國立交通大學

光電工程學系碩士班

碩士論文



Design of a compact LED illuminator with narrow beam

diffusion angle

研究生:廖竑瑋

指導教授:陳志隆 教授

中華民國一百零一年六月

小發散角的發光二極體照明器之設計

Design of a compact LED illuminator with narrow

beam diffusion angle

研究生:廖竑瑋

Student : Hom-Wei Liao

指導教授:陳志隆

Advisor : Jyh-Long Cherm

國立交通大學

光電工程學系碩士班



Submitted to the Institute of Electro-Optical Engineering National Chiao Tung University in Partial Fullfillment of the Requirements for the degree of Master

In

Electro-Optical Engineering

June 2012

Hsinchu , Taiwan

中華民國一百零一年六月

誌謝

終於畢業了,即將進入下一個人生階段,回首這兩年在交大的生活,從碩 一前的暑假進入了光學設計實驗室,開始接受訓練,在我的指導教授-陳志隆 有計畫,有階段的安排下,讓我從對光學設計一竅不通,慢慢的抓到了大致的 方向。從複習大學的光學書籍,修習研究所所開的光學課程,到學會光學模擬 軟體的使用並做實例演練,最後在輔以業界的短期實習,讓我們更能身歷其 境,遇到的不但有設計上的困難,交差日期的壓力,公司同事,長輩們的相處 應對等,這些都幫助我們很大,讓我們畢業後踏入職場不會害怕,知道職場上 的競爭激烈而更努力的在學校多充實知識,在此非常感謝老師兩年來的辛勞。 學長偉宏,書正,柏宇,學姐藝文,在我們有學習上的問題時也會竭盡所能的 幫助我們,在此感謝你們。交大的同學們明憲,宏胤,進興,國展,品儀,也 謝謝你們這兩年的陪伴,一起修課,烤肉,打電動,打網球,去宜蘭衝浪等, 這些讓我的碩士生涯更多采多姿。

最後,感謝我的爸媽,有你們的栽培與支持,使我有今日的成果,千言萬 語的感恩都在不言之中。



小發散角的發光二極體照明器之設計

學生:廖竑瑋

指導教授:陳志隆

國立交通大學光電工程研究所碩士班



本論文的研究對象是一個小發散角(光束角)高效率的照明器之設計與討 論。照明器具由光源和燈具所組成,其中燈具包含光學透鏡和機構。一般照明 器光源有鎬絲燈,發光二極體(Light Emitting Diod),雷射二極體(Laser Diode) 等,依使用的光源不同,光場場型需要不同,對應的光學透鏡就有差異。在本 論文中,我們使用單顆 LED 分別在對稱系統和非對稱系統下設計一個小發散角 高效率照明器,設計過程會使用到光學模擬軟體 LightTools 和 CodeV 來設計, 從光源,透鏡,接收面的建模,到光線追跡觀看光斑的集中度與效率。在設計 完成之後,並做公差分析,了解 LED 位置和角度的誤差在效率和發散角上是如 何的影響。在非對稱系統下,我們使用 fresnel-like 透鏡設計,效率 43.05%,發 散角 15.6 度;在對稱系統下,我們使用 Bezier 透鏡設計,效率 78.32%,發散 角 5.8 度。

Design of a compact LED illuminator with narrow beam diffusion angle

Student: Hom-Wei Liao Advisor: Dr. Jyh-Long Chern

Institute of Electro-optics Engineering

National Chiao Tung University



The subject of this thesis is the design and discussion of narrow beam angle and high-efficiency illuminator. Illuminator is composed of the light source and the lighting which including the optical lens and devices. General light source is such as incandescent light, light emitting diode, and laser diodes. According to the applications of different light sources and the different requirements of light field types, the corresponding optical lenses are different. In this paper, we use a single LED to design a high illuminator efficiency and narrow beam angle illuminator in both symmetric and asymmetric structure. LightTools and Code V are the optical software used by us during design to establish the light sources, the optical lenses, the receiver which do ray-tracing simulation for observing the efficiency and the focus of the spot. After the original design is completed, we examine the tolerance analysis for understanding the effect in efficiency between the LED positions and the angle errors, and also trying to find out how fresnel-like to impact the divergent angle. Under the asymmetric structure, we had designed a lens which the efficiency is 43.05% and the beam angle is 15.6 degree, on the other hand, the symmetric structure one which the efficiency is 78.32% and the beam angle is 5.8 degree.

目錄

誌谢	i
摘要	ii
Abstract	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	ix
第一章 緒論	1
1-1 照明器的演進	1
1-2 照明器 <mark>新里程碑</mark> -LED 照明	1
1-3 研究動機	2
1-4 論文大鋼	2
第二章 相關理論介紹	3
2-1 幾何光學	3
2-2 幅度學與光度學	5
2-2.1 幅度學與光度學簡介	5
2-2.2 光度計量與單位	6
2-3 光展量(Etendue)	10
2-3.1Etendue 定義	10
2-3.2 Etendue 計算	12
2-3.3 Etendue 物理意義	17
2-4 邊緣光線定理(Edge-ray Principle)	18
第三章 小發散角照明器之研究方式	21
3-1 研究流程	21
3-2 設計規格和目標	21
3-3 前人研究資料介紹	25
3-3.1 光學模擬軟體 LightTools 範例	25
3-3.2 微型投影機自由曲面 LED 聚光器的設計	28
3-3.3 白光 LED 之一階與二階光學設計	29

- - 4-1.3 光學透鏡設計方式...... 34
- - 5-2小發散角照明器設計二 貝茲曲線透鏡(1)&(2)...... 39
 - 5-3 小發散角照明器設計三 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡....... 43
 - 5-3.1 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)...... 43

第六章 公差分析與結論	48
6-1 公差分析-非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)	48
6-2 公差分析-貝茲曲線透鏡(1)	49
6-3 結論	51
1896	
參考文獻	52

附錄 A-	照明相關名詞介紹	54
附錄 B -	貝茲曲線	56

圖目錄

圖 1-1 植物照明檯燈	2
圖 1-2 汽車 LED 照明	2
圖 1-3 太陽能 LED 發光帽	2
圖 1-4 新型牙科照明 LED 燈具	2
圖 2-1 繞射現象	3
圖 2-2 反射定律示意圖	4
圖 2-3 折射定律示意圖	4
圖 2-4 電磁波頻譜	5
圖 2-5 人類視覺曲線	6
圖 2-6 明視覺最大光譜光效率	7
圖 2-7 光強度示意圖	7
圖 2-8 照度示意圖	8
圖 2-9 光亮度示意圖	9
圖 2-10 明視覺與光視覺光視效能曲線	9
圖 2-11 成像系統中,光線由 P 點傳遞至 P'點	10
圖 2-12 光線由光源裡的一個小面積射出之示意圖	13
圖 2-13 方程式與 skewness 之間的關係圖	15
圖 2-14 有角度的情況下,投影長度為正向投影時的 <u>(1+cosθ)</u> 倍	16
圖 2-15(a) 光源的 etendue 大於系統的 etendue;	17
(b) 光源的 etendue 小於系統的 etendue	
圖 2-16CPC 集光器工作原理	18
圖 2-17 地球接收太陽光之形狀因子	19
圖 2-18(a)成像光學(b)非成像光學之費馬定理示意圖	19
圖 2-19 拉線模型(string method)	20
圖 2-20 傳統集光器工作原理	20
圖 3-1 研究流程圖	21
圖 3-2 光源,光學系統,觀察面三者相對位置之簡圖	22
圖 3-3 LED Samsung2016 波長和配光曲線	22
圖 3-4 LED 近場遠場照度圖比較	23
圖 3-5 非對稱系統可設計的光學系統空間之側視圖	24

圖 3-6 非對稱系統可設計的光學系統空間之正視圖	24
圖 3-7 LightTools 範例 Creating a Catadioptric Lens	25
圖 3-8 LightTools 範例 Catadioptric Lens 的資料	26
圖 3-9 Catadioptric Lens 設計過程	26
圖 3-10 Catadioptric Lens Optimization	27
圖 3-11 Catadioptric Lens 設計結果	27
圖 3-12 微型投影機自由曲面 LED 聚光器的設計	28
圖 3-13 微型投影機自由曲面 LED 聚光器	28
圖 3-14 微型投影機自由曲面 LED 聚光器遠場強度	29
圖 3-15 R-10TIR (修正前)	29
圖 3-16 R10-TIR (a)未加反射片(b)加上反射片後	30
圖 3-17 R10-TIR 透鏡(修正後)	30
圖 3-18 R10-TIR 遠場強度圖與照度圖	30
圖 4-1 光學系統設計流程	31
圖 4-2 Samsung 2016 原始光源檔案	32
圖 4-3 光源與透鏡接觸發生干涉	32
圖 4-4 samsung2016 光源逆光線追跡	33
圖 4-5 原始球面光源和新的平面光源的比較	33
圖 4-6 選擇模型	34
圖 4-7 輸入光學特性	34
圖 4-8 NSRay 位置	35
圖 4-9 設計概念圖	36
圖 4-10 光線經過透鏡的路徑	36
圖 5-1 球面單透鏡設計	37
圖 5-2 球面單透鏡的尺寸大小與位置	38
圖 5-3 單透鏡照明器光線追跡模擬	38
圖 5-4 單透鏡照明器照度圖	38
圖 5-5 單透鏡照明器遠場強度分佈圖	39
圖 5-6 貝茲曲線參數	39
圖 5-7 Bezier 照明器(1)的幾何結構與 NSRay 模擬	40
圖 5-8 Bezier 照明器(1)光線追跡	40
圖 5-9 Bezier 照明器(1)照度圖	40
圖 5-10 Bezier 照明器(1)強度分佈圖	41

圖 5-11 貝茲透鏡(2)		41
圖 5-12 貝茲透鏡(2)照度圖		42
圖 5-13 貝茲透鏡(2)遠場強度分佈圖		42
圖 5-14 貝茲透鏡(2)包圍能量分析		42
圖 5-15 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)		43
圖 5-16 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)照度圖		43
圖 5-17 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)之包圍能量分析		44
圖 5-18 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)之遠場分析		44
圖 5-19 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)在各表面的能量		45
圖 5-20 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)		45
圖 5-21 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)照度圖		46
圖 5-22 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)之包圍能量分析		46
圖 5-23 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)之遠場分析		46
圖 5-24 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)大角度光線被機構屏蔽		47
圖 5-25 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)照度圖和遠場強度圖		47
圖 6-1 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)LED 偏差的影響		48
圖 6-2 貝茲透鏡(1)之 LED 位置偏移對照度的影響	••••	49
圖 6-3 貝茲透鏡(1)之 LED 角度偏移對照度的影響	· · · •	49
圖 6-4 貝茲透鏡(1)之 LED 偏差的影響	· · · •	50
圖 A-1 光束角與佈光角	· · · •	54
圖 A-2 不同燈具的配光曲線		55
圖 B-1 線性貝茲曲線		56
圖 B-2 二次貝茲曲線	• • • •	57
圖 B-3 三次貝茲曲線		57

表格目錄

表 2-1	輻射	度量和光度量比較表 (;
表 3-1	LED	主要光學特性	23



第一章 緒論

1-1 照明器的演進

自從人類學會鑽木取火以來,照明經歷了從火、油到電的發展歷程。照明 工具經歷過無數的變革,出現過火把、動物油燈、植物油燈、蠟燭、煤油燈到 白熾燈、日光燈,發展到現在琳琅滿目的裝飾燈、節能燈等,可以說一部照明 的歷史正是人類發展歷史的見證。 人類使用油燈照明的歷史特別長。在這期 間,油燈經過了多次改進。油燈用油從動物油改為植物油,最後又被煤油取代。 燈芯也經歷了草、棉線、多股棉線的變化過 程。為了防止風把火吹滅,人們給 油燈加上了罩。早期的罩是用紙糊的,很不安全,後來改用玻璃罩。這樣的油 燈不怕風吹,在戶外也照樣使用,而且燃燒充分,不冒黑煙。可是人類並沒有 满足,在使用油燈照明的同時,仍然在尋找其他的照明方法。西元前3世紀左 右,有人用蜂蠟作成了蠟燭。到了18世紀,出現了用石蠟製作的蠟燭,並且 開始用機器大量生產。100多年前英國人發明了煤氣燈,使人類的照明方法向 前邁進了一大步。最初,這種燈很不安全,在室內用容易發生危險,因此只當 做路燈用。後來經過改進,它才走進千家萬戶。火把、蠟燭、油燈、煤油燈、 煤氣燈這些照明工具,都沒有離開火,都是靠物質燃燒發出的光來照明的。那 麼有沒有不用火也能照明的方法呢?有人曾經捉來大批的螢火蟲,利用螢火蟲發 出的螢光來照明。這種方法雖然不實用,不過在人類的照明史上也算是最奇特 的一種方法了。19世紀末, 愛迪生發明了電燈, 從此改寫了人類照明的歷史, 人類走向了用電照明的時代。

1-2 照明器新里程碑-LED 照明

早年,發光二極體以指示光源最主要應用,應用於照明領域相當少,僅應用 於指示燈,或一些特殊應用,如軍事、隔離的工業照明,以及其它場合(在這些 場合,發光二極體可靠性所能降低維護費用,將補償發光二極體照明高成本)。 不過過去三、四年來,由於發光二極體製造成本持續降低,以及效率和亮度不斷 提高,配合發光二極體所具有壽命長、安全性高、發光效率高(低功率)、色彩 豐富、驅動與調控彈性高、體積小、環保等特點,使得發光二極體在一般照明 市場應用得以大幅度擴張,帶動其市場需求成長。近年來普及的程度到已成為 我們生活中隨時可見了,下面列出幾個 LED 應用,如圖 1-1,1-2,1-3,1-4。 [1][2]

1



圖1-1植物照明檯燈



圖1-2汽車LED照明



1-3 研究動機

小發散角照明器是一種將光源的能量聚集在一小範圍區域以達到遠距照 明,或作軍事武器應用的光學系統。現有的產品中,有反射式,折反式的小發 散角照明器,但效率未達100%,我們希望設計出效率更高的聚光鏡,分別在 對稱照明系統和非對稱照明系統下實現。

1-4 論文大鋼

第一章我們介紹照明器的發展演進,到目前主流的 LED 有何好處和照明 應用。第二章將介紹照明的名詞定義(包含發散角,光束角,佈光角,燈具效率.. 等),幾何光學原理及基本的幅度學,光度學原理。第三章介紹研究的流程,從 一開始前人的小發散角照明器資料,到設計照明器的規格和目標。在第四章我 們介紹設計流程,包含光源轉換,透鏡的建模,光源的假設和設計的概念。於 第五章中,呈現對稱系統和非對稱系統設計之結果,並討論發散角與燈具效率。 最後,第六章分別對對稱系統和非對稱系統照明器中設計最佳的做公差分析, 最後總結結論。

第二章 照明相關理論介紹

2-1 幾何光學

幾何光學的三大定律包括光波在傳播過程中經過障礙物邊緣或孔隙時所發 生的展衍現象的繞射效應,光線在均勻介質中沿直線傳播的穿透定律,及光通 過不同折射率的介質介面時的折射定律與反射定律。位探討追蹤幾何光線軌 跡,必須先對上述定律做一說明。[4]

(1) 繞射效應

绕射現象是波的特性,光波通過小孔時,在孔後的屏上出現一個亮斑,其 周緣的亮度向外逐漸減弱,仔細觀察可看到在此區域內有一些明暗相間的條 紋。當孔隙越小,波長越大,這種現象就越顯著。例如水面波遇到障礙物時, 波繞過其邊緣到達物後;室內講話聲能繞過門窗到達室外等。若被一個大小接 近於或小於波長的物體阻擋,就繞過這個物體,繼續進行。若通過一個大小近 於或小於波長的孔,則以孔為中心,形成環形波向前傳播。如圖 2-1。



圖 2-1 繞射現象

(2) 光的穿透定律

光的穿透定律是指光線在一均勻介質內傳播時,會沿著直線前進。此為一簡 單但重要現象,現今許多光學儀器的應用也依照此定律為基礎。

(3) 反射&折射定律

當光在任何平滑表面發生反射時,會遵守反射定律。如圖 2-2 所示,反射 光與入射光將和發生反射的表面的法線在同一個平面上。在這平面上,入射光 會分居於法線的兩側,同時入射光與法線會夾一個角度,稱之為入射角,反射 光亦與法線夾一個角度,稱之為反射角,這兩個角度必須相等,即遵守 2-1 式。 θ=θ' (2-1)



圖2-2反射定律示意圖

光入射到兩個不同介質之間的界面上時,會發生折射和反射的現象,其中 反射光的部份會遵循之前所提及的反射定律。穿透光的部份,我們稱之為折射 光。如圖 2-3 所示,入射光與折射光在同一個平面並且入射光與界面的法線夾 角和折射光與界面的法線夾角會有以下的關係:入射角的正弦值與反射角的正 弦值為一定的常數,如 2-2 式所示。 nsin θ=n'sin θ', (2-2)

其中 n 和 n '分别是入射光與折射光所處的介質中的折射率,θ是入射光和界面 法線的夾角,稱之為入射角,θ'是折射光與界面法線的夾角,稱之為折射角。



Incident ray Surface normal

圖 2-3 折射定律示意圖

2-2 幅度學與光度學

2-2.1 幅度學與光度學簡介

幅度學與光度學是密不可分的兩門科學,廣義來說,光是指光輻射(Optical Radiation),一波長可分為X射線,紫外輻射,可見光,和紅外輻射;狹義來說, 光代表的是可見光,即是人眼可是的電磁波段,可見光在電磁輻射中只佔一個 很窄的波段,如圖 2-4 為可見光的範圍為 380~780nm。



幅度學就是對光學輻射進行定量評價的一門實驗科學。光學輻射作用於物 體和生物體,會產生各種物理,化學和生物效應,這些效應也屬於輻射度學的 內容。可見輻射作用於人眼所引起的"光"感覺,是一種生理效應,它與輻射的 組成,強弱及人的視覺感官的生理特性和人的心理活動都有關係;光度學就是根 據人類視覺器官的生理特性和某些約定的規範來評價輻射所產生的視覺效應。 所以,輻射度學是客觀的物理量,而光度學則是包含心理,生理學等概念。藉 由人眼的視覺函數如圖 2-5,將幅度學與光度學聯結。幅度學和光度學都是用 來定量描述輻射能強度,兩者的研究方法和概念上基本相同,物理量也互相對 應,如表 2-1 所示。



圖 2-5 人類視覺曲線[5]

(黑色曲線為亮適應光度函數曲線,綠色曲線為暗適應光度函數曲線)

幅度學	符號	單位	光度學	符號	單位
(能量)		Juli	(人視覺)		
輻射通量	Фе	W	光通量	Φv	lm
輻射強度	Ie	W*sr-1	光強度	Iv	cd
幅度	Le	W*sr-1*m-2	光亮度	Lv	Cd*m-2
照度	Ee	W*m-2	6光照度	Ev	lux
輻射曝光量	Не	W*m-2*s	光度曝光	Hv	lux*s
			量		

表 2-1 輻射度量和光度量比較表[6]

2-2.2 光度計量與單位

以下介紹在光度學與幅度學中重要的度量單位:[5][7]

(一) 輻射通量(Radiant Flux)與光通量(Luminous Flux)

單位時間內通過一面積的輻射能量為經過該面積的輻射通量,光源在單位時間內輻射出的總能量為光源的輻射通量,以Ψ表示,單位為(Watt、W)。以 光源在單位時間內發出的總光亮稱為光通量,以Φ表示,單位為流明(Lumen、 lm)。光度量是考慮人眼的因素,以視見函數V(λ)為加權參考。而輻射度量與 光度量之之間的關係式為:

$$\Phi_{v} = K_{m} \int_{380}^{770} \Psi(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$
(2-6)

如圖 2-6 所示,式中 K_m 是波長為 555.016nm 的光功當量,也叫做最大光功當量, 其值為 683 lm/W。

 $K_m = 683 \text{ lm/W}$



(二) 輻射強度(Radiant Intensity)與光強度(Luminous Intensity)

輻射強度是在給定方向上的單位立體角內,輻射源所射出的輻射通量,以 Ie 表示,單位為 W*Sr⁻¹。定義如下: $I_e = \frac{\psi}{\Omega}$ (2-7) 而光強度是在給定方向上的單位立體角內,光源所射出的光通量,如圖 2-7 所示,以 I_v 表示,單位為坎德拉(Candela、cd)或燭光。1 cd=1 lm*sr-1。定義如

下:

$$Iv = \frac{\phi}{\Omega} \tag{2-8}$$



圖 2-7 光強度示意圖

(三) 輻射照度(Irradiance)與光照度(Illuminance)

輻射照度士指被照射到表面單位面積接受到的輻射通量,以*Ee*表示,單位為 W*m-2。假設被照射的面積為A,定義如下:

$$E_e = \frac{\psi}{A} \tag{2-9}$$

反之,如果考慮單位面積皆收到的光通量時,則稱為光照度,如圖 2-8,以 Ev 表示,單位為勒克司(Lux、lx)。lx=1 lm*m-2。定義如下:

$$E_{\nu} = \frac{\phi}{A} \tag{2-10}$$

而照度的反平方定律(Inverse square law of illuminance)是指點光源和照度與距離之關係,隨距離的倍數增加,發光面積也以平方增加,但照度卻以平方減少。



(四) 輻射量度(Radiance)與亮度 (Luminance)

光源在某一方向的輻射亮度 $L(\phi, \theta)$ 是光源在該方向上的單位投影面在單位立體角中發射的輻射通量,以 L_e 表示,單位為 $\frac{W}{Sr^*m^2}$ 定義如下:

$$L_e = \frac{d^2 \phi_e(\psi, \theta)}{d\Omega dA \cos \theta} = \frac{dI_e}{dA \cos \theta}$$
(2-11)

同理,以光亮度的單位來表示,則稱為光亮度或輝度,單位為 $\frac{lm}{Sr^*m^2}$ 或 $\frac{cd}{m^2}$, 如圖 2-9。定義如下:

$$Lv = \frac{d^2 \phi_v(\psi, \theta)}{d\Omega dA \cos \theta} = \frac{dI_v}{dA \cos \theta}$$
(2-12)



(五) 光視效能曲線

將人眼對個別波長的敏感以圖形表示,可說明對不同波長相關亮度的反 應,稱為光視效能曲線(spectral luminous efficiency curve),如圖 2-10。在明亮 環境中,人眼對中波長黃綠光(555nm)最靈敏,感覺最明亮,相對敏感度可見光 譜的兩側遞減至近乎為零,此圖形稱為明視曲線;在暗視覺下,人眼尖峰敏感 度轉向較低波長的藍綠光(507nm),敏感曲線在暗視覺下往光譜藍端位移的現象 稱為 Purkinje Shift。此結果值得注意的是:在明視覺下看起來較亮的一表面,在 暗視覺下反而顯得較暗,反之亦然;此外,天色漸黑時,辨色力最先喪失的是 紅色,早晨最先感應的則是藍色。



圖 2-10 明視覺與光視覺光視效能曲線

明視曲線用於決定所有光源光譜能量分部曲線所代表的光通量(因光通量 是按照國際約定的人眼視覺特性所評價的輻射功率)。若以人眼對同瓦數的

555nm 與 450nm 的光所感受的光通量做比較,前者高於後者幾乎 25 倍,是因 人眼較不敏感於 450nm 的波長而看起來較暗。對應於明視曲線,光源無法有效 產生光譜紅及藍色區域的光,而此兩區卻為優良演色性所必備,這也就是為什 麼大多數光源的效率與演色性無法兼顧的原因。例如高壓納燈產生大量中波長 的光,在維持其高光效的情況下,演色性的改良十分有限。

2-3 光展量 Etendue

2-3.1 Etendue 定義

如圖 2-11 所示,在一個成像光學系統中,P與P'分別位於物空間以及像空間,P(x,y)位於直角座標(x,y,z)系統的 xy 平面上,P'(x',y')位於直角座標(x',y',z') 系統的 x'y'平面上。由 P 點上發射出一條光線,其方向餘弦為(L,M),而這條光 線經過光學系統打到 P'點,其方向餘弦為(L',M')。考慮一個很小的位移 dx 和 dy,同時也考慮方向餘弦的改變 dL 和 dM。



圖2-11成像系統中,光線由P點傳遞至P'點

一般來說,光線的行進會符合2-13及2-14式, $\vec{nu} = -\nabla V$, (2-13)

$$n'\vec{u} = \nabla V , \qquad (2-14)$$

其中V為由物點到像點的光程,n與n'分別為物空間及像空間的折射率,u與u 為

光線的方向向量。

利用Hamilton's point characteristic function V(P,P')或V(x,y;x',y'),可得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x'} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x'} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y'} = \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial y} \quad , \tag{2-15}$$

其中

$$nL = -\frac{\partial V}{\partial x} , nM = -\frac{\partial V}{\partial y} ,$$

$$n'L' = \frac{\partial V}{\partial x'} , n'M' = \frac{\partial V}{\partial y'} ,$$

$$B \text{ Let } \Im \text{ R}(2-15) \text{ J} \text{ C} \text{ R} \text{ A}$$

$$n'^{2} \left(\frac{\partial L'}{\partial x} \frac{\partial M'}{\partial y} - \frac{\partial L'}{\partial y} \frac{\partial M'}{\partial x}\right) = n^{2} \left(\frac{\partial l}{\partial x'} \frac{\partial M}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{\partial M}{\partial x'}\right) , \qquad (2-16)$$

再利用Jacobians轉換可再將2-16改寫為



所以2-17式變為

$$n'^{2} dx' dy' dL' dM' = n'^{2} dx dy dL dM \quad , \qquad (2-18)$$

2-18式即為generalized Lagrange invariant,也就是二維的拉格郎齊光學不變量 (Lagrange invariant)。

我們可再將方向餘弦座標由直角座標系轉換到球座標系,即 $(L,M,N) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, (2-19)

則 $dLdM = \frac{\partial(L,M)}{\partial(\theta,\phi)} d\theta d\phi$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial M}{\partial \phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} \frac{\partial M}{\partial \theta}\right) d\theta d\phi$$

= c o \vartheta s i 1\theta d\theta d\phi
= \cos \theta d\Omega (2-20)

將2-20式代入2-18式,可得

 $n^{\prime 2} dA^{\prime} \cos \theta^{\prime} d\Omega^{\prime} = n^2 dA \cos \theta d\Omega$ (2-21)

2-21式即為常見的etendue的微分式的表示方式。這一個等式,代表了一個完 美成像系統中,光源與成像面上的影像之間etendue守恆的狀況。由式子中,我們 可看出etendue的大小,與光源面積大小和發散立體角有關, 但是值得注意的, 在這式子當中並無與能量有關係的變數,因此etendue只是單純針對面積與光束發 散的角度。也就是說, etendue是一個光線的幾何特性, 而跟光線所帶有的能量無 闢[8][9]。

前面所提及的,都是以幾何光學的角度來看,我們亦可由輻射學的角度來看 etendue。當一個面光源是Lambertian光源,由輻射學中,我們可知光通量 $\varphi = L \iint dA \cos \theta d\Omega$,其中忽略掉能量的因素,也就是不考慮L,可發現 $\iint dA\cos\theta d\Omega$ 和之前etendue的表示式是相同的,因此亦可定義出 $E = \iint dA \cos \theta d\Omega \quad ,$ (2-22)其單位為mm²* steradian [10]。

2-3.2 Etendue 計算

在 2-22 式中, 若面積夠小, 使得在同一個位置上, 觀察每個小面積 dA 到 觀察點的角度都相似,我們可再將面積提出積分式中

$$E = A \int \cos \theta d\Omega \tag{2-23}$$

其中 $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$

 $E = A \int \cos \theta d\Omega$

$$= 2\pi A \int \mathbf{c} \, \mathbf{o} \, \boldsymbol{\theta} \, \mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{n} \, \boldsymbol{\theta} \, d\theta$$
$$= \pi A \, \mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{\hat{n}} \, \boldsymbol{\theta} \qquad (2-24)$$

其中A為光源面積,θ發散角之半角。若為一個平面的Lambertian光源,其發散角 之半角為90度,因此帶入2-24式中,可得到其etendue為πA [10]。

上述之公式,是計算當光源為平面時的公式,然而若光源為一非平面的光源時,又該如何計算呢?在這邊我們將介紹另一種計算方法。我們將導入另一個不變量——Skew invariant。首先我們先定義Skew invariant(或稱為Skewness),其數學表示式為

$$S \equiv \vec{r} \cdot (\vec{k} \times \vec{a}) \quad , \tag{2-25}$$

其中 s 即為Skew invariant, \vec{r} 是一個光線與光軸連結的任意向量, \vec{k} 是一個量 值大小為光線所處空間的折射率,其方向為光線傳遞方向的一個向量, \hat{a} 為光 軸方向的單位向量。

圖2-12光線由光源裡的一個小面積射出之示意圖

由圖 2-12 中我們可以寫出 Skew invariant

 $s = nr\sin\theta$,

(2-26)

且

$$d\Omega = \cos \theta d\theta d\phi , \qquad (2-27)$$

$$d\varepsilon = n^2 d\Omega dA \cos \alpha , \qquad (2-28)$$

$$\cos \alpha = \cos \theta \sin \phi , \qquad (2-29)$$

將2-26式和2-27式代入2-28式可得

$$d\varepsilon = n^2 \cos^2 \theta \sin \phi d\phi dA d\theta \quad , \tag{2-30}$$

我們再將2-26式微分可得

$$\frac{ds}{r} = n\cos\theta d\theta , \qquad (2-31)$$

同時由2-26式亦可得

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{n^2 r^2}}$$
, (2-32)

將2-31式和2-32式代入2-30式可得

$$d\varepsilon = \frac{n}{r} \sqrt{1 - \frac{S^2}{n^2 r^2} \sin \phi d\phi dA ds} \quad , \tag{2-33}$$

將2-33示對角度
$$\phi$$
及光源面積A做積分,可得

$$\frac{d\varepsilon(s)}{ds} = \iint_{s} \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \frac{n}{r} \sqrt{1 - \frac{S^{2}}{n^{2}r^{2}}} \sin \phi d\phi dA , \qquad (2-34)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &\tilde{z} \,\tilde{z} \,\tilde{$$

可得

$$\frac{d\varepsilon(s)}{ds} = \int_{nr\sin\alpha > |s|} \frac{2n\sin\alpha}{r} \sqrt{1 - \frac{s^2}{n^2 r^2 \sin^2\alpha}} dA$$
(2-37)

若光源為一Lambertian光源,則 $\alpha = \frac{\pi}{2}$,我們可以利用2-37式,對不同形 狀的光源做計算,得到 $\frac{d\varepsilon(s)}{ds}$ 方程式,再將此方程式對s積分,便可得到光源的

etendue •

經由計算,當光源為一個圓盤,其半徑為時,我們可得方程式

$$\frac{d\varepsilon(s)}{ds} = 4\pi nR \sin \alpha \left[\sqrt{1 - \tilde{s}^2} - \tilde{s} \cos^{-1} \tilde{s} \right] \qquad fo \ \tilde{s} \le 1 \quad , \qquad (2-38)$$
$$\nexists \tilde{r} = \frac{|s|}{nR \sin \alpha} \quad \circ$$

若光源為球面,其半徑為R,可得

$$\frac{d\varepsilon(s)}{ds} = 4\pi^2 nR\sin\alpha(1-\tilde{s}) \qquad \qquad fo\ \tilde{s} \le 1 \quad , \qquad (2-39)$$
其中 $\tilde{s} = \frac{|s|}{nR\sin\alpha}$

若光源為柱狀,其半徑為R,長度為H,可得

由上面推導出來的結果,利用2-38式、2-39式、2-40式,可畫出 (100)/ds 方程 式與skewness之間的關係圖。如圖2-13所示,經過計算可得到三條曲線下的面積

相等,也就是etendue相等[11][12]。



圖2-13方程式 $\frac{d\varepsilon(s)}{ds}$ 與skewness之間的關係圖

接著我們將再以輻射學(Radiometry)的角度來計算一半球光源的etendue。若 半球光源為一個Lambertian光源,發散角度的半角將達到180度。 則

$$E = \iint dA \cos\theta d\Omega \tag{2-41}$$

其中dA是一個平面在不同角度觀看下的投影面積,若光源為一半球的形狀,不同角度下的投影面積將不再是 dA cos θ,因此我們必須修正這個部份。

由圖2-14, 我們可以看到在不同的角度時, 投影面積將變為 $dA\frac{(1+\cos\theta)}{2}$, 也就是說我們應該把etendue改寫為

$$E = \iint dA \frac{(1 + \cos \theta)}{2} d\Omega \quad , \tag{2-42}$$

其中 $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$,



半球的Lambertian光源,其發散角度為0度到180度,所以2-43式積分結果將為 2πA。

和之前平面Lambertian光源以及圓球Lambertian光源及柱狀Lambertian 光源 來相互比較,用兩種方式計算出來的結果,我們可以發現,當我們的光源都是 Lambertian光源時,事實上計算出來的結果可以說是只跟表面積有關,也就是說 無論是半球或是圓球的光源,事實上它就是由很多的小平面所組成,所以可以用 平面的計算方式,只是面積放大了,因此etendue的值也就跟著變大。

2-3.3 Etendue 物理意義

前面提到 etendue 的定義由來以及計算,在這邊將討論在一個系統中, etendue 所代表的一個意涵。簡單的說,它代表的是一個光學系統中,光源發光 的面積或是系統的發光孔徑限制(Limiting aperture)和光束的發散情況。由能量 守恆的觀點來看,在一個系統中,若較前面的元件,其 etendue 大於後方的元 件,則此系統將沒有能力將所有的光線都蒐集進來,一定會造成能量的損失, 例如光源本身的 etendue 若大於系統的 etendue,則必定會有光線無法被蒐集, 使得通過系統的能量有所損耗,稱之為 etendue-limited;反之,若光源本身的 etendue 小於系統的 etendue,則所有光線都能被蒐集通過系統,即所有能量都 可通過系統被利用。如圖 2-15 所示。



圖2-15 (a) 光源的etendue大於系統的etendue;(b) 光源的etendue小於系統的etendue

然而,在一般的情形之下,由於一個系統會有散射或是像差等等的因素,因此其 etendue 真實上並非如理想狀況下會守恆,通常會造成放大的情形。例 如散射造成了角度的放大,或是像差造成像的放大模糊等。

對於不同的需求,系統所要求的 etendue 亦不相同。就設計 LCD 背光源來 說,其光源 etendue 越大越有利於設計;但就設計車燈或是投影機光源來說, 所需要的是較平行的光束,亦即出系統後需要有小的 etendue,所以光源的 etendue 越小越好。

2-4 邊緣光線定理(Edge-ray Principle)

一般對非成像光學系統而言,唯一的目的就是將光的能量完全地傳遞到目標上,而邊緣光線定理即是一個非成像光學設計的可靠依據。邊緣光線的定義有二,一是通過面的邊緣之光線,或是切於面之切線光線[17],光源面的邊緣 光線在傳遞時,若是對應到照明的目標面之邊緣上,也就是說某條光線在光源 面或是目標面上都是兩者的邊緣光線,那麼這樣的一個照明系統就是不會損失 光的系統,能完全收集到光源的光;接下來以一個 CPC(compound parabolic concentrator)的集光器當作例子,如下圖 2-16。



CPC 集光器是一個軸對稱的管狀反射面,其剖面的曲線其實是一個拋物線,拋物線的焦點就在目標面的邊緣上,此集光器之理念是將光源方向來的邊緣 光線

設計成對拋物線的管壁而言是平行光,如圖2-16實線所示,它能收集自光源而 來±θ 角的光線(如虛線所示),假設反射面是理想的,反射率100%,那麼這個CPC 的集光器將可以毫不漏失的將光都收集到目標面上。

解釋這個理論首先要先知道收光極限的原理,如下圖 2-17 示,太陽的所 發出的光被地球接收有一個極限存在,假設太陽均勻的向四面八方發光;相對於 太陽而言,地球的體積極小可近似成一個點,R 是與太陽中心相距的距離,以 太陽為球心,在不同的距離上,因為 $4\pi R^2$ 的球面上總能遵守能量守恆,則太陽 發出的能量與 R^2 成反比,令地球距離太陽R,而地球所能接收到的能量就只有總 能的 $(r/R)^2$ 倍,r 是太陽半徑,由簡單的幾何學可得 $r/R = \sin\theta$, θ 是地球接收太 陽光的半角,如果我們假設沒有其他因素的影響,則可以知道地球接收太陽能量 的極限會受限於兩者的形狀因子為 $1/\sin^2 \theta$,這就是收光極限的正弦定律(the law of concentration)[10]。



圖 2-17 地球接收太陽光之形狀因子

上述的正弦定律,所探討的是一個三維空間的收光極限,簡化在一個二維空間的平面,則收光的極限就只有1/sinθ而已了,一般的光學設計皆為軸對稱系統,這樣的系統在設計上只需要對二維空間去設計,即光軸方向與一垂直光軸方向所構成的2D面,所以設計上1/sinθ的形狀因子是較常用到的;除了收光極限的原理,另外還要再搭配費馬定理(Femat's principle),邊緣光線定理才會完整。

費馬定理告訴我們,對於一個成像光學而言,其物與像之間關係如圖2-18(a)P 至P'點的光程(optical path)無論取哪一路徑必守恆,這樣的概念一樣是可以應用 到拉線(strings)上的,對於一個非成像光學如圖2-18(b),波前上的每一點都是點 光源,而波前邊緣投出來的光線之光程定義為拉線光程,由P面起始的拉線光程 無論哪一角度,至P'面亦皆會守恆。



圖 2-18(a)成像光學(b)非成像光學之費馬定理示意圖

了解了收光極限的原理與費馬定理,我們再回到上述 CPC 集光器的部分, 證明這個光學元件已達到收光的極限,將邊緣光線入射的波前畫出如圖 2-19 是 一個二維的拉線模型(string method),假設這個系統能完美地傳遞能量,則由波 前射出的拉線光程必遵守費馬定律 AC+AB'=A'B+BB',又 AC=AA'x sinθ,且 AB'=A'B,可得下式(2-44)。

$$AA' \times \sin \theta = BB' \tag{2-44}$$



圖 2-19 拉線模型(string method)

上式(2-44)中,接收能量的BB'處與進入系統的光源AA'處有一形狀因子1/ sinθ,所以這個集光器已經達到收光極限了,即符合考量光傳遞的邊緣就能達到 收光極限的正弦定律,也證明了邊緣光線定理的正確性。在這個理論之前,傳統 的集光器設計如圖2-20,且已沿用多年,集光器剖面直線與光軸夾角γ,邊緣光 線的入射角度θi,則設計γ與θi 的關係符合下式(2-45),如此設計可令邊緣光 線至少都反射一次,可是並不保證反射後都能到達集光端,會有部分入射角度 θ_i的光線,多次反射回光源處而沒被收集到(如雙箭虛線所示),有鑑於此,也才 激發出邊緣光線理論的學說。

 $2\gamma = (\pi/2) - \theta_i$

(2-45)



圖2-20傳統集光器工作原理

所以這個理論告訴了我們最重要的一件事,設計照明系統時,令光源的邊緣 光線落在目標面的邊緣內,這將會是一個有效率的設計,依此規則在電腦上建構 模擬的平台,可幫助我們對非成像光學的設計,再配合前面的初值計算來得到初 始值,與利用光展量來估計效率,最後再以輻射檢測的實驗架構來驗證,整體的 設計才會更為完整。

第三章 小發散角照明器之研究方式

3-1 研究流程

高效率小發散角的非對稱結構照明器的研究流程,主要分為兩個階段:

- 收尋照明器之設計並分析:了解產品規格和設計的對象後,收集相關有用的 照明器設計的資料,可到中華民國專利局,美國專利局或書籍,網路等,並 作資料研讀和分析彙整的工作。
- 光學系統設計及結果驗證:
 參考步驟1的資料,開始著手設計,嘗試各種方法並使用光學模擬分析結果 並討論其優劣。



圖 3-1 研究流程圖

3-2 設計規格和目標

小發散角照明器設計之結構可分成光源,光學透鏡,觀察面(接收面)三部 分,三者的相對位置如圖 3-2 所示,



圖 3-2 光源,光學系統,觀察面三者相對位置之簡圖

光源,光學系統,接收面的細部資料,我們分別列出:

(I) 光源

我們使用 LED samsung2016,已經過一次光學設計,LED 操作在順向偏 壓 1000mA 平均可以產生 222.67 lumen ,配光曲線為 Lambertian 分布, 波長使用 400~700 nm 的可見光。如圖 3-3 所示。



圖 3-3 LED Samsung2016 波長和配光曲線

我們在 z=5mm 和 z=1000mm 處各放置接收面觀測進場和遠場的照度圖, 得到的結果如圖 3-4 所示, z=5mm 看到的光斑大小為一個對稱的圓分佈, z=1000mm 的光斑大小也是圓對稱且等比例放大,故這是一個對稱光源。



圖 3-4 LED 照度圖比較(a)近場 z=5 mm(b)遠場 Z=1000mm

為了方便找尋,我們將 LED 的資料列表如下。



表 3-1 LED 主要光學特性

(II) 光學系統設計

非對稱設計中光學系統尺寸大小被限制在一個最大空間如圖 3-5 和圖 3-6 的範圍裡面,其中光學透鏡的出光面區面為符合產品的美觀,和光學 機構有一致性,其孔鏡直徑,曲率是給定的,並且與光軸有一傾斜角度α =-4.24 度,為一非對稱的結構;而對稱系統的大小沒有機構的限制,可 以達到設計目標即可。



圖 3-5 非對稱系統可設計的光學系統空間之側視圖



圖 3-6 非對稱系統可設計的光學系統空間之正視圖

3		E	S	Ą		E
					8	E

(III) 接受面

如圖 3-2 所示,接收面的位置擺放在距 LED 1000 mm 的前方,接收面為 了用來接收 LED 經過光學系統發射出來的光線,超過接收面大小將接收 不到,大小我們設定為 800 * 800 mm² 的正方形。

● 設計目標

我們參考了前人的一些設計放在 3-3 節中,以此為目標希望能達到更好的效率,而非對稱系統的限制較多,我們合理推斷結果可能不好,故目標值定較低。

對稱系統小發散角照明器:	發散角<10度,燈具效率>75%
非對稱系統小發散角照明器:	發散角<15度,燈具效率>60%

3-3 前人研究資料介紹

在光學設計開始前,通常要找到一個理想的設計初始值,絕大多數都要經過 以下的一些方法入手。

(1)猜測,唯有設計經驗豐富者才能辦到。

(2)資料庫,可由光學設計軟體的資料庫取得,或是前人的論文、設計資料… 等,尋找出類似設計目標的初值。

(3)專利,翻閱專利檔案常能得到一些啟發,但特別要注意專利權的問題。

(4)逆向工程,取得一個類似規格的產品,拆解並量測其結構數據。

由此可知,「經驗」是光學設計中非常重要的技巧,也是要花費最多時間去 學習的。本節所敘述的光學設計是一般照明的光學設計,非點對點之成像光學, 不會要求太高的成像品質,因為非成像光學首先著重在光有效率的傳遞,其次是 投光的各種不同目的,如在目標面上均勻投光,或是使光在一段距離上是平行傳 遞的,像是拋物面燈罩、雷射上的準直透鏡(collimating lens)...等,當然也有要求 成像品質的照明系統,如投影機裡的接續透鏡(relay lens),這是為了要去解析光 閥上的像素而有較特殊的要求。本研究的目標放在非對稱的照明系統在到達目標 物面的距離平行傳遞且有足夠亮度,所以除了基本的幾何光學原理,還要再對輻 射計量學與其它非成像光學的理論加以研讀,如此才能進行設計。

3-3.1 光學模擬軟體LightTools範例[14]



圖 3-7 LightTools 範例 Creating a Catadioptric Lens

如圖 3-7, 參考 LightTools 範例,這是一個折反射式透鏡的小發散角高效率照的 明器,此設計使用 Lambertian LED 光源,峰值強度 5.65 cd,光源的 FWHM=120 度,透鏡的孔徑直徑 10mm,透鏡長度 7mm,如下圖 3-8。



圖 3-8 LightTools 範例 Catadioptric Lens 的資料

設計折射反射的光學透鏡,需要針對光源不同的角度的光線分別的調塑對 應的透鏡曲率函數,有些角度利用折射的方式準直,有些則利用全反射的特性 準直。如圖 3-9,它的做法一開始先建立一初始光學結構,使用光學模擬軟體 LightTools 裡的光線 NSRay 判斷,NSRay 我們設定為一個點光源發出的扇形光 線,此扇形光線的方向,光線數,扇型夾角都可以自由更動。我們利用 NSRay 可快速得到光源面任一點朝任一方向所發出任一夾角的扇形光線的光線追跡, 藉此判斷此透鏡的曲率是否合適。加上紅藍兩個角度的 NSRray 模擬,可看見 紅色扇形光線的光沒收好,於是在機構後面增加一幾何的曲線結構,再看 NSRay 的計算,可看出中間角度綠色扇形光線的光線還是有問題,於是調整前 孔徑改變其幾何結構,從 NSRay 可看出大部分角度都收的差不多了,結束手動 設計。



圖 3-9 Catadioptric Lens 設計過程

接著,使用優化程式,選擇透鏡的曲率函數為變數,選擇紅色光扇和藍色光扇為 Merit function - Global M(準直),如圖 3-10,按下執行,系統優化得到一個發散角僅 14 度,效率高達 78.16%的小發散角照明器,如圖 3-11。



圖 3-11 Catadioptric Lens 設計結果

3-3.2 微型投影機自由曲面 LED 聚光器的設計[15]



圖 3-12 微型投影機自由曲面 LED 聚光器的設計

此設計出自光學精密工程(Optics and Precision and Engineering)期刊第18 卷第10期 裡微型投影機自由曲面 LED 聚光器的設計之文章。如圖 3-12 示。 為提高 LED 微型投影機中光學引擎的效率和結構緊凑性,研究了自由曲面 LED 聚光器結構和工作原理,設計了含有折射和反射自由曲面的 LED 聚光器。採 用非成像理論和同時多表面設計方法,計算並獲得了聚光器折射和反射兩個自 由曲面在子午截面內的各點座標,利用聚光器的旋轉對稱性得到了其在三維空 間內的面形資料。照明器選擇器件材料為聚甲基丙烯酸甲酯 (PMMA),折射 率為 1.49, LED 發光晶片是發散角為 180°,大小為 1 mm ×1 mm 的朗伯 發光體,根據器件口徑和光束發散角的設計要求,利用上述設計方法,可以得 到自由曲面 LED 聚光器的設計結果,如圖 3-14 示。聚光器高度為 4.2 mm, 口徑為 21.5 mm。設計結果的光學建模仿真分析表明:所得聚光器能夠有效地 收集大功率 LED 光源的能量,並將光束發散角控制在 1 2°內,其光能收集率 達到 7 1%。如圖 3-13.14 所示。



圖 3-13 微型投影機自由曲面 LED 聚光器



圖 3-14 微型投影機自由曲面 LED 聚光器遠場強度

3-3.3 白光 LED 之一階與二階光學設計[16]

引用國立中央大學光電所鄭佳申碩士論文-白光 LED 之一階與二階光學設計。設計者使用半球螢光塗布的 LED, 欲設計出 10 度 TIR 透鏡,同時為了不使透鏡被放大和拉長,設計者使用的方法為將其形狀變成類似 fresnel-like 透鏡 (fresnel-like lens),有多片環狀的結構,如圖 3-15,以 R-10 TIR lens 稱之。



圖 3-15 R-10 TIR (修正前)

R-10 TIR lens 效率不夠好,設計者分析原因有二:

- 1. 光源光線一部分在入光面向後全反射
- 光源光線進入透鏡時,無法進入拋物面,直接入射在出光面上,而在這平面 發生全反射,光線向後傳遞而損失,造成效率下降。

解決方式:

1.設計者加上一傾斜的反射片,效率大大提升。如圖 3-16



圖 3-16 R10-TIR (a) 未加反射片(b) 加上反射片後

2.加長拋物面的部分,增加光線在透鏡中傳遞時使用拋物面的面積,結構呈現 一階梯狀,如圖 3-17。其中出光面的半徑分別為 28.33mm 和 28.75mm。



圖 3-17 R10-TIR 透鏡(修正後)

R10-TIR 透鏡的光形及發散角都符合要求。如圖 3-18。發散角 10 度左右,效率 85%。



圖 3-18 R10-TIR 遠場強度圖與照度圖

第四章 小發散角照明器之設計流程

4-1 小發散角照明器之設計流程

4-1.1 照明器設計流程



圖 4-1 光學系統設計流程

設計小發散角照明器,我們使用兩套光學模擬軟體 CodeV 和 LightTools 互 相輔助,在收 LED 小角度光線的透鏡時曲率可用 CodeV 的優化求解,而在收 LED 大角度光線時的全反射圈狀結構可用 LightTools 設計。使用 CodeV 和 LightTools 設計小發散角照明器的標準流程,如圖 4-1,首先從設計規格上我們 可知可設計的光學玻璃的最大空間不能超過多大?可選擇哪些材料?需要達到多 小的發散角?多少燈具效率?然後決定光學透鏡的外形,位置,並輸入其光學特 性(fresnel 損失)在此可利用 NSRay 輔助調整曲面的曲率來觀察光線追跡的情 況,小發散角照明器的曲面曲率經過多次調整後出射光線大致準直了,便進行 優化運算,對表面的曲率設定變數,限制條件,並加上評價函數,讓軟體程式 自動計算最佳解,如果優化成功,小發散角照明器的效能(Performance)有更好, 結束設計,如果優化失敗,檢查原因,調整變數,限制條件,再次優化,若不 行,重覆此循環。

4-1.2 光源轉換

LED Samsung2016 廠商提供的原始的光源檔為一個球面光源如圖 4-2, LightTools 設計聚光鏡過程中,光源的體積是存在的,這會讓透鏡可設計的空 間變小,如果光學透鏡重疊到光源則會發生干涉現象如圖 4-3,會讓光學模擬 結果錯誤,因此我們需要做光源轉換,將原本的球面光源轉換成面光源,球面 光源和透鏡間的空間。



圖 4-2 Samsung 2016 遠始光源檔案



圖 4-3 光源與透鏡接觸發生干涉

因此我們必須將光源檔做轉換,但不改變原來球面的特性,首先,我們 先將源光源檔做光線逆追跡,觀察圖 4-4,我們可發現這並不是一個完美的 球面光源可收回至一點,逆追跡的結果而是不規則的一團焦點。因此,我們 近似這些焦點為一個平面,在上面建立一個虛擬的正方形平面(dummy surface),當做新的平面光源,長與寬各為 1mm x 1mm。



圖 4-4 samsung2016 光源逆光線追跡

接著,我們在這虛擬平面上加接收器做逆光線追跡,儲存這些光線資料後 匯出,就可當作一光源檔使用了。最後,比較原始光源檔和新的光源檔在觀察 面上的照度圖的差異度。



圖 4-5 原始球面光源和新的平面光源的比較

從圖 4-5 的比較中可看出兩者的差異不大,可近似為相同,因此我們使用 此平面光源檔做後續的設計。

4-1.3 光學透鏡設計方式

1. 透鏡的建模

設計者可以建立光學透鏡模型,LightTools內建立體球,凸,凹透鏡,拋物面...等,也可以自建自由曲面模型,利用內建的布林函數即可。選擇內建 模型按照如圖 4-6 的步驟。建出來後,輸入模型的位置和大小,和光學特性。 在小發散角照明器設計中,我們材料可選 Polycarbonate 或 PMMA,光學特 性勾選菲涅爾損失如圖 4-7。[13]



圖 4-7 輸入光學特性

2.NSRay 的假設

由光源轉換中,我們得到一個不會產生干射現象的平面光源,在設計光學 透鏡時,我們並不會使用真正的光源檔做設計,而是採用 NSRray 近似為光源 檔光線。所以 NSRay 的假設若與原光源差很多,那麼後面的設計肯定也是錯誤 的。故,我們將原光源檔做逆光線追跡後的焦點的邊緣焦點和中心焦點設定為 NSray 新的點光源,也就是放在新的平面光源中心(x,y,z)=(0,0.3,0.75)以 及(x,y,z)=(0,0.8,0.75)和(x,y,z)=(0,-0.2,0.75)上如圖 4-8。



3.設計概念

設計透鏡大致上可分為中間透鏡和外圍透鏡,如圖 4-9,中間透鏡負責收集 LED 光源發散角 30 度內的光線,因為此區域的光線較為集中,故我們直接設 計一個球面(或非球面)的凸透鏡,利用折射原理便可達到良好的準直效果。外 圍透鏡負責收集 30 度以上的光源光線,因為角度範圍涵蓋很大,所以無法單靠 一個曲面函數來解決,設計的曲面形狀可想而知會非常複雜,設計上可能會用 到複雜困難的數學知識和數值分析的軟體。於是,我們避開這些問題,採用 fresnel-like Lens 的概念簡化處理問題,用 2 圈,3 圈(或更多圈會更準確,但設 計上有困難且製程不易)不同曲率面的光學玻璃來收集 30~180 度的光線,利用 大角度光線經過折射在內全反射的原理達到光線準直的目的,如圖 4-10。

35



第五章 小發散角照明器之設計&分析

5-1小發散角照明器設計一 - 單球面透鏡

設計的初始構想先從一片簡單的單透鏡下手,運用幾何光學透鏡成像的原理, 利用式(5-1)

$$\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)}{n}\frac{t}{R_1R_2})$$
(5-1)

其中 d_i , d_o 分別為物距及像距,n為材料折射率, R_1 , R_2 為透鏡曲率,t為透鏡厚度。

將光源的光線直接聚焦在像平面上,形成一高能量的聚焦光線。光學模擬 軟體的使用順序上,先以 CodeV 座透鏡設計並優化至完善,在使用 LightTools 複製且呈現出來並用真實的光源檔做光學計算。CodeV 輸入 lens 的資料如前述 的規格,必須要放的進機構,模擬的結果如圖 5-1 到像平面中間的光線很集中, 但有部分的光會散到外面。光源擺放在(x,y,z)=(0,0,0)上,球面單透鏡的尺寸大 小及位置如圖 5-2。



圖 5-1 球面單透鏡設計



圖 5-2 球面單透鏡的尺寸大小與位置

接著把此透鏡轉檔至 LightTools 上,放置好透鏡的位置且輸入光學特性,執行 光線追跡結果如圖 5-3,在觀察面上看到的照度圖,如圖 5-4,遠場的強度分析, 如圖 5-5。故,使用球面鏡設計可以完成一小發散角照明器。發散角約 17.8 度, 效率為 47%。



圖 5-3 單透鏡照明器光線追跡模擬



圖 5-4 單透鏡照明器照度圖



圖 5-5 單透鏡照明器遠場強度分佈圖

5-2 小發散角照明器設計二 - 貝茲曲線透鏡(Bezier)

第二個小發散角照明器設計使用 Bezier 曲線構成的幾何結構設計照明器, Bezier 幾何體內建 LightTools 的材料模型裡,可調整透鏡前孔徑,後孔徑大小 及邊緣曲線函數,創建出任意貝茲透鏡,如圖 5-6。



圖 5-6 貝茲曲線參數

我們設計時,以 NSRray 為輔助設計貝茲透鏡使得光線經過2次折射平行的打入觀察面。光源 chip 擺放在座標中心,經過數次的嚐試錯誤,設計結果如圖 5-7,為 Bezier 照明器的第一個設計,我們標示為 Bezier(1)。



圖 5-7 Bezier 照明器(1)的幾何結構與 NSRay 模擬

接著同樣的,使用真實的光源檔做模擬,光線追跡的情況如圖 5-8 ,在觀察面上的照度圖如圖 5-9,遠場強度的分布如圖 5-10。 效率為 65.39%,發散角 19.8 度。



圖 5-8 Bezier 照明器(1)光線追跡



圖 5-9 Bezier 照明器(1)照度圖



圖 5-10 Bezier 照明器(1) 強度分佈圖

由上面的結果來看,Bezier 照明器(1)效率比單透鏡的設計還要好,但發散 角卻多了2度,並不是最佳的結果。因此小尺寸的透鏡要達到高效率小發散角 需要特別的多個曲率函數才能達到目標,形狀一定長的很特別,需要複雜的計 算後才能得到我們不考慮。

我們改為放大透鏡的尺寸,後孔鏡直鏡改為0。設計結果如圖 5-11 所示, 第二個 Bezier 透鏡,我們標示為 Bezier 照明器(2),效率可達 78%,發散角 5.8 度,如圖 5-12,5-13。從圖 5-1 照度圖中可看見中為一個似正方型的光斑,且 非常的小,經包圍能量分析計算後,得到一很陡的能量上升曲線,半能量的半 徑約 100mm,說明了光斑很集中很小,如圖 5-14。



圖 5-11 貝茲透鏡(2)







圖 5-13 貝茲透鏡(2)遠場強度分佈圖



圖 5-14 貝茲透鏡(2)包圍能量分析

5-3 小發散角照明器設計三 - 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡 5-3.1 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)



圖 5-15 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)

設計非對稱小發散角照明器,可使用 fresnel-like 形式透鏡,由中間的球面 凸透鏡和外圍四圈的環所組成,中間的球面透鏡使用前面 5-1 節球面單透鏡的 概念,外圍四圈的幾何結構使用類似 5-2 節 Bezier 透鏡的概念,將各個角度範 圍的光用不同的曲率達到內全反射平行於觀察面法線方向出去的效果。 fresnel-like 式的設計一,我們標示為 fresnel-like 透鏡(1),設計的結果如圖 5-15。 透鏡整體的長度 2.8mm,直徑 3.5mm,光罩傾斜角-4.24 度,在 1000mm 外 800mmx800mm 的觀察面上的照度圖如圖 5-16。包為能量分析如圖 5-17,遠場 強度分佈圖如圖 5-18。效率 29%,發散角 21.32 度。



圖 5-16 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)照度圖



圖 5-17 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)之包圍能量分析



圖 5-18 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)之遠場分析

從能量使用的角度來看,效率並不理想,那我們不禁會思考其餘的能量究 竟跑到哪了?故我們分析了 LED 光源(總流明數 222.67)到達觀察面前每一個介 面上所收集到的總能量,來分析了解能量收集的狀況,如圖 5-19。



圖 5-19 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(1)在各表面的能量

我們考慮能量損失主要有:

- 1. 未將光源的光線有效利用,大角度的光線未被收進透鏡。
- 透鏡的曲率函數不夠好,一部分反彈回光源,一部分出射角度太大無法落 在接收面上。

故我們改善缺點並調整設計,設計了第二個 fresnel-like 透鏡照明器,我們標示為 fresnel-like 透鏡照明器(2)。

1896

5-3.2 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)

fresnel-like 透鏡照明器(2)的做法,增加照明器外圍的圈數收集 LED 光源大 角度的光線,且將原本收集小角度光線的透鏡曲率微調至更佳,以及調整 fresnel-like 透鏡的長度,預期這些改變可有效提升系統的表現。 fresnel-like 透鏡(2)設計結果如圖 5-20,透鏡尺寸大小為直徑為 4.7mm,長度為 3.8mm,光罩傾斜角-4.24 度。



圖 5-20 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)

fresnel-like 透鏡(2)的照度分佈如圖 5-21,包圍能量分析如圖 5-22,遠場發 散角度如圖 5-23,相較於 fresnel-like 透鏡(1)能量使用率得到大幅改善,發散角 也變小了,這是設計者所期望的結果。fresnel-like 透鏡(2)的效率為 43%,發散 角為 15.6 度。



圖 5-22 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)之包圍能量分析



圖 5-23 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)之遠場分析

以一般的照明器燈具效率的要求來說,fresnel-like 透鏡(2)的燈具效率可能 不夠高,我們可從 NSray 的光線模擬來看,如圖 5-24,fresnel-like 透鏡(2)雖然 將光源大角度的光線經由內全反射水平的打出,但前面的孔徑的關係光線全都 被機構屏蔽了,所以效率大大的打了折扣。由前述的規格來看,如圖 3-6,我 們可想像為一個簡單的單透鏡成像,若光線從原點(x,y,z)=(0,0,0)出發,經過單 透鏡,再到觀察面中心。那麼單透鏡的孔徑直徑為 4.8mm 時,也就是 fresnel-like 透鏡(2)的前孔徑直徑,由三角函數運算可算出出射此單透鏡到達觀察面中心需 要的角度為 $\theta = \tan^{-1} \frac{2.4}{1000} = 0.137 度,相同的,單透鏡的孔徑直徑為 3.5mm 時,$ $<math>\theta = \tan^{-1} \frac{3.5/2}{1000} = 0.1 度,幾乎趨近平行光,故這個機構限制了 fresnel-like 透鏡$ 的大小,fresnel-like 透鏡孔徑直徑需要小於 3.5mm。如此一來,要將 180 度光源光線收到 fresnel-like 透鏡裡,變得更不容易了。



圖 5-24 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)大角度光線被機構屏蔽

圖 5-21 中的黃色機構物件若不考慮的話,重新執行光線追跡,效率提升不少變為 58.52%,發散角 17.49 度,如圖 5-25。



圖 5-25 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)照度圖和遠場強度分佈圖

第六章 公差分析和結論

6-1 公差分析-非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)

為了瞭解非對稱系統中結果最好的fresnel-like透鏡(2)的容忍度,特別做了公差分析。然而,由於光學模擬軟體LightTool並沒有曲面曲率的公差分析,因此, 本小節中只分析LED在一段距離或角度上的變化,觀察光形及散角分佈圖,以了 解光形及散角的變化程度,來瞭解公差範圍的大小。也就是說,在一段距離或角 度變化內,光形或散角分佈情形變化越大的,通常其公差範圍就越小;相反的, 當在一段距離或角度變化內,其光形或散角分佈情形變化越小的,通常其公差範 圍就越大。

首先我們將LED放置在原本光源的位置,在x,y,z軸上每移動 $\frac{11}{60}$ mm即觀看一次光形與散角之結果,分別從正,負方向各取3個樣;也分別別從角度 α , β , γ 三個角度,以1度為公差取6點為樣本做分析,範圍-3~+3度。分析的結果如圖 6-1。



圖 6-1 非對稱外觀 fresnel-like 透鏡(2)LED 偏差的影響

由上面的結果顯示LED x,y方向的偏移會讓效率從拋物線頂點向兩側明顯的下降,而z方向的偏移則否,往正方向移動,效率會增加,但發散角會變大,往負 方向移動,效率則減少且發散角也變大。而角度αβγ在-3~+3之間的變化,對 效率變化不大,發散角的影響較大。

6-2 公差分析-貝茲透鏡(1)

同樣,我們也將LED放置在原先的位置,在x,y,z軸上每移動 $\frac{5}{12}$ mm即觀看一 次光形與散角之結果,分別從正,負方向各取3個樣。光斑的變化如圖6-2;也分 別別從角度 α , β , γ 三個角度,以1度為公差取6點為樣本做分析,範圍-3~+3 度,光斑的變化如圖6-3。最後,公差vs照度和發散角的比較,如圖6-4。



圖 6-2 貝茲透鏡(1)之 LED 位置偏移對照度的影響



圖 6-3 貝茲透鏡(1)之 LED 角度偏移對照度的影響



公差分析的結果顯示了這是一個好的小發散照明器設計,LED 旋轉方向 α, β, γ的角度範圍-3~+3,效率和發散角幾乎不變,且LED 在 x,y 方向偏 移的影響,由圖 6-2 和圖 6-4 可看出,光斑會上下左右移動且效率以一個平滑 的 拋物線小幅度下降外,整個光斑大小也幾乎不變的,LED z 方向的偏移相較之 下算較嚴重的,效率會有明顯變化,光斑外圍會逐漸模糊變大,發散角幾乎不 變。

6-3 結論

精確的設計一個小發散角且高效率的非對稱(或對稱)照明器需要經過費時 繁複的高等數學運算和功能強大處理快速的光學模擬軟體輔助才能實現。在第 三章中,我們參考了一些國外和大陸的博士和研究學者一起發表的期刊文章 中,裡面提到很多高級的方式設計照明器需要須當的光學基礎和數學計算量, 非常不容易完成。

本論文的照明器透鏡設計主要使用第三章 LightTools 範例使用的方法,使 用 NSRay 近似光源檔,建構一個可準直光線至觀察面的自由曲面,曲面的函數 須不斷的嘗試錯誤,不斷的軟體優化,最後取得最佳值,才能達成完美的小發 散角高效率照明的設計。在第五章中,我們嘗試了單球面透鏡,Bezier 透鏡, fresnel-like 透鏡實現設計目標,都有不同效果。在非對稱的結構中,因為有設 計空間的限制,不可能使用單一簡單函數就能設計出來,而我們使用中間凸透 鏡的 fresnel-like 式的折射內全反射式照明器。因為 fresnel-like 透鏡分為數段曲 率收光,可有較好的收光效果和壓縮體積,但其結構複雜,更動透鏡的參數不 易且光線追跡耗時,是此種方法的缺點。因此,我們設計了 fresnel-like 透鏡(2), 中間由曲率 1.6 的聚焦凸球面鏡加上外圍五圈的內全反射透鏡環組成,效率 43%,發散角 15.6 度,公差容忍度差,這說明在這規格下使用 fresnel-like 透鏡 設計是很難有好效果的。然而,在對稱式設計中,我們設計了一個貝茲透鏡, 效率 78.32%,發散角 5.8 度,是個不錯的小發散角照明器,光斑在遠處仍很小 很集中,公差分析後也有不錯的容忍度。

參考文獻

[1]http://www.ledgood.com/2008/09/%E6%B1%BD%E8%BD%A6-led-%E7%85% A7%E6%98%8E/

[2]http://www.google.com/imghp?hl=zh-TW&tab=wi

[3]http://www.google.com/imghp?hl=zh-TW&tab=wi

[4]E. Hecht (2001). Optics (4th ed.). Pearson Education.

[5]http://www.google.com/imghp?hl=zh-TW&tab=wi

[6]http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

[7]Hsien-Che Lee, "Introduction to Color Imaging Science", 2005

[8]V. N. Mahajan, Optical Imaging and Aberrations, Part I Ray Geometrical Optics, SPIE PRESS, Washington, (1998).

[9]E. Stupp and M. Brennesholtz, Projection Displays, John Wiley&Sons, New York, (1999).

[10]R. W. Boyd, Radiometry and the Detection of Optical Radiation, John Wiley & Sons, New York, (1984).

[11]R.winston, Nonimageing Optics, Academic, London, (2005).

[12]H. Ries, N. Shatz, J. Bortz, and W. Spirkl, "Performance limitations of rotationally symmetric nonimaging devices", J. Opt. Soc. Am. A 14, 2855–2862 (1997).

[13]LightTools7.2.0 Introductory Tutorial, Optical Research Associates

[14]LightTools7.2.0 Example Model Library,Optical Research Associates

[15] 趙星等編著,「微型投影機自由曲面 LED 聚光器的設計」,光學精密工程期刊,第十八卷第十期,2010年10月。

[16]鄭佳申,白光 LED 之一階與二階光學設計,中央大學光電科學研究所碩士論 文,97 年 7 月。



附錄 A-照明相關名詞介紹

在照明設計時,我們需要先了解相關照明名詞的定義,以下介紹幾個主要 的名詞。

 1.佈光性:佈光特性可分為漫射性或指向性。散射性光源如普通鎬絲燈泡及大部 份螢光燈,其佈光模式係向四面擴散,不具任何方向性;指向性光源如
 LED,LD,即在佈光上具有明確的投光方向與光束角度的特性。

2. 光束幅度(beam spread):

一般在光源正下方時可得到最大光度,而朝側邊遞減,光束幅度即用來說明光束 特性為集光(Spot)或散光(Flood)。

3. 佈 光 角 (Field angle):

光束在兩方向的發光強度為最大值的10%所涵蓋的角度。

4.發散角或光束角(Beam angle): 光束在兩方向的發光強度為最大值的10%所涵蓋的角度。如圖A-1。



圖A-1光束角與佈光角[3]

其中光束角可細分(依美國國家標準局,ANSI):

- 超窄角 (Very Narrow Spot, VNSP): <5°
- 窄角(Narrow Spot, NSP):5°~10°
- 中角 (Spot, SP 或Narrow Flood, NFL): 10°~25°
- 廣角 (Flood, FL): 25°~40°
- 超廣角 (Very Flood, WFL) : > 40°

5.均匀度(Uniformity):

照明空間內對光線分佈之均勻性定義

照度均匀度= (最低照度) / (平均照度)(0~1 之間,"1"為理想值)

6.亮度比:

視野內區域間或物體間亮度之差異

7.亮度對比:

即明暗對比,目標物與其背景亮度差異除以較亮者亮度所得百分比

8. 光輸出效率(Efficacy):

單位電能點亮光源體產生之流明數。單位: 流明/瓦(Lm/W)

9.燈具效率(Luminaire Efficiency): 燈具實際發出之光通量佔內含光源所發出光通量比值。

10.發光效率(Luminous efficacy)(efficacy): 光源所發光效率可藉分析其每單位電力(瓦)所發出的光通量來評價。亦即光源所 發出的光通量除以其耗電量所得之商,說明該光源的發光效率,簡稱光效,單位 為1m/W(Lumens per watt,LPW)。

11. 配光曲線(Candlepower Distribution Curves):

配光曲線係以極座標 (Polar Diagram) 表示燈具發光強度分佈之情形,測量通過 燈具中心在各個角度方向上的發光強度,單位cd。如圖2-2所示為3種不同燈具的 配光曲線,由左至右分別為Narrow, Parabolic, Batwing三種配光曲線之燈具。



圖A-2不同燈具的配光曲線[3]

附錄 B-貝茲曲線

在數學的數值分析領域中,貝茲曲線(Bézier曲線)是電腦圖形學中相當重要的參數曲線。更高維度的廣泛化貝茲曲線就稱作貝茲曲面,其中貝茲三角是 一種特殊的實例。

貝茲曲線於 1962 年,由法國工程師皮埃爾·貝茲(Pierre Bézier)所廣泛發 表,他運用貝茲曲線來為汽車的主體進行設計。貝茲曲線最初由 Paul de Casteljau 於 1959 年運用 de Casteljau 演算法開發,以穩定數值的方法求出貝茲 曲線。

1. 線性曲線:

給定點 $P_0 \ P_1$,線性貝茲曲線只是一條兩點之間的直線。這條線由下式給出: $B(t) = P_0 + t(P_1 - P_0), t \in [0,1]$ 且其等同於線性插值。



圖 B-1 線性貝茲曲線

2. 二次曲線:

二次方貝茲曲線的路徑由給定點 $P_0 \, \cdot P_1 \, \cdot P_2$ 的函數B(t)追蹤:

 $B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2, t \in [0,1]$

TrueType 字型就運用了以貝茲樣條組成的二次貝茲曲線。



3. 高階曲線:

 $P_0 imes P_1 imes P_2 imes P_3$ 四個點在平面或在三維空間中定義了三次方貝茲曲線。曲線起始於 P_0 走向 P_1 ,並從 P_2 的方向來到 P_3 。一般不會經過 P_1 或 P_2 ;這兩個點只是在那裡提供方向資訊。 P_0 和 P_1 之間的間距,決定了曲線在轉而趨進 P_3 之前,走向 P_2 方向的「長度有多長」。 曲線的參數形式為: $B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3, t \in [0,1]$ 現代的成像系統,如 PostScript Asymptote 和 Metafont,運用了以貝茲樣條

組成的三次貝茲曲線,用來描繪曲線輪廓。



圖 B-3 三次貝茲曲線