國立交通大學

應用數學系

碩 士 論 文

以中性模型分析動物的群聚行為

Group Patterns of Social Animals under the Neutral Mode

研 究 生：李憶妏

指導教授：符麥克　教授

中 華 民 國 一 〇 一 年 六 月

以中性模型分析動物的群聚行為

Group Patterns of Social Animals under the Neutral Mode

研 究 生：李憶妏　　Student：Yi-Wen Lee

指導教授：符麥克　　Advisor：Michael Fuchs

國 立 交 通 大 學

應 用 數 學 系

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Applied Mathematics

College of Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Applied Mathematics

June 20011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 一O一 年 六 月

Group Patterns of Social Animals under the Neutral Model

Yi-Wen Lee

Department of Applied Mathematics,

National Chiao Tung University

This thesis was supervised by Dr. Michael Fuchs

June 27, 2012

中文摘要

動物群聚問題源自於生物數學。生物學家希望找到適當的模型來估計及預測動物群聚的狀況, 在本篇報告中, 我們會專注在計算出該隨機變量序列的動差以及中央動差, 首先我們會先算出隨機變量序列的期望值, 接著我們會利用奇異點分析, 計算出該參數的動差以及中央動差, 並且在中央動差的部分我們會使用兩種不同的方式證明, 會發現使用奇異點分析的計算會相對一般證明方式簡潔, 凸顯出使用奇異點分析的優點。

當得到動差以及中央動差之後我們就嘗試利用動差法去計算該隨機變量序列是否有一個極限分佈, 可惜的是, 這個參數並沒有辦法經由動差法得到它的極限分佈。

本篇報告中使用的分析工具爲奇異點分析, 是解析組合中主要使用的一項工具, 我們會透過分析生成函數的奇異點精確地計算出隨機變量序列的量, 甚至還可以知道我們算出來的值的誤差值有多大, 是一個非常有用的分析方法。

以下是我的論文概述, 在第一章我們會先介紹什麼是動物群聚問題, 並且也會介紹前人所做的結果, 以及本篇論文中所研究的模型, 在第二章中, 我們會介紹解析組合的工具以及一些相關的機率定理, 在第三章中我們會計算動物群具模型群數的動差以及中央動差, 並且還會證明該隨機變量序列會符合強大數法則及弱大數法則。第四章我們會計算關於二元搜尋樹去掉葉子之後的外點個數的中央動差以及它的極限分佈。在第五章中我們會繪製出這兩個參數的統計圖表。最後我們會在第六章給一個結論。

Preface

Biologists have long been interested in finding appropriate models for the clustering behavior of social animals. Recently, they have proposed the so-called neutral model. In this thesis, we will study the group pattern problem for the neutral model. More precisely, we will find moments and central moments for the number of groups under the neutral model. In doing so, we will start with the mean and then discuss all moments. As for central moments, we will use two different approaches to find asymptotic expansions. These results will then be used to prove weak and strong laws of large numbers. Moreover, our results show that the limiting distribution cannot be found by the method of moments. This is rather surprising since another quantity, namely the number of terminal nodes in random binary search tree, satisfies almost the same recurrence and the limit law of this quantity can indeed be found with the method of moment. For the sake of comparison, this result will be shown in this thesis as well.

As for the methodology, we will use singularity analysis throughout this thesis. Singularity analysis is a major tool in analytic combinatorics. It can be used to find asymptotic expansions of sequence from the local behavior around singularities of its generating function. Moreover, the error of approximation can be controlled as well. We will see that singularity analysis is an efficient tool in studying the group pattern problem under the neutral model.

We conclude by giving a short outline of this thesis. In Chapter 1, we are going to introduce the group pattner problem in more details and state some known results. In Chapter 2, we will introduce singularity analysis and review some theorems from probability theory. In Chapter 3, we will compute moments and central moments of the number of groups under the neutral model. In addition, we will prove weak and strong laws of large numbers. In Chapter 5, we will calculate central moments of the number of terminal nodes in random binary search trees and show that these results lead to the limit law. In Chapter 5, we will do some numerical computations concerning the limit law of the two quantities analyzed in the previous chapters. Finally, we will give a conclusion in Chapter 6.

誌謝辭

首先, 感謝我的指導教授符麥克老師, 他給了我一篇很有趣又可以學到很多東西的題目, 在老師的帶領下, 從機率模型開始, 一步一步的分析問題, 在過程中也讓我學到了做問題應該有的態度, 讓我學到了很多東西, 也很感謝兩位口試委員的指導, 他們的建議讓我學會用不同的角度思考我的論文, 給了我許多寶貴的意見。

我還要謝謝我的好朋友及好同學們, 因爲有你們的陪伴跟幫助, 讓我這兩年成長了許多, 一起念書、一起打球、一起奮鬥的日子, 我想我這一輩子都不會忘記的。

謝謝所有教過我的師長們, 你們的細心教導讓我打下良好的基礎, 最後最後還要謝謝我的家人, 因爲有你們的支持, 我才能無憂無慮的專注在我的課業上, 謝謝所有幫助過我的人, 也祝福你們也都可以心想事成。

Contents

Chapter 1

Introduction

1.1 Group Pattern Problem

生物界中, 動物們常會以群聚的方式活動, 會有群聚行爲的這種動物在生物學上稱爲社會性動物, 透過群聚的行爲, 可以提高族群的生存率, 並且增加族群演化的優勢。對生物學家來說, 如果能夠找到符合族群群聚的模型, 那麼對生物的瞭解會有很大的幫助。在社會行爲學中有幾個常見的問題, 例如: 群體的典型尺寸是多少? 有那些因素會影響或是限制群體的大小? 能不能找到動物群聚的模型? 等等的問題。

因此找到符合動物群聚的模型對生物學家來說一直都是重要的議題, 他們也提出各種不同的模型來研究群聚問題, 例如: fusion and fission processes ([6]; [9]), kin selection ([10];[7]) 還有 game-theoretic models ([5])。

在最近的研究中, E. Durand, M.G.B. Blum 和 O. Francois 介紹了一種新的模型來研究哺乳類動物的群聚行爲 ([2])。他們把這個模型建立在一個隨機族譜上, 這樣子我們就可以透過這個族譜來觀察個體群聚的結果, 這個模型在 [8] 就已經被提出, 他們把隨機過程的結果被命名爲中性模型 (neutral model)。

爲了要更瞭解中性模型, 我們會利用一些數學的工具來分析這個模型, 不過中性

模型的隨機過程建構的方式和我們習慣分析的數學模型不太一樣, 中性模型的隨機過程是透過一些分散的個體陸續集結而成, 這樣的模型並不容易分析, 因此我們找了一個與中性模型有著相同機率分布的模型來分析, 這個模型就是二元搜尋樹模型 (binary search tree model), 它與中性模型有著相同極限分佈。除此之外, 二元搜尋樹模型有簡單的遞迴表示式, 因此我們在之後都會用它來幫我們分析 group pattern problem。

在 [3] 中, 先將二元搜尋樹的模型寫成生成函數, 推導出 group pattern 的期望值, 他們也證明了一些的結果, 像是群體大小恰好爲 k 的期望值以及群體的偏差值 (size-biased group), 在本篇報告中, 我們將推廣並且修正他們的部分結果, 我們處理的方法也是先把模型轉換成生成函數, 我們使用的分析方法叫做奇異點分析 (singularity analysis), 奇異點分析是一種透過函數的奇異點 (singularity) 來計算組合結構數量的一種方法, 我們會用這個方法來算出 group pattern 的期望值, 甚至是更高次方的動差 (moment) 以及中央動差 (central moment), 有了這些資訊, 我們可以更瞭解這個模型的分佈情形, 在 **Chapter 2** 中, 我們會對奇異點分析這個分析方法做詳細的介紹。在下一個小節裡面, 我們會先介紹中性模型和二元搜尋樹模型這兩個模型。

1.2 Neutral Model and Binary Search Tree

中性模型是一種用來描述動物群聚行爲的模型, 這個群聚的隨機過程定義如下。假設給定 n 個個體, 接著從 n 個個體中隨機挑選兩個個體, 並將選中的兩個個體合併成一個單元, 讓剩下來的個體與單元繼續重複以上的過程, 直到所有的個體都被合併成單元就結束這個隨機過程。我們把這個隨機過程所產生的單元個數定義爲 X_n, 這個符號代表的意義就是 n 個個體經過群聚的過程後所形成的群體的數量。

爲了分析上的方便, 所以我們讓剛才的隨機過程繼續進行下去, 讓單元繼續合併, 直到這些單元都被合併成一個單元才結束。這樣子做並不會影響 X_n 的結果。但是對我們之後的分析有很大的好處, 因爲如果我們把 n 個個體當作是葉子, 把合併的單元當作

是結點, 那麼這個隨機過程可以看成是一個生成二元樹 (binary tree) 的隨機過程。

觀察 group pattern 的這個隨機過程我們會發現它是由葉子從下向上建構成的一個二元樹, 在 **Section 1.1** 有提到過, 這樣子從下到上的建構的模型其實是不容易分析的, 因此我們找了一個與這個模型有相同分佈, 而構造方法是從上到下建構的模型, 二元搜尋樹模型來當作分析的對象。這個模型的隨機過程如下。給定一個有兩片葉子的根, 然後隨機挑選一片葉子, 並將這片葉子取代成一個有兩片葉子的節點, 接著繼續重複上述的過程, 直到這個二元樹有 n 片葉子才結束這個隨機過程。透過這個隨機過程建立的模型就叫做二元搜尋樹模型。

因爲二元搜尋樹模型和中性模型有相同的機率分佈, 因此從現在開始, 我們會直接用隨機二元搜尋樹來分析 group pattern。我們先來看二元搜尋樹模型的性質, 給定一個有 n 片葉子的二元搜尋樹, 連接根左子樹的葉子數目被定義爲 L_n, 它的機率分佈是一個落在 $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ 的均勻分布 (uniform distribution) ([8])。我們可以把它寫成下列的表示式

$$Prob(L_n = l) = \frac{1}{n-1}, l = 1, \ldots, n-1.$$

這個性質也可以套用在二元搜尋樹上的其他子樹。除此之外, 我們把右子樹的葉子數目 R_n 定義成 $n - L_n$。

有了 L_n 的機率, 我們就可以開始著手研究 group pattern 問題, 個體的群數 X_n 在 **Section 1.1** 曾經被提過, 稍後我們會給它一個數學的表示式, X_n 是 n 片葉子所形成的隨機二元搜尋樹, 只要透過計算子樹的節點就可以知道群體的數量, 而且群跟群之間都是獨立的關係, 所以我們只要計算它的左子樹的群數 X_{L_n} 及右子樹的群數 X_{R_n}, 就可以知道 X_n 的大小。其中要特別注意的是! 我們研究的模型是關於群體的, 所以不會有單獨個體的情況存在, 因此只要遇到 $X_{L_n} = 1$ 或是 $X_{R_n} = 1$ 的情況, 我們就會定義 $X_n = 1$, 這個性質也可以套用在它的子樹上。根據這個條件, 我們也很容易可以得到 $X_1 = X_2 = 1$。除此之外, 群數也可以看成對個別的子樹計算群數後加總, 因此我們

可以得到 X_n 的遞迴式, 對於所有 $n \geq 3$,

$$X_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} X_{L_n} + X^*_{R_n}, & \text{if } L_n \neq 1 \text{ and } L_n \neq n-1; \\ 1, & \text{if } L_n = 1 \text{ or } L_n = n-1, \end{cases}$$

初始條件是 $X_1 = X_2 = 1$。X_n 和 X^*_n 有相同的分佈, 而且這兩個隨機變量彼此之間是獨立的(independent)。

在 [3] 中, 他們考慮的是 extra-clustering model, 也就是說, 它們還有考慮額外的聚合行爲, 它們給的模型爲

If $L_n = 1$ or $L_n = n-1$, then $X_n = 1$.

If $L_n \neq 1$ and $L_n \neq n-1$, then

$$X_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} X_{L_n} + X^*_{R_n}, & \text{with probability } 1-p; \\ 1, & \text{with probability } p, \end{cases}$$

初始條件是 $X_1 = X_2 = 1$。X_n 和 X^*_n 有相同的分佈, 而且這兩個隨機變量彼此之間是獨立的。

針對這個模型當 n 夠大的時候, 他們算出來的期望值 $\mathbb{E}X_n$ 爲

$$\mathbb{E}X_n \sim \begin{cases} c(p)n^{1-2p}, & \text{if } p < \frac{1}{2}; \\ \frac{\log(n)}{2}, & \text{if } p = \frac{1}{2}; \\ \frac{p}{2p-1}, & \text{if } p > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

其中 $c(p) = \dfrac{e^{-2(1-p)}}{(1-2p)\Gamma(2(i-p))}(1+2(1-p)^2\int_0^1(1-y)^{1-2p}y^2e^{2(1-p)y}dy)$. 當 $p=0$ 時, 這個模型就是本篇報告中所討論的中性模型, 當 $n \to \infty$, 我們會得到該模型的期望值爲

$$\mathbb{E}X_n \sim \frac{1-e^{-2}}{4}n.$$

在 **Chapter 3** 中, 我們會用奇異點分析再次證明 $p = 0$ 的這個模型的期望值 $\mathbb{E}X_n$, 還有其他更高次的動差, 以及中央動差, 有了這些條件我們就可以嘗試使用動差法來求得 X_n 的分佈, 可惜的是, 使用動差法並沒有辦法找到 X_n 的分佈。

話雖如此, 我們還是對 X_n 證明了一些相關的結果, 像是 X_n 這個變數會符合弱大數法則 (weak law of large numbers) 以及強大數法則 (strong law of large numbers), 但是我們依舊無法證明 X_n 的極限分佈。因此我們找了一個與 X_n 擁有相似遞迴式的參數 Y_n 來與 X_n 做比較。

Y_n 是計算 n 片葉子的隨機二元搜尋樹去掉葉子之後, 樹的外點 (external nodes) 的個數, 雖然這個二元搜尋樹去掉了外點, 但是它的外點並不會因此而改變, 除此之外, 計算整個樹的外點也會等於個別計算左子樹以及右子樹的外點, 知道了這些特性, 我們就可以列下 Y_n 的遞迴關係

$$Y_n \stackrel{d}{=} Y_{L_n} + Y^*_{R_n}, \quad \text{for } n \geq 3,$$

初始條件是 $Y_1 = 0, Y_2 = 1$。Y_n 和 Y^*_n 有相同的分佈, 而且這兩個隨機變量彼此之間是獨立的。

有趣的是, 雖然這兩個參數的遞迴式非常相似, 不過兩個參數的行爲看起來卻不太一樣, 在 **Chapter 4** 中會證明 Y_n 的期望值以及它的中央動差, 而且我們甚至可以證明得更多, 事實上, 我們可以透過 **Chapter 2** 的機率定理, 算出 Y_n 的極限分佈。

雖然我們沒有找到 X_n 的極限分佈, 不過我們在 **Chapter 5** 中會根據 X_n 的遞迴關係, 跑出一些數值的結果。

Chapter 2

Some Tools

2.1 Singularity Analysis

奇異點分析是根據生成函數 (generating function) 的奇異點來估計組合結構 (combinatorial structure) 數量的一種方法, 如果要對組合結構有精確的估計, 那就必須對生成函數的性質有詳細的瞭解, 因此接下來我們將會先介紹生成函數。給定一個計數序列$\{a_n\}_{n\geq 1}$, 那麼對應於這個計數序列的生成函數 $f(z)$ 我們就把它定義爲 $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$, 爲了方便起見, 我們把 $f(z)$ 的 z^n 的係數 a_n 用 $[z^n]f(z)$ 表示。

生成函數可以被成兩種, 第一種是對應一個複變變數 $z \in \mathbb{C}$ 所寫成的生成函數 $f(z)$, 這個生成函數會滿足所有微積分中會出現的冪級數的特性, 而另外一種則是形式上的生成函數 (formal power series), 也就是說, 雖然它也是寫成一般我們在微積分中常見的冪級數的樣子, 但是事實上, 它只是借用了微積分中冪級數的形式來幫我們解決組合中的計數問題。

給定一個計數序列所對應的生成函數$f(z)$, 那我們可以利用複變來估計 a_n 的漸近行爲, 奇異點分析就是用來估計係數的漸近行爲的一種方法, 透過可以得到非常準確的估計, 而且我們找到的漸近值與實際值的誤差也可以被控制, 關於這些性質我們在後

面會有詳細的證明與解釋, 接下來我們就正式開始介紹奇異點分析的這個方法。

函數的奇異點會跟這個函數的係數有關係, 如果函數在 0 可解析, 那麼我們可以找到一個適當的圍線 (contour), 利用奇異點來估計函數的係數, 我們把那個會影響函數係數的奇異點稱爲主要奇異點 (dominant singularity), 利用主要奇異點來估計函數係數的分析的方法叫做 singularity analysis 。

以 Catalan number 爲例, 它的生成函數的封閉形式 (closed form) 可以表示成

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

事實上我們關心的是生成函數的係數 $c_n = [z^n]C(z)$ 透過一些計算我們會得到

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

根據 Stirling's formula , $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, 因此當 n 很大的時候, c_n 的漸近行爲爲

$$c_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}.$$

這是用一般的組合方法來計算 Catalan number, 但我們也可以用另外一種算法得到這個答案, 這個函數的主要奇異點 (dominant singularity) 會發生在 $z = \frac{1}{4}$, 的這個地方, 恰好 $[z^n]C(z)$ 的成長速度也是跟 4^n 有關係, 事實上, 這並不是巧合, 而這些關係都會在我們介紹完奇異點分析的分析方法後得到答案。

奇異點分析是透過複變中的柯西積分公式 (Cauchy's integral formula)

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)\frac{dz}{z^{z+1}}$$

重新表示生成函數中的係數的一種方法, 利用這個表示方法, 我們可以找到函數係數的漸近行爲, 而積分的圍線, 可以利用線積分的特性把圍線換成 Hankel contour。以下的定理, 就是利用奇異點分析來估計函數係數的漸近行爲。

Theorem 2.1. *Let α be an arbitrary complex number in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. The coefficient of z^n in*

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha}$$

has the following asymptotic behavior

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k(\alpha)}{n^k}\right),$$

where $e_k(\alpha)$ is a polynomial in α of degree $2k$.

Theorem 2.2. *Let $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\beta \in \mathbb{C}$. The coefficient of z^n in*

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha} \left(\frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z}\right)^{\beta}$$

has the following asymptotic behavior

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\log n)^{\beta} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k(\alpha,\beta)}{(\log n)^k}\right),$$

where $C_k(\alpha,\beta) = \binom{\beta}{k}\Gamma(\alpha)\frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=\alpha}$.

有了 **Theorem 2.1** 和 **Theorem 2.2** 我們已經可以針對這兩種形式的生成函數做主要奇異點展開去計算它們係數的漸近行爲, 如果我們把函數在主要奇異點展開成下列形式

$$f(z) = g(z) + O(h(z)), \text{ where } h(z) = o(g(z)), z \to 1. \tag{2.1}$$

當我們使用 **Theorem 2.1** 或 **Theorem 2.2** 計算出 $g(z)$, 那我們當然會希望 $O(h(z))$ 也會有類似的結果, 事實上, 除了 O 這個運算符號有這個特性, o 運算也有相似的結果,**Theorem 2.3** 證明了 O 和 o 的運算會保持封閉性, 也就是說, 如果一個函數可以表

示成 (2.1), 代表我們計算函數的係數的漸近行爲時, 只有它的主要奇異點才會影響到我們的主要的漸近行爲, 在計算上會方便許多, 其中要注意的是, 這個特性必須在一些條件下才會成立, 讓我們先定義一些條件。

Definition 2.1. *Let ϕ, R be real numbers with $R > 1$ and $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Then*

$$\triangle(\phi, R) = \{z : |z| < R, z \neq 1, \ |\arg(z-1)| > \phi\}$$

is called a $\triangle$-domain. In addition, a function is called $\triangle$-analytic if it is analytic in some $\triangle$-domain.

Theorem 2.3. *Let α, β be arbitrary real numbers and let $f(z)$ be a $\triangle$-analytic function.*

(1) Assume that $f(z)$ satisfies in the intersection of a neighbourhood of 1 with its $\triangle$-domain the condition

$$f(z) = O\left((1-z)^{-\alpha}\left(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right).$$

Then,

$$[z^n]f(z) = O\left(n^{\alpha-1}(\log n)^{\beta}\right).$$

(2) Assume that $f(z)$ satisfies in the intersection of a neighbourhood of 1 with its $\triangle$-domain the condition

$$f(z) = o\left((1-z)^{-\alpha}\left(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right).$$

Then,

$$[z^n]f(z) = o\left(n^{\alpha-1}(\log n)^{\beta}\right).$$

觀察 **Theorem 2.1**, **Theorem 2.2** 和 **Theorem 2.3** 會發現我們只有證明函數係數的漸近行爲在 $z = 1$ 會成立, 假設函數 $f(z)$ 有一個主要奇異點在 $z = \zeta$, 那麼我們可以藉由泰勒展開式 (taylor expansion) 的調整比例規則 (scaling rule) 使得 $g(z) = f(z\zeta)$, 則 $f(z)$ 的函數係數爲

$$[z^n]f(z) = \zeta^{-n}[z^n]f(z\zeta) = \zeta^{-n}[z^n]g(z),$$

其中 $g(z)$ 的主要奇異點就會發生在 $z = 1$。

有了調整比例規則, 以及上述的這些定理, 我們可以利用奇異點分析再次分析 Catalan number, Catalan number 的生成函數封閉形式爲

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

觀察 $C(z)$ 我們會發現它的主要奇異點發生在 $z = \frac{1}{4}$, 根據調整比例規則我們可以得到 $[z^n]C(z) = 4^n[z^n]C(\frac{z}{4})$, 所以

$$[z^n]C(z) = 4^n[z^n]\frac{2(1 - \sqrt{1 - z})}{z},$$

把 $\frac{2(1-\sqrt{1-z})}{z}$ 在 $z = 1$ 做奇異點展開可以得到

$$[z^n]C(z) = 4^n[z^n]\left(2(1 - \sqrt{1 - z}) + O((1 - z)^{3/2})\right).$$

因此根據 **Theorem 2.1** 和 **Theorem 2.3** 我們有以下結果

$$[z^n]C(z) = 4^n\frac{n^{-3/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + O(n^{-5/2}) \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}.$$

這個結果跟使用 Stirling's formula 得到的結論是一樣的。

根據前面提過的定理, 我們知道奇異點分析在 $+, -, \times, \div$ 的運算會保持封閉性, 事實上, 它在微分 (differentiation) 和積分 (integration) 的運算下也具有封閉性, 我們會藉由以下的定理來說明此特性。

Theorem 2.4. *Let $f(z)$ be a $\triangle$-analytic function having its singular expansion of the form:*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k} c_i (1-z)^{\alpha_i} + O((1-z)^A).$$

Then the derivative of $f(z)$ is $\triangle$-analytic. The expansion of the derivative at the singularity is obtained by term-by-term differentiation:

$$\frac{d}{dz} f(z) = -\sum_{i=0}^{k} c_i \alpha_i (1-z)^{\alpha_i - 1} + O((1-z)^{A-1}).$$

類似的結果也可以推廣到 Theorem 2.3 的函數上。

Remark 2.1. Let $g(z)$ be a $\triangle$-analytic function with, for $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

$$g(z) = O\left((1-z)^A L(z)^k\right), \; L(z) := \log \frac{1}{1-z}.$$

Then

$$\frac{d}{dz} g(z) = O\left((1-z)^{A-1} L(z)^k\right).$$

Theorem 2.5. *Let $f(z)$ be a $\triangle$-analytic function having its singular expansion of the form:*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k} c_i (1-z)^{\alpha_i} + O((1-z)^A), \quad \alpha_i, A \neq 1.$$

Then $\int_0^z f(t)dt$ is $\triangle$-analytic. In addition,

(1) for $A < -1$,

$$\int_0^z f(t)dt = -\sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{\alpha_i + 1} (1-z)^{\alpha_i} + O((1-z)^{A+1}).$$

(2) For $A > -1$,

$$\int_0^z f(t)dt = -\sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{\alpha_i + 1}(1-z)^{\alpha_i} + L_0 + O((1-z)^{A+1}),$$

where the integration constant L_0 has the value

$$L_0 := \sum_{\alpha<-1} \frac{c_i}{\alpha_i + 1} + \int_0^1 [f(t) - \sum_{\alpha<-1} c_i(1-t)^{\alpha_i}]dt.$$

當 $\alpha_i = -1$ 或 $A = -1$ 時, 我們有以下的結果。

Remark 2.2.

$$\int_0^z (1-w)^{-1}dw = L(z). \qquad \int_0^z O((1-w)^{-1})dw = O(L(z)).$$

2.2 Some Probability Theory

在機率論中, 如果我們要證明隨機變量序列會滿足中央極限定理, 通常都會先假設這個隨機變量序列符合一些限制, 像是變數相互獨立且具有相同分佈 (independent and identically distributed) (i.i.d.), 這樣子證明中央極限定理會比較容易, 但是並不是每個隨機變量序列都有這麼好的性質, 因此如果我們想證明隨機變量序列 $\{X_1, X_2, \ldots\}$ 會收斂到一個隨機變量 X 我們就必須用別的方法證明它的收斂性。

給定一個隨機變量序列, 我們會想要得到這個隨機變量序列的極限分佈, 我們通常會藉由一些統計量來觀察這個隨機變量序列, 像是期望值 (expected value), 變異數 (variance) 或是更高次的動差。有了這些資訊, 我們就會進一步測試隨機變量序列的收斂性。

如果 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^k = \mathbb{E}X^k$ 對於所有的 $k = 1, 2, \ldots$ 都會成立。再加上一些特定的條件, 則我們可以得到 **Theorem 2.6**。

Theorem 2.6. *Suppose that the distribution of X is determined by its moments, that the X_n have moments of all orders, and that $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(X^k)$ for $k = 1, 2, \ldots$. Then X_n converges in distribution to X.*

這個方法也被稱爲動差法 (method of moments), 它是由 Pafnuty Chebyshev 爲了證明中央極限定理而提出的 ([1])。

拿常態分佈 $N(0,1)$ 來當例子, 首先, 我們知道 $N(0,1)$ 會被它的動差唯一決定, 如果我們去計算它的 k 次動差, 會得到下列結果

$$\mathbb{E}(N(0,1)^k) = \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^m m!}, & \text{if } k = 2m; \\ 0, & \text{if } k = 2m+1. \end{cases}$$

如果我們知道另一個隨機變量序列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$, 有以下結果, 對於所有的 $k \geq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^m m!}, & \text{if } k = 2m; \\ 0, & \text{if } k = 2m+1. \end{cases}$$

那麼根據 **Theorem 2.4** 我們可以得到 X_n 的分佈會收斂到常態分佈 $N(0,1)$ 。

2.3 Some Lemmas

接下來我們會證明兩個簡單的微分方程式的引理:

Lemma 2.1. *Let*

$$\frac{d}{dz} f(z) = \left(\frac{2z}{1-z} + \frac{1}{z} \right) f(z) + g(z)$$

with $f(0) = 0$. *Then*

$$f(z) = \frac{1}{\mu(z)} \int_0^z \mu(t) g(t) dt \text{ with } \mu(z) = \frac{(z-1)^2 e^{2z}}{z}.$$

Proof. 首先, 我們先讓等式兩邊都乘上 $\mu(z)$ 可以得到

$$\mu(z)\frac{d}{dz}f(z) = \mu(z)\left(\frac{2z}{1-z}+\frac{1}{z}\right)f(z)+\mu(z)g(z)$$

觀察 $\mu(z)\frac{d}{dz}f(z)-\mu(z)\left(\frac{2z}{1-z}+\frac{1}{z}\right)f(z)$ 會發現它是 $\mu(z)f(z)$ 對 z 微分的展開式, 因此

$$\frac{d}{dz}(\mu(z)f(z)) = \mu(z)g(z).$$

將等式積分後代入初始條件就可以得到

$$f(z) = \frac{1}{\mu(z)}\int_0^z \mu(t)g(t)dt. \quad ∎$$

Lemma 2.2. *Let*

$$f'(z) = \left(\frac{2}{1-z}+\frac{1}{z}\right)f(z)+g(z)$$

with $f(0)=0$*. Then*

$$f(z) = \frac{1}{\mu(z)}\int_0^z \mu(t)g(t)dt \text{ with } \mu(z) = \frac{(z-1)^2}{z}.$$

Proof. 證明方法與 **Lemma 2.1** 相似。 ∎

在介紹 **Lemma 2.3** 之前, 我們會用到一些符號, 首先我們先定義一下這些符號的所代表的意義。

Definition 2.2. *The digamma function is defined as the logarithmic derivative of the gamma function:*

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

If $x\in\mathbb{N}$*, then* $\psi(x)$ *has the property*

$$\psi(x) = H_{x-1}-\gamma.$$

在 **Chapter 3** 中, 我們會利用 $\mathbb{E}X_n^k$ 的漸近行爲來估計 $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k$。在估計的過程中我們會需要用到 $\psi(x)$ 的特性, 因此有了 **Definition 2.2** 的定義, 我們就可以開始證明 **Lemma 2.3**。

Lemma 2.3. *The following equation holds for all* $k \geq 3$*,*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (i-1)i! \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=i} = \frac{k}{k-2}.$$

Proof. 因爲 $\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=i} = -\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)^2}\Big|_{s=i}$, 所以

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (i-1)i! \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=i} = -\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (i-1)i! \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)^2}\bigg|_{s=i}$$

根據 **Definition 2.2**, 我們可以把 $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ 換成 $\psi(s)$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (i-1)i! \frac{1}{\Gamma(s)} \psi(s)\bigg|_{s=i}$$

再次根據 **Definition 2.2** 將 $\psi(s)$ 換成 $H_{s-1} - \gamma$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i-1} (i-1)i! \frac{1}{(i-1)!} \left(-\gamma + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (1)^i (i-1)i! \frac{\gamma}{(i-1)!} - \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (i-1)i! \frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

接下來我們將把式子分成兩個部分, 分別爲

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (i-1)i! \frac{\gamma}{(i-1)!} = 0 \tag{2.2}$$

和

$$-\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (i-1)i! \frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j} = \frac{k}{k-2}. \tag{2.3}$$

化簡 (2.2) 可以得到

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(i-1)i!\frac{\gamma}{(i-1)!} = \gamma\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(i-1)i$$
$$= \gamma k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}(-1)^{i-2} = \gamma k(k-1)(1-1)^{k-2} = 0.$$

完成了 (2.2) 的證明, 接下來我們將證明 (2.3)

$$-\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(i-1)i!\frac{1}{(i-1)!}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j} = -k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}(-1)^{i-2}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j}$$
$$= -k(k-1)\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i}(-1)^i\sum_{j=1}^{i+1}\frac{1}{j}$$

利用二項式係數的遞迴公式將 $\binom{k-2}{i}$ 代換成 $\binom{k-3}{i}+\binom{k-3}{i-1}$ 並將它們拆成兩個部分

$$= -k(k-1)\sum_{i=0}^{k-3}\binom{n-3}{i}(-1)^i\sum_{j=1}^{i+1}\frac{1}{j} - k(k-1)\sum_{i=0}^{k-3}\binom{k-3}{i}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{i+2}\frac{1}{j}$$

將相同的部分消去會得到

$$= -k(k-1)\sum_{i=0}^{k-3}\binom{k-3}{i}(-1)^{i+1}\frac{1}{i+2}$$
$$= k(k-1)\sum_{i=0}^{k-3}(-1)^i\frac{(k-3)!}{(i+2)!(k-3-i)!}(i+2-1)$$

將上式拆成兩項

$$= k(k-1)\sum_{i=0}^{k-3}(-1)^i\frac{(k-3)!}{(i+1)!(k-3-i)!} - k(k-1)\sum_{i=0}^{k-3}(-1)^i\frac{(k-3)!}{(i+2)!(k-3-i)!}$$

對上式做適當的調整, 接下來經過一些計算就可以得到我們要的目標

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{k(k-1)}{k-2}\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^i\binom{k-2}{i} - \frac{k}{k-2}\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i+2} \\
&= -\frac{k(k-1)}{k-2}\left(\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\binom{k-2}{i} - 1\right) - \frac{k}{k-2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i+2} - 1 + (k-1)\right) \\
&= -\frac{k(k-1)}{k-2}((1-1)^{k-2} - 1) - \frac{k}{k-2}((1-1)^{k-1} - 1 + (k-1)) \\
&= \frac{k(k-1)}{k-2} + \frac{k}{k-2} - \frac{k(k-1)}{k-2} = \frac{k}{k-2}.
\end{aligned}
$$

根據 (2.2) 和 (2.3) 的結果就可以得到 **Lemma 2.3** 的結果了。 ∎

Chapter 3

The Number of Groups under the Neutral Model

3.1 Moments

在 **Section 1.2** 中我們已經描述過動物群聚的參數 X_n, 接下來我們將會利用生成函數來計算這個隨機變量序列的統計量, 首先, 先讓我們定義對應這個參數的生成函數 $P_n(y)$ 和 $Q(y,z)$ 如下

$$P_n(y) = \mathbb{E}(e^{X_n y}) \text{ and } Q(y,z) = \sum_{n \geq 2} P_n(y) z^n.$$

有了以上的生成函數, 我們可以藉由將 $Q(y,z)$ 對 y 做偏微分後並代入 $y = 0$ 計

算出 X_n 的動差, 在那之前, 我們先利用條件機率 (conditional probability) 化約 $P_n(y)$

$$\begin{aligned}
P_n(y) &= \mathbb{E}(e^{X_n y}) \\
&= \mathbb{E}(e^{X_n y} | L_n \neq 1 \text{ and } L_n \neq n-1) + \mathbb{E}(e^{X_n y} | L_n = 1 \text{ or } L_n = n-1) \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n-2} \mathbb{E}\left(e^{(X_j + X^*_{n-j})y}\right) + \frac{2}{n-1}\mathbb{E}e^y, \qquad \text{for } n \geq 3 \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n-2} P_j(y) P_{n-j}(y) + \frac{2}{n-1} e^y.
\end{aligned}$$

透過以上的計算, 我們可以得到 $P_n(y)$ 的遞迴式, 當 $n \geq 3$,

$$P_n(y) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n-2} P_j(y) P_{n-j}(y) + \frac{2}{n-1} e^y. \tag{3.1}$$

事實上, 我們會發現只要將 $P_n(y)$ 乘上 z^n 並且加總就可以得到 $Q(y,z)$, 因此, 接下來我們將會經由一些計算, 將 (3.1) 轉換成 $Q(y,z)$ 的表示式, 那我們就可以利用奇異點分析得到 X_n 的 k 次動差。

將 (3.1) 乘以 $(n-1)z^n$ 再將兩邊同時加總, 會得到

$$\sum_{n\geq 3} (n-1) P_n(y) z^n = \sum_{n\geq 3} \sum_{j=2}^{n-2} P_j(y) P_{n-j}(y) z^n + \sum_{n\geq 3} 2e^y z^n. \tag{3.2}$$

(3.2) 的左式的化簡

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 3} (n-1) P_n(y) z^n &= \sum_{n\geq 3} n P_n(y) z^n - \sum_{n\geq 3} P_n(y) z^n \\
&= z \sum_{n\geq 3} n P_n(y) z^{n-1} - \sum_{n\geq 3} P_n(y) z^n \\
&= \left(z \sum_{n\geq 2} n P_n(y) z^{n-1} - z2P_2(y)z \right) - \left(\sum_{n\geq 2} P_n(y) z^n - P_2(y) z^2 \right) \\
&= z \frac{\partial}{\partial z} Q(y,z) - Q(y,z) - P_2(y) z^2 \\
&= z \frac{\partial}{\partial z} Q(y,z) - Q(y,z) - e^y z^2.
\end{aligned}$$

(3.2) 的右式的化簡

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 3}\sum_{j=2}^{n-2}P_j(y)P_{n-j}(y)z^n+\sum_{n\geq 3}2e^y z^n &= \sum_{n\geq 4}\sum_{j=2}^{n-2}P_j(y)P_{n-j}(y)z^n+2e^y\frac{z^3}{1-z}\\ &= \left(\sum_{n\geq 2}P_n(y)z^n\right)^2+2e^y\frac{z^3}{1-z}=Q(y,z)^2+2e^y\frac{z^3}{1-z}.\end{aligned}$$

再將以上的計算稍加整理就會得到

$$z\frac{\partial}{\partial z}Q(y,z)=Q(y,z)^2+Q(y,z)+e^y z^2+2e^y\frac{z^3}{1-z}. \tag{3.3}$$

(3.3) 是一個用 $Q(y,z)$ 表示成的微分方程式, 而我們的目標是得到 $\mathbb{E}X_n^k$, 因此接下來我們會將 $Q(y,z)$ 對 y 偏微分後, 代入 $y=0$, 來計算 $\mathbb{E}X_n^k$, 我們將會先計算期望值, 也就是對 (3.3) 做 y 的偏微分並且代入 $y=0$ 會得到

$$z\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}Q(y,z)\bigg|_{y=0}=\frac{\partial}{\partial y}Q(y,z)^2\bigg|_{y=0}+\frac{\partial}{\partial y}Q(y,z)\bigg|_{y=0}+\frac{\partial}{\partial y}e^y z^2\bigg|_{y=0}+2\frac{\partial}{\partial y}e^y\frac{z^3}{1-z}\bigg|_{y=0}.$$

為了讓符號有較簡潔的表式方式, 我們先定義 $\mathbb{E}(X_n^k)$ 所對應的生成函數 $M_k(z)$ 為

$$M_k(z)=\frac{\partial^k}{\partial y^k}Q(y,z)\bigg|_{y=0}=\sum_{n\geq 2}\mathbb{E}(X_n^k)z^n.$$

當 $k=1$ 時, 我們可以得到

$$\frac{d}{dz}M_1(z)=\left(\frac{2z}{1-z}+\frac{1}{z}\right)M_1(z)+z+\frac{2z^2}{1-z}.$$

根據 **Lemma 2.1** 我們可以得到 $M_1(z)$

$$\begin{aligned}M_1(z)&=\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}\int_0^z\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\left(t+\frac{2t^2}{1-t}\right)dt\\ &=-\frac{1}{4}\frac{(e^{2z}(2z^2-2z-1)+1)e^{-2z}z}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

只要算出 $[z^n]M_1(z)$, 我們就可以得到 X_n 的期望值, 首先我們先對 $M_1(z)$ 在 $z=1$ 展開

$$M_1(z) = \frac{1}{4}\frac{1-e^{-2}}{(1-z)^2} + \frac{1}{4}\frac{1-e^{-2}}{(1-z)} + O(1). \tag{3.4}$$

根據 **Theorem 2.1**, 我們可以得到 $[z^n]M_1(z)$ 的漸近行爲

$$[z^n]M_1(z) = \frac{1-e^{-2}}{4}n + \frac{1-e^{-2}}{2} \overset{z\to 1}{\sim} \frac{1-e^{-2}}{4}n. \tag{3.5}$$

如果要計算變異數以及其他更高次的動差的話, 那我們可以用相同的方法, 將 (3.3) 對 y 偏微後代入 $y=0$, 則我們可以得到 $M_k(z)$ 的微分方程式

$$\frac{d}{dz}M_k(z) = \left(\frac{2z}{1-z}+\frac{1}{z}\right)M_k(z) + \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}M_i(z)M_{k-i}(z) + z + \frac{2z^2}{1-z}.$$

根據 **Lemma 2.1**, 我們可以算出 $M_k(z)$ 的一般式

$$M_k(z) = \frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}\int_0^z \frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}M_i(t)M_{k-i}(t) + t + \frac{2t^2}{1-t}\right)dt. \tag{3.6}$$

透過 (3.6) 我們可以遞迴地算出 $\mathbb{E}X_n^k$, 我們也可以透過下列定理得到 $\mathbb{E}X_n^k$ 的漸近行爲。

Theorem 3.1. *As $n\to\infty$, we have the following result*

$$\mathbb{E}(X_n^k) \sim \frac{(1-e^{-2})^k}{4^k}n^k.$$

Proof. 接下來我們會用 (3.6) 及下式使用數學歸納法來證明這個定理

$$M_k(z)) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{(1-e^{-2})^k}{4^k}\frac{k!}{(1-z)^{k+1}}.$$

當 $k=1$, 我們在先前已經證明過了。

假設 $k \leq m$, 下列式子會成立,

$$M_k(z)) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{(1-e^{-2})^k}{4^k}\frac{k!}{(1-z)^{k+1}}.$$

當 $k=m+1$,

$$M_{m+1}(z) = \frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}\int_0^z \frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i}M_i(t)M_{m+1-i}(t)+t+\frac{2t^2}{1-t}\right)dt.$$

當 $k \leq m$, 我們可以根據數學歸納法並將 $\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}$ 在 $t=1$ 做奇異點展開

$$\begin{aligned}\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}&\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i}M_i(t)M_{m+1-i}(t)+t+\frac{2t^2}{1-t}\right)\\&\overset{t\to 1}{\sim} e^2\sum_{i=1}^{m}\frac{(m+1)!\,(1-e^{-2})^{m+1}}{4^{m+1}\,(1-t)^{m+1}}\end{aligned}$$

再將上式代回積分式, 根據 **Theorem 2.5** 我們可以計算此積分的漸近行爲

$$\int_0^z e^2\sum_{i=1}^{m}\frac{(m+1)!\,(1-e^{-2})^{m+1}}{4^{m+1}\,(1-t)^{m+1}} \overset{z\to 1}{\sim} e^2\frac{(m+1)!\,(1-e^{-2})^{m+1}}{4^{m+1}\,(1-z)^{m}}$$

再將 $\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}$ 在 $z=1$ 做奇異點展開, 並對 $M_{m+1}(z)$ 化簡會得到:

$$M_{m+1}(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{(m+1)!}{4^{m+1}}\frac{(1-e^{-2})^{m+1}}{(1-z)^{m+2}}$$

數學歸納法成立, 因此根據數學歸納法的結果以及 **Theorem 2.1** 我們可以得到對於所有的 $k \geq 1$, 以下式子都會成立

$$\mathbb{E}(X_n^k) \sim \frac{(1-e^{-2})^k}{4^k}n^k.$$

此定理得證。 ∎

3.2 Central Moments and Laws of Large Numbers

Section 3.1 的 **Theorem 3.1** 證明了 X_n 的 k 次動差, 我們知道 X_n 的 k 次中央動差爲 $\mathbb{E}(X_n-\mathbb{E}X_n)^k$, 將此式做二項式展開

$$\mathbb{E}(X_n-\mathbb{E}X_n)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(\mathbb{E}X_n)^i\mathbb{E}X_n^{k-i}.$$

不過只靠 **Theorem 3.1** 的結果是沒辦法估計 $\mathbb{E}(X_n-\mathbb{E}X_n)^k$ 的, 如果我們將 **Theorem 3.1** 的式子展開更多項數的話, 我們就可以得到中央動差的估計值, 因此首先我們必須要重新估計 $\mathbb{E}X_n^k$。$M_k(z)$ 的展開式如下:

$$M_k(z)\overset{z\to 1}{\sim}(1-e^{-2})^k\left(\frac{c_k}{(1-z)^{k+1}}+\frac{d_k}{(1-z)^k}\ln\frac{1}{1-z}+\frac{e_k}{(1-z)^k}\right). \tag{3.7}$$

當 $k=1$, 根據 (3.4) 可以得到 $c_1=\frac{1}{4}$, $d_1=0$, $e_1=\frac{1}{4}$.

當 $k=2$, 根據 (3.6)

$$M_2(z)=\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}\int_0^z\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\left(\frac{1}{t}2M_1(t)^2+t+\frac{2t^2}{1-t}\right)dt.$$

將 $M_1(z)$ 的漸近行爲代入, 並在 $t=1$ 做奇異點展開

$$2(t-1)^2e^2\left(\frac{1}{4(1-t)^2}+\frac{1}{4(1-t)}\right)^2\overset{t\to 1}{\sim}\frac{e^2}{8(1-t)^2}+\frac{e^2}{4(1-t)}.$$

將上式結果代入積分式, 並根據 **Theorem 2.5** 算出積分

$$\int_0^z\left(\frac{e^2}{8(1-t)^2}+\frac{e^2}{4(1-t)}\right)dt\overset{z\to 1}{\sim}\frac{e^2}{8(1-z)}+\frac{e^2}{4}\ln\frac{1}{1-z}+e_2e^2,$$

再對 $\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}$ 在 $z=1$ 做奇異點展開後代入 $M_2(z)$ 可以得到

$$\begin{aligned}M_2(z)&\overset{z\to 1}{\sim}\frac{1}{(z-1)^2e^2}\left(\frac{e^2}{8(1-z)}+\frac{e^2}{4}\ln\frac{1}{1-z}+e_2e^2\right)\\&=\frac{1}{8(1-z)^3}+\frac{1}{4(1-z)^2}\ln\frac{1}{1-z}+\frac{e_2}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

根據以上的計算我們可以得到 $c_2 = \frac{1}{8}$, $d_2 = \frac{1}{4}$, $e_2 = e_2$. 我們的目標是找出 c_k, d_k 和 e_k 的表示式, 如果我們將 (3.7) 代入 (3.6) 並將積分內式子展開

$$
\begin{aligned}
(t-1)^2 e^2 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} &\left(\frac{c_i}{(1-t)^{i+1}} + \frac{d_i}{(1-t)^i} \ln \frac{1}{1-t} + \frac{e_i}{(1-t)^i} \right) \\
&\left(\frac{c_{k-i}}{(1-t)^{k-i+1}} + \frac{d_{k-i}}{(1-t)^{k-i}} \ln \frac{1}{1-t} + \frac{e_{k-i}}{(1-t)^{k-i}} \right) + t + \frac{2t^2}{1-t} \Bigg).
\end{aligned}
$$

當 $k \geq 3$ 時, 積分內的 $t + \frac{2t^2}{1-t}$ 並不會影響到的主要項, 將上式的展開, 保留主要項, 其餘忽略, 我們會得到

$$
e^2 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{c_i c_{k-i}}{(1-t)^k} + \frac{2c_i d_{k-i}}{(1-t)^{k-1}} \ln \frac{1}{1-t} + \frac{2c_i e_{k-i}}{(1-t)^{k-1}} \right),
$$

根據 **Theorem 2.5**

$$
\begin{aligned}
e^2 \int_0^z \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} &\left(\frac{c_i c_{k-i}}{(1-t)^k} + \frac{2c_i d_{k-i}}{(1-t)^{k-1}} \ln \frac{1}{1-t} + \frac{2c_i e_{k-i}}{(1-t)^{k-1}} \right) dt \\
\overset{z \to 1}{\sim} e^2 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} &\left(\frac{c_i c_{k-i}}{(k-1)(1-z)^{k-1}} + \frac{2c_i d_{k-i}}{(k-2)(1-z)^{k-2}} \ln \frac{1}{1-z} \right. \\
&\left. + \left(\frac{c_i c_{k-i}}{k-1} - \frac{2c_i d_{k-i}}{(k-2)^2} + \frac{2c_i e_{k-i}}{k-2} \right) \frac{1}{(1-z)^{k-2}} \right).
\end{aligned}
$$

將 $\frac{z}{(z-1)^2 e^{2z}}$ 在 $z = 1$ 做奇異點展開並把上式計算結果代回 $M_k(z)$

$$
\begin{aligned}
M_k(z) \overset{z \to 1}{\sim} (1-e^{-2})^k \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} &\left(\frac{c_i c_{k-i}}{(k-1)(1-z)^{k+1}} + \frac{2c_i d_{k-i}}{(k-2)(1-z)^k} \ln \frac{1}{1-z} \right. \\
&\left. + \left(\frac{c_i c_{k-i}}{k-1} - \frac{2c_i d_{k-i}}{(k-2)^2} + \frac{2c_i e_{k-i}}{k-2} \right) \frac{1}{(1-z)^k} \right).
\end{aligned}
$$

將算出的結果定義爲

$$
M_k(z) \overset{z \to 1}{\sim} (1-e^{-2})^k \left(\frac{c_k}{(1-z)^{k+1}} + \frac{d_k}{(1-z)^k} \ln \frac{1}{1-z} + \frac{e_k}{(1-z)^k} \right).
$$

根據 **Theorem 3.1** 我們知道 $c_k = \frac{k!}{4^k}$, 而我們的目標是得到 d_k 和 e_k, 因此接下來我們會透過 **Lemma 3.1** 來證明 d_k 和 e_k 的結果。

Lemma 3.1. *Given*

$$d_k = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{2c_i d_{k-i}}{k-2}, \text{ with } d_1 = 0,\ d_2 = \frac{1}{4}$$

$$e_k = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{c_i c_{k-i}}{k-1} - \frac{2c_i d_{k-i}}{(k-2)^2} + \frac{2c_i e_{k-i}}{k-2} \right) \text{ with } e_1 = \frac{1}{4},\ e_2 = e_2.$$

Then

$$d_k = \frac{k!(k-1)}{2 \cdot 4^{k-1}},$$

$$e_k = \frac{k!\Big(2 - k + 8e_2(k-1)\Big)}{4^k}.$$

Proof. 首先我們先證明 d_k

$$d_k = 2\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{c_i d_{k-i}}{k-2},$$

將等式兩邊同乘 $k-2$

$$(k-2)d_k = 2\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} c_i d_{k-i},$$

將上式寫成生成函數

$$\sum_{k\geq 3} \frac{(k-2)d_k}{k!} z^k = 2\sum_{k\geq 3}\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{c_i d_{k-i}}{k!} z^k,$$

將上式整理可以得到

$$z\left(\sum_{k\geq 1} k\frac{d_k}{k!} z^{k-1} - d_2 z - d_1\right) - 2\left(\sum_{k\geq 1} \frac{d_k}{k!} z^k - \frac{d_2 z^2}{2} - d_1 z\right) = 2\sum_{i\geq 1} \frac{c_i}{i!} z^i \sum_{j\geq 1} \frac{d_j}{j!} z^j.$$

定義 $D(z)$ 為 $\sum_{k\geq 1}\frac{d_k}{k!}z^k$ 並且代入 $c_i=\frac{i!}{4^i}$,

$$z\frac{d}{dz}D(z)-2D(z)=2\left(\sum_{i\geq 1}\frac{i!}{4^i i!}z^i\right)D(z),$$

將上式化簡

$$\frac{d}{dz}D(z)=\left(\frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{4}}+\frac{2}{z}\right)D(z).$$

解出微分方程式可以得到

$$D(z)=\frac{z^2}{8(1-z)^2},$$

再將 d_k 算出

$$d_k=k![z^k]D(z)=\frac{k!(k-1)}{2\cdot 4^{k-1}},\quad \text{for all } k\geq 1.$$

接下來我們就開始證明 e_k, 首先

$$e_k=\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left(\frac{c_ic_{k-i}}{k-1}-\frac{2c_id_{k-i}}{(k-2)^2}+\frac{2c_ie_{k-i}}{k-2}\right),$$

因為 $c_k=\frac{k!}{4^k}$, $d_k=\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\frac{2c_id_{k-i}}{k-2}$, 將已知的結果代入可以得到

$$e_k=\frac{k!}{4^k}-\frac{1}{k-2}\frac{k!(k-1)}{2\cdot 4^{k-1}}+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\frac{2c_ie_{k-i}}{k-2},$$

將等式兩邊同乘 $k-2$

$$(k-2)e_k=(k-2)\frac{k!}{4^k}-\frac{k!(k-1)}{2\cdot 4^{k-1}}+2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{k!}{i!(k-i)!}c_ie_{k-i},$$

再把上式寫成生成函數

$$\sum_{k\geq 3}\frac{e_k(k-2)}{k!}z^k=\sum_{k\geq 3}\frac{k-2}{4^k}z^k-\sum_{k\geq 3}\frac{(k-1)}{2\cdot 4^{k-1}}z^k+2\sum_{k\geq 3}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{c_ie_{k-i}}{i!(k-i)!}z^k,$$

將上式稍加整理可以得到

$$z\left(\sum_{k\geq 1} k\frac{e_k}{k!}z^{k-1} - e_2 z - e_1\right) - 2\left(\sum_{k\geq 3}\frac{e_k}{k!}z^k - \frac{e_2}{2}z^2 - e_1 z\right)$$
$$= \frac{z^3}{4(z-4)^2} + \frac{z^3(z-8)}{8(z-4)^2} + 2\left(\sum_{i\geq 1}\frac{z^i}{4^i}\sum_{j\geq 1}\frac{e_j}{j!}z^j - \frac{z^2}{16}\right).$$

定義 $E(z)$ 為 $\sum_{k\geq 1}\frac{e_k}{k!}z^k$, 可以把上式表示為

$$\frac{d}{dz}E(z) = \left(\frac{2}{z} + \frac{2}{4-z}\right)E(z) + \frac{z^2(z-6)}{8(z-4)^2} - \frac{z}{8} - \frac{1}{4}.$$

解出微分方程式可以得到

$$E(z) = \frac{4z + 8e_2 z^2 - 2z^2}{(z-4)^2},$$

再將 e_k 算出

$$e_k = k![z^k]E(z) = \frac{k!\Big(2 - k + 8e_2(k-1)\Big)}{4^k}, \quad \text{for all } k \geq 1. \quad \blacksquare$$

根據 **Lemma 3.1** , 我們可以得到 對於所有 $k \geq 1$,

$$M_k(z) \overset{z\to 1}{\sim} (1-e^{-2})^k\left(\frac{k!}{4^k}\frac{1}{(1-z)^{k+1}} + \frac{k!(k-1)}{2\cdot 4^{k-1}}\frac{1}{(1-z)^k}\ln\frac{1}{1-z} + \frac{k!\Big(2-k+8e_2(k-1)\Big)}{4^k}\frac{1}{(1-z)^k}\right). \tag{3.8}$$

Theorem 3.2. *Let* $a = \frac{1-e^{-2}}{4}$ *and* $k \geq 1$. *As* $n \to \infty$, *we have the following result*

$$\mathbb{E}(X_n^k) \sim a^k\left(\left(1 + \frac{k(k+1)}{2n}\right)n^k + \frac{2k!(k-1)n^{k-1}}{(k-1)!}\ln n\left(1 + \frac{(k-1)!}{\ln n}\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=1}\right) + k\Big(2-k+8e_2(k-1)\Big)n^{k-1}\right).$$

Proof. 根據 (3.8) 對於所有 $k \geq 1$,

$$M_k(z) \overset{z \to 1}{\sim} a^k \left(\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} + \frac{2k!(k-1)}{(1-z)^k} \ln \frac{1}{1-z} + \frac{k!(2-k+8e_2(k-1))}{(1-z)^k} \right).$$

根據 **Theorem 2.1** 和 **Theorem 2.2** 就可以得到此定理的結果。 ∎

有了 **Theorem 3.2** 的結果, 我們只就可以對所有的 $k \in \mathbb{N}$ 計算它的 k 次中央動差 $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k$ 。

當 $k = 1$, $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n) = \mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X_n = 0$.

當 $k = 2$, $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^2 = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}X_n)^2$.

根據 **Theorem 3.2**, 我們知道

$$\mathbb{E}X_n \sim an + a$$

$$\mathbb{E}(X_n^2) \sim a^2n^2 + 4a^2 n \ln n + 2e_2 n$$

因此

$$\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^2 = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}X_n)^2 \sim 4a^2 n \ln n.$$

當 $k \geq 3$, 先讓我們對 $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k$ 做二項式展開

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (\mathbb{E}X_n)^i \mathbb{E}X_n^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (\mathbb{E}X_n)^i \mathbb{E}X_n^{k-i} + (-1)^k (\mathbb{E}X_n)^k
\end{aligned}$$

代入 **Theorem 3.2** 的結果可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k \sim \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (an+2a)^i &\left(a^{k-i} n^{k-i} \left(1 + \frac{(k-i)(k-i+1)}{2n} \right) \right. \\
&+ \frac{2a^{k-i}(k-i)!(k-i-1)n^{k-i-1}}{(k-i-1)!} \ln n \left(1 + \frac{(k-i-1)!}{\ln n} \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)} \bigg|_{s=k-i} \right) \\
&\left. + a^{k-i}(k-i) \Big(2 - (k-i) + 8e_2(k-i-1) \Big) n^{k-i-1} \right) + (-1)^k (an+2a)^k.
\end{aligned}$$

將 $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k$ 的最主要項展開

$$\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k \sim a^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i n^k + 2a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)(k-i-1) n^{k-1} \ln n$$

$$\begin{aligned}
&+ 2a^k \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i i n^{k-1} + \frac{a^k}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)(k-i+1) n^{k-1} \\
&+ 2a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)!(k-i-1) \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)} \bigg|_{s=k-i} n^{k-1} \\
&+ a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)(2-(k-i)+8e_2(k-i-1)) n^{k-1}.
\end{aligned}$$

接下來我們會分別計算以上的式子, 首先

$$a^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i n^k = a^k n^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = a^k n^k (1-1)^k = 0. \tag{3.9}$$

第二個部分

$$2a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)(k-i-1) n^{k-1} \ln n \tag{3.10}$$

$$= 2a^k n^{k-1} \ln n (k(k-1) \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \frac{(k-2)!}{i!(k-2-i)!}$$

$$= 2a^k n^{k-1} \ln n k(k-1)(1-1)^{k-2} = 0. \tag{3.11}$$

第三個部分

$$2a^k \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i i n^{k-1} = 2a^k n^{k-1}(-k) \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (-1)^{i-1}$$

$$= 2a^k n^{k-1}(-k)(1-1)^{k-1} = 0. \tag{3.12}$$

第四個部分

$$\frac{a^k}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)(k-i+1)n^{k-1} = \frac{a^k}{2}n^{k-1}k(k-1)\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i}(-1)^{i-2}$$
$$= \frac{a^k}{2}n^{k-1}k(k-1)(1-1)^{k-2} = 0.$$

第五個部分

$$2a^k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)!(k-i-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=k-i}n^{k-1}$$
$$= 2a^k(-1)^k\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i i!(i-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=i}n^{k-1}.$$

根據 **Lemma 2.3**

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i i!(i-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=i} = \frac{k}{k-2}.$$

因此

$$2a^k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)!(k-i-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=k-i}n^{k-1} = 2a^k(-1)^k\frac{k}{k-2}n^{k-1}. \tag{3.13}$$

最後一個部分

$$
\begin{aligned}
a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)(2-(k-i)+8e_2(k-i-1))n^{k-1} \\
&= 2a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i) - a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)((k-i)n^{k-1} \\
&\quad + 8e_2 a^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)(k-i-1))n^{k-1} \\
&= 2a^k k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^i n^{k-1} \\
&\quad - a^k \left(k^2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^i n^{k-1} - k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i-1} (-1)^i \right) n^{k-1} \\
&\quad + 8e_2 a^k k(k-1) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-2}{i} n^{k-1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

根據 (3.9) 到 (3.14) 我們可以得到

$$\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k \sim 2a^k(-1)^k \frac{k}{k-2} n^{k-1}.$$

透過以上的計算我們會發現計算過程非常的繁複, 不過如果我們可以將生成函數 $Q(y,z)$ 做適當的平移, 那麼我們可以利用與計算動差相同的方法來計算中央動差, 而且計算的過程也會比剛才的方法簡潔許多。首先, 我們必須先定義

$$\overline{Q}(y,z) = Q(y, ze^{-ay}).$$

有了以上的定義, 那我們可以得到

$$\overline{Q}(y,z) = \sum_{n\geq 2} P_n(y)(ze^{-ay})^n = \sum_{n\geq 2} \mathbb{E}(e^{(X_n-an)y}) z^n.$$

將 $Q(y, ze^{-ay})$ 代入 (3.3) 我們可以得到

$$ze^{-ay}\frac{\partial}{\partial z}Q(y,ze^{-ay}) = Q(y,ze^{-ay})^2 + Q(y,ze^{-ay}) + e^y z^2 e^{-2ay} + 2e^y \frac{z^3 e^{-3ay}}{1-ze^{-ay}}.$$

要得到 k次中央動差的生成函數 $N_k(z)$ 只需要把上式對 y 做 k 次偏微分後代入 $y=0$ 就可以得到

$$\frac{d}{dz}N_k(z)=\left(\frac{2z}{1-z}+\frac{1}{z}\right)N_k(z)$$
$$+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}N_i(z)N_{k-i}(z)+\frac{1}{z}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(e^y z^2 e^{-2ay}+2e^y\frac{z^3e^{-3ay}}{1-ze^{-ay}}\right)\bigg|_{y=0},$$

其中

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(e^y t^2 e^{-2ay}+2e^y\frac{t^3e^{-3ay}}{1-te^{-ay}}\right)\bigg|_{y=0}\overset{t\to1}{\sim}(-1)^k\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}. \tag{3.15}$$

這個結果在 **Theorem 3.3** 會被用到, 根據 (3.9) 以及 **Lemma 2.2** 可以得到

$$N_k(z)=\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}\int_0^z\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}N_i(t)N_{k-i}(t)dt$$
$$+\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}\int_0^z\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\frac{1}{t}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(e^y t^2 e^{-2ay}+2e^y\frac{t^3e^{-3ay}}{1-te^{-ay}}\right)\bigg|_{y=0}dt.$$

有了 (3.15) 和 (3.16), 我們就可以開始證明 **Theorem 3.3** 。

Theorem 3.3. *Let* $a=\frac{1-e^{-2}}{4}$ *and* $k\geq 3$*. As* $n\to\infty$*, we have the following result*

$$\mathbb{E}(X_n-\mathbb{E}X_n)^k\sim\frac{(-1)^k 2ka^k}{(k-2)}n^{k-1}.$$

Proof. 接下來我們將用 (3.15) (3.16) 對$N_k(z)$使用數學歸納法來證明下列式子會成立。

$$N_k(z)\overset{z\to1}{\sim}\frac{(-1)^k k!a^k}{(k-2)(1-z)^k},\quad \text{for } k\geq 3.$$

首先先讓我們證明初始條件, 當 $k=1$,

$$N_1(z)=\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}\int_0^z\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\left((1-2a)t+\frac{2(1-3a)t^2}{1-t}-\frac{2at^3}{(1-t)^2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{4}\frac{(e^{2z}-e^{2z}z^2-2e^{2z-2}z+e^{2z-2}z^2+1)e^{-2z}z}{(1-z)^2}.$$

將 $N_1(z)$ 在展開會得到

$$N_1(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{2a}{(1-z)}.$$

當 $k=2$,

$$\begin{aligned} N_2(z) = \frac{z}{(z-1)^2 e^{2z}} \int_0^z \frac{(t-1)^2 e^{2t}}{t} \Bigg(\frac{2N_1(t)^2}{t} + (1-2a)t + (1-2a)^2 t^2 \\ + \frac{2(1-3a)^2 t^3}{1-t} - \frac{4a(1-3a)t^4}{(1-t)^2} + \frac{2a^2 t^4}{(1-t)^2} + \frac{4a^2 z^5}{(1-t)^3} \Bigg) dt. \end{aligned}$$

首先我們先計算積分內的式子

$$\begin{aligned} \frac{(t-1)^2 e^{2t}}{t} \Bigg(\frac{2N_1(t)^2}{t} + (1-2a)t + (1-2a)^2 t^2 + \frac{2(1-3a)^2 t^3}{1-t} \\ - \frac{4a(1-3a)t^4}{(1-t)^2} + \frac{2a^2 t^4}{(1-t)^2} + \frac{4a^2 t^5}{(1-t)^3} \Bigg). \end{aligned}$$

因爲 $N_1(z) = O((1-z)^{-1})$, 在 $t=1$ 做奇異點展開可以得到

$$\frac{(t-1)^2 e^{2t}}{t} \left(\frac{2N_1(t)^2}{t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(e^y t^2 e^{-2ay} + 2e^y \frac{t^3 e^{-3ay}}{1-te^{-ay}} \right) \Bigg|_{y=0} \right) \overset{t\to 1}{\sim} \frac{4a^2 e^2}{1-t}.$$

根據 **Theorem 2.5** 我們可以得到

$$\int_0^z \frac{4a^2 e^2}{1-t} dt \overset{z\to 1}{\sim} 4a^2 e^2 \ln\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

再把積分結果代回 $N_2(z)$, 並在 $z=1$ 做奇異點展開

$$N_2(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{4a^2}{(1-z)^2} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

當 $k=3$, 根據 (3.16)

$$\begin{aligned} N_3(z) &= \frac{z}{(z-1)^2 e^{2z}} \int_0^z \frac{(t-1)^2 e^{2t}}{t} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{3-1} \binom{3}{i} N_i(t) N_{3-i}(t) dt \\ &+ \frac{z}{(z-1)^2 e^{2z}} \int_0^z \frac{(t-1)^2 e^{2t}}{t} \frac{1}{t} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(e^y t^2 e^{-2ay} + 2e^y \frac{t^3 e^{-3ay}}{1-te^{-ay}} \right) \Bigg|_{y=0} dt. \end{aligned}$$

根據 (3.15)

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(e^y t^2 e^{-2ay} + 2e^y \frac{t^3 e^{-3ay}}{1 - te^{-ay}}\right)\bigg|_{y=0}(-1)^3 \overset{t\to 1}{\sim} \frac{2\cdot 3!}{(1-t)^4}.$$

根據先前的計算, 我們知道 $N_1(z) = O((1-z)^{-1})$ 和 $N_2(z) = O((1-z)^{-2}\ln(\frac{1}{1-z}))$, 我們可以發現 $(-1)^3\frac{2\cdot 3!}{(1-t)^4}$ 才是主要項, 因此根據 **Theorem 2.5**

$$\int_0^z (t-1)^2 e^2 (-1)^3 \frac{2\cdot 3!}{(1-t)^4}dt \overset{z\to 1}{\sim} \frac{(-1)^3 2\cdot 3a^3}{1-z},$$

將上式結果帶回 $N_3(z)$ 並對 $\frac{z}{(z-1)^2 e^{2z}}$ 在 $z=1$ 做奇異點展開

$$N_3(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{(z-1)^2 e^2}\frac{(-1)^3 2\cdot 3a^3}{1-z} = \frac{(-1)^3 2\cdot 3a^3}{(1-z)^3}.$$

初始條件證明完畢。

假設對於所有的 $3 \le k \le m$ 以下式子都會成立

$$N_k(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{(-1)^k k! a^k}{(k-2)(1-z)^k}.$$

當 $k = m+1$,

$$\begin{aligned} N_{m+1}(z) = {} & \frac{z}{(z-1)^2 e^{2z}}\int_0^z \frac{(t-1)^2 e^{2t}}{t^2}\sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i} N_i(t) N_{m+1-i}(t)dt \\ & + \frac{z}{(z-1)^2 e^{2z}}\int_0^z \frac{(t-1)^2 e^{2t}}{t}\frac{1}{t}\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\left(e^y t^2 e^{-2ay} + 2e^y\frac{t^3 e^{-3ay}}{1-te^{-ay}}\right)\bigg|_{y=0} dt. \end{aligned}$$

根據數學歸納法我們可以得到

$$N_2(t) = O\left((1-z)^{-2}\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right),$$

$$N_k(t) = O((1-t)^{-k}), \quad \text{for all } k \le m \text{ and } k \ne 2.$$

將積分內式子在 $t=1$ 做奇異點展開

$$\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t^2}\sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i}N_i(t)N_{m+1-i}(t) \overset{t\to 1}{\sim} O\left((1-t)^{-m+1}\right),$$

而另一積分式在 $t=1$ 做奇異點展開

$$\begin{aligned}&\frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\frac{1}{t}\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\left(e^y t^2 e^{-2ay}+2e^y\frac{t^3e^{-3ay}}{1-te^{-ay}}\right)\Bigg|_{y=0}\\ &\overset{t\to 1}{\sim} e^2(-1)^{m+1}\frac{2(m+1)!a^{m+1}}{(1-t)^m}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.17) 才是主要項, 因此根據 **Theorem 2.5**

$$\begin{aligned}&\int_0^z \frac{(t-1)^2e^{2t}}{t}\frac{1}{t}\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\left(e^y t^2 e^{-2ay}+2e^y\frac{t^3e^{-3ay}}{1-te^{-ay}}\right)\Bigg|_{y=0}dt\\ &\overset{z\to 1}{\sim} e^2(-1)^{m+1}\frac{2(m+1)!a^{m+1}}{(1-z)^{m-1}}.\end{aligned}$$

將 $\frac{z}{(z-1)^2e^{2z}}$ 在 $z=1$ 做奇異點展開, 並化簡 $N_{m+1}(z)$

$$N_{m+1}(z) \overset{z\to 1}{\sim} (-1)^{m+1}\frac{2(m+1)!a^{m+1}}{(m-1)(1-z)^{m+1}}.$$

根據數學歸納法我們證明對於所有的 $k\geq 3$,

$$N_k(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{(-1)^k 2k!a^k}{(k-2)(1-z)^k},\ \text{with } a=\frac{1-e^{-2}}{4}.$$

都會成立。有了數學歸納法的結果, 再根據 **Theorem 2.1**, 我們可以得到對於 $k\geq 3$,

$$\mathbb{E}(X_n-\mathbb{E}X_n)^k \sim \frac{(-1)^k 2a^k}{(k-2)}n^{k-1},\ \text{where } a=\frac{1-e^{-2}}{4}. \quad \blacksquare$$

透過 **Theorem 3.1** 和 **Theorem 3.3** , 我們可以得到 X_n 的動差和中央動差, 不過我們並沒有辦法算出這個參數的極限分布, 不過我們還是可以藉由已經得到的結果證明 X_n 會符合大數法則, 首先我們已經在前面證明過 X_n 的變異數和期望值分別為

$$\mathbb{E}X_n \sim an \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}(X_n)\sim 4a^2 n\ln n.$$

根據切比雪夫不等式 (Chebyshev's Inequality)

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}-1\right|\geq\epsilon\right) &= P\left(|X_n-\mathbb{E}X_n|\geq\epsilon\mathbb{E}X_n\right)\\
&\leq O\left(\frac{4a^2 n\ln n}{\epsilon^2 a^2 n^2}\right)=O\left(\frac{\ln n}{n}\right).
\end{aligned}
$$

當 $n\to\infty$ 上式會收斂到 0, 因此 X_n 會符合弱大數法則, 事實上 X_n 也會符合強大數法則, 因此我們有下列定理

Theorem 3.4. *(Strong Law of Large Numbers)*
As $n\to\infty$, we have the following result

$$
P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}-1\right|=0\right)=1.
$$

Proof. 首先我們挑選 $n=k^2$, 根據切比雪夫不等式

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X_{k^2}}{\mathbb{E}X_{k^2}}-1\right|\geq\epsilon\right) &= P\left(|X_{k^2}-\mathbb{E}X_{k^2}|\geq\epsilon\mathbb{E}X_{k^2}\right)\\
&O\left(\leq\frac{4a^2k^2 2\ln k}{\epsilon^2a^2k^4}\right)=O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right).
\end{aligned}
$$

因爲

$$
\sum_{k\geq 1}P\left(\left|\frac{X_{k^2}}{\mathbb{E}X_{k^2}}-1\right|\geq\epsilon\right)\leq\sum_{k\geq 1}O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right),
$$

而 $\sum_{k\geq 1}O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$ 爲一收斂的 p-級數 (p-series), 因此

$$
\sum_{k\geq 1}P\left(\left|\frac{X_{k^2}}{\mathbb{E}X_{k^2}}-1\right|\geq\epsilon\right)<\infty.
$$

根據 **Borel-Cantelli lemma** 我們可以推得

$$
\lim_{k\to\infty}\frac{X_{k^2}}{\mathbb{E}X_{k^2}}=1. \tag{3.17}
$$

任意給定一個 n, 根據自然數特性, 我們可以找到適當的 k 會符合下列條件

$$k^2 \leq n \leq (k+1)^2.$$

因爲 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 爲一單調遞增序列, 因此根據這個性質, 我們可以得到

$$\frac{X_{k^2}}{\mathbb{E}X_{(k+1)^2}} \leq \frac{X_n}{\mathbb{E}X_{(k+1)^2}} \leq \frac{X_{(k+1)^2}}{\mathbb{E}X_{(k+1)^2}}.$$

根據 (3.18) 及上式我們知道

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}-1\right|=0\right)=1.$$

證明了 X_n 會符合強大數法則。 ∎

接下來在下一章我們會介紹另外一個相似的參數 Y_n, 並算出該參數的極限分布。

Chapter 4

The Number of Leaves in Binary Search Trees

4.1 Central Moments and Limit Law

在 **Section 1.2** 中我們已經描述過二元搜尋樹去掉葉子的外點個數 Y_n, 接下來我們將會利用生成函數來計算這個隨機變量序列的統計量, 首先, 先讓我們定義對應這個參數的生成函數 $R_n(y)$, $B(y,z)$ 如下:

$$R_n(y) = \mathbb{E}(e^{Y_n y}) \text{ and } B(y,z) = \sum_{n\geq 2} R_n(y) z^n.$$

我們可以用與第三章相同的方法求出 Y_n 的期望值

$$\begin{aligned} R_n(y) = \mathbb{E}(e^{Y_n y}) &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(e^{(Y_j + Y^*_{n-j})y} \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} R_j(y) R_{n-j}(y). \end{aligned}$$

將等式的兩邊同乘 $(n-1)z^n$, 再將等式兩邊加總可以得到

$$\sum_{n\geq 3}(n-1)R_n(y) = \sum_{n\geq 3}\sum_{j=1}^{n-1} R_j(y)R_{n-j}(y),$$

再經由一些計算就可以算出 $B(y,z)$ 所形成的微分方程式

$$z\frac{\partial}{\partial z}B(y,z) - B(y,z) = B(y,z)^2 + 2zB(y,z) + e^y z^2. \tag{4.1}$$

首先, 我們先定義 Y_n 所對應的生成函數 $U(z)$

$$U(z) = \frac{\partial}{\partial y}B(y,z)\bigg|_{y=0} = \sum_{n\geq 2}\mathbb{E}(Y_n)z^n.$$

將 (4.1) 對 y 做偏微分後代入 $y=0$ 就會得到期望值 $\mathbb{E}Y_n$ 的微分方程式 $U(z)$

$$z\frac{\partial}{\partial z}U(z) = \frac{2z^2}{1-z}U(z) + (2z+1)U(z) + z^2.$$

根據 **Lemma 2.2** 我們可以算出 $U(z)$

$$U(z) = \frac{(\frac{1}{3}(-1+z)^3 + \frac{1}{3})z}{(1-z)^2}.$$

在 $z=1$ 對 $U(z)$ 做奇異點展開

$$U(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{3}\frac{1}{(1-z)^2}.$$

最後再使用 **Theorem 2.1** 就可以得到期望值的漸近行爲

$$\mathbb{E}(Y_n) = [z^n]U(z) \sim \frac{1}{3}n. \tag{4.2}$$

有了 Y_n 的期望值我們就可以直接計算它的中央動差, 首先我們先定義

$$\overline{B}(y,z) = B(y, ze^{-\frac{1}{3}y}).$$

再把 $B(y, ze^{-\frac{1}{3}y})$ 代入 (4.1) 整理過後可以得到

$$z\frac{\partial}{\partial z}\overline{B}(y,z) = \overline{B}(y,z)^2 + (1+2ze^{-\frac{1}{3}y})\overline{B}(y,z) + z^2 e^{\frac{1}{3}y}. \tag{4.3}$$

在計算中央動差之前, 我們先定義 Y_n 的中央動差所對應的生成函數為

$$V_k(z) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}\overline{B}(y,z)\bigg|_{y=0} = \sum_{n\geq 2}\mathbb{E}(Y_n - \mathbb{E}Y_n)^k z^n.$$

對 (4.3) 做 k 次偏微分再代入 $y=0$ 就可以得到 Y_n 的 k 次中央動差所對應的微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}V_k(z) &= \left(\frac{2}{1-z}+\frac{1}{z}\right)V_k(z) + \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}V_i(z)V_{k-i}(z) + 2\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left(-\frac{1}{3}\right)^i V_{k-i}(z)\\ &\quad + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^k\frac{z^2}{1-z} + \left(\frac{1}{3}\right)^k z.\end{aligned}$$

根據 **Lemma 2.2** 我們可以得到

$$\begin{aligned}V_k(z) &= \frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}V_i(t)V_{k-i}(t)dt\\ &\quad + \frac{2z}{(1-z)^2}\int_0^z\frac{(1-t)^2}{t}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left(-\frac{1}{3}\right)^i V_{k-i}(t)dt\\ &\quad + \frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z\frac{(1-t)^2}{t}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^k\frac{t^2}{1-t} + \left(\frac{1}{3}\right)^k t\right)dt.\end{aligned} \tag{4.4}$$

接下來我們就開始證明 Y_n 的中央動差的定理。

Theorem 4.1. *As $n\to\infty$, we have the following result*

$$\mathbb{E}(Y_n - \mathbb{E}Y_n)^k \sim \begin{cases}\frac{(2m)!}{2^m m!}\left(\frac{2}{45}\right)^m n^m, & \textit{if } k = 2m;\\ O(n^m), & \textit{if } k = 2m+1.\end{cases}$$

Proof. 我們接下來會利用(4.4) 及數學歸納法證明下式:

$$V_k(z) \overset{z\to 1}{\sim} \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^m}\left(\frac{2}{45}\right)^m \frac{1}{(1-z)^{m+1}}, & \text{if } k=2m; \\ O\left(\frac{1}{(1-z)^{m+1}}\right), & \text{if } k=2m+1. \end{cases}$$

首先我們必須先確認初始條件。當 $k=1$,

$$V_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t}\left(-\frac{2t^2}{3(1-t)}+\frac{1}{3}t\right)dt = \frac{1}{3}z^2.$$

在 $z=1$ 將 $V_1(z)$ 展開

$$V_1(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{3} = O\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

當 $k=2$, 根據 **Lemma 2.2** 可以得到

$$\begin{aligned} V_2(z) &= \frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t}\left(\frac{2t^2}{9(1-t)}+\frac{t}{9}-\frac{4t^2}{9}+\frac{2t^3}{9}\right)dt \\ &= \frac{\frac{z^2}{9}+\frac{2z^6}{45}-\frac{2z^5}{9}+\frac{z^4}{3}-\frac{2z^3}{9}}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

將 $V_2(z)$ 在 $z=1$ 做奇異點展開

$$V_2(z) \overset{z\to 1}{\sim} \frac{2}{45}\frac{1}{(1-z)^2}.$$

初始條件成立, 我們假設所有 $k\leq 2m-1$ 的情況都會成立, 那麼當 $k=2m$,

$$\begin{aligned} V_{2m}(z) =& \frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t}\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{2m-1}\binom{2m}{i}V_i(z)V_{2m-i}(t)\right. \\ &\left.+2\sum_{i=1}^{2m-1}\binom{2m}{i}\left(-\frac{1}{3}\right)^i V_{2m-i}(t)+2\left(-\frac{1}{3}\right)^{2m}\frac{t^2}{1-t}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}t\right)dt, \end{aligned}$$

將積分內的式子根據數學歸納法在 $t=1$ 做奇異點展開我們可以得到

$$\frac{(1-t)^2}{t^2}\sum_{i=1}^{m}\binom{2m}{2i-1}V_{2i-1}(z)V_{2m-2i+1}(t) = O((1-t)^{-m+1}),$$

$$\frac{2(1-t)^2}{t}\sum_{i=1}^{2m-1}\binom{2m}{i}\left(-\frac{1}{3}\right)^i V_{2m-i}(t)+2\left(-\frac{1}{3}\right)^{2m}\frac{t^2}{1-t}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}t = O((1-t)^{-m+2}),$$

而另一部分則是

$$\frac{(1-t)^2}{t^2}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{2m}{2i}V_{2i}(t)V_{2m-2i}(t) \overset{t\to 1}{\sim} \sum_{i=1}^{m-1}\binom{2m}{2i}\left(\frac{2}{45}\right)^m \frac{1}{(1-t)^m}. \tag{4.5}$$

我們會發現 (4.5) 會是積分內的主要項, 因此根據 **Theorem 2.5**

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t^2}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{2m}{2i}V_{2i}(t)V_{2m-2i}(t)dt& \\ \overset{z\to 1}{\sim} \frac{(2m)!}{2^m}\left(\frac{2}{45}\right)^m \frac{1}{(1-z)^{m-1}}&.\end{aligned}$$

將 $\frac{z}{(1-z)^2}$ 在 $z=1$ 做奇異點展開並將上式結果代入

$$\begin{aligned}V_{2m}(z) &\overset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{(1-z)^2}\frac{(2m)!}{2^m}\left(\frac{2}{45}\right)^m \frac{1}{(1-z)^{m-1}} \\ &= \frac{(2m)!}{2^m}\left(\frac{2}{45}\right)^m \frac{1}{(1-z)^{m+1}}.\end{aligned}$$

那麼當 $k=2m+1$,

$$\begin{aligned}V_{2m+1}(z) = &\frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t^2}\left(\sum_{i=1}^{2m}\binom{2m+1}{i}V_i(t)V_{2m+1-i}(t)\right)dt \\ &+\frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t}\left(2\sum_{i=1}^{2m}\binom{2m+1}{i}\left(-\frac{1}{3}\right)^i V_{2m+1-i}(t)\right)dt \\ &+\frac{z}{(1-z)^2}\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{2m+1}\frac{t^2}{1-t}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}t\right)dt,\end{aligned}$$

根據數學歸納法並將積分內的式子在 $t=1$ 做奇異點展開我們可以得到

$$(1-t)^2\sum_{i=1}^{2m}\binom{2m+1}{i}V_i(t)V_{2m+1-i}(t) = O((1-t)^{-m}) \tag{4.6}$$

而另一項

$$\begin{aligned}&(1-t)^2\left(2\sum_{i=1}^{2m}\binom{2m+1}{i}\left(-\frac{1}{3}\right)^i V_{2m+1-i}(t)+\left(-\frac{1}{3}\right)^{2m+1}\frac{t^2}{1-t}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}t\right) \\ &= O((1-t)^{-m+1})\end{aligned}$$

觀察後會發現 (4.6) 會是主要項, 根據 **Theorem 2.5** 會得到

$$\int_0^z \frac{(1-t)^2}{t^2}\sum_{i=1}^{2m}\binom{2m+1}{i}V_i(t)V_{2m+1-i}(t)dt$$
$$= O((1-z)^{-m+1}).$$

對 $V_{2m+1}(z)$ 在 $z=1$ 做奇異點展開

$$V_{2m+1}(z) \overset{z\to 1}{\sim} O((1-t)^{-(m+1)}).$$

根據數學歸納法我們證明了對於所有的 $k\in\mathbb{N}$ 會符合

$$V_k(z) \overset{z\to 1}{\sim} \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^m}(\frac{2}{45})^m\frac{1}{(1-z)^{m+1}}, & \text{if } k=2m; \\ O\left(\frac{1}{(1-z)^{m+1}}\right), & \text{if } k=2m+1. \end{cases}$$

因此 **Theorem 2.1**我們會得到 $\mathbb{E}(Y_n-\mathbb{E}Y_n)^k$ 爲

$$\mathbb{E}(Y_n-\mathbb{E}Y_n)^k \sim \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^m m!}\left(\frac{2}{45}\right)^m n^m, & \text{if } k=2m; \\ O(n^m), & \text{if } k=2m+1. \end{cases}$$

此定理得證。 ∎

接下來我們將會證明 Y_n 這個參數的極限分佈。

Theorem 4.2. *As $n\to\infty$, we have the following result*

$$\frac{Y_n-\frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{45}n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Proof. 利用 **Theorem 2.6** 和 **Theorem 4.1** 就可以證明出 **Theorem 4.2** 的結果。 ∎

根據 **Theorem 4.2** 我們得到 Y_n 的極限分佈, 接下來 **Section 5.2** 我們會把 Y_n 在特定的 n 之下的畫成統計的圖表, 我們也可以透過畫出來的圖與它的極限分佈做比較, 觀察其收斂速度。

Chapter 5

Some Numerical Results

5.1 The Number of Groups under the Neutral Model

在 **Chapter 3** 中我們已經把 X_n 的動差算出來了, 不過我們並沒有得到它的極限分佈, 接下來我們會透過一個演算法去估計 X_n 收斂的狀況, 猜測它的極限分佈, 並繪製成圖表觀察 X_n 是否會收斂。假設 $a := \frac{1-e^{-2}}{4}$ 根據 **Theorem 3.2** 的結果有以下結果:

$$\mathbb{E}(X_n) \sim an \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}(X_n) \sim 4a^2 n \ln n.$$

除此之外, 根據 **Theorem 3.3** , 當 $k \geq 3$,

$$\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k \sim \frac{(-1)^k 2ka^k}{k-2} n^{k-1}.$$

由上式我們可以知道 第 k 累計量 (cummulant) κ_k 有以下的漸近展開

$$\kappa_k \sim \frac{(-1)^k 2ka^k}{k-2} n^{k-1}.$$

根據這個結果

$$\ln \mathbb{E}(e^{X_n t}) = \sum_{k\geq 1} \kappa_k \frac{t^k}{k!} \approx ant + 2a^2 n \ln n t^2 + \sum_{k \geq 3} \kappa_k \frac{t^k}{k!},$$

其中

$$\sum_{k\geq 3}\kappa_k\frac{t^k}{k!}\approx\frac{1}{n}\sum_{k\geq 3}\frac{2}{(k-2)(k-1)!}(-ant)^k.$$

請注意

$$\sum_{k\geq 3}\frac{2}{(k-2)(k-1)!}(-z)^k=2z(z-1+e^{-2})-z\gamma-z\ln z-zEi(1,z))\sim -2z^2\ln z.$$

將 t 用 $t/(2a\sqrt{n\ln n})$ 取代則

$$\ln\mathbb{E}(e^{X_nt/(2a\sqrt{n\ln n})})\approx\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\ln n}}t+t^2/4.$$

根據 $\ln\mathbb{E}(e^{X_nt/(2a\sqrt{n\ln n})})$ 的估計, 因此我們猜測

$$\frac{X_n-an}{2a\sqrt{n}\ln n}\xrightarrow{d}N(0,1/2).$$

因此我們接下來會利用數值運算的結果算出 n 個個體正規化之後的極限分佈, 其中我們算的例子有包括 $n=50$, $n=100$, $n=200$, $n=250$, $n=300$, 這幾個狀況的分佈, 並做成圖 Figure 5.1, 除此之外, 根據以上的估計我們把 $N(0,1/2)$ 當作 X_n 的比較對象, 觀察當個體數量 n 上升時 X_n 是否會收斂到 $N(0,1/2)$。

觀察之後歸納出幾個可能性, 第一種可能是因為 X_n 收斂的速度太慢, 但是電腦的計算能力有限, 點數太多的時會有計算上的困難。第二種狀況可能是因為我們忽略了太多誤差項, 因此猜錯收斂的模型, 或許 X_n 收斂到的是其他分佈或是 X_n 根本就不會收斂, 所以找不到適當的收斂模型。

關於 X_n 的極限分佈可以留待之後有興趣的人繼續研究, 接下來在下一個小節中, 我們也會針對二元搜尋樹去掉葉子後的外點個數 Y_n 計算一些特別的例子, 觀察它的收斂性。

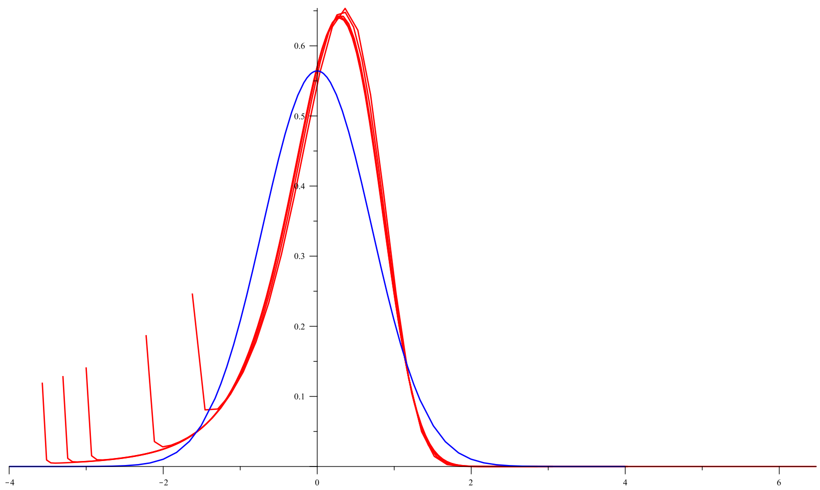

Figure 5.1: Histogram of X_n for $n = 50, 100, 200, 300$

5.2 The Number of Leaves in Binary Search Tree

在 **Chapter 4** 中, 我們計算出 Y_n 的極限分佈, 並且證明 Y_n 正則化後會唯一收斂到 $N(0,1)$, 針對 Y_n 我們也會計算一些特別的例子, 其中我們計算的例子有 $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 50$, 分別對應到 Figure 5.2, Figure 5.3, Figure 5.4, Figure 5.5。

觀察過後我們會發現 Y_n 收斂的速度非常快, 當 $n = 30$ 的時候, 其實已經非常接近 N(0,1), 透過 X_n 和 Y_n 的圖我們可以很清楚的看到兩個圖的差別, 首先, Y_n 收斂的速度比 X_n 快許多, 除此之外, 雖然兩個參數的遞迴式相似, 但會發現兩個參數的行爲差別是很大的。

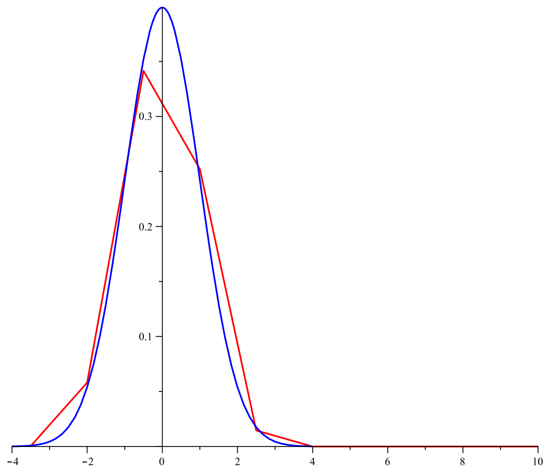

Figure 5.2: $n = 10$

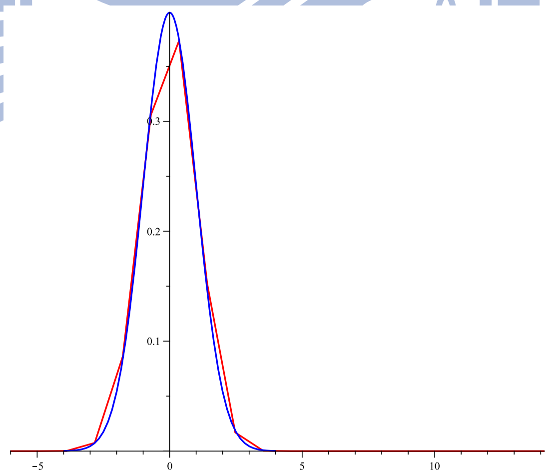

Figure 5.3: $n = 20$

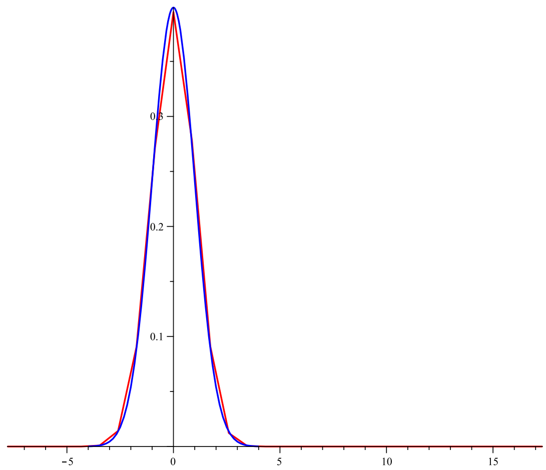

Figure 5.4: $n = 30$

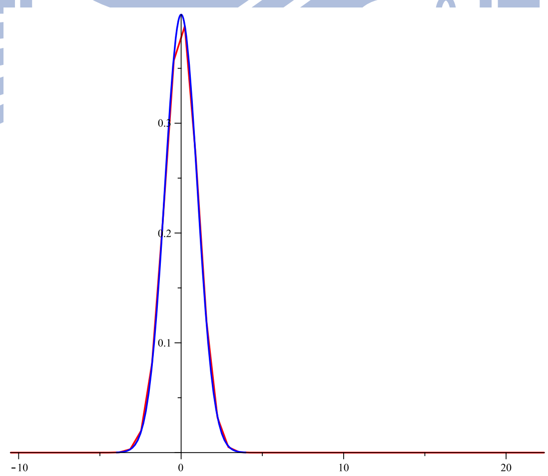

Figure 5.5: $n = 50$

Chapter 6

Conclusion

我們將在這一章做簡短的總結還有本篇報告得到的主要結果, 本篇論文的目標是希望可以得到動物群組的群數 X_n 的動差以及中央動差, 並使用動差法得到該參數的極限分佈, 因此在 **Chapter 1** 中, 我們介紹了關於動物群聚的問題, 並介紹了一些前人研究過的動物群聚的模型, 並在 **Section 1.2** 中介紹了本篇報告中研究的兩個重要的參數: 動物群聚的群數 X_n 和二元搜尋樹的外點數 Y_n, 以及它們的遞迴式。

接著在 **Chapter 3** 中, 我們我們利用奇異點分析算出 X_n 的所有動差以及中央動差, 推廣了 [2] 的結果, 也讓我們對這個參數有更多的了解, 遺憾的是, 我們並沒有辦法從動差法找到 X_n 的極限分佈。

在 **Chapter 4** 中, 我們計算了另一個與 X_n 擁有類似遞迴式的參數 Y_n, 雖然兩個參數的遞迴式非常相似, 但得到的結果卻是完全不同, 因爲算出 Y_n 的中央動差之後我們發現可以透過動差法得到它的極限分佈, 也就是說, 雖然兩個參數看起來很像, 但是從分析的角度來看, 卻是差蠻多的。

最後, 在 **Chapter 5** 中, 我們將 X_n 和 Y_n 算出特定的 n 並繪成統計圖表。雖然我們辦法透過動差法得到 X_n 的極限分佈, 不過我們計算出它的動差以及中央動差, 希望之後研究這個問題的人能夠利用別的方法找到 X_n 的極限分佈。

在 **Chapter 3** 中, 我們有計算出 X_n 所對應的生成函數的微分方程

$$z\frac{\partial}{\partial z}Q(y,z) = Q(y,z)^2 + Q(y,z) + e^y z^2 + 2e^y \frac{z^3}{1-z}.$$

這是一個 Riccati differential eqution。Flajolet, Gourdon 和 Martinez 三人在 [4] 提出了一個化約 Riccati differential eqution 到極限法則的定理, 可惜的是, 他們的定理不能使用在這裡。在解釋這個原因之前我們先使用一般解 Riccati differential eqution 的方法來計算此微分方程式。

首先我們定義

$$\widetilde{Q}(y,z) = \frac{Q(y,z)}{z}.$$

則,

$$\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{Q}(y,z) = \widetilde{Q}(y,z)^2 + e^y + 2e^y\frac{z}{1-z}.$$

接下來, 我們令

$$\widetilde{Q}(y,z) = \frac{\frac{\partial}{\partial z}T(y,z)}{T(y,z)}.$$

則 $T(y,z)$ 會滿足下列二階微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(y,z) + e^y\frac{1+z}{1-z}T(y,z) = 0.$$

觀察這個微分方程式我們會發現它在 $z=1$ 有一個奇異點。這就是我們先前提過為什麼 Flajolet, Gourdon 和 Martinez 的定理不能應用在這個微分方式的原因。那麼是否可以推廣他們的定理適用於我們的狀況呢?

最後, 我們將以上的這個微分方程式的解算出來如下

$$T(y,z) = WM\left(-e^{y/2}, \frac{1}{2}, 2e^{y/2}(z-1)\right) + c(y)WW\left(-e^{y/2}, \frac{1}{2}, 2e^{y/2}(z-1)\right),$$

其中 WM 和 WW 爲 Whittaker M 和 Whittaker W 函數而且

$$c(y) = -\frac{(e^{y/2}-1)WM\left(-e^{y/2}+1, \frac{1}{2}, -2e^{y/2}\right)}{WW\left(-e^{y/2}+1, \frac{1}{2}, -2e^{y/2}\right)}.$$

因此, 我們對 $Q(y, z)$ 有一個明確的表式式。那麼是否可以找到這個二元漸近的極限法則呢？如果眞的能找到的話, 那麼我們也就對可以對動物群聚的模型有更深刻的了解了。

Bibliography

[1] Billingsley P. (1995) Probability and Measure, *Wiley*.

[2] Durand E., Blum M.G.B., François O. (2007). Prediction of group patterns in social mammals based on a coalescent model, *J Theor. Biol.*, **249**, 262–270.

[3] Durand E., François O. (2010). Probabilistic analysis of a genealogical model of animal group patterns, *J. Math. Biol.*, **60**, 451–468.

[4] Flajolet P., Gourdon X., Martinez C. (1997). Patterns in Random Binary Search Trees, *Random Struct Algorithm.*, **11**, 223-244.

[5] Giraldeau L.A., Caraco T. (1993). Genetic relatedness and group size in an aggregation economy, *Evol. Ecol.*, **7**, 429–438.

[6] Gueron S., Levin S.A. (1995). The dynamics of group formation, *Math. Biosci.*, **128**, 243–264.

[7] Hamilton I.M. (2000). Using optimal skewtheory to predict group size and the division of ressources within groups of social foragers, *Am. Nat.*, **155**, 684–695.

[8] Kingman J.F.C. (1982). The coalescent, *Stoch. Proc. Appl.*, **13**, 235–248.

[9] Takayasu H. (1989). Steady-state distribution of generalized aggregation system with injection, *Phys. Rev. Lett.*, **63**, 2563–2565.

[10] Yokoyama S., Felsenstein J. (1978). Amodel of kin selection for an altruistic trait considered as a quantitative character, *Proc. Natl. Academy Sci.*, **75**, 420–422.