

國立交通大學

光電工程研究所

碩士論文

應用多入射角於影像式橢圓偏光術在
表面電漿共振量測

Multiple Incident Angles in Imaging Ellipsometry and its
Application in Measuring Surface Plasmon Resonance

研究生：陳奕仁

指導老師：趙于飛 博士

中華民國一零一年三月

應用多入射角於影像式橢圓偏光術在表面電漿共振量測
Multiple Incident Angles in Imaging Ellipsometry and its Application in
Measuring Surface Plasmon Resonance

研究生：陳奕仁

Student : Yi-Ren Chen

指導教授：趙于飛

Advisor : Yu-Faye Chao

國立交通大學

光電工程研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Electro-Optical Engineering
College of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Electro-Optical Engineering

March 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年三月

應用多入射角於影像式橢圓偏光術在表面電漿共振量測

碩士研究生：陳奕仁

指導教授：趙于飛 博士

國立交通大學光電工程研究所

摘要

本論文將介紹簡式影像式橢圓儀應用於表面電漿共振的量測，並利用柱狀透鏡製造多入射角，擷取光強度與相位隨角度分佈的圖形。簡式橢圓儀乃由偏振片、待測物與析光片所組成，藉由三點量測技術和數值計算，可得到不受偏振片與析光片方位角誤差影響的橢圓參數。搭配擴束系統、柱狀透鏡與電荷耦合元件，在不必移動任何光學元件之下，同時進行多入射角測量。

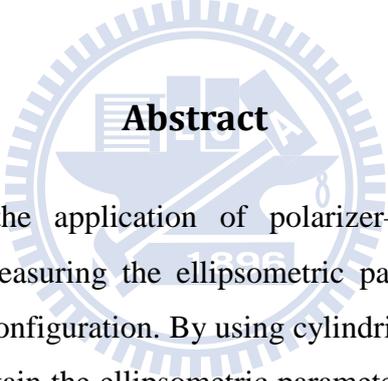
以下實驗先以矽標準片，做為測試簡式影像式橢圓儀搭配會聚光束量測的可靠性。接著分別以空氣和水為待測物，進行表面電漿共振的實驗。同時探討不同入射角的光束，在空氣與稜鏡介面所受到的偏極態改變，並以理論計算消去此一影響。

Multiple Incident Angles in Imaging Ellipsometry and its Application in Measuring Surface Plasmon Resonance

Student : Yi-Ren Chen

Advisor : Dr. Yu-Faye Chao

**Institute of Electro-Optical Engineering,
National Chiao Tung University**



Abstract

This work presents the application of polarizer—sample—analyzer (PSA) imaging ellipsometer in measuring the ellipsometric parameters under the surface plasmon resonance (SPR) configuration. By using cylindrical lens to produce multiple incident angles, one can obtain the ellipsometric parameters for a fan shaped incident angles. A PSA ellipsometer is composed of polarizer, sample, and analyzer. Using three-intensity technique and numeric calculations, one can measure the ellipsometric parameters without calibrating the errors of azimuth angles of polarizer and analyzer. Through beam expander, cylindrical lens and charge-coupled device (CCD), a fan-shaped multiple incident angle measurement can be achieved without adjusting any optical elements.

At the beginning, a standard silicon wafer is used to test the reliability of PSA imaging ellipsometer with converging beam through a regular reflection condition. Then, we calibrate the SPR experiment by air. In the end, we measure the water by the same setup around its resonant angle. All measured results are compared with the theoretical model.

致謝

求學的路上，一路遇到貴人的相助：老師、同學、朋友，當然還有我最親愛的家人，是你們點點滴滴成就以前的我、現在的我，以及未來的我。

我親愛的家人，你們無私呵護最年幼的我，讓我不受外在的紛擾，專注在自己的目標上。你們的全力支持，始終是我最幸福、最幸運的後盾。能無後顧之憂的追尋目標、釐清方向，感謝有你們，感謝是你們。

在大三那一年，我加入現在的實驗室。感謝趙于飛老師營造自由自主的氣息，讓我盡可能嘗試錯誤、大量閱讀，也提供我足夠的時間，證明與修正自己的想法。與老師的討論，使我跳脫無關緊要的思維，更加專注問題本質。

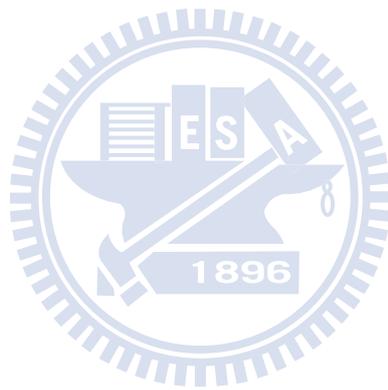
修銘學長對我的幫助不僅在實驗研究上，能和你討論未來規劃可能的方向時，總是能讓我思考良多。建遠學長雖然畢業且在外工作，仍然會針對我的研究問題提出解決方法，讓我能有效的處理問題，感謝學長百忙之中抽空回覆。在研究中演算法的部分，俊逸學長分享的方法十分受用，也在數據圖形的分析上，幫助我找出最核心的癥結所在，謝啦！因為研究的關聯性，和韋廷學長一直有很多的討論；中、晚餐買便當的時間，便是我們聊棒球、聊新鮮事的時候，那是一段很有趣的時光。

感謝以上所有人在我的碩士生涯的幫助。

目錄

第一章 序論	1
第二章 原理	3
2.1 光的橢圓偏極態與 Jones Vector	3
2.2 史脫克參數(Stokes Parameter)與穆勒矩陣(Mueller Matrix).....	6
2.3 橢圓參數(Ellipsometric parameters) ψ 和 Δ 之定義	9
2.4 反射光之史脫克參數和穆勒矩陣.....	13
2.5 簡式橢圓儀(Polarizer—Sample—Analyzer)介紹與系統校正	15
2.6 表面電漿共振(Surface Plasmon Resonance, SPR)	20
2.7 稜鏡之入射光與出射光偏極態之修正式.....	25
第三章 實驗步驟與結果	27
3.1 矽標準片量測架構與結果.....	27
3.1.1 實驗目的.....	27
3.1.2 實驗架構.....	27
3.1.3 量測步驟.....	28
3.1.4 實驗結果.....	29
3.2 SPR 量測架構與結果	31
3.2.1 實驗目的.....	31
3.2.2 待測物為空氣的量測.....	31
3.2.2.1 實驗架構.....	31
3.2.2.2 量測步驟.....	32
3.2.2.3 實驗結果.....	33
3.2.3 待測物為水的量測.....	35
3.2.3.1 實驗架構.....	35
3.2.3.2 量測步驟.....	36

3.2.3.3 實驗結果.....	36
第四章 結論.....	40
參考文獻.....	42
附錄：光場水平判別法.....	44



圖目錄

圖 2.1 橢圓偏極光.....	4
圖 2.2 線性偏極光.....	5
圖 2.3 圓偏極光.....	5
圖 2.4 塊狀物結構.....	10
圖 2.5 單層膜結構.....	11
圖 2.6 雙層膜結構.....	12
圖 2.7 ψ 隨入射角變化示意圖	20
圖 2.8 Δ 隨入射角變化示意圖	20
圖 2.9 Otto 結構	21
圖 2.10 Kretschmann 結構	21
圖 2.11 金屬層—待測物層示意圖.....	23
圖 2.12 稜鏡內/外電場示意圖	25
圖 3.1 SiO_2/Si 影像橢圓儀架構圖.....	27
圖 3.2 未經高斯平滑濾鏡處理之影像.....	28
圖 3.3 高斯平滑濾鏡處理後之影像.....	28
圖 3.4 入射角與像素位置關係.....	29
圖 3.5 ψ 與入射角的關係圖	30
圖 3.6 Δ 與入射角的關係圖	30
圖 3.7 不同待測物折射率之下的 Ψ vs.入射角示意圖	31
圖 3.8 不同待測物折射率之下的 Δ vs.入射角示意圖.....	31
圖 3.9 SPR-PSA 影像橢圓儀架構圖(待測物為空氣).....	32
圖 3.10 SPR cell 結構側面圖.....	32
圖 3.11 入射角和像素位置關係圖.....	33

圖 3.12 ψ 與入射角的關係圖	34
圖 3.13 Δ 與入射角的關係圖	34
圖 3.14 SPR-PSA 影像橢圓儀架構圖(待測物為水)	35
圖 3.15 SPR cell 結構側面	35
圖 3.16 入射角與像素位置關係圖	37
圖 3.17 沒有修正偏極態時的 ψ 與 入射角關係圖	37
圖 3.18 修正偏極態後的 ψ 與入射 角關係圖	37
圖 3.19 沒有修正偏極態時的 Δ 與 入射角關係圖	37
圖 3.20 修正偏極態後的 Δ 與入射 角關係圖	37
圖 3.21 入射角與像素位置關係圖	38
圖 3.22 ψ 與入射角關係圖	39
圖 3.23 Δ 與入射角關係圖	39
圖 A.1 光場影像分佈圖	44
圖 A.2 α 示意圖	44
圖 A.3 未修正 α 實驗分佈圖	45
圖 A.4 修正後 α 實驗分佈圖	46
圖 A.5 中心 α 實驗值與邊緣 α 實驗值	46

第一章 序論

當一已知偏極態(polarized state)的光源入射至待測物(sample)時，會受到待測物本身的光學性質(如：折射率、厚度等)而改變其偏極態。藉由量測偏極態的改變，便可推得待測物的光學參數。運用這種量測方法的技術稱為橢圓偏光術(ellipsometry)[1]，這項技術已在薄膜量測上行之有年[1]，從這技術發展出來的儀器稱為橢圓儀(ellipsometer)。

最早發展出來的橢圓儀屬歸零式橢圓儀(nulling ellipsometer)，這種橢圓儀是藉由找出光強度最暗點來反推待測物特性，因此需要極靈敏的偵測器才會有較好的精準度。另外有亮度式橢圓儀(photometric ellipsometer)，Meyer et.al 測量析光片(analyzer)在不同方位角下的反射光強度[2]，得到待測物的光學參數。本實驗室由趙于飛教授等人發展出三點量測技術(three-intensity technique)[3]，應用於簡式橢圓儀 PSA(Polarizer—Sample—Analyzer ellipsometer)，只需要將析光片旋轉三種方位角，分別量取光強度後即可推算橢圓參數(ellipsometric parameters) ψ 和 Δ 。後來經由林奕德利用數值方法[4]，將偏振片與析光片的方位角誤差修正，量測完畢立即得到修正後的橢圓參數，大幅提高實驗方便性與可靠度。李振佑則進一步搭配擴束元件與電子耦合裝置 CCD(Charge-Coupled Device)於簡式橢圓儀[5]，建構簡式影像式橢圓儀。

另外，表面電漿共振技術 SPR(Surface Plasmon Resonance)亦應用於薄膜量測[6]，此技術為測量感測器表面待測物折射率的變化。由於其高靈敏度的特性，且不同的待測物濃度會有不同的折射率，近年來被廣泛應用於生物分子的濃度檢測。表面電漿共振乃追蹤反射光的強度變化與相位改變，光強度變化有較廣的量測動態範圍(dynamic range)，而相位變化則有較高的靈敏度。在一般使用單點量測時[7][8]，如果量測光強度變化，將面臨靈敏度不足的缺點；如果量測相位變化，則會有動態範圍狹窄的問題。因此，Robert A. Lieberman 與 A.V. Kabashin

等人相繼提出以會聚光束(converging beam)入射至感應器上[9][10]，利用連續且多入射角進行量測，如此一來便能突破靈敏度與動態範圍選擇其一的困境。儘管如此，研究工作仍僅限於量測反射光的強度，在相位量測上的研究成果十分有限。值得一提的是，利用反射光強度量測生物分子或化學成份時，其隨角度分佈的銳利度(sharpness)會下降，會讓光強度最低點的入射角位置無法被明確判定[10]。如果採用相位量測的方法，因相位的變化程度比光強度的變化來得劇烈，有助於判斷待測物細微濃度的變化。

本文結合簡式橢圓儀與表面電漿共振系統，以會聚光束與二維影像式架構，量測空氣和水的表面電漿共振，並同時觀測其強度與相位的變化。首先以矽標準片，驗證會聚光束應用於簡式影像式橢圓儀的可行性與可靠性。接著，分別以空氣和水為待測物，進行橢圓參數的量測。在這三個實驗當中，連結入射角與像素位置(pixel position)的關係式是一大關鍵。此關係式將橢圓參數與像素位置的關係，轉換為橢圓參數與入射角的關係，並與理論圖形做比較。

第二章 原理

2.1 光的橢圓偏極態與Jones Vector

光波即為電磁波，我們通常以時變的電場分佈來描述光波的偏極態。假設光行進方向為 z 方向，那麼電場振動方向為沿著 x - y 平面，因此電場的數學表示式可為

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\hat{x} + E_y(z,t)\hat{y} \quad (2.1)$$

其中

$$E_x(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad (2.2a)$$

$$E_y(z,t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y) \quad (2.2b)$$

k : 波數(wave number)

ω : 角頻率(angular frequency)

δ_x 、 δ_y : x 方向與 y 方向相位(phase)

將 (2.2a)和 (2.2b)展開並改寫

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} = \cos(\omega t - kz) \cos(\delta_x) - \sin(\omega t - kz) \sin(\delta_x) \quad (2.3a)$$

$$\frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} = \cos(\omega t - kz) \cos(\delta_y) - \sin(\omega t - kz) \sin(\delta_y) \quad (2.3b)$$

接著合併(2.3a)和(2.3b)

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \sin(\delta_y) - \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \sin(\delta_x) = \cos(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.4a)$$

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \cos(\delta_y) - \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \cos(\delta_x) = \sin(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.4b)$$

讓(2.4a)和(2.4b)各別平方後相加以去除時間項，得

$$\left(\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z,t)}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}}\frac{E_y(z,t)}{E_{0y}}\cos(\delta) = \sin^2(\delta) \quad (2.5)$$

$$\delta = \delta_y - \delta_x$$

(2.5)即為橢圓方程式，描述電場在 x-y 平面上的偏振軌跡，猶如橢圓形或其變形態。然而(2.5)式並非代表一般橢圓數學形式：橢圓的長、短軸未恰好在 x 軸與 y 軸上。因此需經由座標轉換旋轉 θ 角以求得標準橢圓方程式，如圖 2.1 所示，x-y 座標與 x'-y'座標的轉換關係為

$$E_x = E'_x \cos \theta - E'_y \sin \theta \quad (2.6a)$$

$$E_y = E'_x \sin \theta + E'_y \cos \theta \quad (2.6b)$$

將(2.6a)和(2.6b)代入(2.5)，可得

$$\frac{E_x'^2}{a^2} + \frac{E_y'^2}{b^2} = 1 \quad (2.7a)$$

$$a^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \theta + E_{0y}^2 \sin^2 \theta + 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \cos \theta \sin \theta \quad (2.7b)$$

$$b^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \theta + E_{0y}^2 \cos^2 \theta - 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \cos \theta \sin \theta \quad (2.7c)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (2.7d)$$

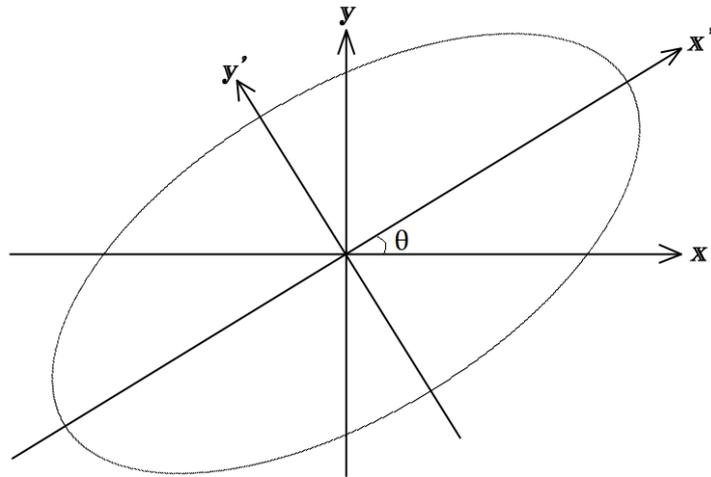


圖 2.1 橢圓偏極光

在這裡列舉兩種橢圓偏極光的特例：

(1) 當 $\delta = 0$ 或 $\delta = \pm\pi$ 時，電場沿著單一線性方向振動，稱之為線性偏極光(圖 2.2)。

(2) 當 $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ 並且 x 方向與 y 方向之電場大小相等時，電場為圓偏極光(圖 2.3)。

其它的條件則構成橢圓偏極光。



圖 2.2 線性偏極光

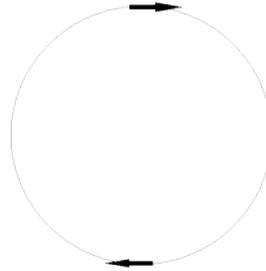


圖 2.3 圓偏極光

為了直接描述電場的偏振狀態，常使用 2×1 階的瓊斯向量(Jones vector)。

$$|E\rangle = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.8)$$

一般而言，瓊斯向量只能表示純偏極光(purely polarized light)，而無法表示完全非偏極光(unpolarized light)或部分偏極光(partially polarized light)，因此需使用史脫克參數(Stokes parameter)來表示大部分的偏極光。

2.2 史脫克參數(Stokes Parameter)與穆勒矩陣(Mueller Matrix)

史脫克參數為 4 x 1 階的矩陣

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_x^* E_y \\ i(E_x E_y^* - E_x^* E_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x} E_{0y} \cos \delta \\ 2E_{0x} E_{0y} \sin \delta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

S_0 : 光強度

S_1 : 偏極態偏向水平(正值)或者偏向垂直(負值)

S_2 : 偏極態偏向+45°(正值)或-45°(負值)

S_3 : 偏極態偏向右旋(正值)或左旋(負值)

史脫克參數亦可表示為

$$S = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ p \cdot \cos 2\theta \cos 2\phi \\ p \cdot \sin 2\theta \cos 2\phi \\ p \cdot \sin 2\phi \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

I_0 : 光強度(Intensity)

p : 偏極度(degree of polarization)

θ : 橢圓方位角(orientation angle)

ϕ : 橢圓率角(ellipticity angle)

而

$$p = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (2.11)$$

$p=1$ 為純偏極光， $p=0$ 為完全非偏極光，介於0和1間的為部分偏極光。此表示式即可清楚標明偏極化的程度。

穆勒矩陣為 4 x 4 矩陣，是可描述實際光學元件的數學表示方法，以下列舉理想的偏振片(只有一個軸方向可穿透光，與其垂直方向軸則完全不透光)和延遲片的

穆勒矩陣形式[11]。

偏振片(穿透軸於水平面上)：

$$M_P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

延遲片(快軸於水平面上)：

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ϕ 為相位延遲

另外，旋轉矩陣為

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

θ 為穿透軸或快軸旋轉角度

為了表示不同穿透軸和快軸的角度，我們便利用旋轉矩陣來改寫(2.12)和(2.13)

$$M'_P(2\theta) = M_R(-2\theta) \cdot M_P \cdot M_R(2\theta) \quad (2.15a)$$

$$M'_C(2\theta) = M_R(-2\theta) \cdot M_C \cdot M_R(2\theta) \quad (2.15b)$$

由(2.15a)改寫的偏振片(任意穿透軸角度)：

$$M'_P(2\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

由(2.15b)改寫的延遲片(任意快軸角度)：

$$M'_c(2\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \phi & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin 2\theta \sin \phi \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \cos \phi & \cos 2\theta \sin \phi \\ 0 & \sin 2\theta \sin \phi & -\cos 2\theta \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

當系統有多個光學元件時，只需將它們的穆勒矩陣依序相乘即可

$$M_{total} = M_n \cdot M_{n-1} \cdots M_2 \cdot M_1 \quad (2.18)$$

M_{total} 為光源到光偵測器間所有光學元件的等效穆勒矩陣， M_1 為光源後第一件光學元件， M_2 則為緊接著 M_1 的光學元件，其餘以此類推。



2.3 橢圓參數(Ellipsometric parameters) ψ 和 Δ 之定義

我們定義橢圓參數 ψ 和 Δ 為

$$\tan \psi \cdot e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \left| \frac{r_p}{r_s} \right| \cdot e^{i(\delta_p - \delta_s)} \quad (2.19)$$

$$r_p = |r_p| \cdot e^{i\delta_p}$$

$$r_s = |r_s| \cdot e^{i\delta_s}$$

r_p : p 波之反射係數

r_s : s 波之反射係數

δ_p : p 波之相位

δ_s : s 波之相位

由(2.19)可得

$$\tan \psi = \left| \frac{r_p}{r_s} \right| \quad (2.20a)$$

$$\Delta = \delta_p - \delta_s \quad (2.20b)$$

因此 $\tan \psi$ 為反射光的 p 波和 s 波反射係數大小的比值， Δ 為 p 波和 s 波的相位差。 ψ 和 Δ 即為橢圓儀實驗量測的重要參數，由這兩個數值可導出光學參數，例如：入射角、待測物的折射率、待測物的厚度...等等。在了解橢圓參數和光學參數之間的關聯前，先介紹 Fresnel equations[12]

$$r_{ab,p} = \frac{n_b \cos \theta_a - n_a \cos \theta_b}{n_b \cos \theta_a + n_a \cos \theta_b} \quad (2.21a)$$

$$r_{ab,s} = \frac{n_a \cos \theta_a - n_b \cos \theta_b}{n_a \cos \theta_a + n_b \cos \theta_b} \quad (2.21b)$$

$$t_{ab,p} = \frac{2n_a \cos \theta_a}{n_b \cos \theta_a + n_a \cos \theta_b} \quad (2.21c)$$

$$t_{ab,s} = \frac{2n_a \cos \theta_a}{n_a \cos \theta_a + n_b \cos \theta_b} \quad (2.21d)$$

$r_{ab,p}$: p 波之反射係數

$r_{ab,s}$: s 波之反射係數

$t_{ab,p}$: p 波之穿透係數

$t_{ab,s}$: s 波之穿透係數

n_a : 入射前介質 a 之折射率

n_b : 入射後介質 b 之折射率

θ_a : 入射角

θ_b : 折射角

界面的電場反射與穿透比率可用(2.21a)~(2.21d)描述，也就是四個 Fresnel equations。接下來將運用這四個式子於以下三種情況：

- (1) 塊狀物 (bulk medium)：只有兩種材質、單一介面、單次反射
這是最單純的情況，只有兩種材質需要考慮，因此由(2.19)、(2.21a)和(2.21b)即可得知橢圓參數(ψ, Δ)與(n_0, n_1, θ_0)之間的關係。

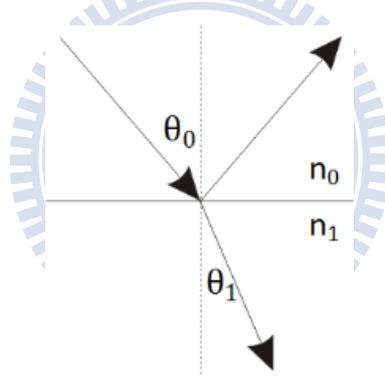


圖 2.4 塊狀物結構

- (2) 單層膜 (single thin film)：有三種材質、兩層介面、多次反射
由圖 2.5 知道反射光是由許多光干涉的結果。在介質 0 相鄰反射光的相位差為 2β ， β 為

$$\beta = \frac{2\pi d}{\lambda} n_1 \cos \theta_1 \quad (2.22)$$

d : 介質 1 的薄膜厚度

λ : 自由空間的波長

結合(2.21a)~(2.21d)和(2.22)，我們便可得到總體的反射係數：

$$r = r_{01} + t_{01}t_{10}r_{12}e^{-i2\beta} + t_{01}t_{10}r_{10}r_{12}^2e^{-i4\beta} + t_{01}t_{10}r_{10}^2r_{12}^3e^{-i6\beta} + \dots \quad (2.23)$$

(2.23)可進一步整理為

$$r = \frac{r_{01} + r_{12}e^{-i2\beta}}{1 + r_{01}r_{12}e^{-i2\beta}} \quad (2.24)$$

(2.24)適用於 p 波和 s 波，因此 r_p 和 r_s 的形式為

$$r_p = \frac{r_{p01} + r_{p12}e^{-i2\beta}}{1 + r_{p01}r_{p12}e^{-i2\beta}} \quad (2.25a)$$

$$r_s = \frac{r_{s01} + r_{s12}e^{-i2\beta}}{1 + r_{s01}r_{s12}e^{-i2\beta}} \quad (2.25b)$$

(2.25a)和(2.25b)配合(2.19)，便可取得 (ψ, Δ) 與 $(n_0, n_1, n_2, \theta_0, d)$ 之間的關係，因此當 (ψ, Δ) 與 (n_0, n_1, n_2) 為已知時， (θ_0, d) 即可從中求出。

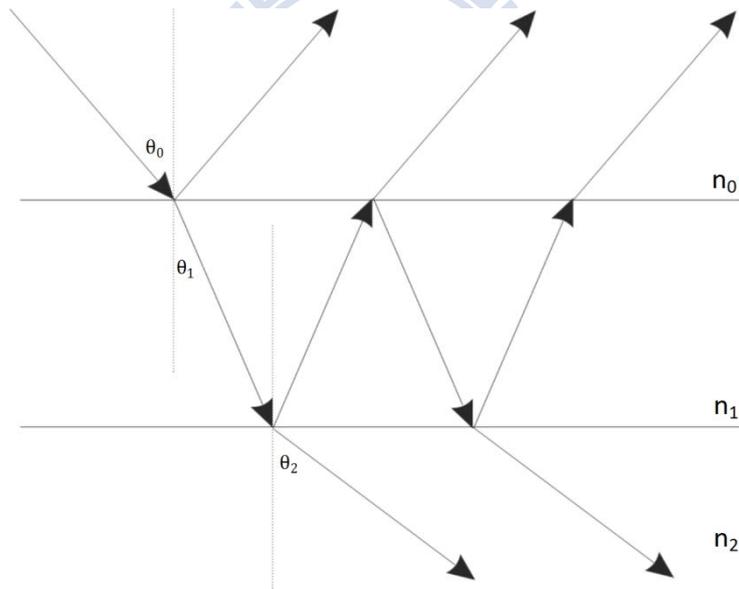


圖 2.5 單層膜結構

(3) 雙層膜 (double thin film)：有四種材質、三層介面、多次反射

反射光除了來自介質 0 和介質 1 的介面反射、介質 1 和介質 2 的介面反射外，還有來自介質 2 和介質 3 的介面反射，在各介質間還有穿透再反射等現象，如圖 2.6 所示，因此形成反射光的來源多樣且複雜。然而我們還是可以利用

單層膜的概念，來分析雙層膜結構的反射係數。首先處理介質 1、2、3，利用(2.24)，我們可以得到介質 2 加上介質 3 總體等效的反射係數 r_{123} 。

$$r_{123} = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-i2\beta_2}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i2\beta_2}} \quad (2.26)$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi d_2}{\lambda} n_2 \cos \theta_2$$

d_2 ：介質 2 的薄膜厚度

至此，雙層膜的結構被等效為「介質 0—介質 1—介質 2+介質 3」的單層膜結構，我們便再利用(2.24)，搭配(2.26)來完成雙層膜結構的數學形式，因此整體反射係數 r_{0123}

$$r_{0123} = \frac{r_{01} + r_{123}e^{-i2\beta_1}}{1 + r_{01}r_{123}e^{-i2\beta_1}} \quad (2.27)$$

再一次的，(2.27)的形式適用於 p 波和 s 波，因此 r_p 和 r_s 便為

$$r_p = \frac{r_{p01} + r_{p12}e^{-i2\beta_1} + r_{p23}e^{-i2\beta_2}(r_{p01}r_{p12} + e^{-i2\beta_1})}{1 + r_{p01}r_{p12}e^{-i2\beta_1} + r_{p23}e^{-i2\beta_2}(r_{p12} + r_{p01}e^{-i2\beta_1})} \quad (2.28a)$$

$$r_s = \frac{r_{s01} + r_{s12}e^{-i2\beta_1} + r_{s23}e^{-i2\beta_2}(r_{s01}r_{s12} + e^{-i2\beta_1})}{1 + r_{s01}r_{s12}e^{-i2\beta_1} + r_{s23}e^{-i2\beta_2}(r_{s12} + r_{s01}e^{-i2\beta_1})} \quad (2.28b)$$

利用(2.19)和(2.28a)與(2.28b)，我們便能以橢圓參數推得待測物光學常數，

例如： (ψ, Δ) 與 $(n_0, n_1, n_2, n_3, d_1)$ 為已知時， (θ_0, d_2) 便可求得。

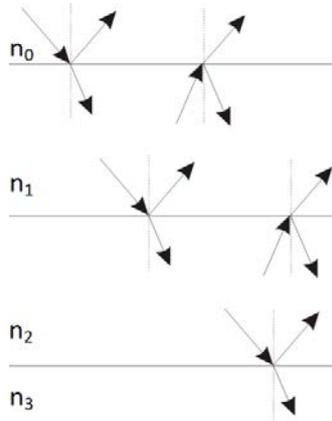


圖 2.6 雙層膜結構

2.4 反射光之史脫克參數和穆勒矩陣

不論是入射光或是反射光，都可以用(2.9)的史脫克參數表示。

入射光的史脫克參數：

$$\begin{bmatrix} S_{i0} \\ S_{i1} \\ S_{i2} \\ S_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p E_p^* + E_s E_s^* \\ E_p E_p^* - E_s E_s^* \\ E_p E_s^* + E_p^* E_s \\ i(E_p E_s^* - E_p^* E_s) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

反射光的史脫克參數：

$$\begin{bmatrix} S_{r0} \\ S_{r1} \\ S_{r2} \\ S_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p R_p^* + R_s R_s^* \\ R_p R_p^* - R_s R_s^* \\ R_p R_s^* + R_p^* R_s \\ i(R_p R_s^* - R_p^* R_s) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

因為

$$\begin{aligned} R_s &= r_s E_s \\ R_p &= r_p E_p \end{aligned} \quad (2.31)$$

(2.29)和(2.30)可寫成矩陣形式：

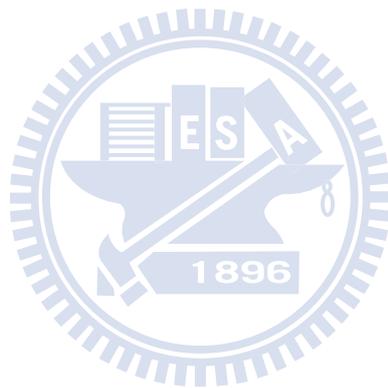
$$\begin{bmatrix} S_{r0} \\ S_{r1} \\ S_{r2} \\ S_{r3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_p r_p^* + r_s r_s^* & r_p r_p^* - r_s r_s^* & 0 & 0 \\ r_p r_p^* - r_s r_s^* & r_p r_p^* + r_s r_s^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_p r_s^* + r_p^* r_s & -i(r_p r_s^* - r_p^* r_s) \\ 0 & 0 & i(r_p r_s^* - r_p^* r_s) & r_p r_s^* + r_p^* r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{i0} \\ S_{i1} \\ S_{i2} \\ S_{i3} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

由(2.19)的定義，(2.32)可改寫為

$$\begin{bmatrix} S_{r0} \\ S_{r1} \\ S_{r2} \\ S_{r3} \end{bmatrix} = \frac{r_s r_s^*}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \psi & -1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & 2 \tan \psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \sin \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{i0} \\ S_{i1} \\ S_{i2} \\ S_{i3} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

(2.33)中的 4 x 4 矩陣為無向性待測物(isotropic medium)的穆勒矩陣，即

$$M_{sample} = \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \psi & -1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & 2 \tan \psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \sin \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{bmatrix} \quad (2.34)$$



2.5 簡式橢圓儀(Polarizer—Sample—Analyzer, PSA)介紹與系統校正

簡式橢圓儀的架構為入射光 S_i ，經過偏振片 M_P 後至待測物 M_S 反射，再經過析光片 M_A 而得到出射光 S_o 。實驗中只能量到光強度，因此需利用 2.2 節與 2.4 節提到的穆勒矩陣和史脫克參數，來探討橢圓參數和偏振片與析光片之方位角間的關係[4]：

$$S_o = M_A \cdot M_S \cdot M_P \cdot S_i \quad (2.35)$$

S_o 的 S_0 項為實驗中量測到的光強度：

$$I = I_0(\sin^2 P \sin^2 A + \tan^2 \psi \cos^2 P \cos^2 A + 0.5 \cdot \tan \psi \cos \Delta \sin 2P \sin 2A) \quad (2.36)$$

Meyer 等人則把 $P=45^\circ$ 代入，並將光強度分佈寫成類橢圓形式[2]

$$I(A) = \frac{L}{2} \cos^2(A - \theta) + \frac{T}{2} \sin^2(A - \theta) \quad (2.37)$$

其中， L 和 T 為長軸與短軸， θ 為偏振角。比較(2.36)和(2.37)的係數，可得到

$$L = I_0(\tan^2 \psi \cos^2 P \cos^2 \theta + \sin^2 P \sin^2 \theta + 0.5 \tan \psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (2.38a)$$

$$T = I_0(\tan^2 \psi \cos^2 P \sin^2 \theta + \sin^2 P \cos^2 \theta - 0.5 \tan \psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (2.38b)$$

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\psi}{\cos 2P - \cos 2\psi} \quad (2.38c)$$

接著將(2.37)改寫為

$$I(A) = B \cdot (1 + C \cdot \cos 2A + D \cdot \sin 2A) \quad (2.39)$$

$$B = \frac{L+T}{2}, \quad C = \frac{L-T}{L+T} \cos 2\theta, \quad D = \frac{L-T}{L+T} \sin 2\theta$$

上式中有三個未知數，我們便旋轉析光片至 0° 、 60° 、 120° 並測量光強度值，藉由解三個聯立方程式即可得到 (B, C, D) ，此方法稱為三點量測法[3]。

$$B = \frac{1}{3}(I(0^\circ) + I(60^\circ) + I(120^\circ)) \quad (2.40a)$$

$$C = 2 - \frac{1}{B}(I(60^\circ) + I(120^\circ)) \quad (2.40b)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{3}B}(I(60^\circ) - I(120^\circ)) \quad (2.40c)$$

結合(2.38a)、(2.38b)和(2.40a)~(2.40c)，可進一步得到橢圓參數 (ψ, Δ) ：

$$C = \frac{L-T}{L+T} \cos 2\theta = \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \psi}$$

$$\tan^2 \psi = \frac{1+C}{1-C} \tan^2 P \quad (2.41)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+C}{1-C} \tan^2 P} \right) \quad (2.42)$$

由(2.38c)、(2.42)和(C,D)，可得

$$\frac{D}{C} = \tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\psi}{\cos 2P - \cos 2\psi}$$

$$\Delta = \cos^{-1} \left(\frac{D(\cos 2P - \cos 2\psi)}{C \sin 2P \sin 2\psi} \right) \quad (2.43)$$

以上未考慮偏光片和析光片的方位角誤差，因此橢圓參數的準確度會受到影響。

為了修正此誤差，現在假設偏光片方位角的誤差為 α ，析光片方位角的誤差為 β ，

則光強度(2.36)和(2.37)將改寫為：

$$I = I_0 [\sin^2(P + \alpha) \sin^2(A + \beta) + \tan^2 \psi \cos^2(P + \alpha) \cos^2(A + \beta) + 0.5 \cdot \tan \psi \cos \Delta \sin 2(P + \alpha) \sin 2(A + \beta)] \quad (2.44a)$$

$$I(A) = \frac{L}{2} \cos^2(A + \beta - \theta) + \frac{T}{2} \sin^2(A + \beta - \theta) \quad (2.44b)$$

(2.44b)可寫為

$$I(A) = B(1 + C \cos 2A + D \sin 2A)$$

$$B = \frac{L+T}{2} \quad (2.45a)$$

$$C = \frac{L-T}{L+T} \cos 2(\theta - \beta) \quad (2.45b)$$

$$D = \frac{L-T}{L+T} \sin 2(\theta - \beta) \quad (2.45c)$$

比較(2.44a)和(2.44b)的係數後，得

$$L = I_0 [\tan^2 \psi \cos^2 (P + \alpha) \cos^2 \theta + \sin^2 (P + \alpha) \sin^2 \theta + 0.5 \tan \psi \sin 2(P + \alpha) \sin 2\theta \cos \Delta] \quad (2.46a)$$

$$T = I_0 [\tan^2 \psi \cos^2 (P + \alpha) \sin^2 \theta + \sin^2 (P + \alpha) \cos^2 \theta - 0.5 \tan \psi \sin 2(P + \alpha) \sin 2\theta \cos \Delta] \quad (2.46b)$$

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2(P + \alpha) \sin 2\psi}{\cos 2(P + \alpha) - \cos 2\psi} \quad (2.46c)$$

利用(2.46a)和(2.46b)，我們可以得到以下結果：

$$\frac{(L+T)^2}{LT} = \frac{(\cot \psi \tan(P + \alpha) + \cot(P + \alpha) \tan \psi)^2}{\sin^2 \Delta} \quad (2.47a)$$

$$\frac{L-T}{L+T} \cos 2\theta = \frac{-\sin^2 (P + \alpha) + \cos^2 (P + \alpha) \tan^2 \psi}{\sin^2 (P + \alpha) + \cos^2 (P + \alpha) \tan^2 \psi} \quad (2.47b)$$

將(2.46c)、(2.47a)和(2.47b)合併為

$$\frac{(L-T)^2}{4LT} \sin^2 2[(\theta - \beta) + \beta] = \cot^2 \Delta \quad (2.48)$$

當 $P=45^\circ+\alpha$ 時，利用(2.40a)~(2.40c)和(2.45a)~(2.45c)得到 $(L_1, T_1, \theta_1-\beta)$ 後，再代入

(2.48)得

$$\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2[(\theta_1 - \beta) + \beta] = \pm \cot \Delta \quad (2.49a)$$

同理，當 $P=-45^\circ+\alpha$ 時，推得 $(L_2, T_2, \theta_2-\beta)$ 後代入(2.48)

$$\frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2[(\theta_2 - \beta) + \beta] = \pm \cot \Delta \quad (2.49b)$$

因為 $\theta_1 \approx -\theta_2$ ，所以合併(2.49a)與(2.49b)為

$$\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2[(\theta_1 - \beta) + \beta] = -\frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2[(\theta_2 - \beta) + \beta] \quad (2.50)$$

由(2.50)反推析光片方位角的誤差 β ：

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(- \frac{\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2(\theta_1 - \beta) + \frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2(\theta_2 - \beta)}{\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \cos 2(\theta_1 - \beta) + \frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \cos 2(\theta_2 - \beta)} \right) \quad (2.51)$$

至此 $\theta_1 - \beta$ 、 $\theta_2 - \beta$ 和 β 為已知，所以可得偏振角 (θ_1, θ_2) 。另外 (L_1, T_1, L_2, T_2) 也在先前步驟求出，由(2.47b)將可得到兩個式子：

$$\begin{cases} \frac{L_1 - T_1}{L_1 + T_1} \cos 2\theta_1 = \frac{-\sin^2(45^\circ + \alpha) + \cos^2(45^\circ + \alpha) \tan^2 \psi}{\sin^2(45^\circ + \alpha) + \cos^2(45^\circ + \alpha) \tan^2 \psi} \equiv C_1 \\ \frac{L_2 - T_2}{L_2 + T_2} \cos 2\theta_2 = \frac{-\sin^2(-45^\circ + \alpha) + \cos^2(-45^\circ + \alpha) \tan^2 \psi}{\sin^2(-45^\circ + \alpha) + \cos^2(-45^\circ + \alpha) \tan^2 \psi} \equiv C_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan^2 \psi = \frac{1 + C_1}{1 - C_1} \tan^2(45^\circ + \alpha) & (2.52a) \\ \tan^2 \psi = \frac{1 + C_2}{1 - C_2} \tan^2(-45^\circ + \alpha) & (2.52b) \end{cases}$$

將(2.52a)和(2.52b)相乘：

$$\begin{aligned} \tan^4 \psi &= \frac{1 + C_1}{1 - C_1} \frac{1 + C_2}{1 - C_2} \\ \Rightarrow \psi &= \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{1 + C_1}{1 - C_1} \frac{1 + C_2}{1 - C_2} \right)^{\frac{1}{4}} \right\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

合併(2.52a)和(2.52b)：

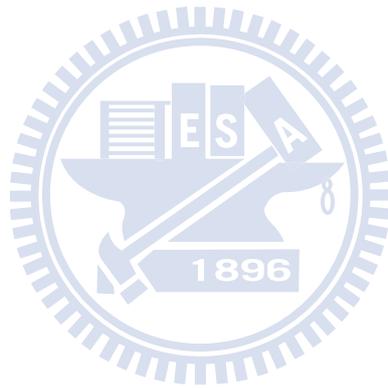
$$\begin{aligned} \frac{1 + C_1}{1 - C_1} \tan^2(45^\circ + \alpha) &= \frac{1 + C_2}{1 - C_2} \tan^2(-45^\circ + \alpha) \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + C_1}{1 - C_1} \frac{1 - C_2}{1 + C_2}}}{1 + \sqrt{\frac{1 + C_1}{1 - C_1} \frac{1 - C_2}{1 + C_2}}} \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

最後，把求得的參數 $(\alpha, \beta, \psi, \theta_1)$ 及 $P=45^\circ$ 代入(2.46c)解 Δ ：

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\cos \Delta \sin 2(45^\circ + \alpha) \sin 2\psi}{\cos 2(45^\circ + \alpha) - \cos 2\psi}$$

$$\Rightarrow \Delta = \cos^{-1} \left(\frac{\tan 2\theta_1 (\cos 2(45^\circ + \alpha) - \cos 2\psi)}{\sin 2(45^\circ + \alpha) \sin 2\psi} \right) \quad (2.55)$$

在上述的推導當中，最終得到不受偏光片方位角 α 和析光片方位角 β 誤差影響的橢圓參數 (ψ, Δ) 。



2.6 表面電漿共振(Surface Plasmon Resonance, SPR)

表面電漿波(surface plasmon wave)是處於金屬層與待測物之間界面的電磁波，能藉由外加電子或光子來激發，形成表面電子的共振運動。當入射光在金屬層中，沿著界面的波向量分量 k_x 等於表面電漿波的波向量 k_{SPR} ，也就是滿足色散條件 ($k_x=k_{SPR}$)時，表面電漿波便會被激發出來，形成表面電漿共振(Surface plasmon resonance, SPR)。此激發條件和金屬的折射率、待測物的折射率、波長和入射角度有關。當表面電漿共振產生時，因入射光的能量被大量耦合至金屬—待測物界面層，生成表面電漿波，出射光的光強度便會大幅度的衰減，相位亦有相當大的改變，此時的入射角便稱為共振角(resonant angle)。值得一提的是，只有 p 波才會在光強度與相位有明顯的變化，s 波則不會有顯著的改變。因此在 p 波的反射係數隨入射角變化的圖形中，可看到如圖 2.7 和圖 2.8 的趨勢，而 s 波的反射係數則沒有這樣的現象。圖 2.7 顯示 ψ 和入射角度的變化關係，在入射角為共振角時會有最小值，也就是 p 波的反射光最弱的時候。圖 2.8 則是相位 Δ 的變化，在共振角附近，相位有極大的變化，形成圖中斜率最陡峭的區域。

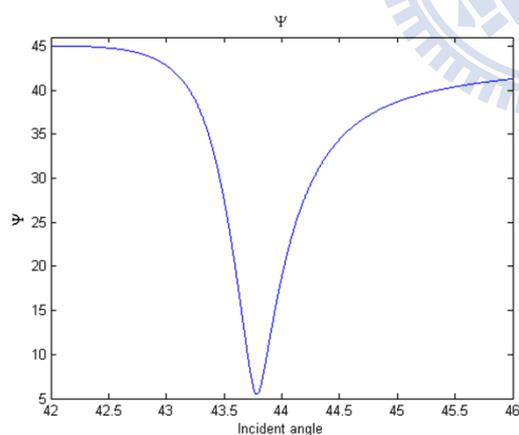


圖 2.7 ψ 隨入射角變化示意圖

在共振角時有最小值

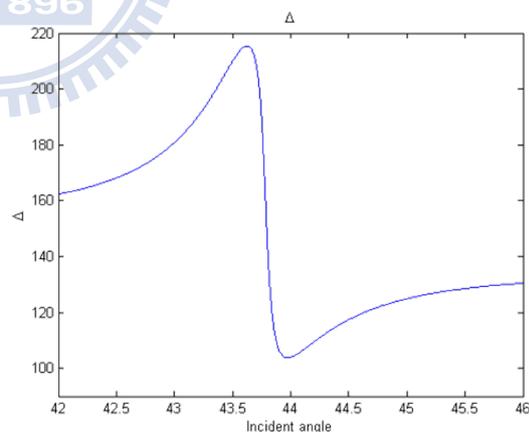


圖 2.8 Δ 隨入射角變化示意圖

在共振角附近時有極大的變化

由於直接從空氣入射至金屬無法產生匹配 k_{SPR} 的水平分量 k_x ，色散條件便不能成立，因此需借助一些光學元件來製造足夠的 k_x 。常見的架構有[6]：稜鏡耦合式、光柵耦合式和光波導耦合式。其中最常用的是稜鏡耦合式，此乃利用衰減全反射

法(Attenuated Total Reflection, ATR)，由 A. Otto 提出的架構(如圖 2.9)，為稜鏡—待測物—金屬層的結構。為了使全反射產生的消逝波能傳達至金屬層以誘發表面電漿共振，稜鏡和金屬層的間隙需保持極短的距離。然而此距離不易控制均勻，因此後來由 E. Kretschmann 提出稜鏡—金屬層—待測物的架構，稱為 Kretschmann 結構(圖 2.10)。這種結構只需要適當控制金屬的厚度即可有靈敏的量測效果，所以是目前很普遍使用的方法。

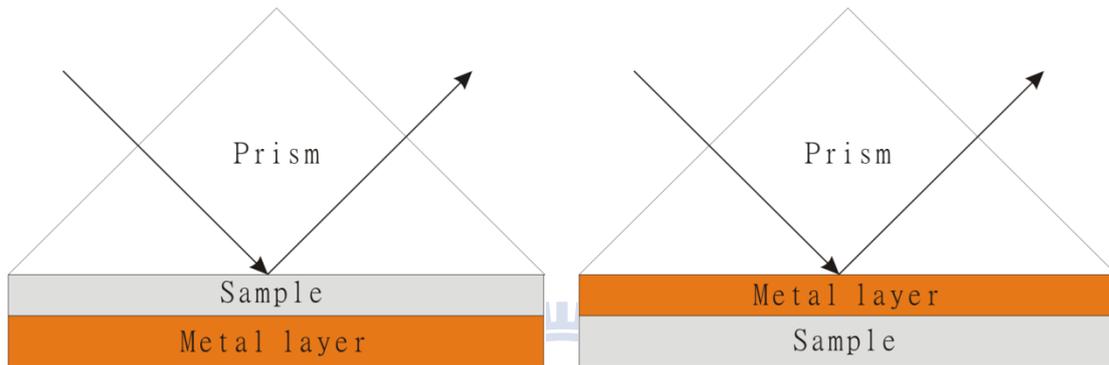


圖 2.9 Otto 結構

圖 2.10 Kretschmann 結構

一般而言，為了誘發表面電漿共振的現象，必須滿足以下兩個條件：

- (1) 入射光在金屬層的水平方向之波向量 k_x 等於表面電漿波向量 k_{spr}

$$k_{spr} = k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d}}$$

其中 ω 為光的頻率， c 為光速， ϵ_m 為金屬的介電係數， ϵ_d 為待測物的介電係數。

- (2) 只有 TM 波(p 波)能誘發表面電漿共振。

接下來將以馬克士威爾方程式(Maxwell equations)與邊界條件證明以上兩點。在無外加電荷與電流之下，馬克士威爾方程式之二式可寫成

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.56a)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.56b)$$

假設入射光為平面波且只有單一波長，則電場和磁場可表示為

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (2.57a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp[-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (2.57b)$$

將(2.57a)和(2.57b)代入(2.56a)和(2.56b)，可得[13]

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (2.58a)$$

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \varepsilon \vec{E}_0 \quad (2.58b)$$

接著假設光波僅沿著 x-z 平面傳播而無 y 方向分量，如圖 2.11，那麼在金屬層的

TE 模態和 TM 模態的電場向量及磁場向量可分別表示為

TE 模態：

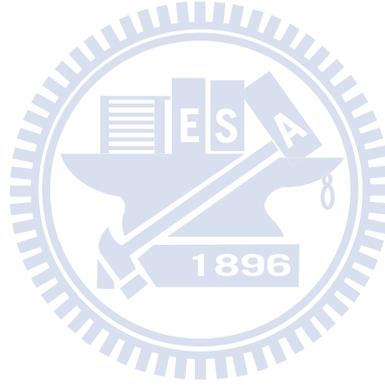
$$\vec{E}_{0_m} = (0, E_{y_m}, 0) \quad (2.59a)$$

$$\vec{H}_{0_m} = (H_{x_m}, 0, H_{z_m}) \quad (2.59b)$$

TM 模態：

$$\vec{E}_{0_m} = (E_{x_m}, 0, E_{z_m}) \quad (2.60a)$$

$$\vec{H}_{0_m} = (0, H_{y_m}, 0) \quad (2.60b)$$



同樣的，待測物中的 TE 模態和 TM 模態的電場向量及磁場向量為

TE 模態：

$$\vec{E}_{0_d} = (0, E_{y_d}, 0) \quad (2.61a)$$

$$\vec{H}_{0_d} = (H_{x_d}, 0, H_{z_d}) \quad (2.61b)$$

TM 模態：

$$\vec{E}_{0_d} = (E_{x_d}, 0, E_{z_d}) \quad (2.62a)$$

$$\vec{H}_{0_d} = (0, H_{y_d}, 0) \quad (2.62b)$$

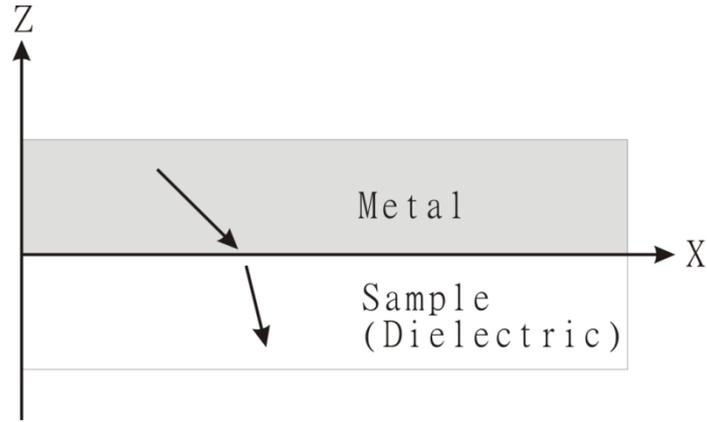


圖 2.11 金屬層—待測物層示意圖

首先討論 TE 模態的情形。分別將(2.59a)與(2.59b)、(2.61a)與(2.61b)代入(2.58a)，

即可得到

$$\begin{cases} k_{z_m} E_{y_m} = -\omega \mu_m H_{x_m} \\ k_{x_m} E_{y_m} = \omega \mu_m H_{z_m} \\ k_{z_d} E_{y_d} = -\omega \mu_d H_{x_d} \\ k_{x_d} E_{y_d} = \omega \mu_d H_{z_d} \end{cases} \quad (2.63)$$

另外，TE 模態需滿足邊界條件(boundary condition)

$$\begin{cases} E_{y_m} = E_{y_d} \\ \mu_m H_{z_m} = \mu_d H_{z_d} \\ H_{z_m} = H_{z_d} \\ k_{x_m} = k_{x_d} \end{cases} \quad (2.64)$$

由於兩材質皆為非磁性材料，因此 $\mu_m \approx \mu_d \approx 1$ 。將(2.64)代入(2.63)中，得

$$k_{z_m} = k_{z_d} \quad (2.65)$$

根據色散關係(dispersion relation)

$$k_{x_m}^2 + k_{z_m}^2 = \epsilon_m \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.66a)$$

$$k_{x_d}^2 + k_{z_d}^2 = \epsilon_d \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.66b)$$

如果 $\epsilon_m \neq \epsilon_d$ ，那麼將(2.65)代入(2.66a)和(2.66b)後會得到 $\epsilon_m = \epsilon_d$ 的矛盾結果，因此

推得 TE 模態無法誘發表面電漿共振。現在改為 TM 模態，將(2.60a)與(2.60b)、(2.62a)與(2.62b)分別代入(2.58b)，得

$$\begin{cases} k_{z_m} H_{y_m} = \omega \varepsilon_m E_{x_m} \\ k_{x_m} H_{y_m} = -\omega \varepsilon_m E_{z_m} \\ k_{z_d} H_{y_d} = \omega \varepsilon_d E_{x_d} \\ k_{x_d} H_{y_d} = -\omega \varepsilon_d E_{z_d} \end{cases} \quad (2.67)$$

另外，TM 模態需滿足邊界條件

$$\begin{cases} H_{y_m} = H_{y_d} \\ E_{x_m} = E_{x_d} \\ \varepsilon_m E_{z_m} = \varepsilon_d E_{z_d} \\ k_{x_m} = k_{x_d} \end{cases} \quad (2.68)$$

將(2.68)代入(2.67)，得

$$k_{z_d} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} k_{z_m} \quad (2.69)$$

最後把(2.69)代入色散關係(2.66a)以及(2.66b)，便能得到

$$k_{x_d} = k_{x_m} = k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}} = k_{spr} \quad (2.70)$$

至此，我們已證明先前提到的兩個誘發表面電漿共振的要點：只有 TM 波能引起表面電漿共振及需滿足色散關係(2.70)。

2.7 稜鏡之入射光與出射光偏極態之修正式

當光從一種介質進入到另一種介質時，因折射率的不同，在介面出現部分反射與部分穿透的現象，而 p 波和 s 波的反射率與穿透率可能因此而有所不同。如果入射光垂直入射於介面，由 Fresnel 方程式(2.21a)~(2.21d)可得知，p 波和 s 波的反射係數與穿透係數分別一致；然而當入射角非垂直入射時，p 波和 s 波的反射係數與穿透係數便出現差異，這會讓入射光的偏極態改變，進而影響橢圓參數值(ψ , Δ)。在本論文的表面電漿共振實驗裡，當雷射光從空氣入射至稜鏡，與從稜鏡出射至空氣時，在這兩者介面上的雷射光往往非垂直入射，因此會製造「額外」的偏極態改變。以下即推導在「空氣→稜鏡」與「稜鏡→空氣」這兩個介面的光偏極態修正式。

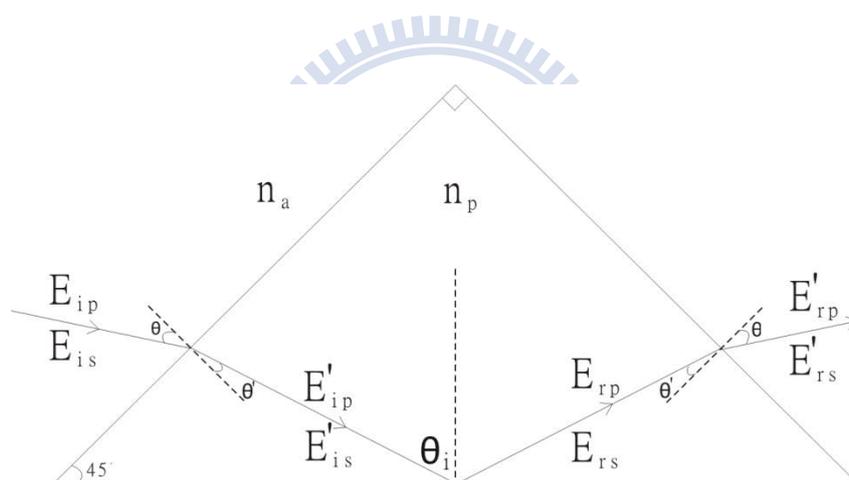


圖 2.12 稜鏡內/外電場示意圖

圖 2.12 中的 (θ, θ') 與 θ_i 彼此是相互關聯的，為了將 θ 和 θ' 以 θ_i 表示，我們可以幾何關係尋找它們的關係式。首先由圖 2.12 中的各個已知角度，推出

$$\theta' = \theta_i - 45^\circ \quad (2.71)$$

而 θ 可由 Snell's law

$$n_a \cdot \sin \theta = n_p \cdot \sin \theta' \quad (2.72)$$

得

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{n_p}{n_a} \cdot \sin \theta' \right) = \sin^{-1} \left(\frac{n_p}{n_a} \cdot \sin(\theta_i - 45^\circ) \right) \quad (2.73)$$

至此， (θ, θ') 與 θ_i 的關係已確立。接下來要從理論修正由穿透係數影響的 (ψ, Δ) 值。 (ψ, Δ) 的定義為(參照圖 2.12)

$$\tan \psi \cdot e^{i\Delta} = r_p / r_s = \left(\frac{E_{rp}}{E'_{ip}} \right) / \left(\frac{E_{rs}}{E'_{is}} \right) \quad (2.74)$$

然而實際量測到的橢圓參數為 (ψ', Δ')

$$\tan \psi' \cdot e^{i\Delta'} = r'_p / r'_s = \left(\frac{E'_{rp}}{E'_{ip}} \right) / \left(\frac{E'_{rs}}{E'_{is}} \right) \quad (2.75)$$

定義「空氣→稜鏡」介面的 p 波和 s 波的穿透係數為 (t_{p1}, t_{s1}) ，而「稜鏡→空氣」介面的 p 波和 s 波的穿透係數為 (t_{p3}, t_{s3}) ，我們可以得到以下關係式：

$$\begin{cases} E'_{ip} = t_{p1}(\theta, \theta') \cdot E_{ip} \\ E'_{is} = t_{s1}(\theta, \theta') \cdot E_{is} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{ip} = E'_{ip} / t_{p1}(\theta, \theta') \\ E_{is} = E'_{is} / t_{s1}(\theta, \theta') \end{cases} \quad (2.76a)$$

$$\begin{cases} E'_{rp} = t_{p3}(\theta, \theta') \cdot E_{rp} \\ E'_{rs} = t_{s3}(\theta, \theta') \cdot E_{rs} \end{cases} \quad (2.76b)$$

將(2.76a)與(2.76b)代入(2.75)，並和(2.74)比較後，得

$$\tan \psi' \cdot e^{i\Delta'} = \left(\frac{t_{p1}(\theta, \theta') t_{p3}(\theta, \theta')}{t_{s1}(\theta, \theta') t_{s3}(\theta, \theta')} \right) \cdot \left(\frac{E_{rp}}{E'_{ip}} \right) / \left(\frac{E_{rs}}{E'_{is}} \right) = \left(\frac{t_{p1}(\theta, \theta') t_{p3}(\theta, \theta')}{t_{s1}(\theta, \theta') t_{s3}(\theta, \theta')} \right) \cdot \tan \psi \cdot e^{i\Delta} \quad (2.77)$$

所以可得結論：

$$\tan \psi' = \left(\frac{t_{p1}(\theta, \theta') t_{p3}(\theta, \theta')}{t_{s1}(\theta, \theta') t_{s3}(\theta, \theta')} \right) \cdot \tan \psi \quad (2.78a)$$

$$\Delta' = \Delta \quad (2.78b)$$

穿透係數中 (θ, θ') 由(2.71)和(2.73)轉換，以 θ_i 替代，因此角度的變化只需考慮 θ_i 的影響即可。

第三章 實驗步驟與結果

3.1 矽標準片量測架構與結果

3.1.1 實驗目的

藉由標準片 SiO_2/Si 的水平多入射角量測，來驗證會聚光束應用於簡式影像式橢圓儀的可行性與可靠度。

3.1.2 實驗架構

在此實驗中，採用的待測物為 SiO_2/Si 標準片，也就是以 Si 為基底，上面為 95nm 厚的 SiO_2 薄膜。擴束光經柱狀透鏡聚焦後，中心入射角為 70° ，向兩旁延伸約 $\pm 2^\circ$ 。毛玻璃(Ground glass)是用來破壞光斑(speckle)，避免對影像截取的干擾。

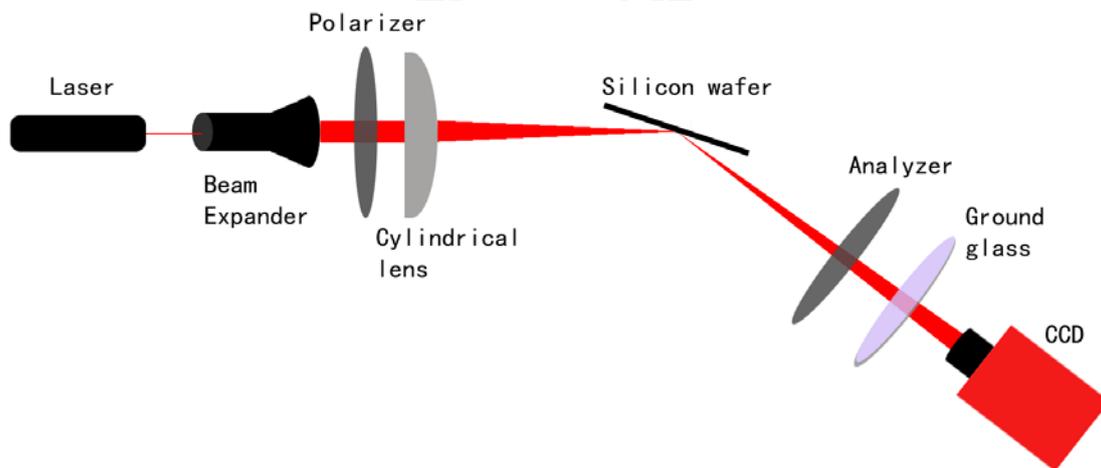


圖 3.1 SiO_2/Si 影像橢圓儀架構圖

Laser : Melles Griot He-Ne Laser, 波長為 632.8nm, 15mW 輸出

Beam expander : 7X 擴束；表面有鍍膜，為波長 632.8nm 所用

Polarizer (P)/Analyzer (A) : Melles Griot 03FPG005 sheet polarizer

Cylindrical lens : BK7 ($n=1.515$)

Sample : SiO_2/Si , 95nm thickness of SiO_2

CCD : AVT Pike F-032

3.1.3 量測步驟

- (1) 調整待測物的旋轉角，使中心入射角為 70° 。
- (2) 用光擴束器擴束。
- (3) 將 P 的穿透軸旋轉至 -45° ，再由柱狀透鏡會聚光束。
- (4) 依次將 A 的穿透軸旋轉至 0° 、 60° 、 120° ，並拍攝各個二維影像。
- (5) 此時將 P 的穿透軸旋轉至 45° ，並重覆步驟 4。

至此，實驗量測已全部完成。然而原始影像因通過毛玻璃後才被 CCD 拍攝，影像的光強度分佈會變得較雜亂而無法呈現高斯光束的分佈特性(如圖 3.2)，所以需將每張二維影像利用高斯平滑濾鏡(Gaussian smoother filter)來還原雷射光的高斯分佈狀態(如圖 3.3)。接著利用 2.5 節的公式計算出每個像素所量測到的橢圓參數(ψ, Δ)。

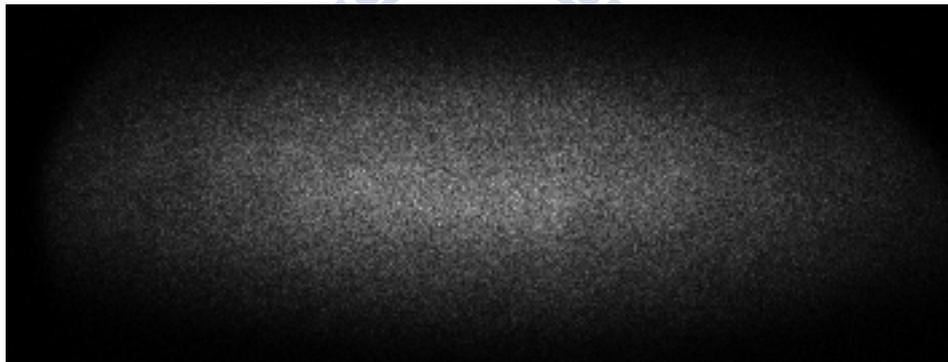


圖 3.2 未經高斯平滑濾鏡處理之影像

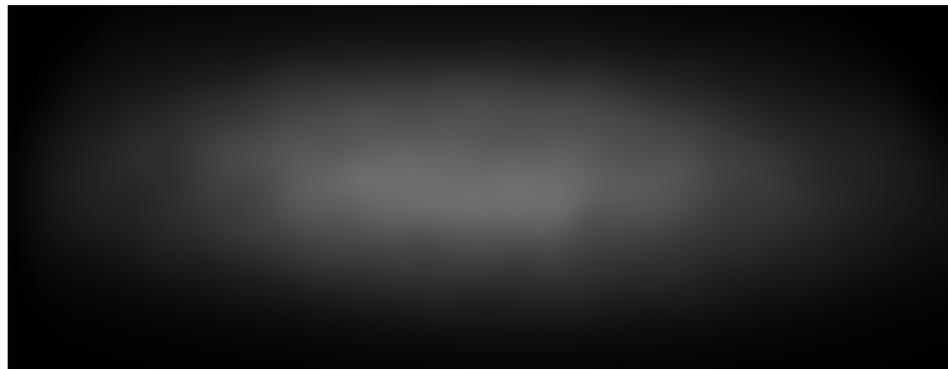


圖 3.3 高斯平滑濾鏡處理後之影像

3.1.4 實驗結果

在上一節中，我們已經得到每個像素位置所擁有的橢圓參數(ψ , Δ)。接下來，必須找出像素位置與入射角度之間的關聯。如此一來，我們便能還原入射角與橢圓參數的對應關係。運用 2.3 節單層膜的數學式(2.25a)和(2.25b)，將 SiO_2 的折射率、厚度，以及 Si 的折射率等常數代入理論計算，得到理論的橢圓參數值，接著與實驗值相比較，以求得每個像素位置對應的入射角度。圖 3.4 為入射角和像素位置的關係圖。圖中虛線部分為實驗值，粗實線為擬合線，線性式為入射角和像素位置的轉換關係式。

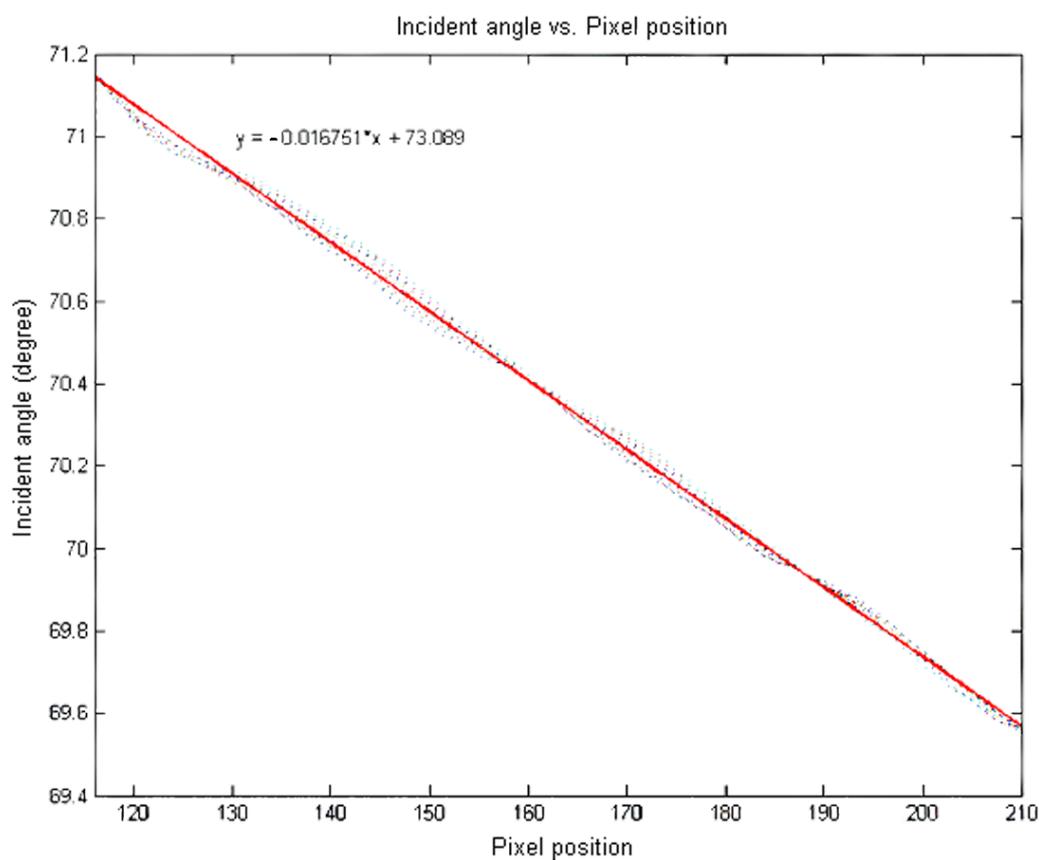


圖 3.4 入射角與像素位置關係

藉由圖 3.4 中的轉換式，橢圓參數(ψ , Δ)和入射角的關係為圖 3.5 和圖 3.6 所示。

虛線為實驗值，粗實線為理論值。

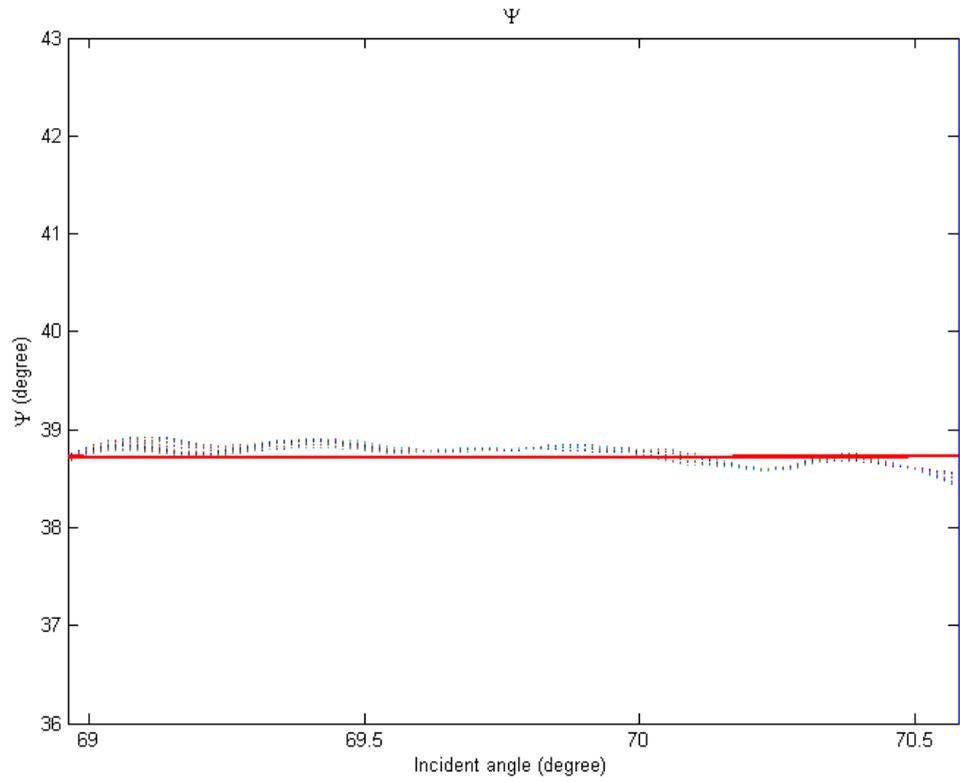


圖 3.5 ψ 與入射角的關係圖

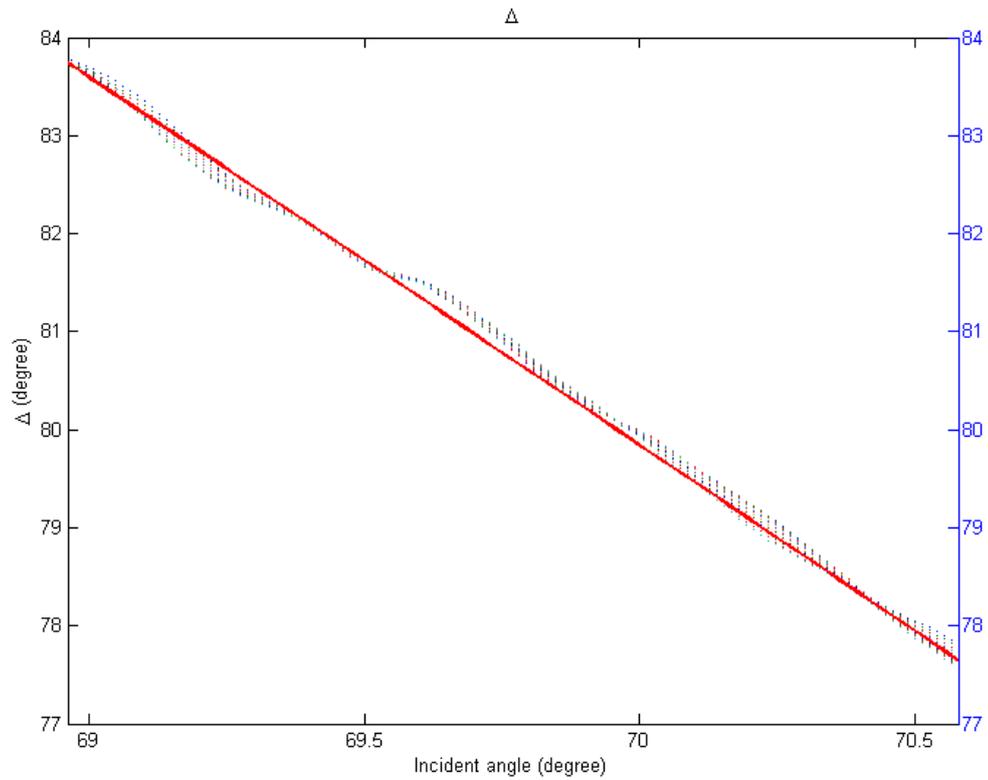


圖 3.6 Δ 與入射角的關係圖

3.2 SPR量測架構與結果

3.2.1 實驗目的

以往使用表面電漿共振方法量測時，常使用單一入射角，其缺點因表面電漿共振的動態範圍狹窄，而無法測量高濃度(或折射率)變化的待測物。以圖 3.7 與圖 3.8 為例，假設起始溶液在 ψ 與 Δ 圖形中的變化為折射率 1.332 之曲線所示，入射角固定在共振角(約 72°)附近。當溶液濃度有些許改變時(如折射率 1.335 曲線)，圖形發生了位移(shift)，因入射角對應到圖形的區間落在敏感量測區段(斜率最大的區段)，可依此特性進行高精準度的測量。然而當溶液濃度過高，致使圖形(如折射率 1.350 曲線)的偏移量過大，此時入射角對應到圖形的位置不再是敏感量測區間，使得量測的精準度大幅降低。如果為了量測不同的濃度而挪動光學元件，很可能引入人為誤差，增加實驗的困難度與準確性。因此沿用上一節的想法，於架構中加入柱狀透鏡以產生連續多入射角。在不需移動任何光學元件之下，一次完成多入射角的量測。以下使用兩種待測物：空氣和水，來驗證此一想法。

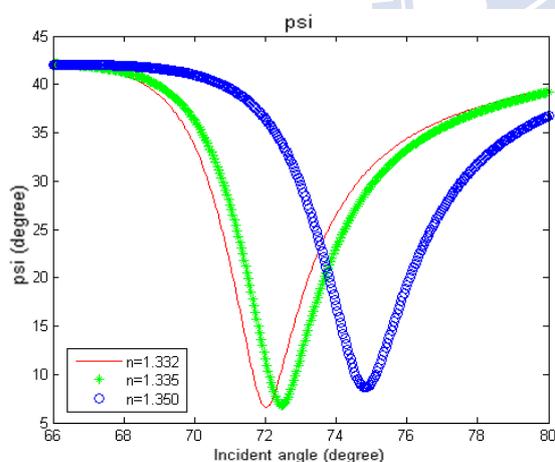


圖 3.7 不同待測物折射率之下的

Ψ vs.入射角示意圖

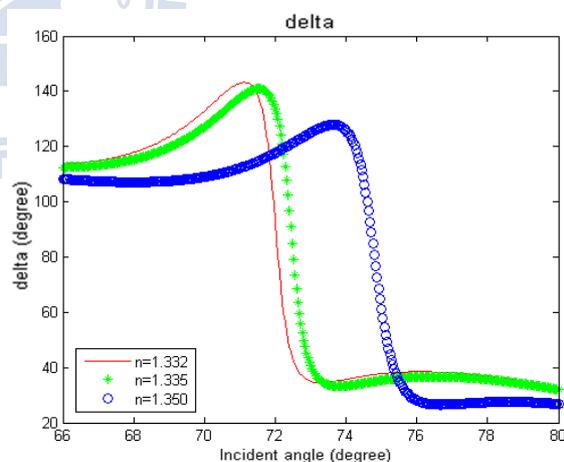


圖 3.8 不同待測物折射率之下的

Δ vs.入射角示意圖

3.2.2 待測物為空氣的量測

3.2.2.1 實驗架構

實驗架構與上個實驗大致相同(圖 3.9)，唯獨將待測物的部分換為 SPR cell，新的

待測物為空氣。由於空氣的共振角約為 45° ，會聚光的中心入射角依此改為 45° ，向兩旁延伸約 $\pm 2^\circ$ 。圖 3.10 顯示 SPR cell 的結構側面圖，由上而下分別為稜鏡、載玻片、黏接層、金層與待測物。稜鏡的選用為 BK7 ($n=1.515$) 材質，載玻片亦使用 BK7。為了使稜鏡與載玻片之間能無縫隙接合，加入折射率匹配油($n=1.517$) 於兩者之間。載玻片與金層之間，有一層厚度約為 2.05nm 的黏接層，材質為鎳金屬(Ni)。接著是厚度為 $47.5\text{nm} \pm 3\text{nm}$ 的金層。最後是待測物：空氣。

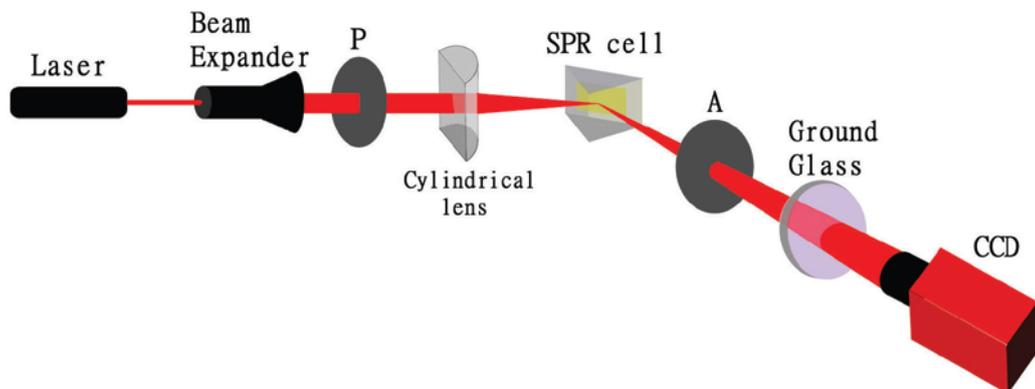


圖 3.9 SPR-PSA 影像橢圓儀架構圖(待測物為空氣)

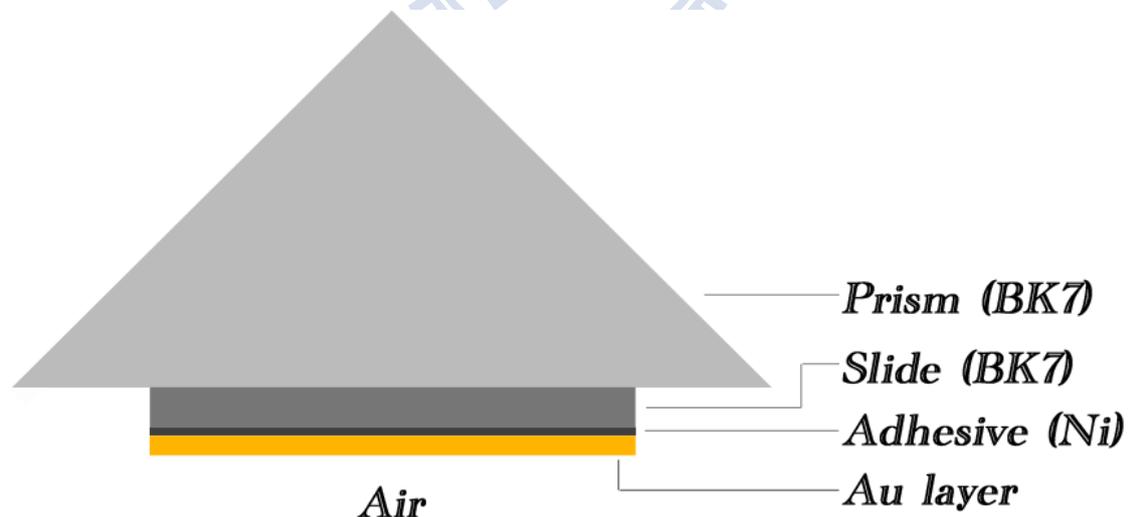


圖 3.10 SPR cell 結構側面圖

3.2.2.2 量測步驟

- (1) 調整中心入射角為 45° 。

- (2) 用光擴束器擴束。
- (3) 將 P 的穿透軸旋轉至 -45° ，再由柱狀透鏡會聚光束。
- (4) 依次將 A 的穿透軸旋轉至 0° 、 60° 、 120° ，並拍攝各個二維影像。
- (5) 此時將將 P 的穿透軸旋轉至 45° ，並重覆步驟 4。

和 3.1.3 節相同，在這實驗中拍攝的影像需使用高斯平滑濾鏡來還原雷射光的高斯分佈狀態，然後利用 2.5 節的公式計算出每個像素所量測到的橢圓參數(ψ, Δ)。

3.2.2.3 實驗結果

同樣的，一開始我們必須找出像素位置與入射角度之間的關聯，然後還原入射角與橢圓參數的對應關係。運用 2.3 節雙層膜結構的數學式(2.28a)和(2.28b)，將稜鏡折射率、鍍黏接層的折射率與厚度、金層的折射率與厚度等常數代入理論計算，得到理論的橢圓參數值，並利用 2.7 節的偏極態修正式修正(ψ, Δ)。接著與實驗值相比較，以求得每個像素位置對應的入射角度。圖 3.11 為入射角和像素位置的關係圖。圖中圓圈部分為實驗值，粗實線為擬合線，線性式為入射角和像素位置的轉換關係式。

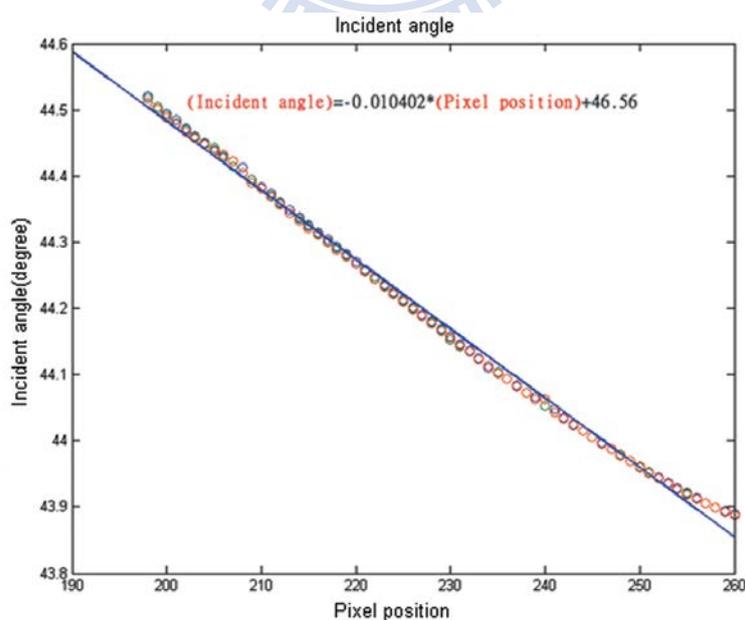


圖 3.11 入射角和像素位置關係圖

藉由圖 3.11 中的轉換式，橢圓參數(ψ, Δ)和入射角的關係為圖 3.12 和圖 3.13 所示。

虛線為實驗值，粗實線為理論值。

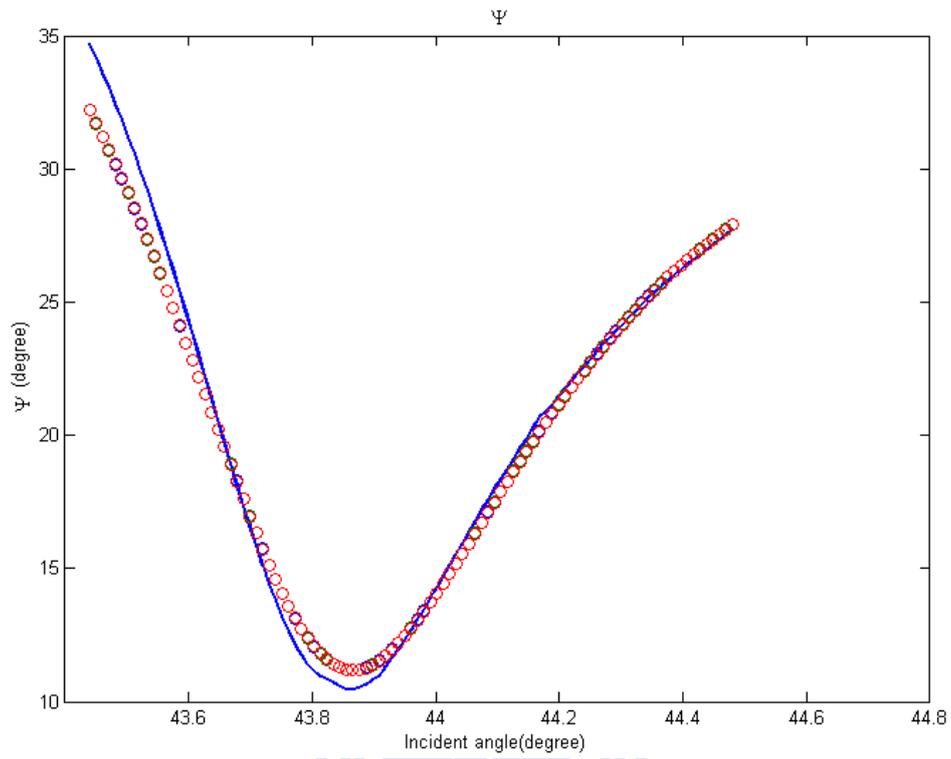


圖 3.12 ψ 與入射角的關係圖

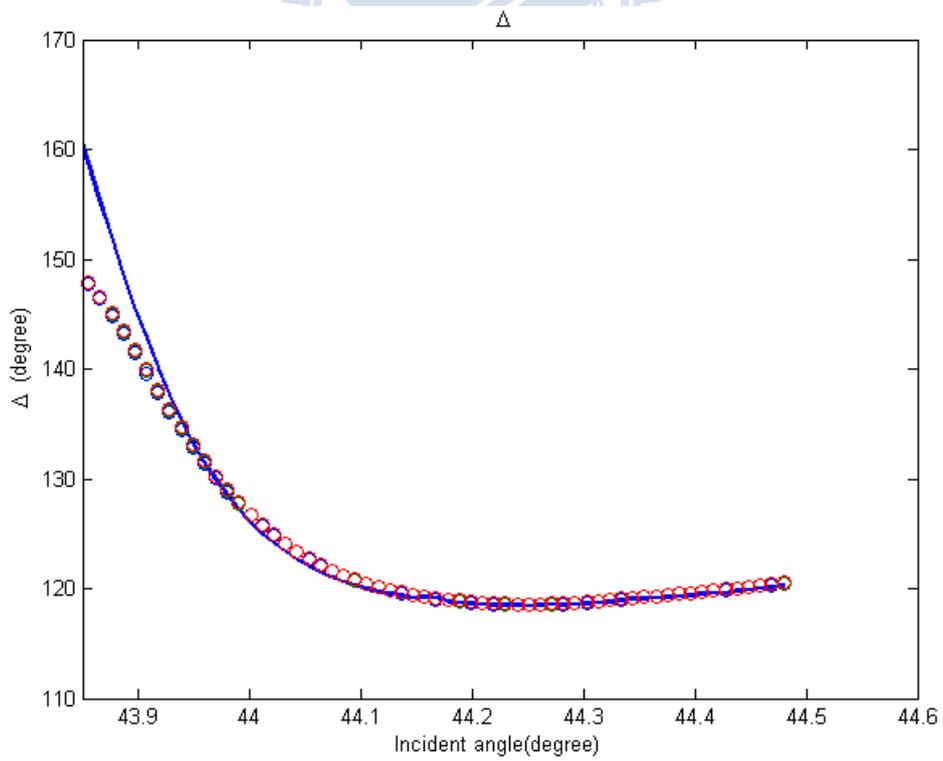


圖 3.13 Δ 與入射角的關係圖

3.2.3 待測物為水的量測

在這實驗中，為了引起水的表面電漿共振，需要增加入射角角度。此時入射角與稜鏡表面不再擁有近似垂直入射的條件，而改以大角度入射至稜鏡內部，因此 p 波和 s 波的穿透係數會有明顯的差異。如果不進行偏極態修正，會使得橢圓參數有極大的偏差。以下實驗先測量空氣在入射角為水的共振角附近時之條件，並比較使用 2.7 節偏極態修正式的前後差異，接著再進行水的表面電漿共振量測。

3.2.3.1 實驗架構

由於水的共振角約為 73° (這裡的角度係指稜鏡內的入射角)，因此從 SPR cell 以後的光學元件需調整位置，如圖 3.14 所示。調整後，所有元件皆在光軸上。此時中心入射角約為 73° ，待測物為水(圖 3.15)，使用水袋固定於金層，並在與金層接觸的地方開洞，讓水能直接與金層接觸，其餘參數設定與 3.2.2.1 節相同。

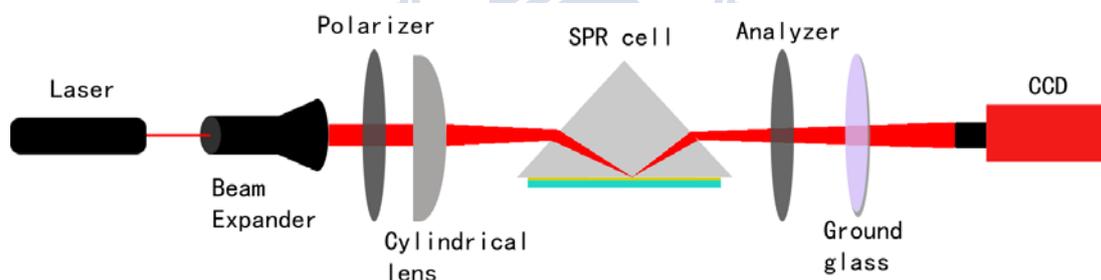


圖 3.14 SPR-PSA 影像橢圓儀架構圖(待測物為水)

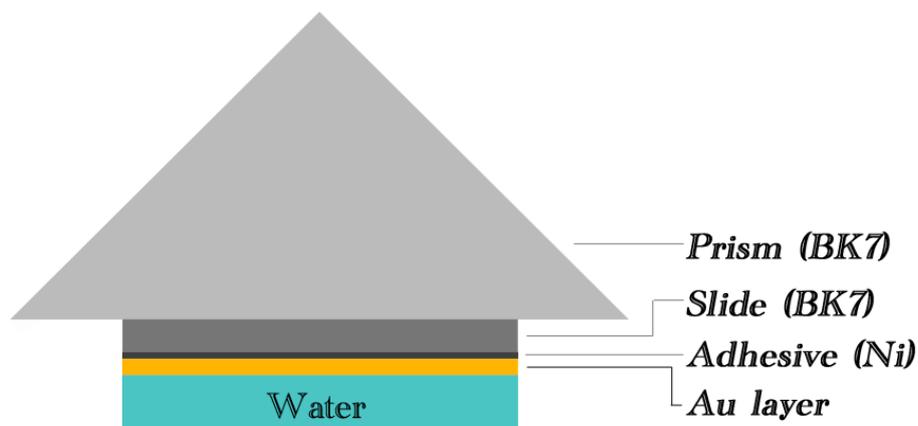


圖 3.15 SPR cell 結構側面

3.2.3.2 量測步驟

- (1) 調整中心入射角為 73° 。
- (2) 用光擴束器擴束。
- (3) 水袋先不加水，讓空氣充滿其中。
- (4) 將 P 的穿透軸旋轉至 -45° ，再由柱狀透鏡會聚光束。
- (5) 依次將 A 的穿透軸旋轉至 0° 、 60° 、 120° ，並拍攝各個二維影像。
- (6) 此時將 P 的穿透軸旋轉至 45° ，並重覆步驟 5。
- (7) 接著將水加入水袋中，讓金層完全與水接觸。
- (8) 重覆步驟 4~6。

最後，使用高斯平滑濾鏡來還原雷射光的高斯分佈，並運用 2.5 節的公式計算出每個像素所量測到的橢圓參數(ψ, Δ)。

3.2.3.3 實驗結果

一開始，我們先分析空氣量測的結果。利用 2.3 節雙層膜結構的數學式(2.28a)和(2.28b)，得到理論的橢圓參數值後，這邊要分成兩個部分討論：

- (1) 沒有使用偏極態修正式(2.78a)修正的(ψ, Δ)。
- (2) 有使用偏極態修正式(2.78a)修正的(ψ, Δ)。

接著分別與實驗值比較，以求得每個像素位置對應的入射角度。圖 3.16 為入射角—像素位置關係圖。依照這張圖中的轉換式，畫出圖 3.17~圖 3.20 橢圓參數(ψ, Δ)對入射角的分佈圖。比較圖 3.17 和圖 3.18，可觀察到沒有修正偏極態時， ψ 的理論值與實驗值有很大的差異；在修正過後，理論值和實驗值有很好的吻合。在 Δ 方面(圖 3.19 和圖 3.20)，如 2.7 節理論推得的結果，無需理論修正，且理論值與實驗值吻合。圖 3.16~圖 3.20 中，實線皆為理論值，圓圈代表實驗值。

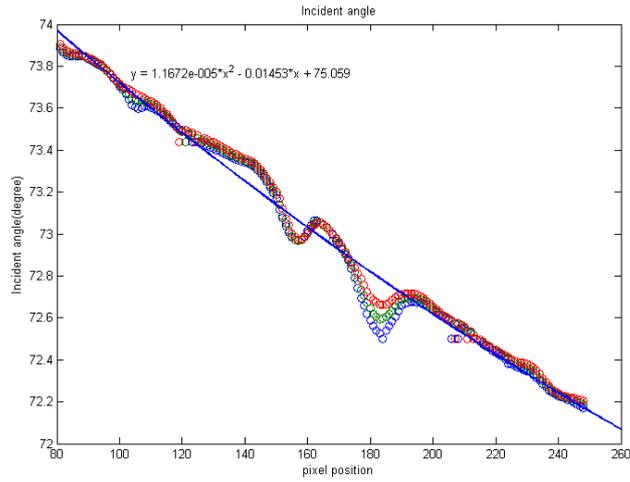


圖 3.16 入射角與像素位置關係圖

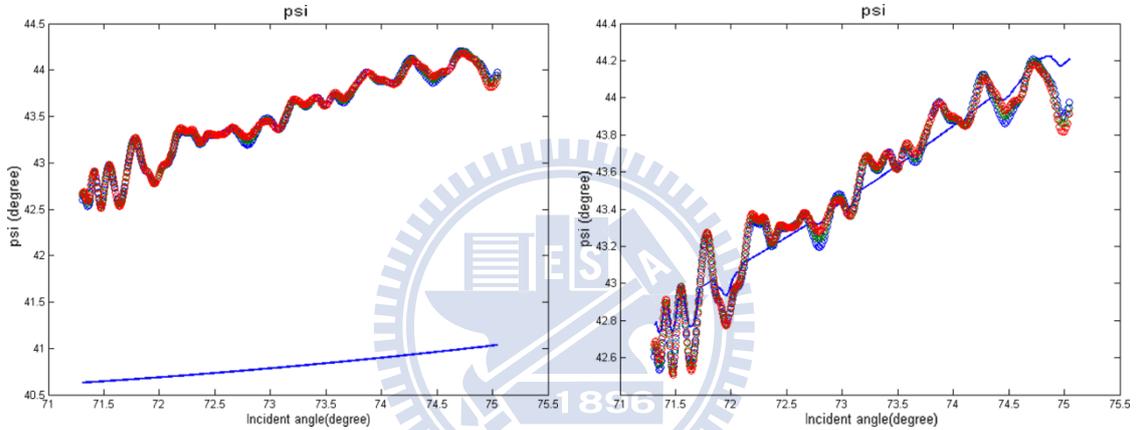


圖 3.17 沒有修正偏極態時的 ψ 與入射角關係圖

圖 3.18 修正偏極態後的 ψ 與入射角關係圖

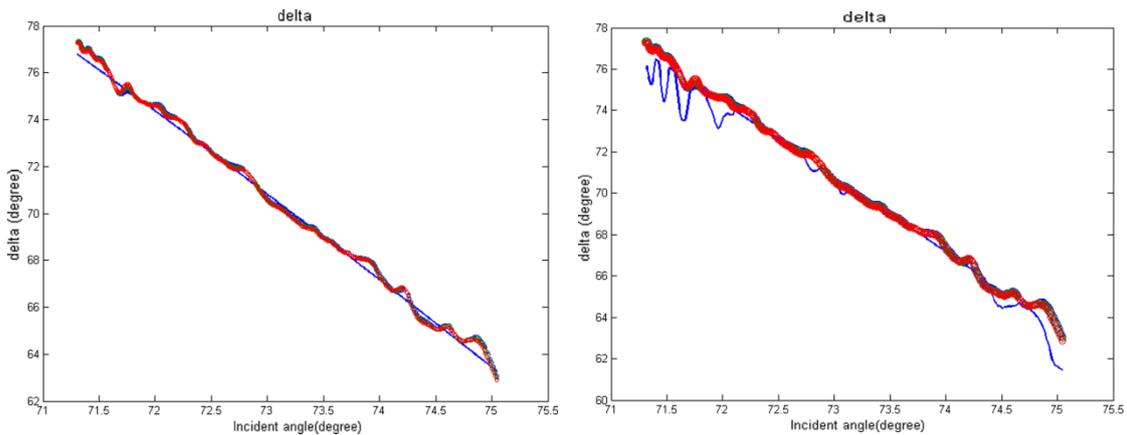


圖 3.19 沒有修正偏極態時的 Δ 與入射角關係圖

圖 3.20 修正偏極態後的 Δ 與入射角關係圖

最後是水的表面電漿共振量測。圖 3.21 為像素位置和入射角之間的關係，圓圈部分為實驗值，粗實線為擬合線，二次項式為入射角與像素位置的轉換關係式。此轉換式亦是利用(2.28a)與(2.28b)，搭配各介質的折射率與厚度，代入理論計算，得到理論的橢圓參數。接著再運用 2.7 節的(2.78a)，修正 p 波和 s 波不同穿透係數對橢圓參數的影響。最後將修正後的理論值與實驗值相比較，來得到像素位置與入射角的關係式。由這關係式可進一步畫出圖 3.22 和圖 3.23 的橢圓參數—入射角之圖形。圖中實線為理論值，圓圈為實驗值。

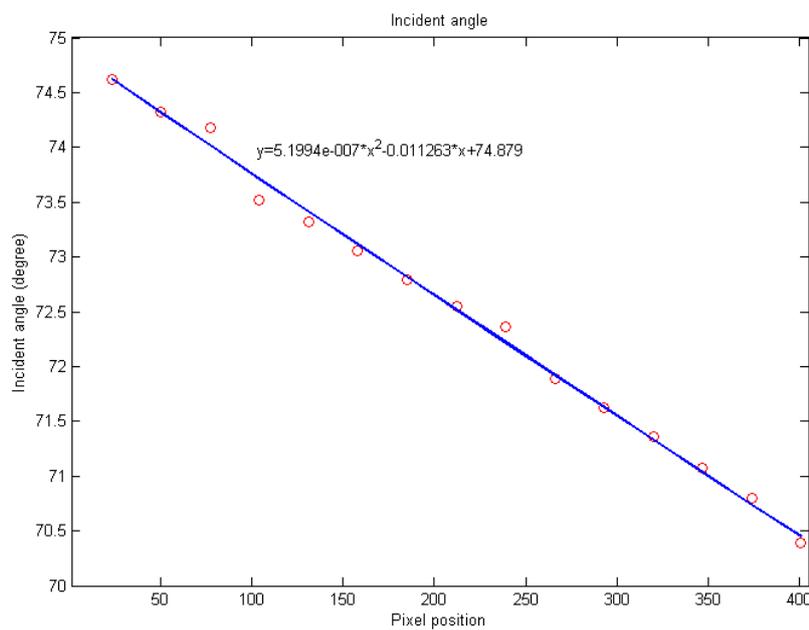


圖 3.21 入射角與像素位置關係圖

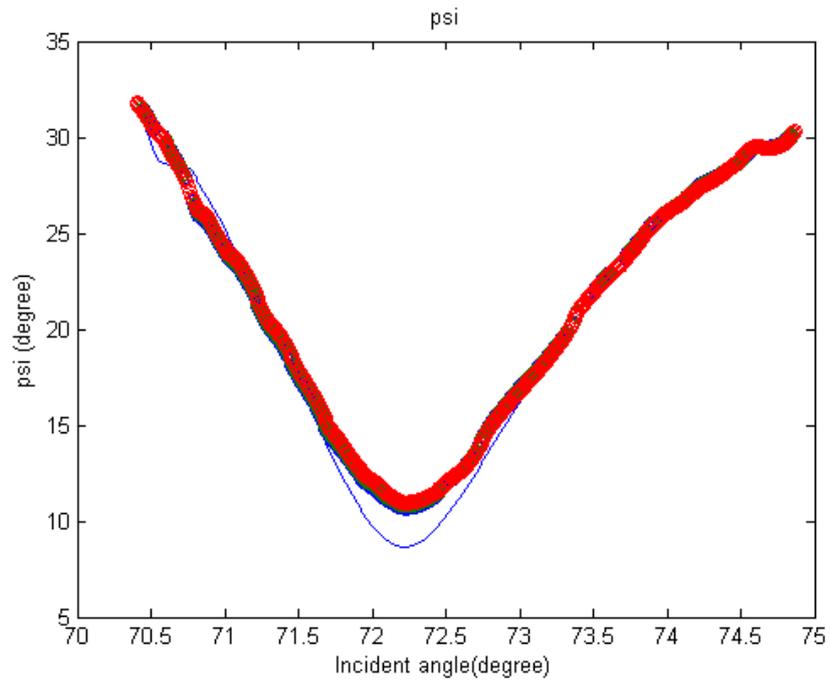


圖 3.22 ψ 與入射角關係圖

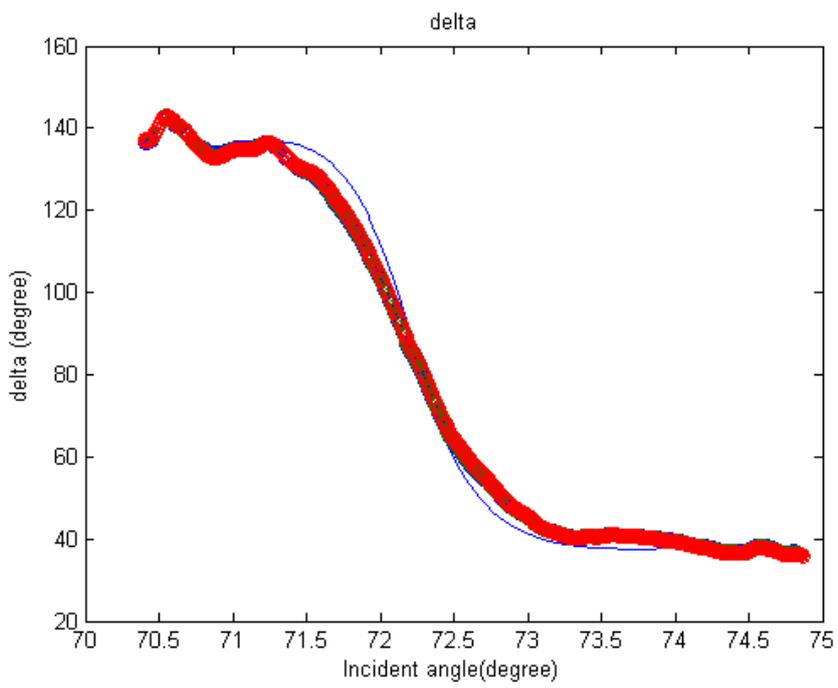


圖 3.23 Δ 與入射角關係圖

第四章 結論

在矽標準片量測架構中，利用擴束器將雷射光束擴大後，再由柱狀透鏡聚焦於矽標準片上，形成多入射角的光束，最後由 CCD 收集資訊完成整個量測。在數據分析中，最關鍵的是要找出入射角與 CCD 像素位置的關係式。在拍攝時，每個 CCD 上的像素會記錄一組橢圓參數，因此會直接得到橢圓參數與像素位置的關係。然而橢圓參數與入射角的關係分佈才是我們所關心的，利用數值運算方法，得到入射角與 CCD 像素位置的轉換式，以建立橢圓參數與入射角的關係。比較橢圓參數 ψ 和 Δ 的實驗值與理論值，大致上結果吻合，由此證實運用會聚光束製造多入射角量測的可行性和可靠度。

將矽標準片改為表面電漿共振裝置，而待測物為空氣後，使用相同於矽標準片的量測方法與實驗架構，唯入射角調整至空氣的共振角(約為 45°)，如此便可觀察空氣發生表面電漿共振時橢圓參數的變化。值得一提的是，p 波和 s 波的穿透係數不一致會導致光的偏極態改變。當光束以不同入射角進入或出射稜鏡時就會發生這現象，因此需要進行理論上的修正，以去除穿透係數對橢圓參數的影響。為了得到橢圓參數與入射角的關係式，除了使用相同於矽標準片數據分析的方法外，並加入了穿透係數的修正項，以確保理論值與實驗值擬合的準確性。然而在此實驗中，會聚光束接近垂直入射與出射於稜鏡，所以 p 波與 s 波穿透係數不一致的影響有限。從結果來看， ψ 的理論值與實驗值大致吻合，然而 Δ 在趨近 180° 時卻不太吻合。原因應出自於簡式橢圓儀在 Δ 接近 0° 和 180° 時，量測易出現誤差所致。

最後為了證明本技術的應用特質，我們量取水的表面電漿共振，在此實驗中入射光幾乎平行於稜鏡的底部，讓入射光經稜鏡折射後，方能達到水的共振角(約 73°)。這時光束相對於稜鏡是以大角度入射，p 波和 s 波的穿透係數有明顯的差異，因此穿透係數修正格外重要。為了突顯其重要性，我們先量測空氣在這樣的

入射角之下，比較有/無修正穿透係數影響之橢圓參數。結果可看到，沒有修正的橢圓參數之理論值和實驗值，存在很大的差距；經過修正之後，理論值和實驗值便擬合得很好。在接下來水的表面電漿共振的實驗裡，同樣的在理論中，加入穿透係數修正項。結果顯示 ψ 的理論值與實驗值有很好的擬合效果，而 Δ 因不再逼近 180° ，其理論值與實驗值亦有不錯的吻合結果。

本文成功結合表面電漿共振量測與簡式影像式橢圓量測技術，加上會聚光束的應用，讓元件在不需移動或調整之下，即可觀測整個表面電漿共振的現象。此現象反映在橢圓參數 ψ 與 Δ ，有著很好的擬合結果。

此系統的優勢在於不需調整任何光學元件，便能進行待測物的高濃度(或折射率)變化量測。於參考文獻[9]當中，示範了在固定光學元件之下，藉由反射光強度的多入射角測量，得到不同濃度隨角度分佈的光強度圖形。除了反射光的強度之外，本系統可進一步得到相位的角度分佈資訊，因此本系統應用於生物材料的量測將為下一階段的發展目標



參考文獻

- [1] Goldstein, D. H. (2011). Ellipsometry. In D. H. Goldstein, *Polarized Light* (3rd ed., p. 529). CRC Press.
- [2] Erhard Meyer, Heike Frede, & Hans Knof. (1967). Optical effects in metals: application of a Least-Squares method to measurements on gold and silver. *Applied Physics*, 38, 3682-3684.
- [3] Y F Chao, Wen-Chi Lee, C S Hung, & J J Lin. (1998). A three-intensity technique for polarizer-sample-analyser photometric ellipsometry and polarimetry. *Applied Physics*, 31, 1968-1974.
- [4] Yu Faye Chao, Kan Yan Lee, & Yi De Lin. (2006). Analytical solutions of the azimuthal deviation of a polarizer and an analyzer by polarizer-sample-analyzer ellipsometry. *Applied Optics*, 45, 3935-3939.
- [5] 李振佑. (2007). 影像式橢圓偏光儀在曲面薄膜量測. 碩士論文, 國立交通大學, 光電工程研究所.
- [6] J. Homola, S. S. Yee, & G. Gauglitz. (1999). Surface plasmon resonance sensors: review. *Sensors and Actuators B*, 54, 3-15.
- [7] W. Yuan, H.P. Ho, S.Y. Wu, Y.K. Suen, & S.K. Kong. (2009). Polarization-sensitive surface plasmon enhanced ellipsometry biosensor using the photoelastic modulation technique. *Sensors and Actuators A*, 151, 23-28.
- [8] Yu-Faye Chao, & Chien-Yuan Han. (2007). Post flight analysis of the surface plasmon resonance enhanced photoelastic modulated ellipsometry. *Sensors and Actuators B*, 121, 490-495.
- [9] Mark W. Foster, Douglas J. Ferrell, & Robert A. Lieberman. (1994). Surface plasmon resonance biosensor miniaturization. *SPIE*, 2293, 122-131.

- [10] A.V. Kabashin, V.E. Kochergin, & P.I. Nikitin. (1999). Surface plasmon resonance bio- and chemical sensors with phase-polarisation contrast. *Sensors and Actuators B*, 54, 51-56.
- [11] Goldstein, D. H. (2011). Mueller Matrices for Polarizing Components. In D. H. Goldstein, *Polarized light* (3rd ed., pp. 93-107). CRC Press.
- [12] Fujiwara, H. (2007). Optical Interference. In H. Fujiwara, *Spectroscopic Ellipsometry: Principles and Applications* (pp. 43-48). John Wiley & Sons.
- [13] Bahaa E.A. Saleh, & Malvin Carl Teich. (2007). Elementary Electromagnetic Waves. In M. C. Bahaa E.A. Saleh, *Fundamentals of Photonics* (2nd ed., pp. 164-165). Wiley.



附錄：光場水平判別法

不論在矽標準片量測，或表面電漿共振量測，都可能遇到會聚光束的入射角分佈為斜向入射，致使光場分佈圖形如圖 A.1 中的 B 範圍所示。A 範圍則是在理想情況下，入射角沿水平方向分佈，讓影像圖形的長軸沿著 x 軸方向。為了將光場分佈的長軸校正至 x 軸上，可利用偏振片方位角誤差 α 來進行判定。

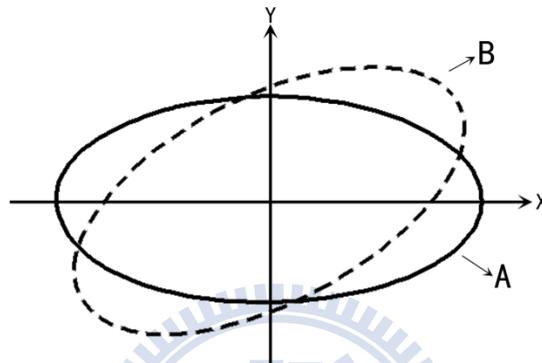


圖 A.1 光場影像分佈圖

α 值除了具有偏振片方位角誤差的意義外，當後者經由校正而消彌後，前者便可代表入射光相對於入射面的傾斜角[5]，如圖 A.2 所示。由這樣的關係，即可藉由觀察影像中各個 α 值，來判定光場分佈的情形： α 趨近於零，代表光場分佈與圖 A.1 中 A 範圍相似，否則存在一定的傾斜角度。

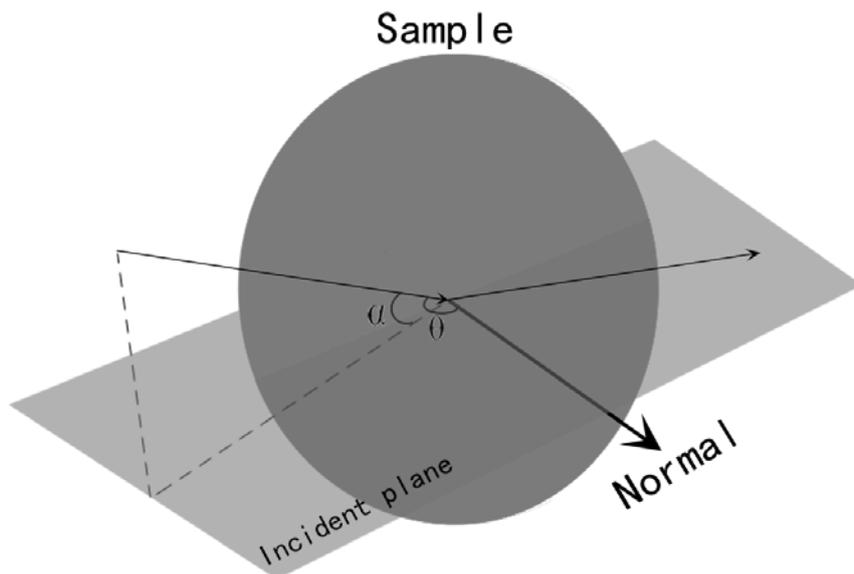


圖 A.2 α 示意圖

圖 A.3 是未修正的 α 實驗分佈圖，可看到整個圖形隨著像素位置逐漸攀升，這代表由柱狀透鏡製造的多入射角扇面未平行於桌面。藉由微調柱狀透鏡的傾斜角(在這裡，沿著光行進方向做順時鐘的旋轉)，就能得到如圖 A.4 修正後的 α 分佈圖。圖 A.4 是以影像中心為基準，取中間三組水平分佈的數據，來繪製 α 隨像素位置分佈的圖形。從圖中可看到 α 已校正在 0° 附近，因此得知光場分佈的校正已完成。圖 A.5 則是在圖 A.4 的圖形中，再加入三組影像邊緣的 α 分佈圖。從結果來看， α 值在邊緣的部分變得較雜亂且不一致，其原因為雷射光在邊緣的部分，光強度大幅衰減，致使量測容易發生誤差；另一方面，反射後的雷射光圖形分佈如圖 3.2，在上、下部分的雷射光，其涵蓋範圍不如中央部分廣闊，這也會對量測造成影響。因此在計算橢圓偏光參數時，總是取影像中間的部分，作為實驗數據運算的依據。

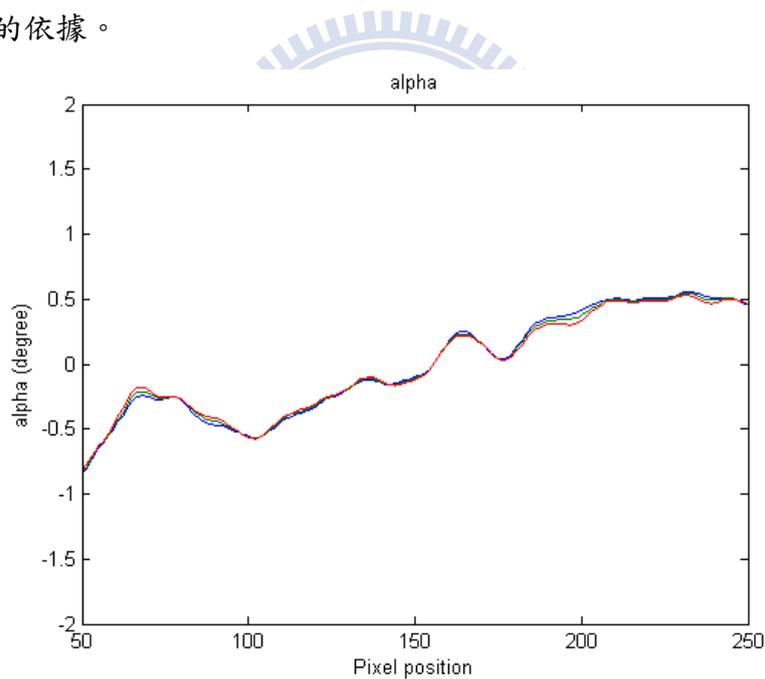


圖 A.3 未修正 α 實驗分佈圖

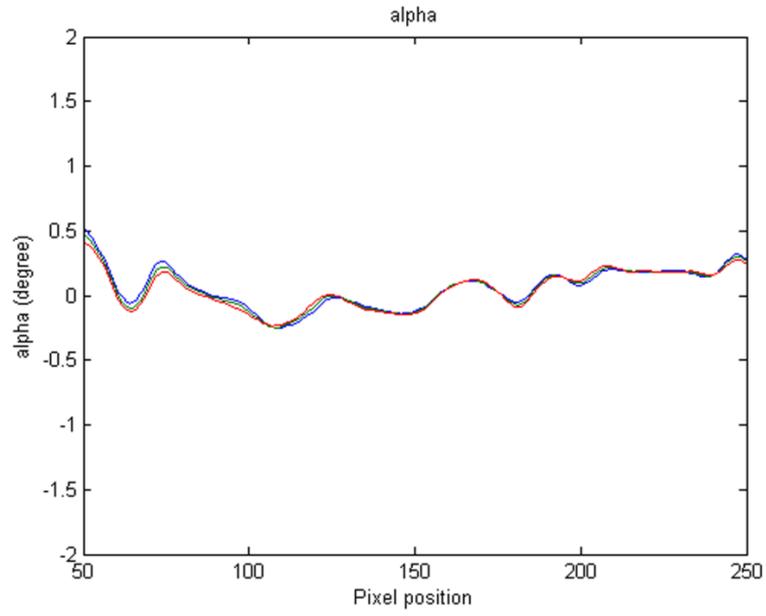


圖 A.4 修正後 α 實驗分佈圖

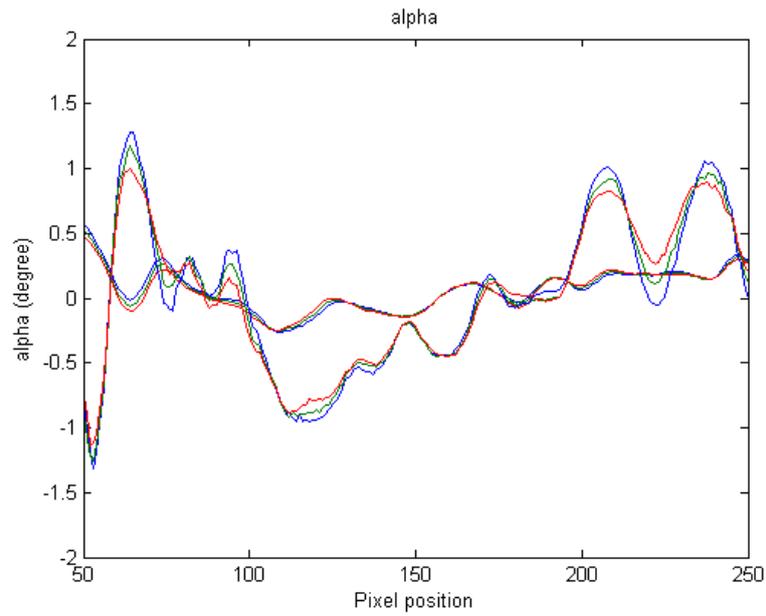


圖 A.5 中心 α 實驗值與邊緣 α 實驗值