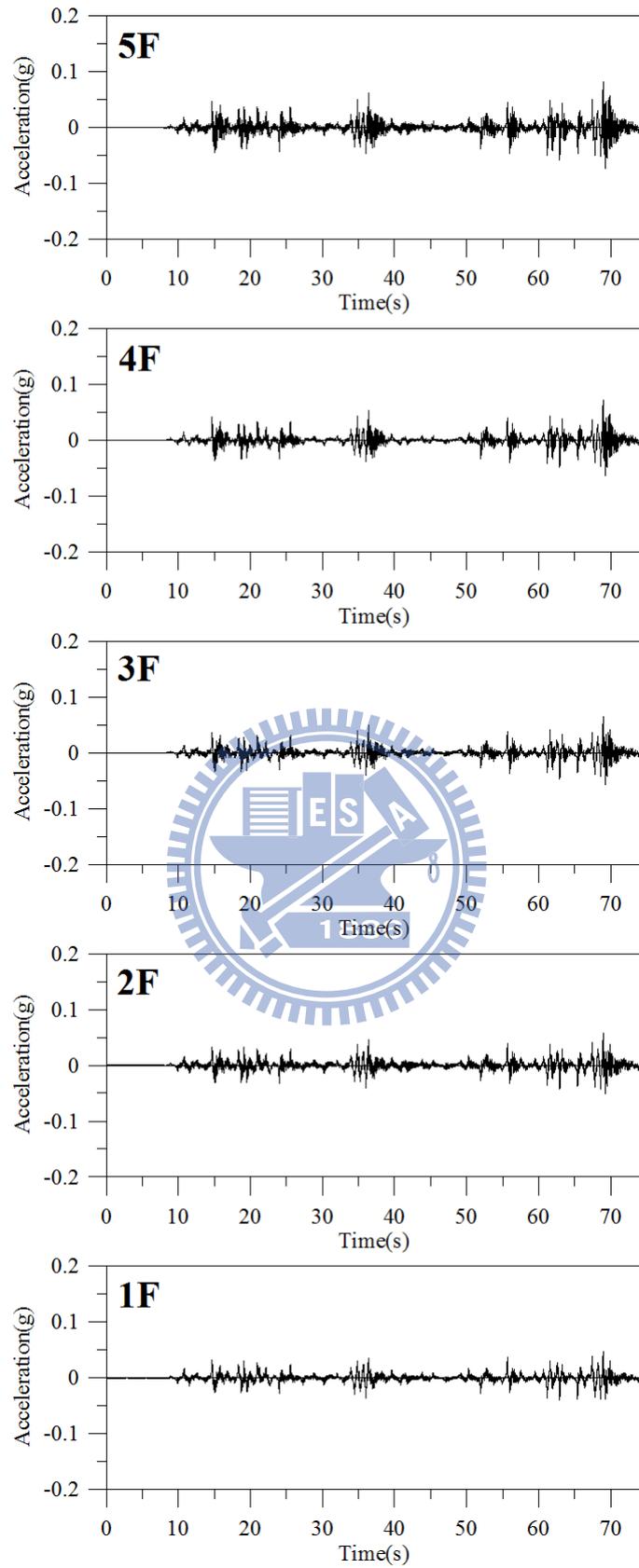


圖 5.13 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g, 結構未受損)

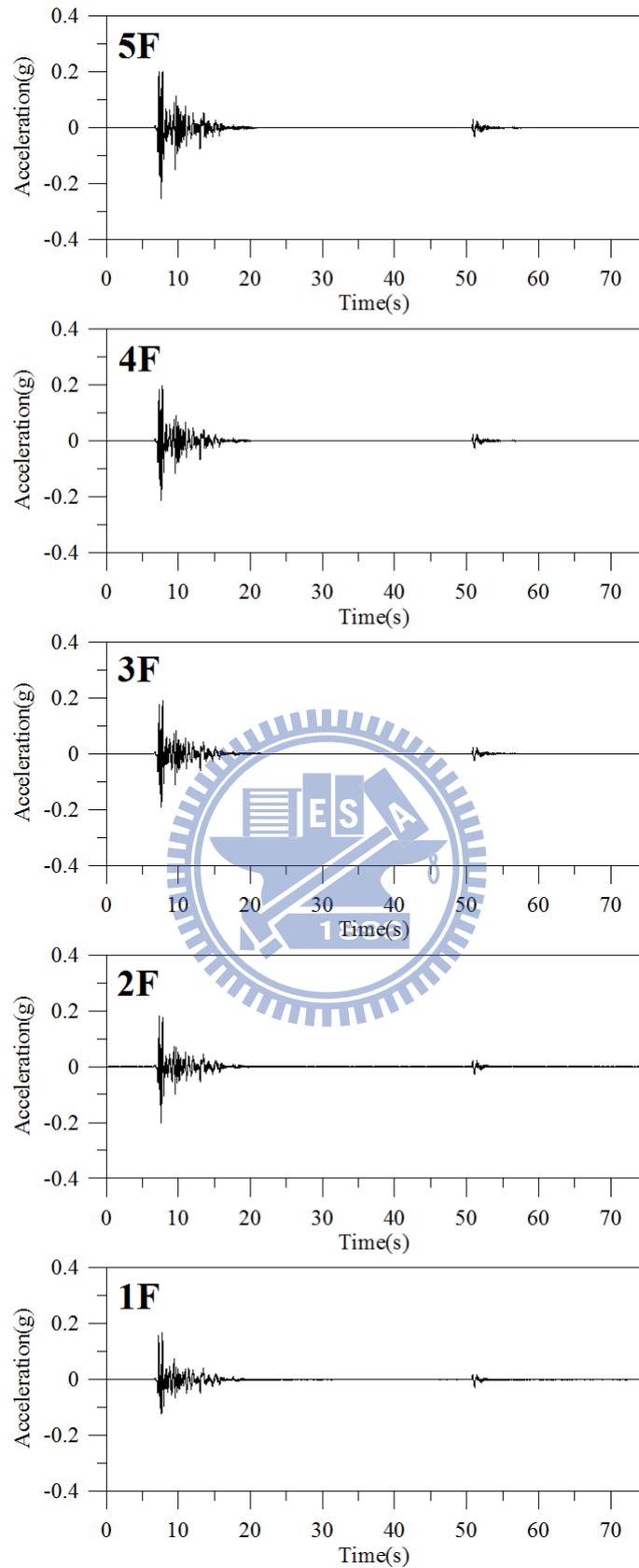


圖 5.14 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構未受損)

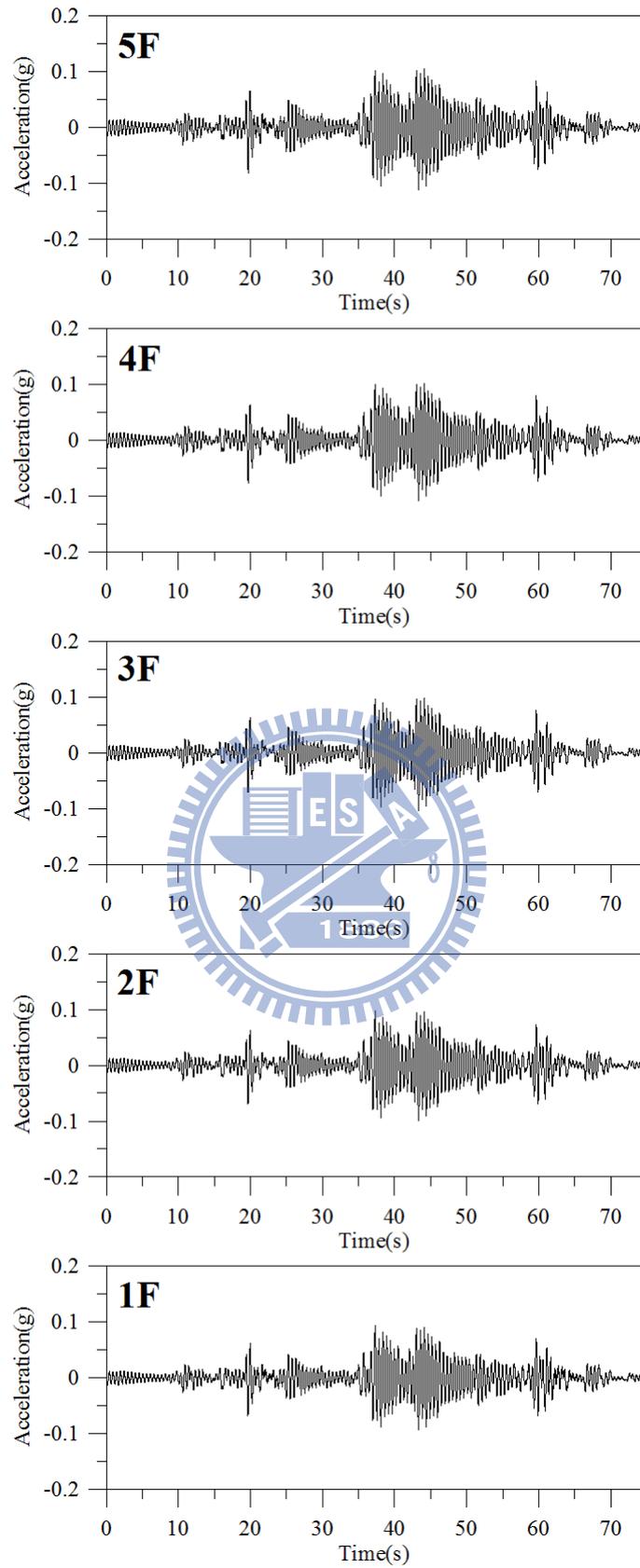


圖 5.15 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g, 結構 1 樓受損)

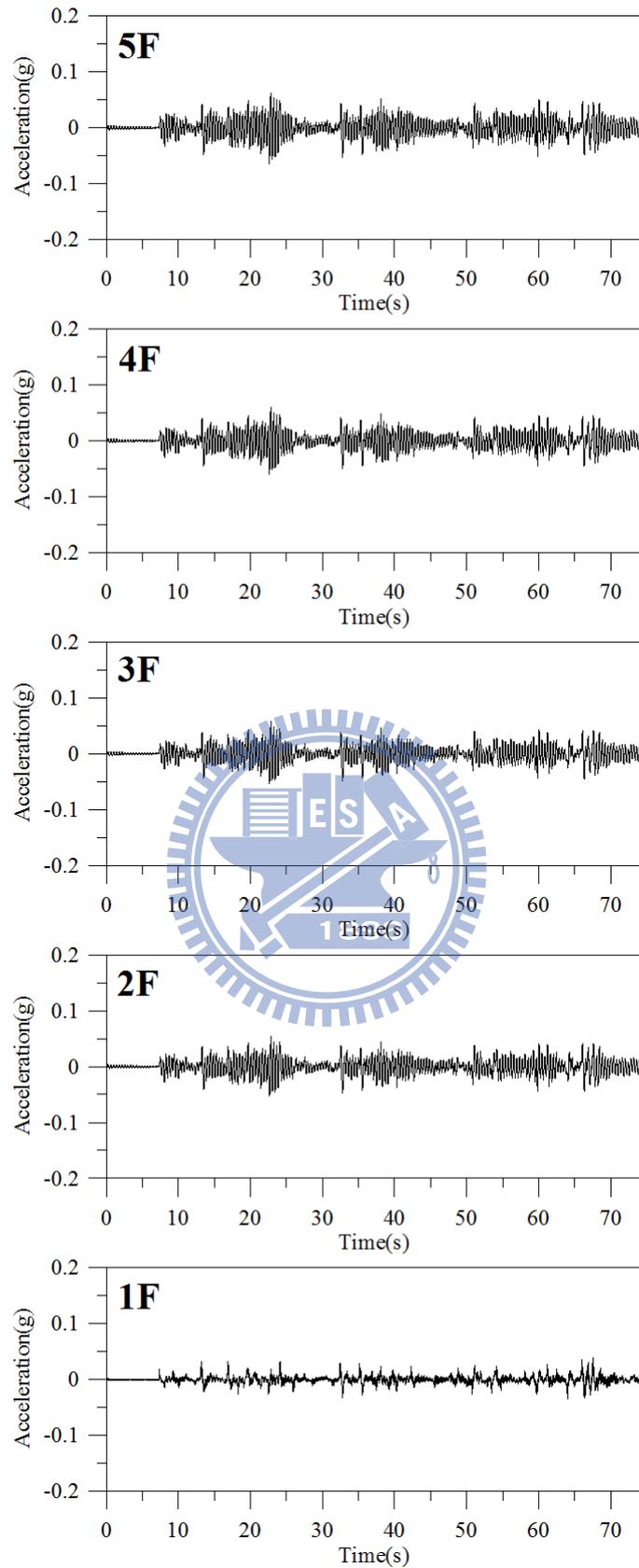


圖 5.16 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g, 結構 2 樓受損)

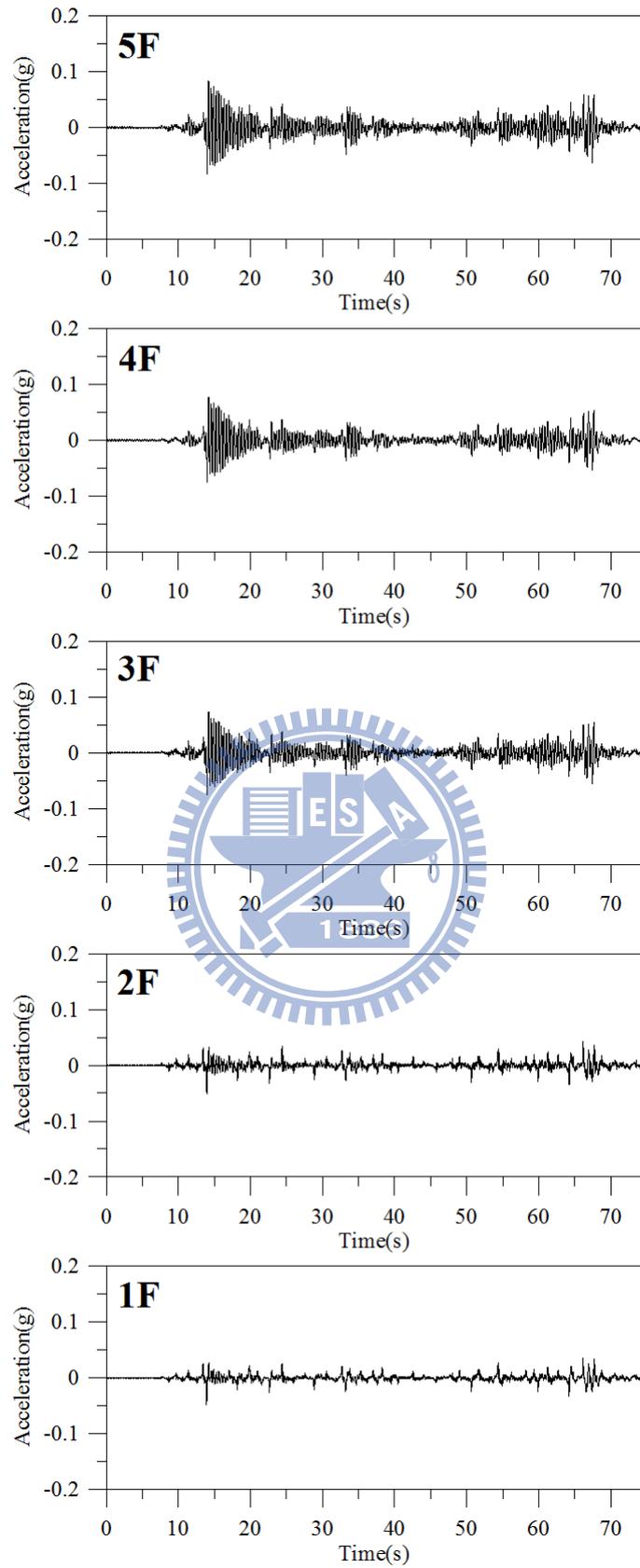


圖 5.17 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g, 結構 3 樓受損)

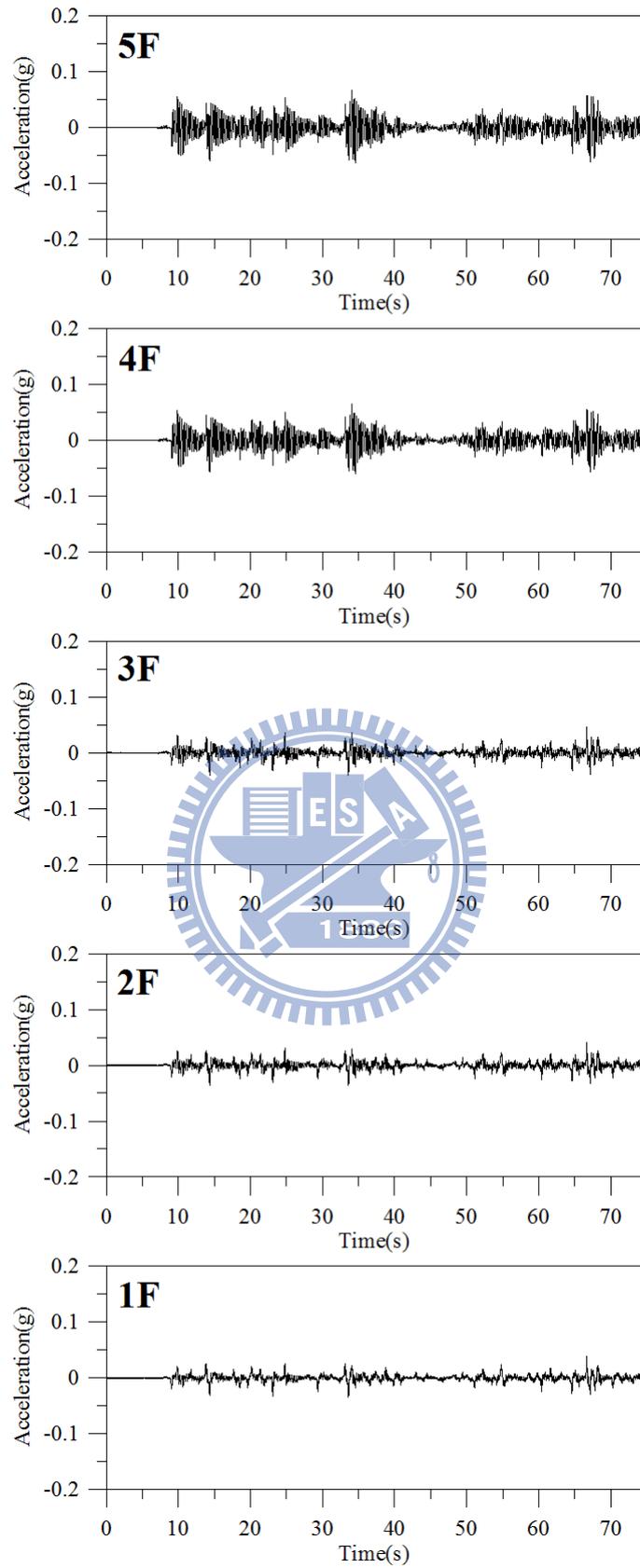


圖 5.18 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g, 結構 4 樓受損)

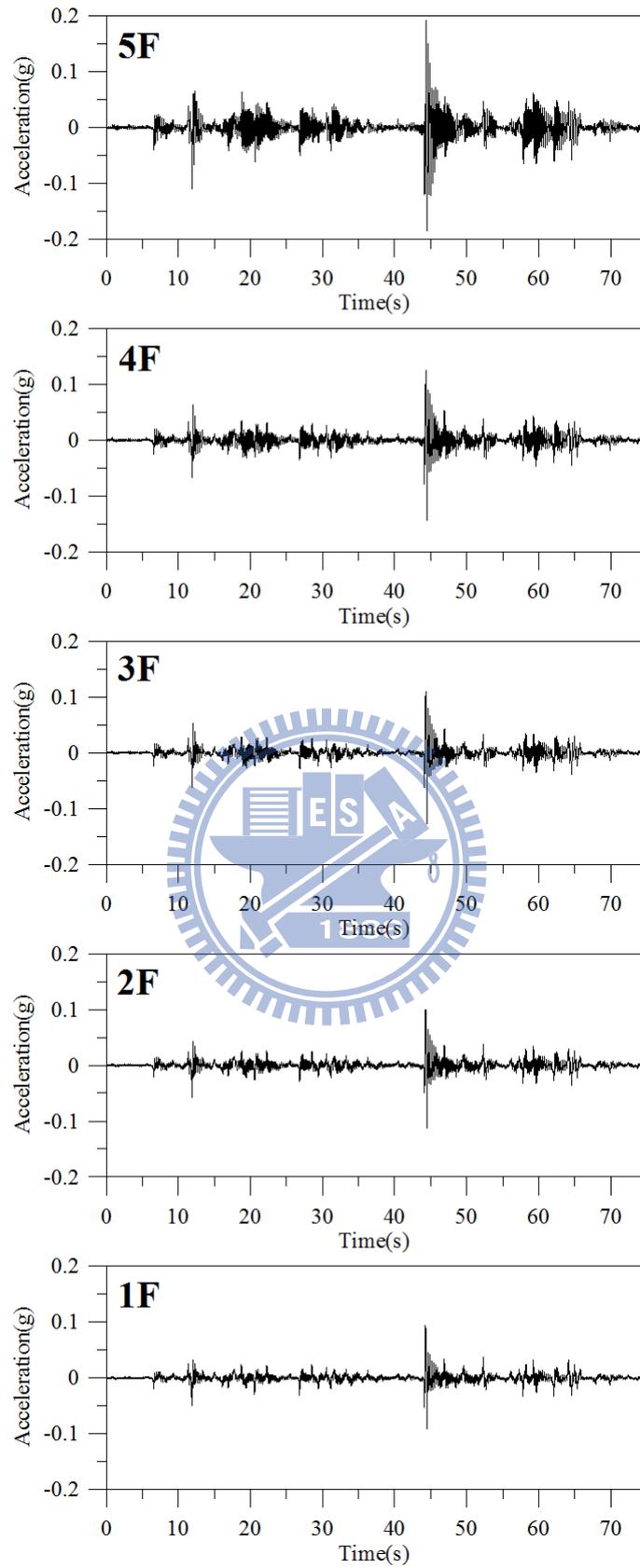


圖 5.19 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g, 結構 5 樓受損)

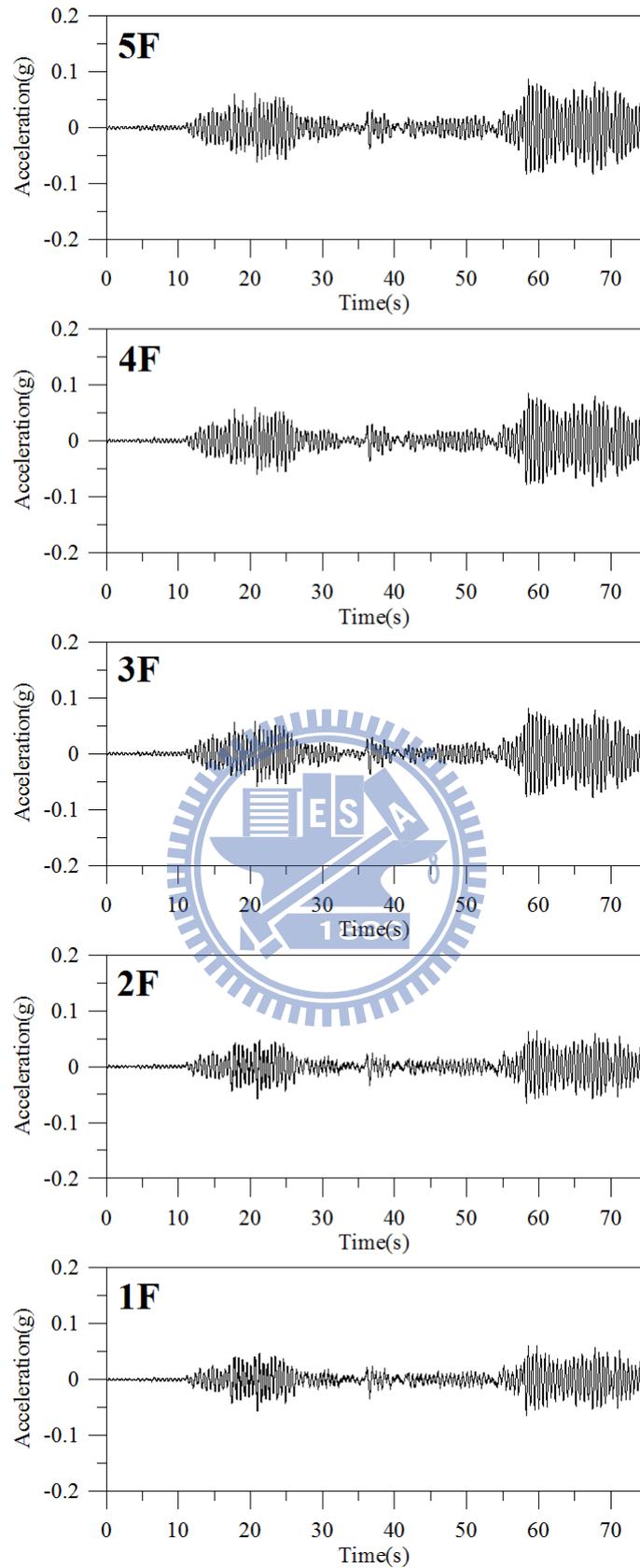


圖 5.20 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 1 樓及 3 樓受損)

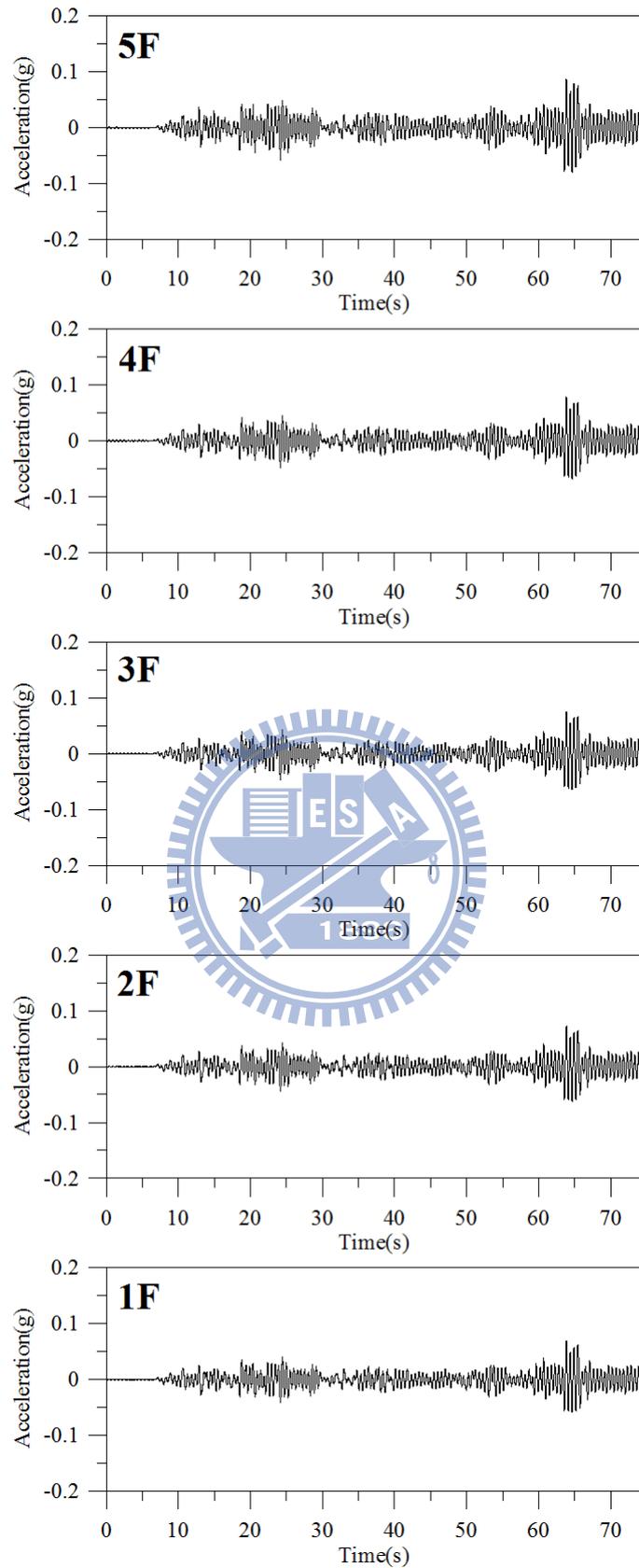


圖 5.21 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 1 樓及 5 樓受損)

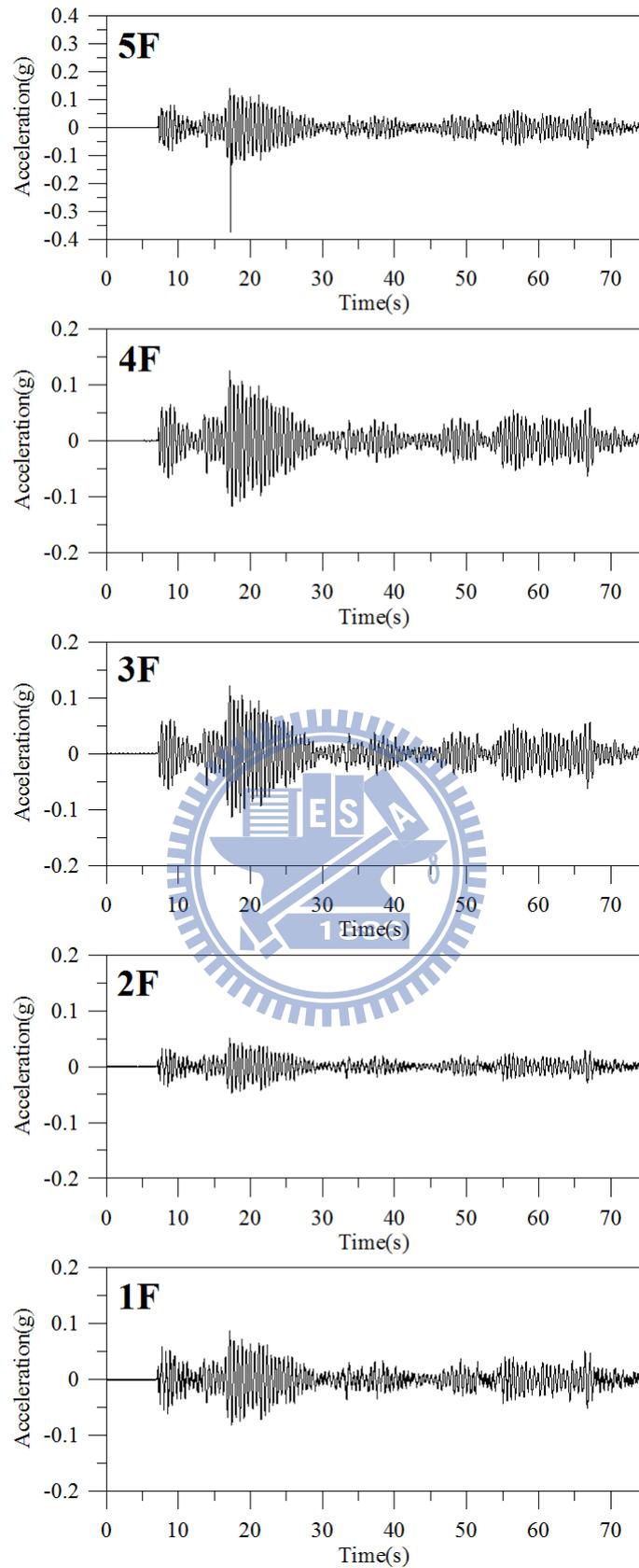


圖 5.22 各層樓加速度歷時

(Input=White noise, PGA=0.1g ,結構 1 樓、3 樓及 5 樓受損)

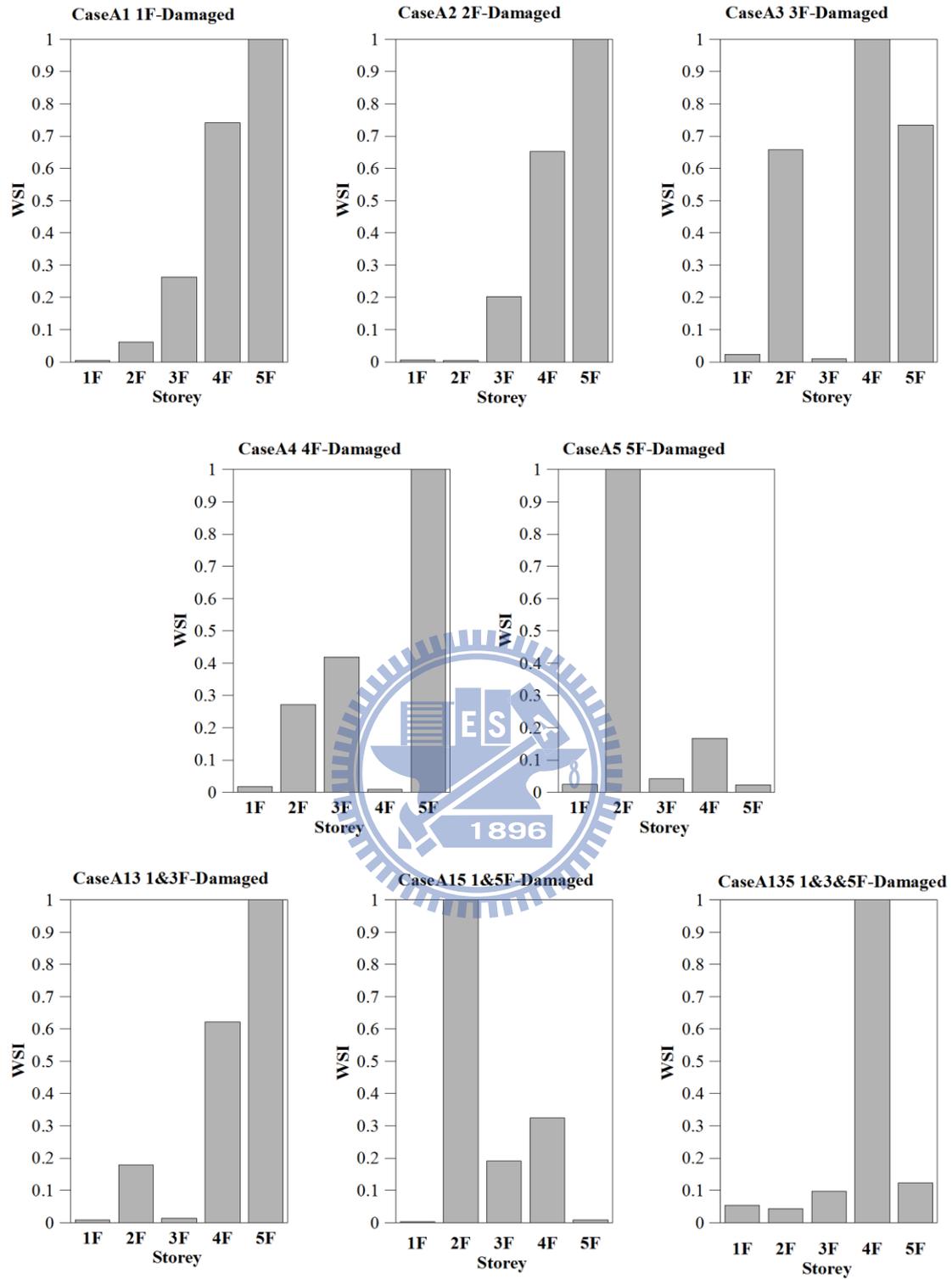


圖 5.23 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV)

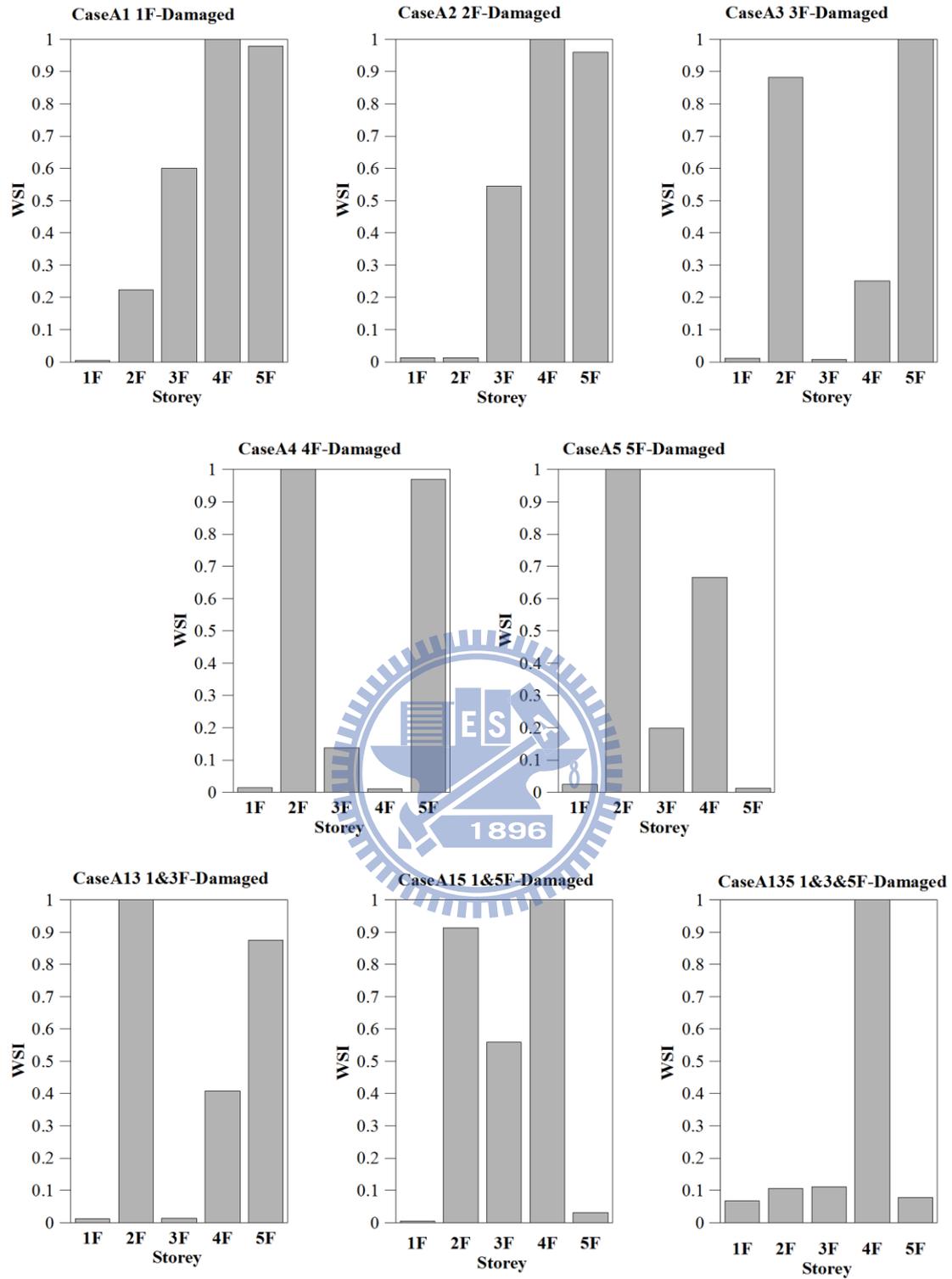


圖 5.24 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS)

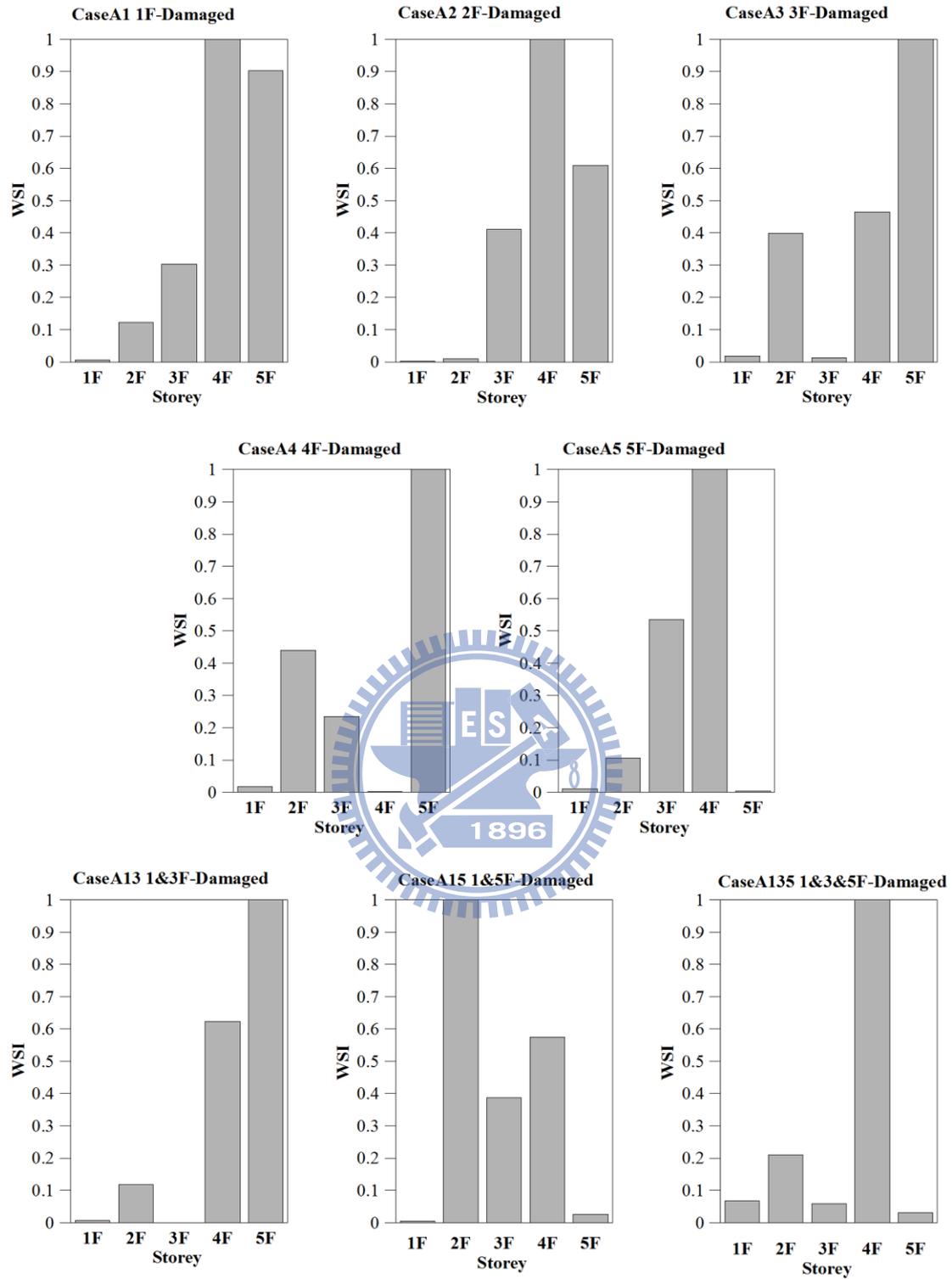


圖 5.25 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR)

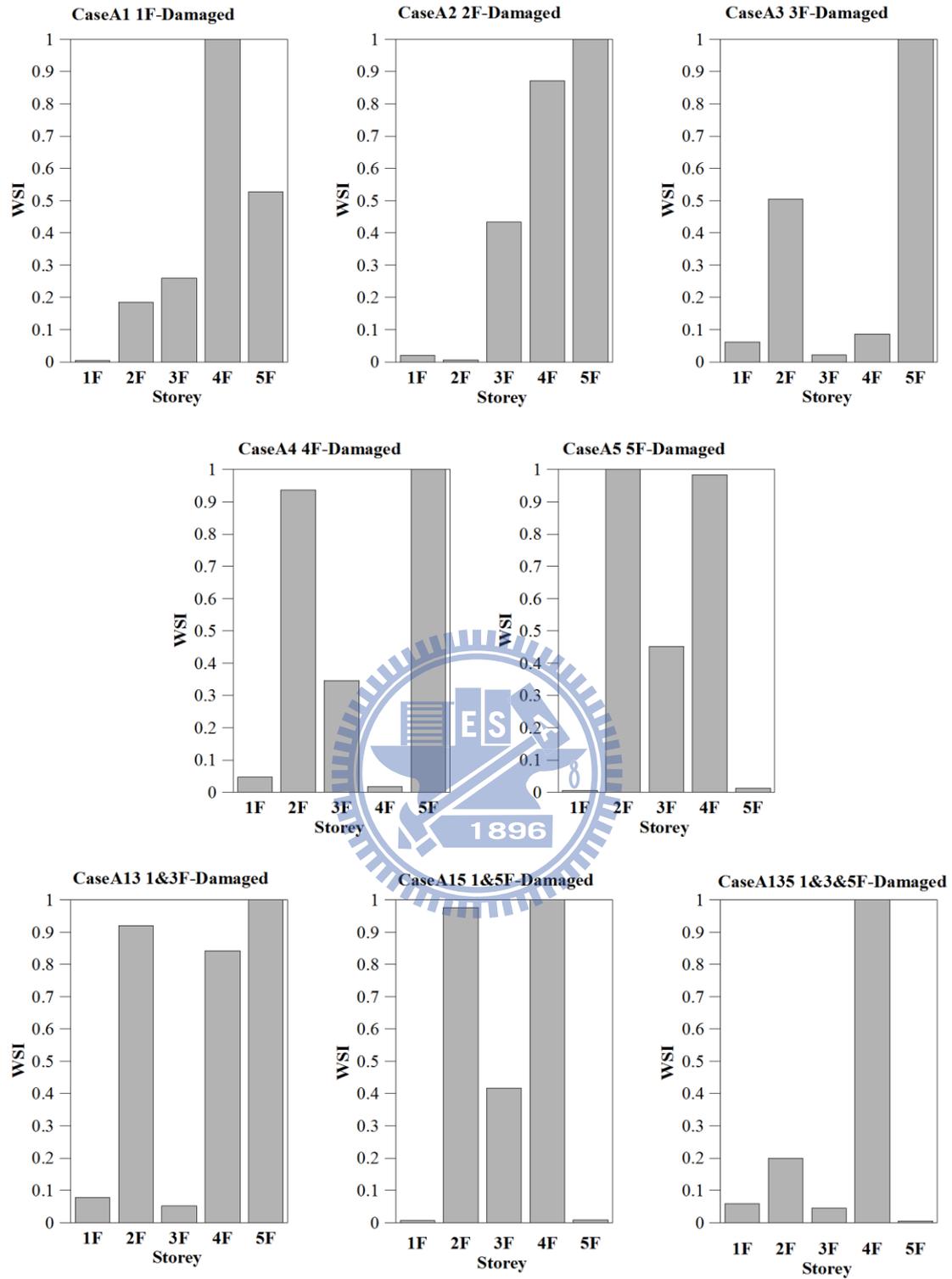


圖 5.26 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA)

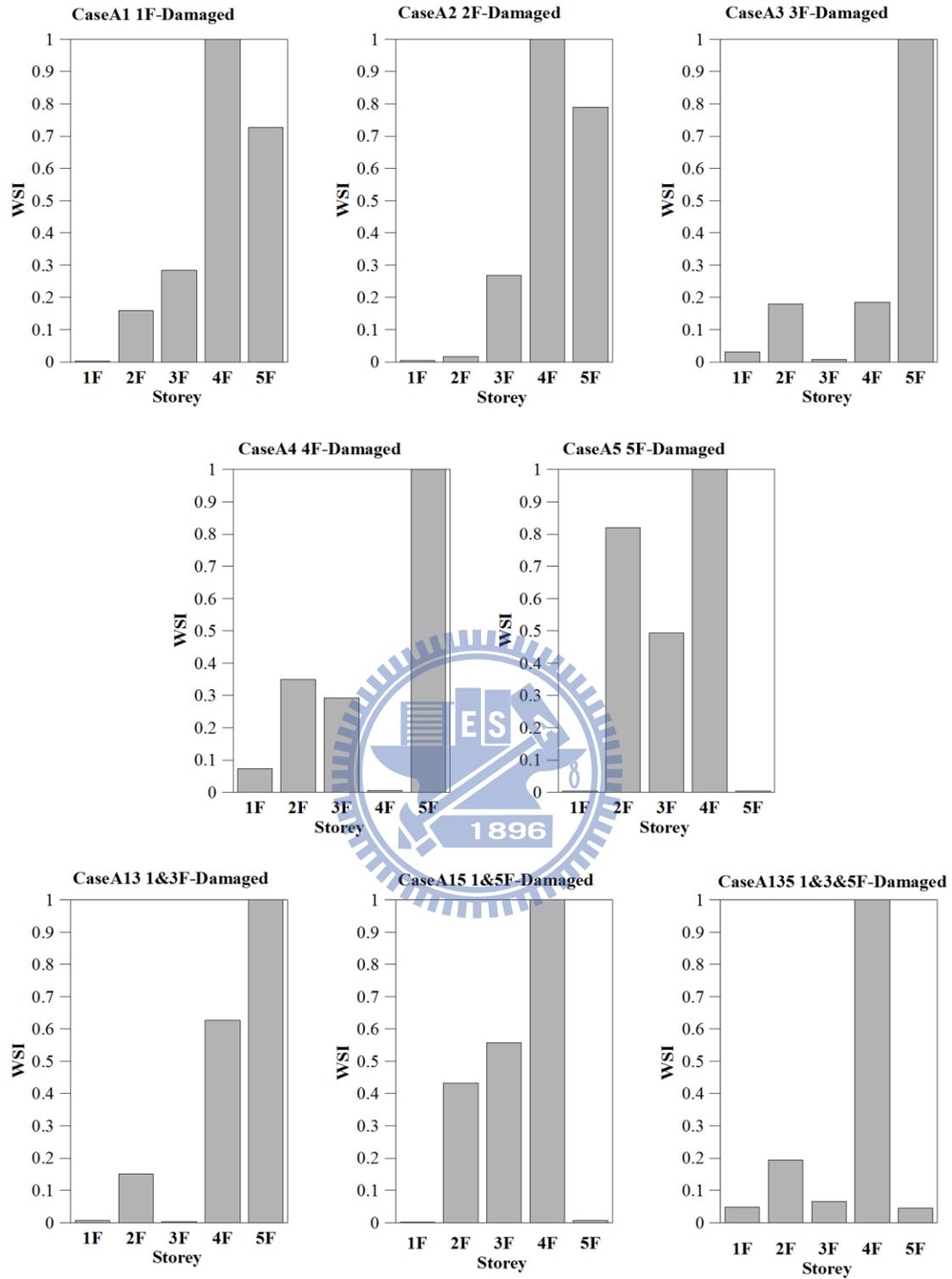


圖 5.27 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=White noise, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA)

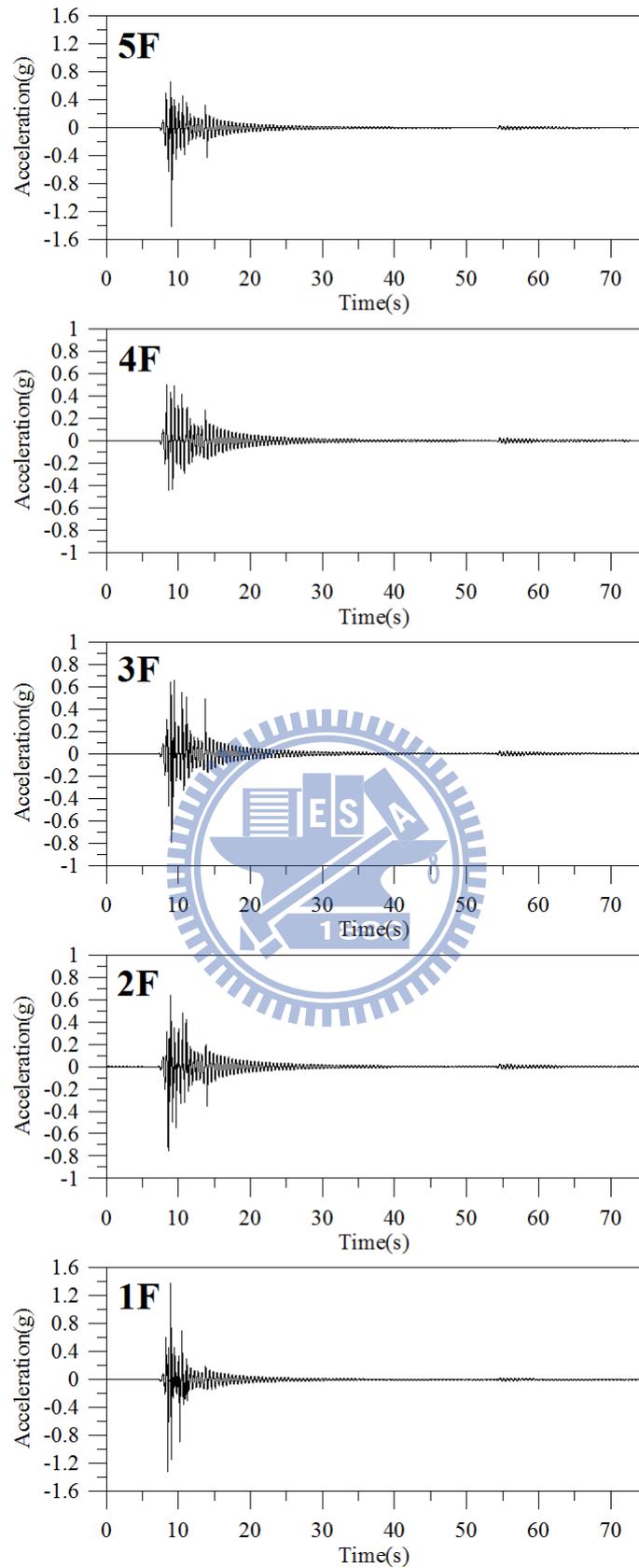


圖 5.28 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g ,結構 1 樓受損)

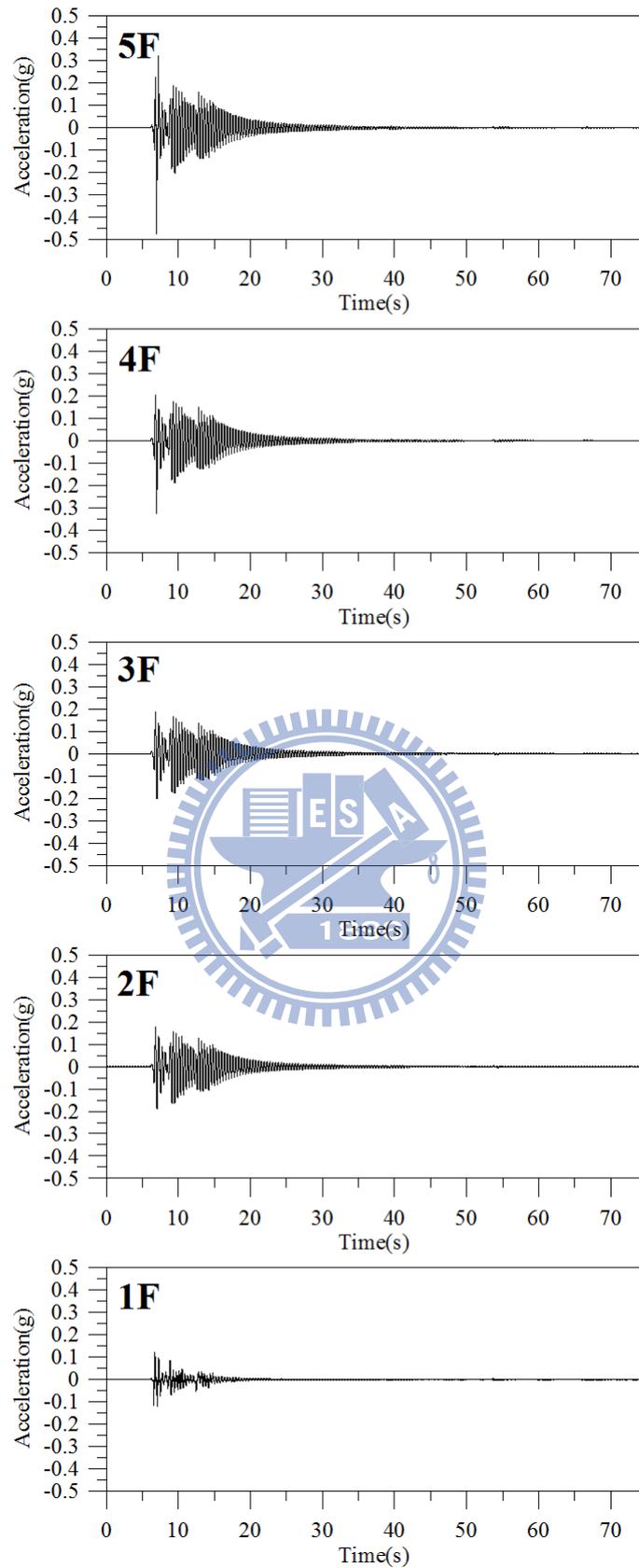


圖 5.29 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構 2 樓受損)

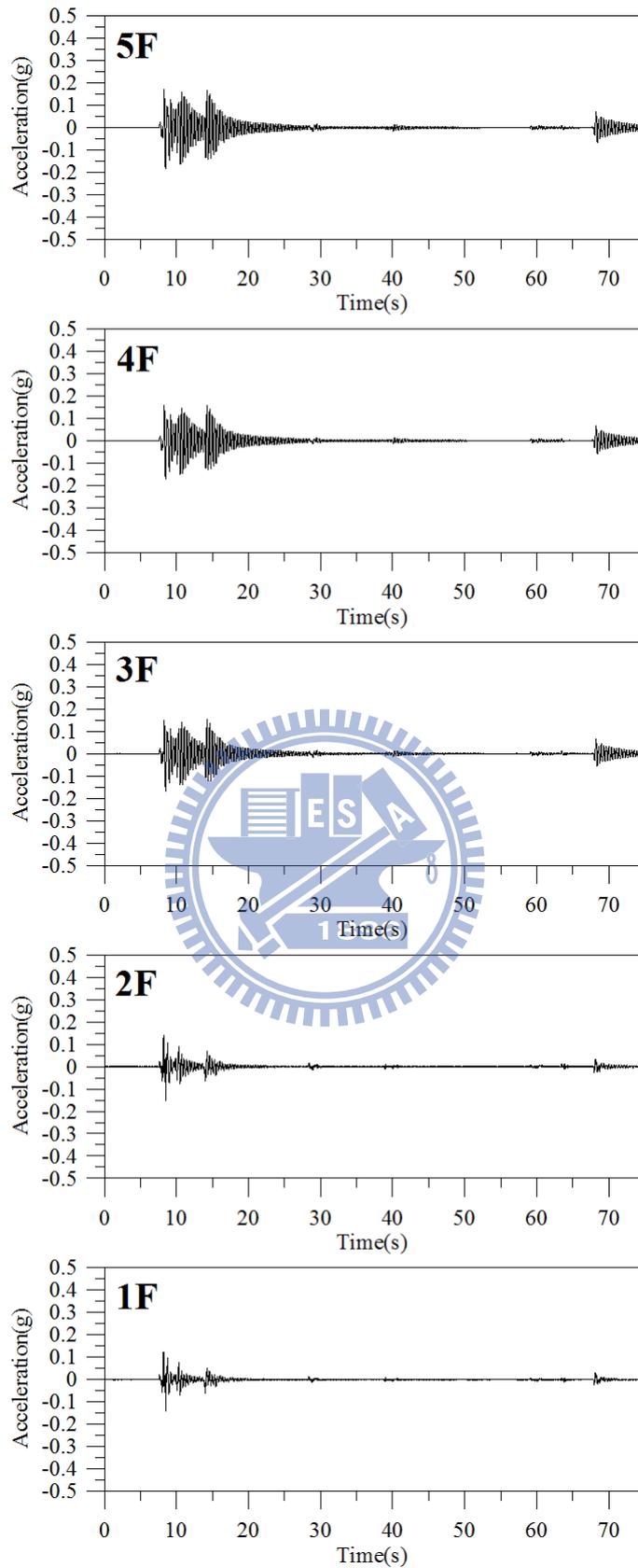


圖 5.30 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構 3 樓受損)

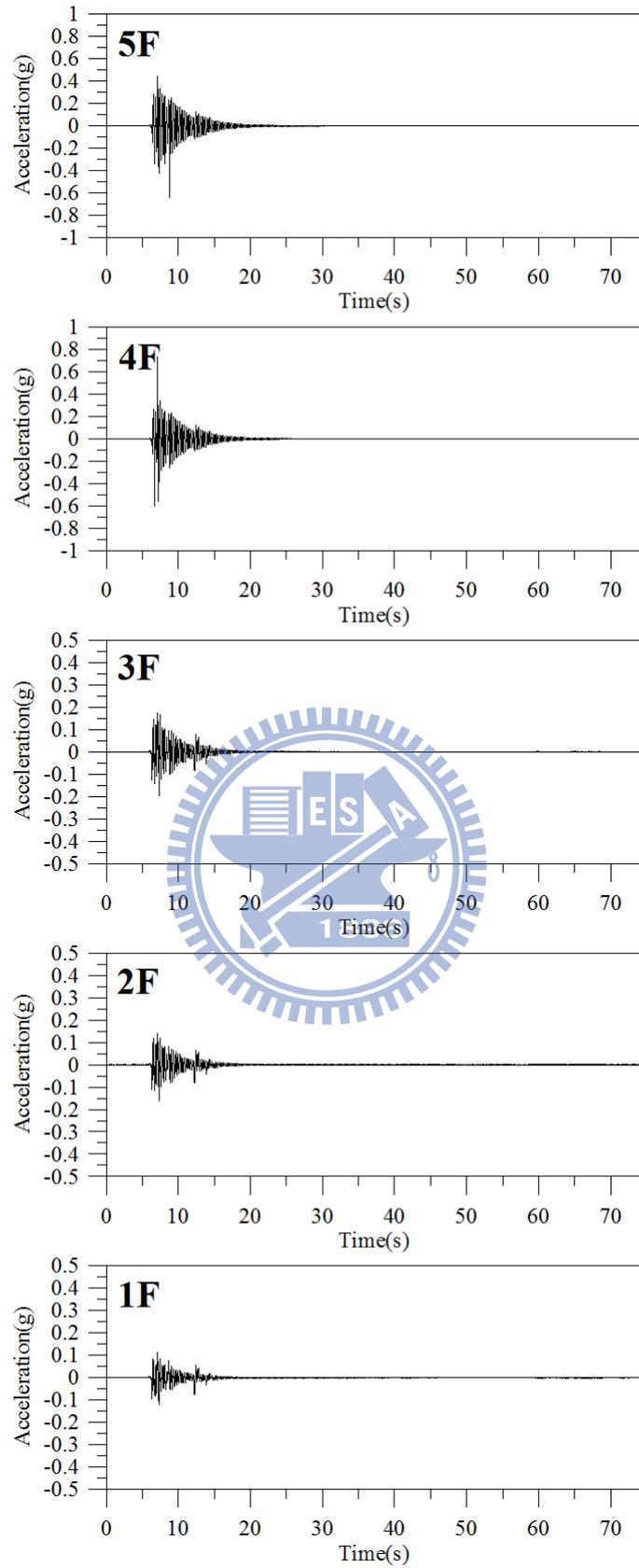


圖 5.31 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構 4 樓受損)

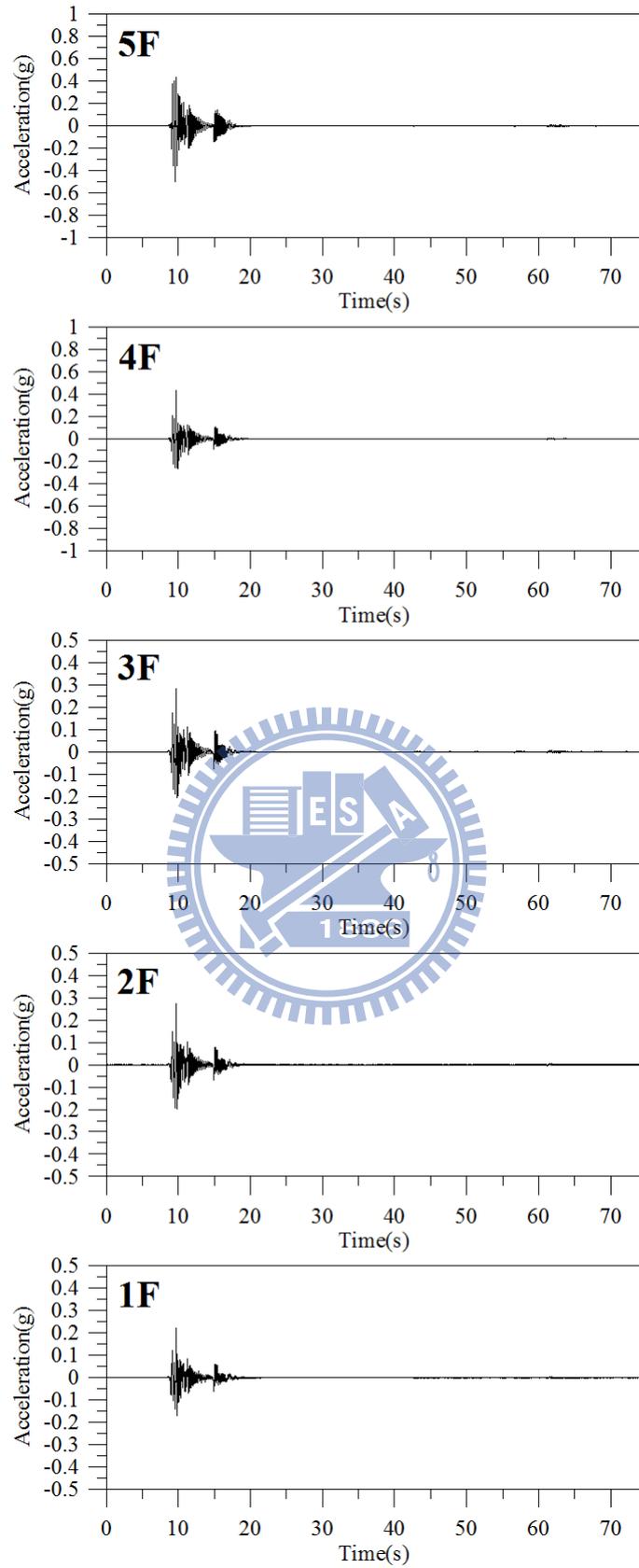


圖 5.32 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構 5 樓受損)

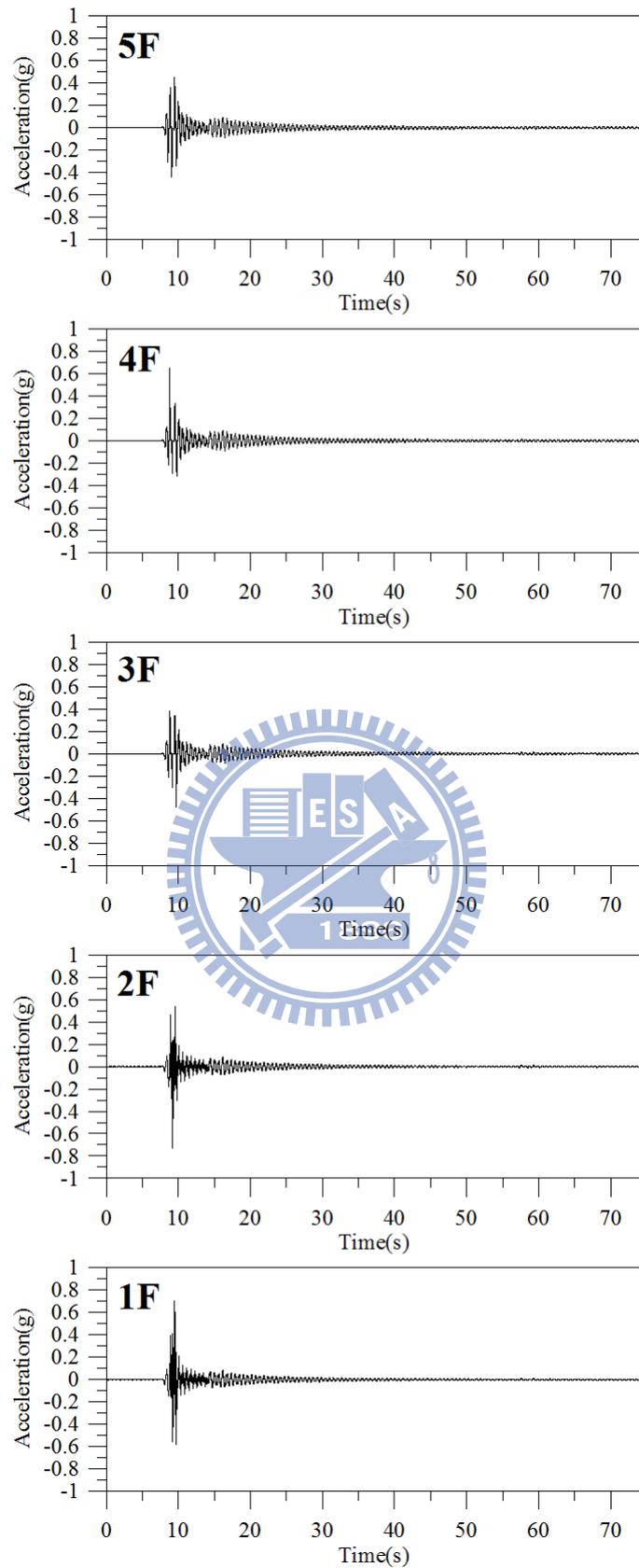


圖 5.33 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構 1 樓及 3 樓受損)

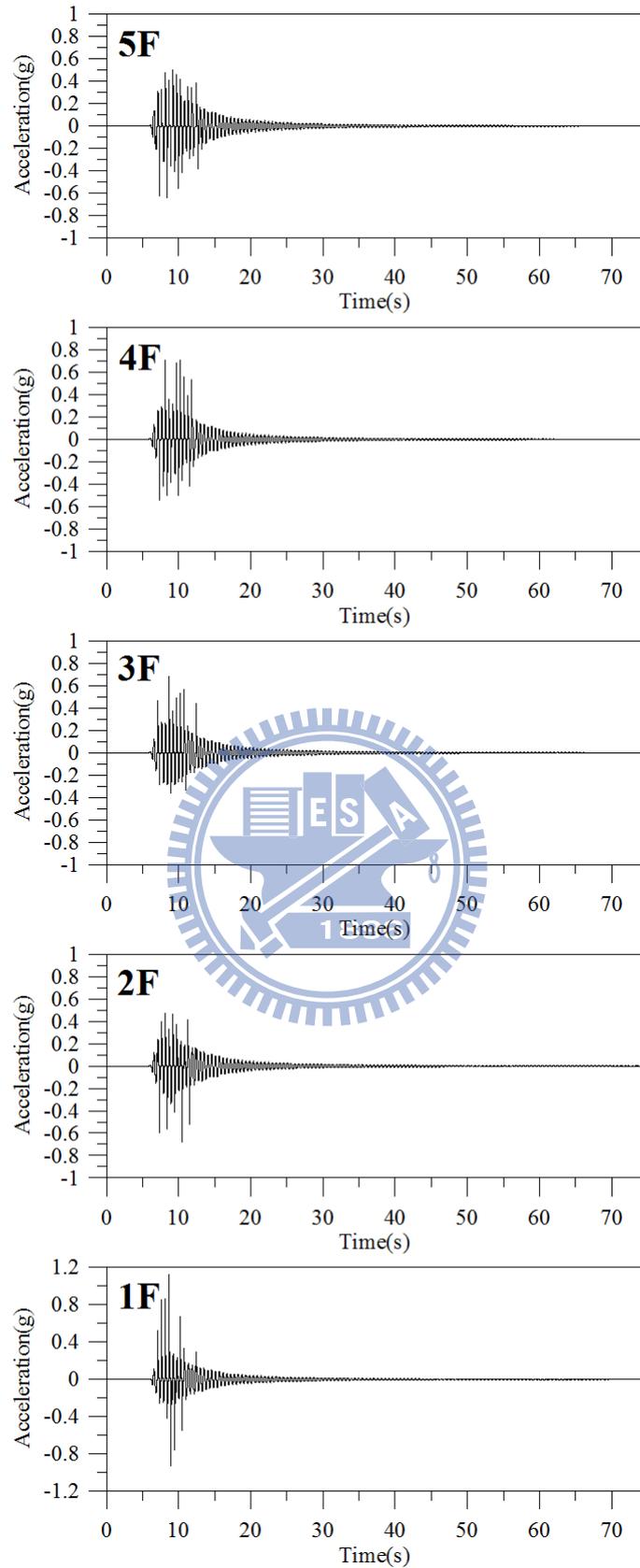


圖 5.34 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構 1 樓及 5 樓受損)

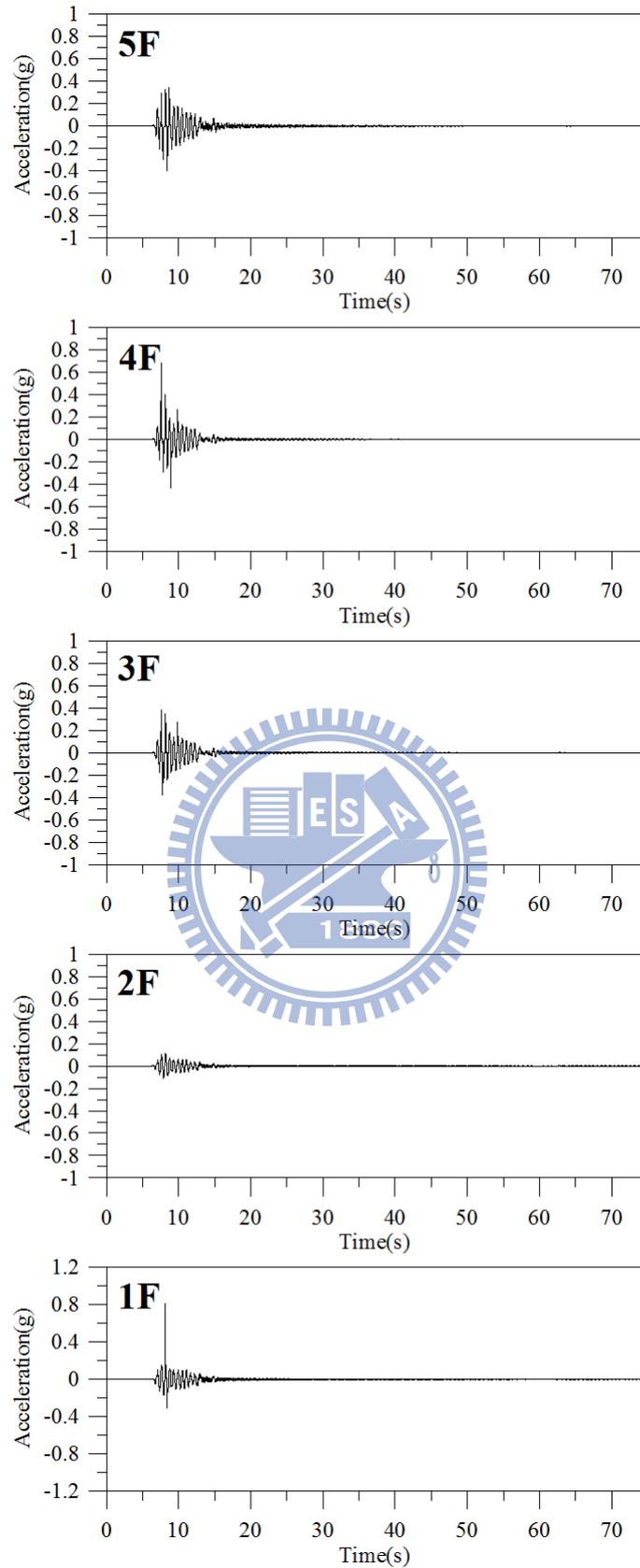


圖 5.35 各層樓加速度歷時

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, 結構 1 樓、3 樓及 5 樓受損)

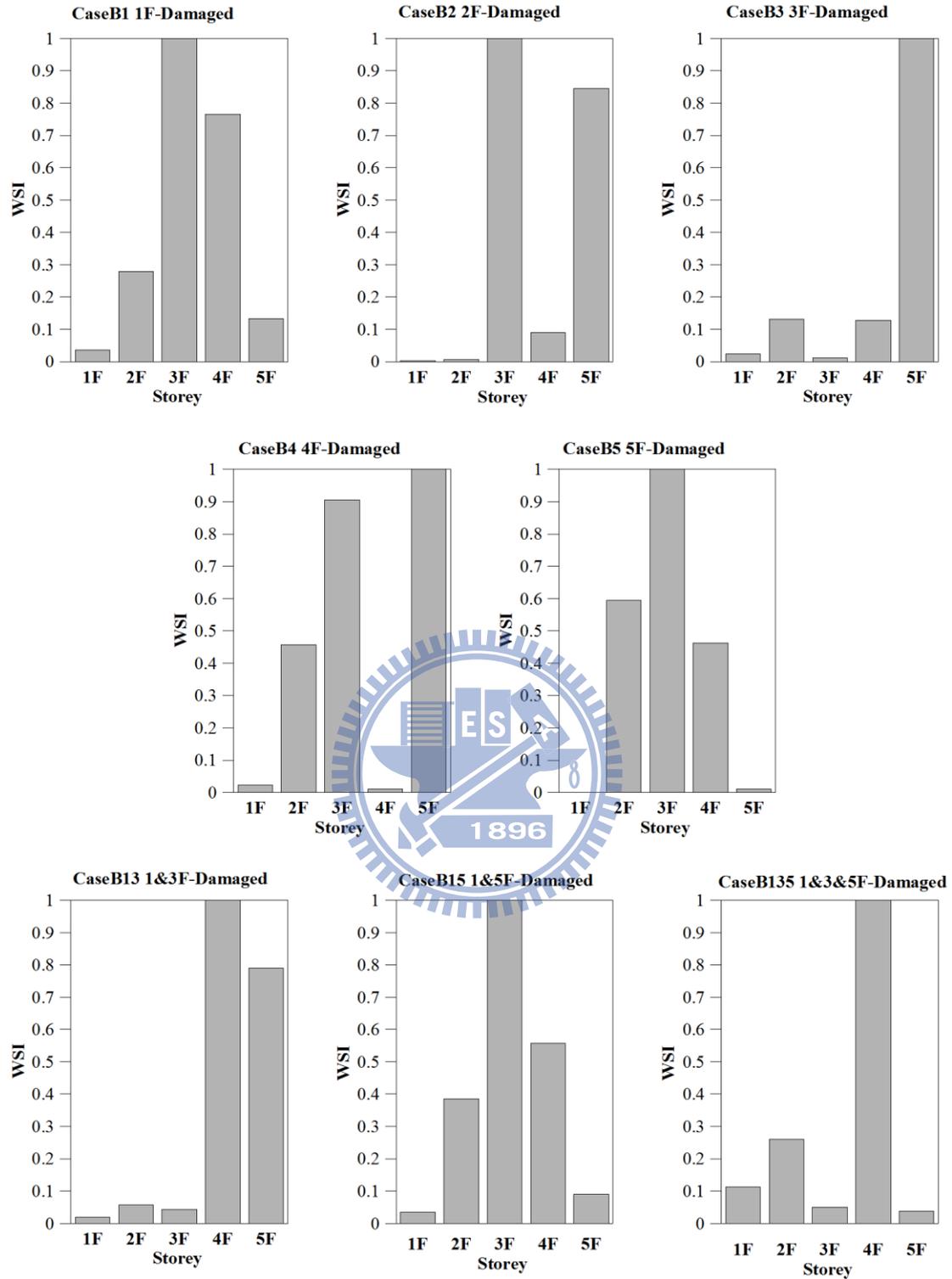


圖 5.36 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-COV)

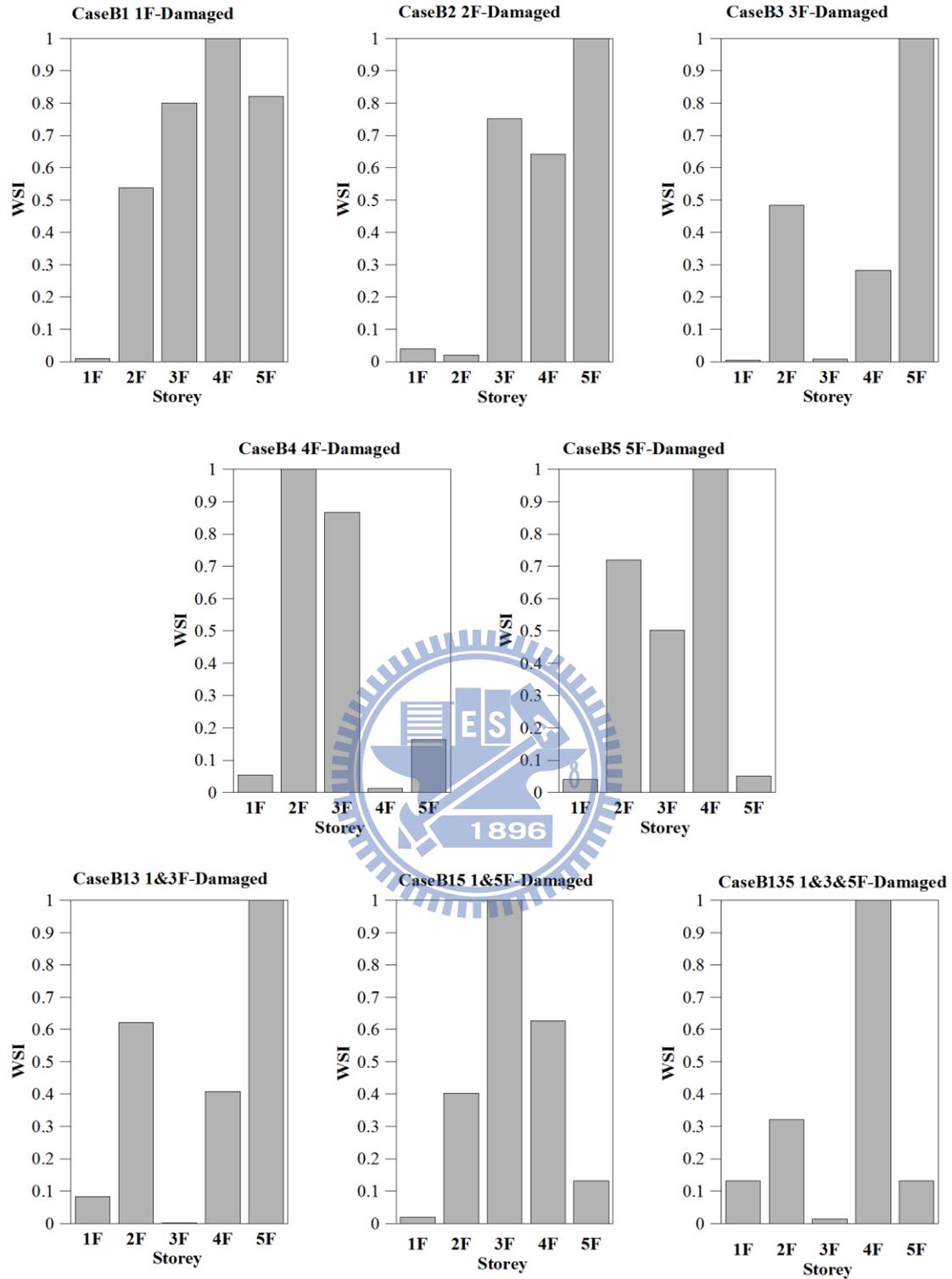


圖 5.37 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-PLS)

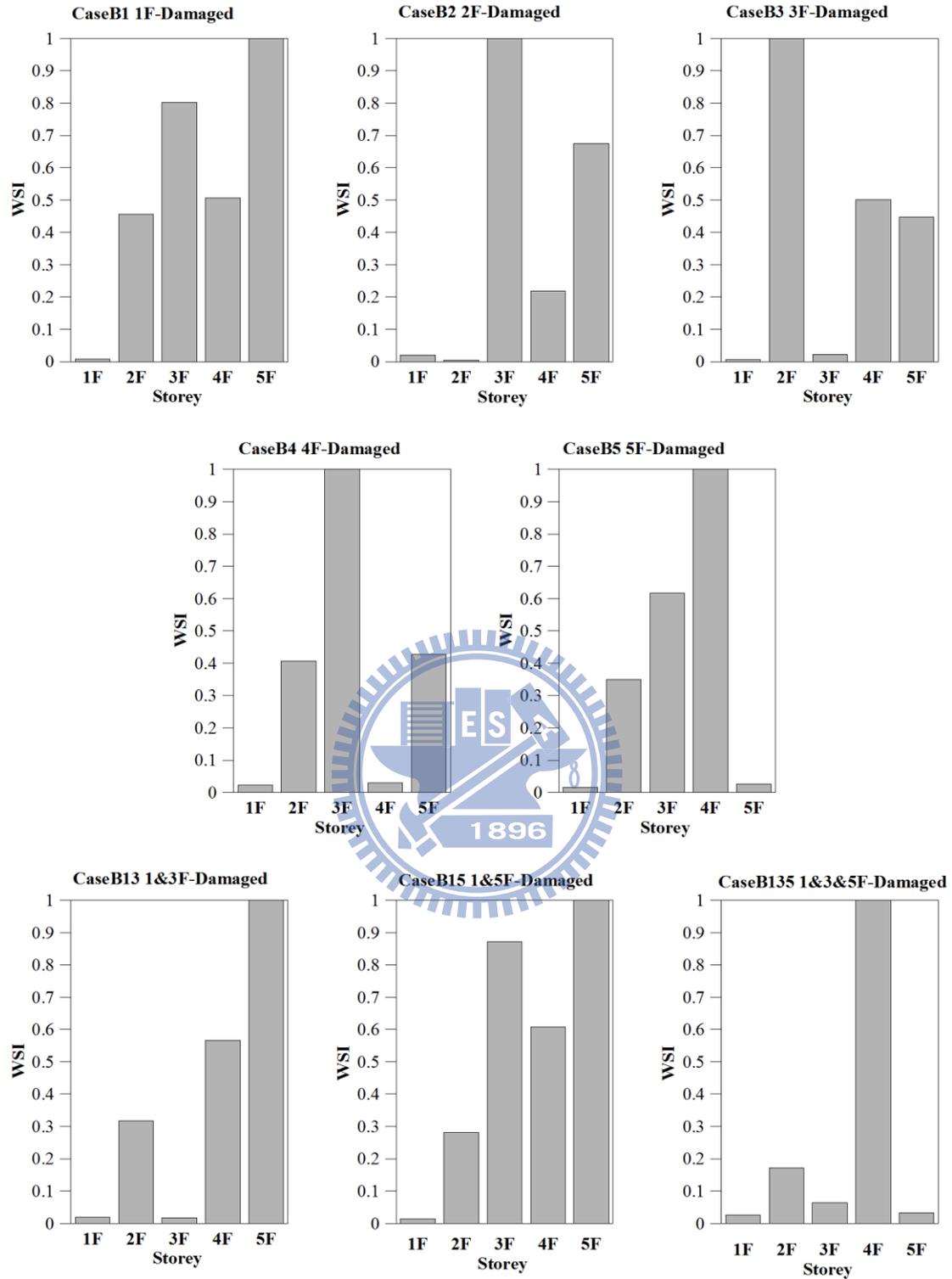


圖 5.38 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-MLR)

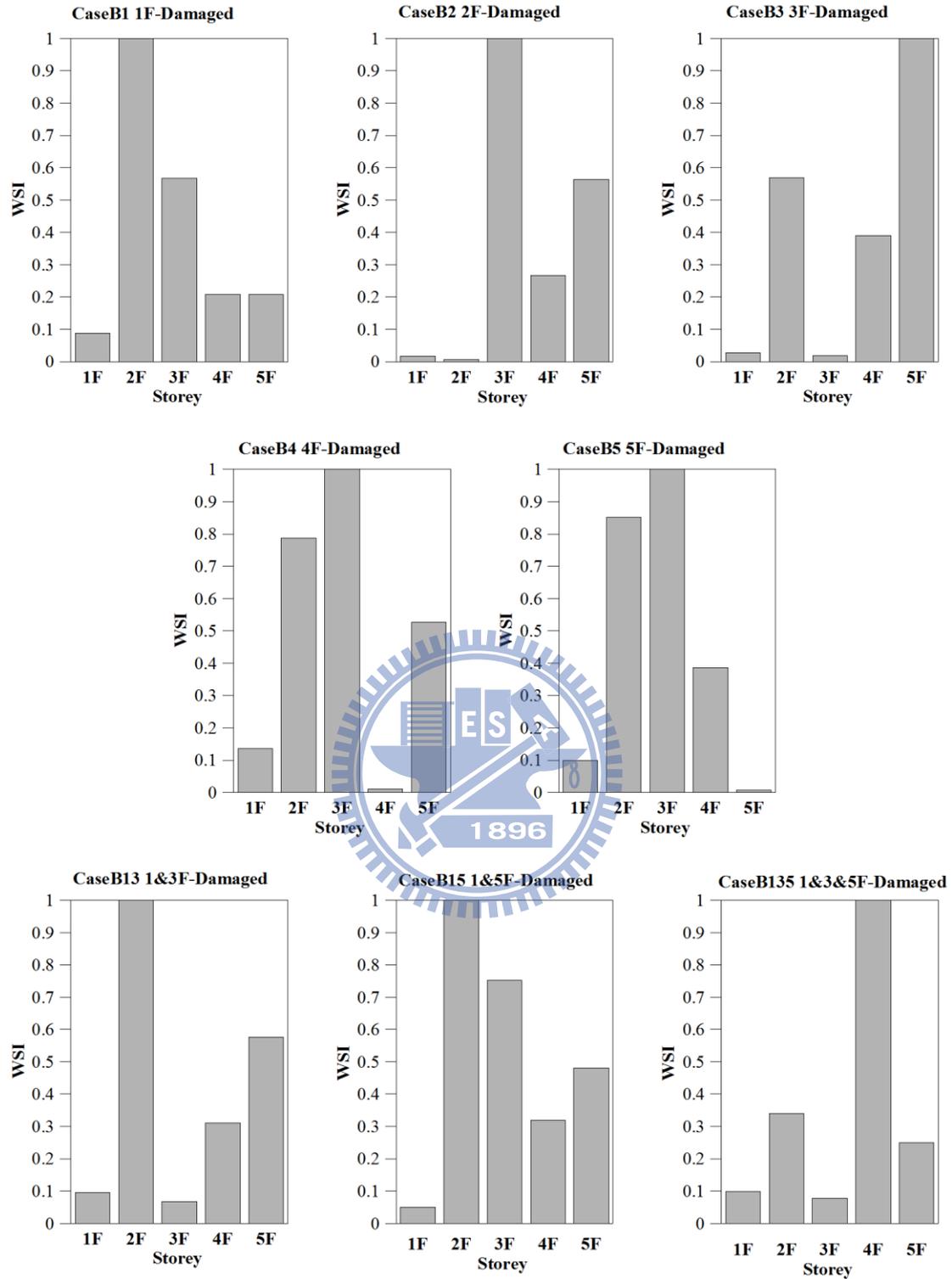


圖 5.39 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-CCA)

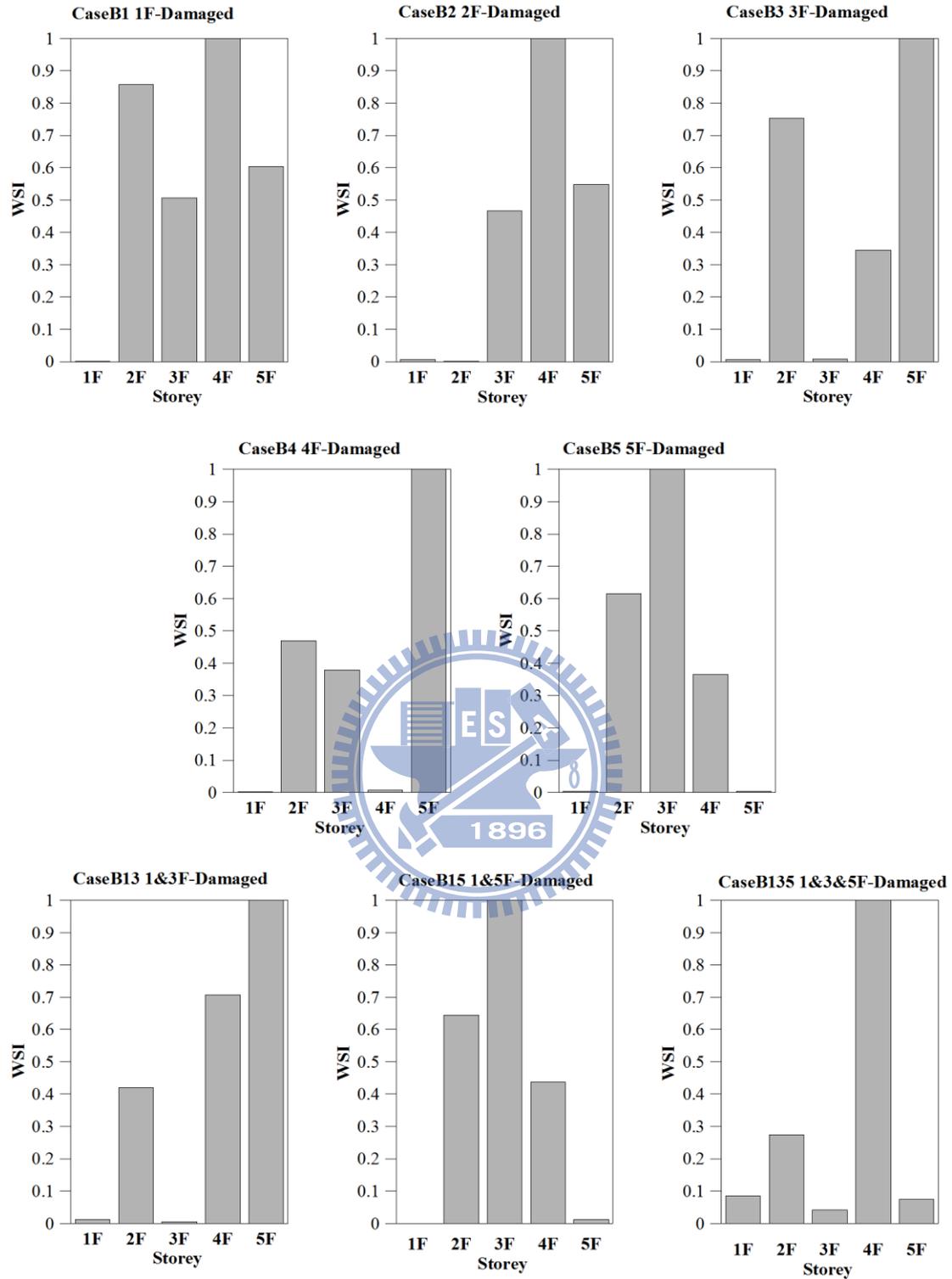


圖 5.40 結構損傷偵測試驗分析結果

(Input=El Centro 地震, PGA=0.1g, Algorithm=SSI-ECCA)

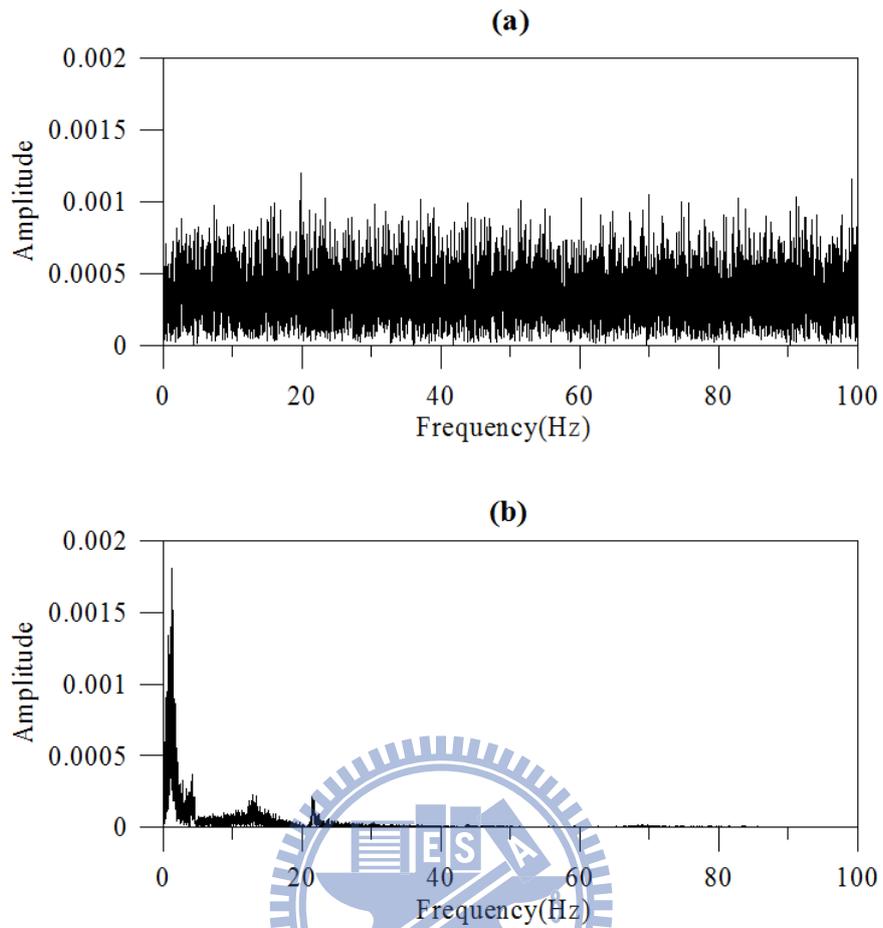


圖 5.41 振動台地表加速度頻譜比較圖

(a)油壓致動器預定給予之擾動

(b)油壓致動器真實給予之擾動



## 第六章 結論與建議

本研究結合隨機子空間系統識別法(SSI)與 Bernal 所提出之狀態空間 DLV 損傷定位法，針對唯輸出(output-only)構架系統之地震監測反應進行結構損傷定位。經由數值模擬分析及一系列之振動台地震模擬試驗，證明吾人可在未知輸入擾動資訊的條件下，透過結構全域之地震反應歷時定位出平面構架結構之局部受損位置（樓層）。本研究採用協方差型 SSI (SSI-COV) 以及結合多變量分析之 SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等數種在隨機子空間系統架構下所發展之系統識別分析方法，作為後續結構損傷探測分析之依據。在數值模擬分析的部分，本研究先以一座五層樓平面剪力屋架結構為對象，分別考慮 White noise 及 El Centro 地震為輸入擾動，採用前述五種系統識別法結合狀態空間 DLV 法進行結構損傷定位分析，考慮了包括單一樓層受損及複數樓層受損之條件，並探討在有雜訊之情況下各種方法之適應性(adaptiveness)。此外，本文亦探討結構在不同受損程度下，狀態空間 DLV 損傷探測分析之穩健性(robustness)。振動台試驗之規劃，也以一座五層樓鋼構模型為對象進行一系列的結構損傷探測試驗，並以移除受損樓層的斜撐模擬該樓層之損傷狀態。輸入震波同樣亦考慮了 White noise 及 El Centro 地震(PGA=0.1g)，並採用無線感測技術，以台灣大學所發展之無線傳輸系統 NTU-WSU 配合東京測震之 VSE-15D 加速規進行動態反應監測。茲根據本研究之分析與試驗結果，歸納結論與建議如下：

1. 針對一五層樓平面剪力屋架之數值模擬分析(SSP)結果顯示，在輸入擾動為 white noise 的情況下，採用 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等方法進行系統識別分析之結果顯示，SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等方法之識別結果均優於 SSI-COV 及 SSI-PLS。而在識別高頻(第四、五)模態的部分，雖然五種方法之識別結果都不夠理想，但整體而言，SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等結合卡氏過濾與多變量分析之方法仍較 SSI-COV 為佳。
2. 以 ETABS 模型為對象之模擬分析結果顯示，在輸入擾動為 white noise 時，由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種系統識別法結合 DLV 法均能成功將受損樓層判別出。當輸入擾動為 El Centro 地震時，儘管五種系統識別方法均能判別出受損樓層，但亦皆發生未受損之 1 樓被誤判為受損之情況，研判應係作為輸入擾動之 El Centro 地震波並非穩態隨機過程，與 SSI 理論考慮輸入擾動具高斯特性(Gaussian)之基本假設相抵觸所致。惟整體而言，因受損樓層皆能辨識出來，顯示這些方法結合 DLV 損傷探測分析即使在輸入擾動為非高斯(non-Gaussian)之條件下仍具有一定程度之穩健性。
3. 考量在不同程度之噪訊下分析結果顯示，當 NSR=10%及 20%之情況下，五種方法針對單一樓層受損之案例及複數樓層受損之案例皆能成功定位出受損樓層；而在 NSR=50%之情況下，除 SSI-COV、SSI-PLS 及 SSI-MLR 三種識別法無法有效判別出受損樓層外，SSI-CCA 及 SSI-ECCA 皆能得到合理之判定結果，顯示其於雜訊存在之情況下仍有相當程度之適應性。
4. 考量不同受損程度之敏感度分析結果顯示，SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種系統識別方法在受損樓層之勁度折減程度達 50%之情況下均能成功判別出受損樓層，無論是單一

樓層或複數樓層受損。而在受損樓層之勁度折減程度低於 20% 時，則以 SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等三種方法之分析結果較佳，除了在 1、3 及 5 樓同時受損之案例中未能成功將受損的 5 樓判別出外，其餘所有案例中皆能成功判別出受損樓層，顯示此三種識別方法具有較佳之敏感性。

5. 由無線感應系統(VSE-15D+NTU-WSU)所量測之訊號較原有之有線感應器(Crossbow+ $\mu$ -MUCIS)所量測之訊號更為清晰。而在 DLV 損傷探測分析方面，以無線感應器所量測之訊號進行分析所得到之結果，其判別受損樓層之成功率無論是在單一樓層受損或是複數樓層受損案例中，皆較原有線感應器之結果為佳，顯示本系列試驗採用之無線感應系統(VSE-15D+NTU-WSU)之實用性。
6. 地震模擬試驗與損傷探測分析的部分，由 SSI-COV、SSI-PLS、SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 等五種識別法之分析結果顯示，在輸入擾動為 white noise 時，SSI-MLR、SSI-CCA 及 SSI-ECCA 於各受損案例中均能將所有受損樓層辨識出，然而五種識別法於單一樓層受損案例裡均發生將未受損之 1 樓誤判成受損樓層之情況，此與先前數值模擬分析所得之預期結果不同，研判此乃受限於振動台油壓致動器之驅動能力，無法提供具穩態高斯特性之目標(target)擾動震波，而與 SSI 理論假設未知輸入擾動為穩態高斯訊號之前提相抵觸所致。當輸入擾動為 El Centro 地震時，於單一樓層受損案例中同樣亦有 1 樓誤判之情形，但五種識別法仍能將其他受損樓層辨識出來；而在複數樓層受損案例中，只有 SSI-ECCA 能將所有受損樓層成功辨識出來，驗證其強健性，更具實務應用之潛力。整體而言，除去 1 樓誤判問題，五種識別法結合狀態空間 DLV 損傷探測分析於各受損案例中均有不錯之辨識成功率，而其中以 SSI-ECCA 之表現為最佳。

本研究仍有未盡之處，茲建議如下：

1. 由輸出向量所建構之 Hankel 矩陣其維度(mi)會影響識別分析之精確性。本文分析時針對不同之案例均經初步分析個別找出較佳之維度(i)，建議後續研究可探討 i 值大小之影響，並訂定一具體之參考值以供未來實務應用之參考。
2. 本研究之振動台試驗係以地震強度 PGA=100gal (相當於五級) 之震波進行測試。由於三級地震即會造成科技廠房之設備受損或作業中斷，建議未來應探討唯輸出系統之結構損傷探測技術於三級地震之強度 ( $PGA \leq 25 \text{ gal}$ ) 下是否仍具充分之敏感度。
3. 本研究係針對唯輸出系統而在隨機預測(Stochastic)狀態空間系統下發展結構損傷探測技術。在輸入擾動並非穩態高斯過程時會發生誤判 1 樓受損之情況，無論是數值模擬或振動台試驗結果皆然，顯見 SSI 系統識別方法有其侷限性。由於未來在科技廠房震後結構損傷評估之應用上，量測地表加速度並不困難。因此，建議未來可在確定性-隨機預測 (Deterministic- Stochastic) 系統之架構下發展系統識別與結構損傷探測技術。

## 參考文獻

- [1] Kalman, R.E., (1960) "A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *J.Basic Trans. ASME*, Ser. D, 82(1). pp.35-45.
- [2] Kalman, R.E. and Bucy, R.S., (1961) "New Results in Linear Filtering and Predicion Theory," *J.Basic Trans. ASME*, Ser. D, 83(3). pp.95-108.
- [3] 林威志(2002),「應用卡氏過濾器於結構動力參數識別」,朝陽科技大學營建工程學系,碩士論文。
- [4] 江奇融(2007),「卡爾曼濾波法於建築結構系統之參數識別」,國立中原大學土木工程學系,碩士論文。
- [5] Gao,F. and Lu,Y., (2005) "A Kalman-filter based time-domain analysis for structural damage diagnosis with noisy signals," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, pp.916-930.
- [6] Juang, J. N., (1997) "System Realization Using Information Matrix," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 20, No. 3, pp. 492-500.
- [7] 簡劭純(2008),「比較SRIM、SSI及RLS於結構系統識別中最佳化模式參數之決定」,國立台灣大學土木工程學系,碩士論文。
- [8] 楊淳皓(2006),「扭轉耦合建築結構受震層間損壞指標」,國立中興大學土木工程學系,碩士論文。
- [9] Van Overschee, P., and De Moor, B., (1996) "Subspace Identification for Linear Systems: Theory Implementation Applications", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands.
- [10] Peeters, B. and Roeck, G.D., (1999) "Reference-based stochastic

subspace identification for output-only modal analysis,” *Mech. Syst. Signal Process.* 13 (6), 855–878.

[11] 劉奕誠(2011), 「協方差型隨機子空間識別法之應用」, 國立台灣大學土木工程學系, 碩士論文。

[12] Boonyapinyo, V. and Janesupasaeree, T., (2010) “ Data-driven stochastic subspace identification of flutter derivatives of bridge decks ,” *Jouranl of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 98, pp. 784-799.

[13] Arun, K.S. and Kung, S.T., (1986) “Generalized principal components analysis and its application in approximate stochastic realization”, In Uday B. Desai (Ed), *Modeling and Application of Stochastic Processes*, pp. 75–104., Kluwer Academic Publishers.

[14] Borga, M., Landelius, T. and Knutsson, H., (1997) “A unified approach to PCA, PLS, MLR, and CCA. Technical report, Linkoping University”, Sweden.

[15] Arun, K.S. and Kung, S.T., (1990) “Balanced approximation of stochastic systems,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 11, No. 1, pp. 42-68.

[16] Hong, A., (2010) “Weighting Matrices and Model Order Determination in Stochastic System Identification for Civil Infrastructure Systems,” , Ph.D. Thesis, Columbia University.

[17] Conte, J.P., He, X., Moaveni, B., Masri, S.F., Caffrey, J.P., Wahbeh, M., Tasbihgoo, F., Whang, D.H. and Elgamal, A., (2008) “Dynamic testing of Alfred Zampa Memorial Bridge,” *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol.134, pp.1006-1015.

[18] Bernal, D., (2002) “Load Vector for Damage Localization,” *Journal of*

*Engineering Mechanics*, Vol. 128, No. 1, pp. 7-14.

- [19] Duan, Z., Yan, G., Ou, J. and Spencer, B.F., (2005) “Damage localization in ambient vibration by constructing proportional flexibility matrix,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 284, pp. 455-466.
- [20] 林裕家(2007),「利用地震反應資料進行結構全域及局部性損害評估」, 國立臺灣大學土木工程學系, 碩士論文。
- [21] 涂哲維(2008),「DLV 法在結構破壞偵測之應用」, 國立交通大學土木工程學系, 碩士論文。
- [22] 陳逸軒(2010),「結構系統識別與損傷探測之研究」, 國立交通大學土木工程學系, 博士論文。
- [23] Bernal, D., (2006) “Flexibility-Based Damage Localization from Stochastic Realization Results,” *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 132, No. 6, pp. 651-658.
- [24] 王智洋(2011),「狀態空間DLV法在剪力構架之地震損傷探測分析與實驗驗證」, 國立交通大學土木工程學系, 碩士論文。
- [25] 吳柏霖(2011),「狀態空間DLV法在扭轉耦合結構之地震損傷探測試驗研究」, 國立交通大學土木工程學系, 碩士論文。
- [26] 謝柏翰(2011),「應用狀態空間 DLV 法在扭轉耦合結構之地震損傷探測」, 國立交通大學土木工程學系, 碩士論文。
- [27] Cho, S., Yun, C.B., Lynch, J.P., Zimmerman, A.T., Spencer Jr., B.F. and Nagayama, T., (2008) “Wireless Sensor Technology for Structural Health Monitoring of Civil Structures”, *Steel Structures*, Vol.8, pp.267-275.
- [28] Straser, E. G. and Kiremidjian, A. S., (1998) “ A Modular, Wireless Damage Monitoring System for Structures ”, Technical Report 128, John

A. Blume Earthquake Engineering Center, Stanford University, Palo Alto, CA, USA.

- [29] Wang, Y., Lynch, J.P. and Law, K.H., (2007) “A wireless structural health monitoring system with multithreaded sensing devices: design and validation”, *Structure and Infrastructure Engineering*, 3(2), pp.103-120.
- [30] 盧恭君(2010),「開發智慧型結構系統於土木基礎建設: 感測與控制」, 國立台灣大學土木工程學系, 博士論文。
- [31] 鍾立來(1994), 「結構主動控制之離散時間系統」, 中華民國結構工程學會, 結構工程, 第九卷, 第三期, 第101-113頁。
- [32] Juang, J.N., (1994) “Applied System Identification,” Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, ISBN 0-079211-X.

