

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

舉債的淨好處

The Net Benefits to Leverage

研究生：賴韻涵

指導教授：吳儀玲、洪慧念 教授

中華民國一百零一年六月

舉債的淨好處

The Net Benefits to Leverage

研究生：賴韻涵

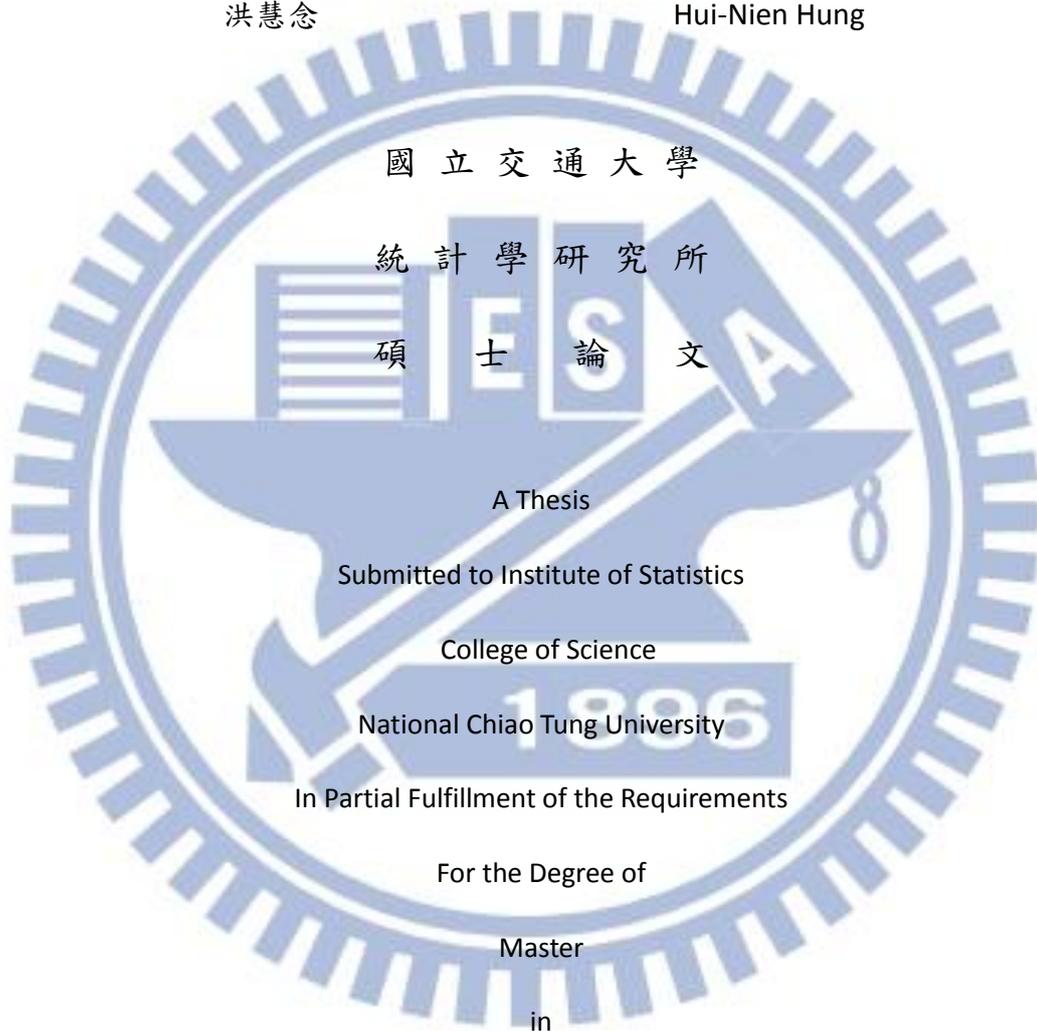
Student : Yunn-han Lai

指導教授：吳儀玲

Advisor : Yi-Lin Wu

洪慧念

Hui-Nien Hung



Statistics

June 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年六月

舉債的淨好處

研究生：賴韻涵 指導教授：吳儀玲 洪慧念 共同指導

國立交通大學統計學研究所

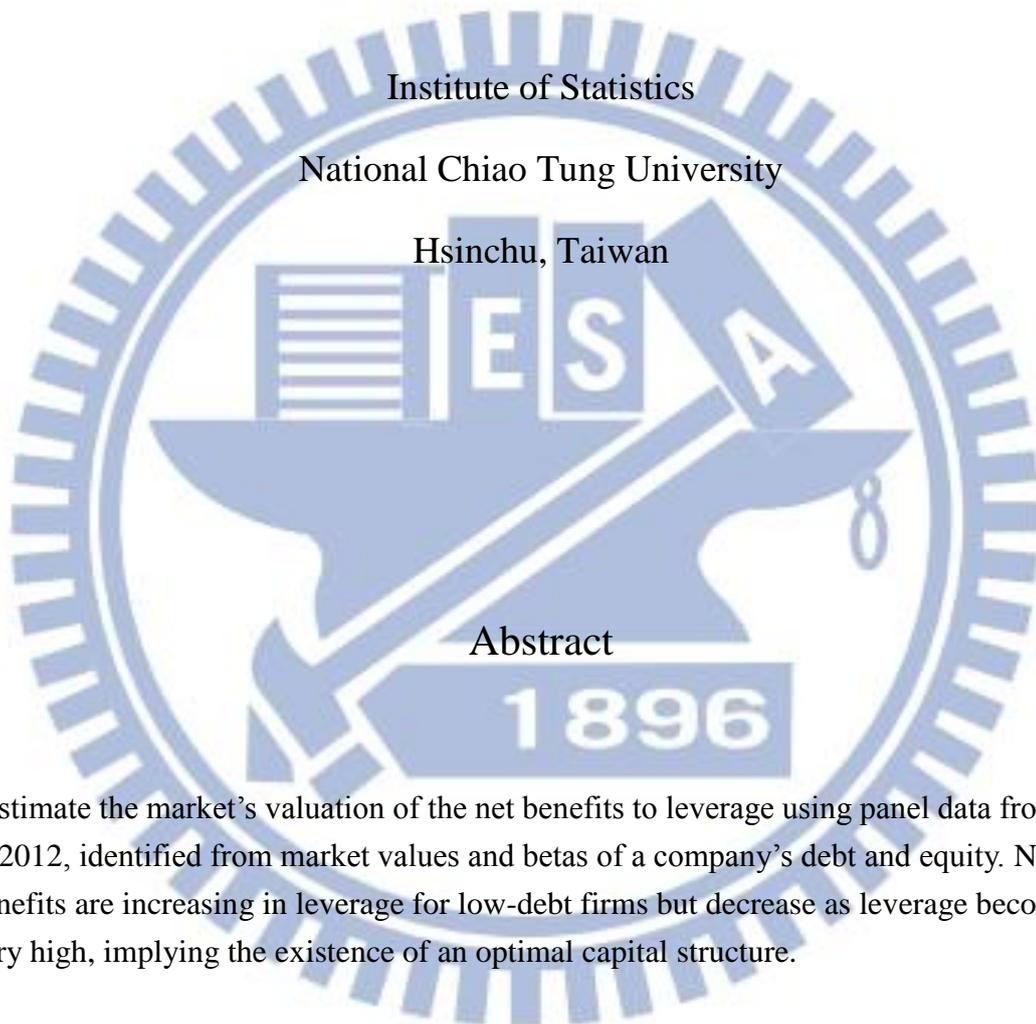
摘要

我使用 1994 年到 2012 年的數據，根據市場價值以及公司的債務和股權貝塔值，估計舉債的淨好處。當企業舉債比率較低時，淨效益會隨著舉債增加而增加，但是如果舉債比率太高，淨效益又會隨著舉債增加而減少，這意味著公司存在一個最佳的資本結構。

The Net Benefits to Leverage

Student : Yunn-han Lai

Advisor : Yi-Lin Wu 、 Hui-Nien Hung



I estimate the market's valuation of the net benefits to leverage using panel data from 1994 to 2012, identified from market values and betas of a company's debt and equity. Net benefits are increasing in leverage for low-debt firms but decrease as leverage becomes very high, implying the existence of an optimal capital structure.

誌 謝

在碩士的求學生活中，覺得自己很幸運可以在吳儀玲教授以及洪慧念教授的指導下學習研究。在這段時間裡，老師教導我很多新知，並鼓勵我參與學術活動，遇到任何問題老師都很樂意替我解答，也因此最後能有此篇論文的產生。最重要的還是要感謝吳老師與洪老師的栽培與教誨，此外，還要感謝許多學長姐及同學的建議與幫忙，給我靈感且激發我的想法。最後，還要謝謝口試委員彭南夫教授與謝佩芳教授在百忙之中撥空審查我的論文，並提出建言及改進的方向，讓此篇論文能夠更加完善。

目 錄

| | 頁次 |
|---|-----|
| 中文摘要 | i |
| 英文摘要 | ii |
| 致謝 | iii |
| 目錄 | iv |
| 表目錄 | v |
| 圖目錄 | v |
| 一、 介紹 | 1 |
| 二、 Modigliani–Miller 舉債的淨好處 | 2 |
| 三、 蒙地卡羅馬可夫鏈 – Markov chain Monte Carlo (MCMC) | 4 |
| 3-1 蒙地卡羅馬可夫鏈 | 4 |
| 3-2 估計參數 | 7 |
| 附錄一 卡爾曼濾波器 | 14 |
| 附錄二 Forward Filter Backward Sample (FFBS) | 15 |
| 四、 實證結果 | 16 |
| 4-1 資料 | 16 |
| 4-2 分析 | 18 |
| 五、 討論與結論 | 24 |
| 5-1 問題探討 | 24 |
| 5-2 結論 | 25 |
| 六、 參考文獻 | 26 |

表 目 錄

| | | |
|----|----------|----|
| 表一 | 樣本按產業別分示 | 17 |
| 表二 | 統計報表 | 19 |
| 表三 | 參數估計 | 19 |

圖 目 錄

| | | |
|----|--------|----|
| 圖一 | 舉債的淨好處 | 21 |
| 圖二 | 最適資產結構 | 23 |



一、介紹

最佳的資本結構理論，可以解釋公司選擇一個折衷的債務與股權融資，例如：企業選擇一個舉債的比率，會有一些利息稅盾的舉債效益，自由現金流量的減少，對公司的債務成本也有一些影響。

我們可以運用一些迴歸模型，估計舉債的好處和成本變數。但是迴歸方法的一個缺點，它無法檢測企業是否有債務過多或是過少的現象，這個問題是很重要的，因為公司可能在財務報表上留下大量的稅負優惠。第二個缺點是隱含的假設，假設公司始終存在一個最佳的舉債比率，可能對公司的營利能力和企業規模造成一個誤導的效果。在現實中，企業選擇其資本結構，調整舉債的比率讓平衡的收益大於成本。

對於這個議題，本文針對公司的資本結構探討以下問題：1. 債務融資的淨效益，2. 公司特徵變數的變化對於最佳資本結構的影響。我們採用的樣本，全部共有 753,001 個公司一月 (firm-months) 數，其包含 7937 家公司，共 22 個不同類別的產業。我們估計債務融資的淨效益，根據一個公司的市場價值、系統風險 (貝塔) 和舉債效益之間的關係 (Modigliani and Miller (1958))。假設同一個產業下不同公司的 (asset beta) 資產貝塔值都相同，我們使用 (equity and debt betas) 股權和負債貝塔值的不同變化，來估計淨效益的差異，以及計算其與公司特徵函數的變化。

我們發現淨效益在低舉債時，會隨著舉債增加而增加，但是在高舉債時，又會隨著舉債增加而下降，這個結果意味著公司存在最佳的資本結構，可使債務融資達到最大的淨效益。

本文組織如下：第二章開始介紹 Modigliani and Miller (1958) 舉債的淨效益和市場價值以及企業的債務和股權貝塔值之間的關係，第三章介紹估計的方法，我們使用蒙地卡羅馬可夫鏈 (Markov chain Monte Carlo (MCMC)) 來估計參數，樣本資料及數據則放在第四章，第五章為討論與結果。

二、Modigliani–Miller 舉債的淨好處

Modigliani and Miller (1958) 考慮該公司在時間 t 的市面價值 V_t^L ，等於其在時間 t 時負債的市面價值 D_t 加上其股東權益的市面價值 E_t ^①：

$$V_t^L = D_t + E_t \quad (1.1)$$

用另一個不同的方式表示同一家公司的市面價值：

$$V_t^L = V_t^U + B_t \quad (1.2)$$

V_t^U 是無負債公司 (unlevered firm) 的市面價值，假設公司在時間 t 的價值等同於它所有的負債被其股東買回， V_t^L 和 V_t^U 的差異為舉債的淨好處 B_t ， B_t 是一個虛構的定義為預期的利益現值減去債務融資的成本。在公司的資本結構中存在債務，債務融資的好處包括：1. 利息稅盾，以及 2. 代理成本自由現金流量的減少，例如：公司的總經理可能花錢購買小型飛機，可以確實的減少旅途上來回的時間，但是這些自由現金也可能被拿去做為私人用途使用。舉債的成本是在所有未來的現金流量中，公司的資本結構失去存在的債務，以及代表直接和間接的機構在之前和之後默認實現的成本^②。因為 B_t 是一個對未來現金流量的市場期望，這也反映了市場對未來的融資政策以及調整資本結構的交易成本。

公司還具有系統性風險 β_t^L ，與公司一些危險因素回報的共變異數 (covariance) 有條件的成正比。(1.1) 式的分解產生公司的系統性風險，是債務貝塔值 (debt beta) β_t^D 和股東權益貝塔值 (equity beta) β_t^E 的加權平均：

$$\beta_t^L = \frac{D_t}{V_t^L} \beta_t^D + \frac{E_t}{V_t^L} \beta_t^E \quad (1.3)$$

注意，此方程式展開在 Modigliani and Miller (MM) 零稅負的假設下，(1.3) 式是一個機械的恆等式成立在有稅收的世界，以及同時成立在任何的金融政策下，我們有舉債公司的貝塔值 (levered firm's beta) 在恆等式的左手邊。我下面顯示，無稅或無週險成本時， $\beta_t^L = \beta_t^U$ ，並且我們發現傳統的 MM 關係：

$$\beta_t^U = \frac{D_t}{V_t^L} \beta_t^D + \frac{E_t}{V_t^L} \beta_t^E \quad (1.4)$$

當使用 (1.2) 式分解舉債公司的貝塔值 (levered firm's beta)，可以清楚的看到 β_t^L 和 β_t^U 的差異：

$$\beta_t^L = \frac{V_t^U}{V_t^L} \beta_t^U + \frac{B_t}{V_t^L} \beta_t^B \quad (1.5)$$

① 負債與股東權益可以進一步分解到公司債券、銀行債務和資本租賃，以及普通股和優先股，但在本文是沒有必要的。

② 債務成本的例子：做生意上損失的能力，像是因為公司破產導致顧客所關心的零件、服務和維修的中斷或取消 (Titman (1984) and Titman and Opler (1994))，由於債務負擔造成的投資變異 (Myers (1977))，以及資產替代 (Jensen and Meckling (1976))，員工離開公司或是尋找另一份工作，管理者花費大量的時間在和債權人和投資銀行家討論重組和再融資計畫，而不是做生意。

根據定義，無負債資產的系統性風險 β_t^U 不受公司的資本結構影響。舉債的影響對於有負債公司的貝塔值（beta of the levered firm） β_t^L ，完全由債務融資的淨好處 B_t 以及其系統性風險 β_t^B 驅動。在無稅費返環和財務困境的成本下， $B_t = 0$ ，模型恢復到經典的 MM 無稅情況，即 $V_t^L = V_t^U$ 以及 $\beta_t^L = \beta_t^U$ 。

將 (1.1) 和 (1.2) 式的 V_t^L ，以及 (1.3) 和 (1.5) 式裡 β_t^L 的展開劃上等號：

$$V_t^U + B_t = D_t + E_t \quad (1.6a)$$

$$\frac{V_t^U}{V_t^L} \beta_t^U + \frac{B_t}{V_t^L} \beta_t^B = \frac{D_t}{V_t^L} \beta_t^D + \frac{E_t}{V_t^L} \beta_t^E \quad (1.6b)$$

為了說明 β_t^B 如何交稅，考慮知名的特殊情況下一個恆定的邊際企業所得稅稅率 τ ，沒有債務影響稅收的好處，也沒有金融危機的成本。Bierman and Oldfield (1979) 顯示恆定的債務面值，稅盾的現值是 $B_t = \tau D_t$ 。則方程式 (1.6a) 和 (1.6b) 可以變成：

$$V_t^L = V_t^U + \tau D_t \quad (1.7a)$$

$$\beta_t^U = \frac{D_t}{V_t^U} (1 - \tau) \beta_t^D + \frac{E_t}{V_t^U} \beta_t^E \quad (1.7b)$$

(1.7a) 式表示有負債公司的價值等於無負債公司的價值加上利息稅盾的現在價值，(1.7b) 式則是教科書上無舉債的展開式。

因為舉債有好處也有成本問題，所以最適資本結構的交易理論去預測公司的市場價值，變成一個舉債的駝峰狀 (hump-shaped) 公式。同樣地公司的貝塔值 (the firm's beta) β_t^L 其舉債的變化被淨效益的系統性風險決定。

三、蒙地卡羅馬可夫鏈—Markov chain Monte Carlo (MCMC)

3-1、蒙地卡羅馬可夫鏈

利用亂數隨機抽樣的方式以代替複雜計算的演算法，被稱為蒙地卡羅演算法。而馬可夫鏈是一種具有穩定狀態（stationary process）的隨機過程，假如我們不斷的觀察某種隨機現象，會看到一連串的觀察值，這些觀察值會形成整個隨機現象空間，假設這些觀察值之間有某種因果關係，從目前狀態 s 轉移到下一個狀態 s' 的機率，這個狀態之轉移機率並不會受到狀態以外的因素所影響，那麼我們可以透過馬可夫過程描述此因果關係。

假設我們有 X_1, X_2, \dots, X_n 的觀察值，相互獨立而且有相同的機率密度函數 $f(x|\theta)$ ，但是 θ 是未知的，我們可以定義聯合機率函數 $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ ，將它標記為 $L(\theta)$ ，稱為 θ 的概似函數。通常我們做點估計時，令 $\hat{\theta}$ 滿足 $L(\hat{\theta}) = \operatorname{argmax}_{\theta} L(\theta)$ ，則 $\hat{\theta}$ 稱為最大概似估計量（maximum likelihood estimator (MLE)）。

在貝氏理論下， X_1, X_2, \dots, X_n 相互獨立而且有相同的機率密度函數 $f(x|\theta)$ ，但是 θ 是一個隨機變數（random variable (r.v.)），具有先驗分佈（prior distribution） $\pi(\theta)$ 。

我們有：

A. 給定 θ 時， x_1, x_2, \dots, x_n 的聯合機率密度函數為 $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$

B. x_1, x_2, \dots, x_n 和 θ 的聯合機率密度函數為 $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)$

C. x_1, x_2, \dots, x_n 的聯合機率密度函數為 $f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) d\theta$

我們還可以得到 θ 的後驗分佈（posterior distribution）：

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ \propto f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)$$

我們標示 $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = L(\theta)$ 。

則我們可使用：

1. 後驗平均值（posterior mean） $\int \theta \frac{L(\theta)\pi(\theta)}{\int L(\theta)\pi(\theta)d\theta} d\theta$ ，或

2. 後驗眾數值（posterior mode） $\operatorname{argmax}_{\theta} L(\theta)\pi(\theta)$ 來估計 θ

在這裡，如果 $\pi(\theta) = 1$ ，後驗分佈與 $\frac{L(\theta)}{c}$ 成比例，則後驗眾數值就等於最大概似估計量。

有時我們很難去找到後驗分佈的平均數或是眾數，因此我們從 $L(\theta)\pi(\theta)$ 去生成 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ，然後我們使用：

1. $\frac{\sum_{i=1}^k \theta_i}{k}$ （替代後驗平均數），或

2. $\operatorname{argmax}_{\theta_i} L(\theta_i)\pi(\theta_i)$ （替代後驗眾數值）來估計 θ

這就是蒙地卡羅演算法。

如果我們在貝氏分析上之應用選擇一個馬可夫鏈 $\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_3 \dots$ 滿足穩定分佈為 $\frac{L(\theta)\pi(\theta)}{c}$ ，則雖然 θ_i 彼此間並不獨立，但是我們使用蒙地卡羅馬可夫鏈，可以計算 $\frac{\sum_{i=1}^k \theta_i}{k}$ ，

統計學家證明當 k 愈來愈大時， $\frac{\sum_{i=1}^k \theta_i}{k}$ 會愈來愈靠近 $\frac{L(\theta)\pi(\theta)}{c}$ 之均值。

以下我們列舉兩個蒙地卡羅馬可夫鏈的例子。

例子一：Gibbs sampling

假設我們有觀察到的資料 Y 和遺失值 X ，我們想要估計參數 θ 。

觀察到 X, Y 的完整概似函數 (the full likelihood function) 為： $P(X, Y, \theta) = f(X|\theta)f(Y|X, \theta)$

只觀察到 Y 的概似函數 (the observed likelihood function) 為：

$$f(Y|\theta) = \int f(X|\theta)f(Y|X, \theta) dX$$

但是此觀察到的概似函數很難計算，因此根據貝氏 Bayesian 理論，如果我們有先驗分佈 (prior distribution) $\pi(\theta)$ ，我們將討論如何生成 θ ，使其分佈為 $\pi(\theta|y)$ 。

我們從邊際分佈 (marginal distribution) $\pi(\theta, X|y)$ 來抽樣，並且估計 θ 。

從 $\pi(\theta, X|y)$ 抽樣的步驟：

1. 給一個初始值 x_0 ， $i=0$
2. 從 $\pi(\theta|x_i, y)$ 生成 θ_i
3. 從 $\pi(X|\theta_i, y)$ 生成 x_{i+1}
4. 令 $i=i+1$ ，然後回到步驟 2 循環直到 θ_i 及 x_i 之分配收斂

例子二：Metropolis hasting

同馬可夫鏈的處理方式，產生候選者的密度 (candidate-generating density) 標示為 $q(\theta|y)$ ，其滿足 $\int q(\theta|y) dy = 1$ 。

我們定義 $\alpha(\theta, y) = \min \left\{ \frac{\pi(y)q(\theta|y)}{\pi(\theta)q(y|\theta)}, 1 \right\}$ 。

生成 θ 的步驟：

1. 給一個任意的初始值 θ_0 ， $i=0$
2. 用均勻分佈 $U(0,1)$ (uniform distribution) 或是其他簡單的分佈生成 u ，並且用 $q(\theta_{old}|\cdot)$ 生成 θ_{new}
3. 如果 $u \leq \alpha(\theta_i, y_i)$ ，則令 $\theta_{i+1} = \theta_{new}$ ，反之令 $\theta_{i+1} = \theta_{old}$
4. 令 $i=i+1$ ，然後回到步驟 2 循環直到收斂

回傳 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ 值。

對於蒙地卡羅馬可夫鏈方法更詳細的說明，可以參照 Gelfand and Smith (1990)、Robert and Casella (1999)，以及 Johannes and Polson (2004)。

假設淨效益滿足被觀察到變數 X 的方程式， $B = B(X)$ ，此變數 X 包含公司特性，我們標示成 X_{it} ，則 $B_{it} = B(X_{it})$ 。

$$E\left(\frac{B_{it}}{V_{it}^L}\right) = X'_{0it}\theta_0 + (X'_{1it} \cdot L_{it})\theta_1 + (X'_{2it} \cdot L_{it}^2)\theta_2 \quad (2.1)$$

根據式子 (1.2)、(1.6a)、(1.6b) 與 (2.1)，可以得到以下模型 (2.2) ~ (2.4)，我們使用蒙地卡羅馬可夫鏈這個演算法來估計模型的參數：

$$\frac{V_{it}^U}{V_{it}^L} = 1 - X'_{0it}\theta_0 - (X'_{1it} \cdot L_{it})\theta_1 - (X'_{2it} \cdot L_{it}^2)\theta_2 + u_{it} \quad (2.2)$$

$$\frac{V_{it}^U}{V_{it}^L} \cdot \beta_{it}^U = L_{it} \cdot \beta_{it}^D + (1 - L_{it}) \cdot \beta_{it}^E - [X'_{0it}\theta_0 + (X'_{1it} \cdot L_{it})\theta_1 + (X'_{2it} \cdot L_{it}^2)\theta_2] \cdot \beta_{it}^B + v_{it} \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{it}^U - \gamma_t^f \\ \gamma_{it}^E - \gamma_t^f \\ \gamma_{it}^D - \gamma_t^f \\ \gamma_{it}^B - \gamma_t^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i^U \\ \alpha_i^E \\ \alpha_i^D \\ \alpha_i^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{i,t-1}^U \\ \beta_{i,t-1}^E \\ \beta_{i,t-1}^D \\ \beta_{i,t-1}^B \end{bmatrix} \cdot (\gamma_t^M - \gamma_t^f) + \epsilon_{it} \quad (2.4)$$

$$\beta_{it}^U = \phi_0 + \phi_1 \cdot \beta_{i,t-1}^U + \eta_{it} \quad (2.5)$$

模型 (2.5) 中，我們假設資產、負債、股權以及淨好處的貝塔值都滿足 AR(1) (Autoregressive model) 模型，其中 i 代表公司， t 代表時間。

其殘差的共變異數：

$$E(\eta \cdot \eta') = H$$

$$\text{設定 } e = [\epsilon \quad v], \quad E(e' \times e) = \Sigma$$

$$E\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u' & v' \end{bmatrix}\right) = W$$

根據模型參數的後驗分佈估計，在給定觀察到的負債與股東權益值，我們抽樣生成貝塔值和（未觀察到）無負債資產值，遵循以下四個步驟：

1. 給定貝塔值，生成模型參數
2. 給定數值與新的參數，生成貝塔值
3. 給定新的參數與貝塔值，生成新的數值
4. 回到步驟 1，使用新的貝塔值

在下一節「3-2、估計參數」會探討每個步驟的細節。

使用這個演算法跑多次循環後，會收斂到一個穩定的「鏈」。根據後驗分佈任意的生成樣本，使用後驗平均數 (posterior means) 與標準差 (standard deviations)，可以簡單的計算出參數 $\theta_0 \sim \theta_2$ 的敘述統計量。

我們可以找出聯合後驗機率的分配 (joint posterior pdf) :

$$\begin{aligned} p(\Phi, H^{-1}|y, X) &\propto |H^{-1}|^{\frac{(T-1)-(4N+1)}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - X\Phi)'H^{-1} \otimes I_{T-1}(y - X\Phi)\right] \\ &\propto |H^{-1}|^{\frac{(T-1)-(4N+1)}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}AH^{-1}\right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

從 (3.6) 式，我們可以得到 $p(\Phi|H^{-1}, y, X) = \frac{p(\Phi, H^{-1}|y, X)}{\int p(\Phi, H^{-1}|y, X)d\Phi}$ ，則給定 H^{-1} 下 Φ 的條件後驗機率 (the conditional posterior pdf) 是一個多維常態分配，其中平均數為：

$$E(\Phi|H^{-1}, y, X) = (X'(H^{-1} \otimes I_{T-1})X)^{-1} \cdot X'(H^{-1} \otimes I_{T-1})y \quad (3.7)$$

共變異數為：

$$\text{Cov}(\Phi|H^{-1}, y, X) = (X'(H^{-1} \otimes I_{T-1})X)^{-1} \quad (3.8)$$

同理，我們也可以得到 $p(H^{-1}|\Phi, y, X) = \frac{p(\Phi, H^{-1}|y, X)}{\int p(\Phi, H^{-1}|y, X)dH}$ 是一個威夏分配 (Wishart distribution)， $H^{-1}|\Phi, y, X \sim W(A^{-1}, T-1)$ 。

後驗分配：

$$\Phi|H^{-1}, y, X \sim N[(X'(H^{-1} \otimes I_{T-1})X)^{-1} \cdot X'(H^{-1} \otimes I_{T-1})y, (X'(H^{-1} \otimes I_{T-1})X)^{-1}]$$

$$H|\Phi, y, X \sim IW(A, T-1)$$

其中 IW 為給定參數 A 以及 $T-1$ 自由度的反威夏分配 (Inverse Wishart distribution)。矩陣 A 是迴歸模型的殘差和，一個維度為 $4N \times 4N$ 的對稱矩陣。

步驟 1A：

用之前的樣本 $(\Phi^{(g)}, H^{(g)}, \beta^{(g)})$ ，先用多維常態分配生成 $\Phi^{(g+1)}|H^{(g)}, y^{(g)}, X^{(g)}$ ，再用上述反威夏分配 (Inverse Wishart distribution) 生成 $H^{(g+1)}|\Phi^{(g+1)}, y^{(g)}, X^{(g)}$ 。

Part 1B：給定貝塔值與 V_t^U ，生成 α 's 和 Σ

我們可以用迴歸方程式去估計參數 α 以及殘差的共變異數 Σ ，包含 v_{it} 的共變異數。根據貝氏多元迴歸 (Bayesian multivariate regression) (Zellner (1971), p.224-228)，對於個別的產業，根據模型 (2.3) 及 (2.4) 我們有下列公式：

$$[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N] = \mathbf{1}_{T-1} \cdot [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N] + [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$$

其中 $\mathbf{1}_{T-1}$ 是一個所有元素為 1，而且長度為 $T-1$ 的行向量，

$\alpha_i = [\alpha_i^U \ \alpha_i^E \ \alpha_i^D \ \alpha_i^B \ 0]$ 是一個 1×5 的列向量，

以及

$$y_i = \begin{bmatrix} \widetilde{\gamma}_{i2}^U - \widetilde{\gamma}_2^M \beta_{i1}^U & \widetilde{\gamma}_{i2}^E - \widetilde{\gamma}_2^M \beta_{i1}^E & \widetilde{\gamma}_{i2}^D - \widetilde{\gamma}_2^M \beta_{i1}^D & \widetilde{\gamma}_{i2}^B - \widetilde{\gamma}_2^M \beta_{i1}^B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{\gamma}_{i,T}^U - \widetilde{\gamma}_T^M \beta_{i,T-1}^U & \widetilde{\gamma}_{i,T}^E - \widetilde{\gamma}_T^M \beta_{i,T-1}^E & \widetilde{\gamma}_{i,T}^D - \widetilde{\gamma}_T^M \beta_{i,T-1}^D & \widetilde{\gamma}_{i,T}^B - \widetilde{\gamma}_T^M \beta_{i,T-1}^B \\ \frac{V_{i2}^U}{V_{i2}^L} \beta_{i2}^U - (1 - L_{i2}) \cdot \beta_{i2}^E - L_{i2} \cdot \beta_{i2}^D + X_{i2} \cdot \beta_{i2}^B \\ \vdots \\ \frac{V_{iT}^U}{V_{iT}^L} \beta_{iT}^U - (1 - L_{iT}) \cdot \beta_{iT}^E - L_{iT} \cdot \beta_{iT}^D + X_{iT} \cdot \beta_{iT}^B \end{bmatrix}$$

$$\text{和 } e_i = \begin{bmatrix} \epsilon_{i2}^U & \epsilon_{i2}^E & \epsilon_{i2}^D & \epsilon_{i2}^B & v_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_{iT}^U & \epsilon_{iT}^E & \epsilon_{iT}^D & \epsilon_{iT}^B & v_{iT} \end{bmatrix}, \quad E(e' \times e) = \Sigma$$

我們定義 $X_{it} \equiv X'_{0it} \theta_0 + (X'_{1it} \cdot L_{it}) \theta_1 + (X'_{2it} \cdot L_{it}^2) \theta_2$,

定義 $\gamma_{it}^U = \frac{v_{it}^U - v_{i,t-1}^U}{v_{i,t-1}^U}$, 以及 $\widetilde{\gamma}_{it}^U = \gamma_{it}^U - \gamma_t^f$ 。

給予先驗 (prior) 機率的分配：

$$p(\alpha, \Sigma^{-1}) \propto |\Sigma^{-1}|^{-\frac{5N+1}{2}}$$

則我們用 Part 1A 中相同的推導方式，可以得到其後驗分配為：

$$\alpha | \Sigma^{-1}, y \sim N[1'_{T-1} \cdot y / (T-1), \Sigma / (T-1)]$$

$$\Sigma | \alpha, y \sim IW(A, T-2)$$

其中 A 是一個 $5N \times 5N$ 的對稱矩陣，是最小平方法 (OLS (ordinary least squares)) 的殘差和：

$$A = \begin{bmatrix} (y_1 - 1_{T-1} \alpha_1)' (y_1 - 1_{T-1} \alpha_1) & \cdots & (y_1 - 1_{T-1} \alpha_1)' (y_N - 1_{T-1} \alpha_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_N - 1_{T-1} \alpha_N)' (y_1 - 1_{T-1} \alpha_1) & \cdots & (y_N - 1_{T-1} \alpha_N)' (y_N - 1_{T-1} \alpha_N) \end{bmatrix}$$

步驟 1B：

先生成 $\Sigma^{(g+1)} | \alpha^{(g)}, y^{(g)}$ ，再生成 $\alpha^{(g+1)} | \Sigma^{(g+1)}, y^{(g)}$ 。

Part 1C：給定貝塔值與 V_t^U ，生成 θ 's, R, S, 和 Q

根據模型 (2.2) 及 (2.3)，我們得到以下是一個貝氏迴歸，對於一個產業內所有的公司，它提供了 θ 's 的後驗分配，(對於一個產業內所有的公司，都有相同的 θ)，以及共變異數 R, S, 和 Q 的矩陣：

$$\begin{bmatrix} y_1^A \\ \vdots \\ y_N^A \\ y_1^B \\ \vdots \\ y_N^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^A \\ \vdots \\ X_N^A \\ X_1^B \\ \vdots \\ X_N^B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

其中

$$y_i^A = \begin{bmatrix} V_{i1}^U/V_{i1}^L - 1 \\ \vdots \\ V_{iT}^U/V_{iT}^L - 1 \end{bmatrix}, \quad y_i^B = \begin{bmatrix} \frac{V_{i1}^U}{V_{i1}^L} \beta_{i1}^U - \frac{D_{i1}}{V_{i1}^L} \beta_{i1}^D - \frac{E_{i1}}{V_{i1}^L} \beta_{i1}^E \\ \vdots \\ \frac{V_{iT}^U}{V_{iT}^L} \beta_{iT}^U - \frac{D_{iT}}{V_{iT}^L} \beta_{iT}^D - \frac{E_{iT}}{V_{iT}^L} \beta_{iT}^E \end{bmatrix}$$

$$X_i^A = \begin{bmatrix} -X'_{0i1} & -X'_{1i1} \cdot L_{ii} & -X'_{2i1} \cdot L_{i1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -X'_{0iT} & -X'_{1iT} \cdot L_{iT} & -X'_{2iT} \cdot L_{iT}^2 \end{bmatrix}$$

$$X_i^B = \begin{bmatrix} -X'_{0i1} \cdot \beta_{i1}^B & -X'_{1i1} \cdot L_{ii} \cdot \beta_{i1}^B & -X'_{2i1} \cdot L_{i1}^2 \cdot \beta_{i1}^B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -X'_{0iT} \cdot \beta_{iT}^B & -X'_{1iT} \cdot L_{iT} \cdot \beta_{iT}^B & -X'_{2iT} \cdot L_{iT}^2 \cdot \beta_{iT}^B \end{bmatrix}$$

$$u_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{bmatrix}, \quad v_i = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{iT} \end{bmatrix}, \quad E\left(\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i' & v_i' \end{bmatrix}\right) = W \otimes I_T, \quad W = \begin{bmatrix} R & Q \\ Q' & S \end{bmatrix}$$

給予先驗 (prior) 機率的分配：

$$p(\theta, W) \propto |W|^{-\frac{2N+1}{2}}$$

用 Part 1A 以及 Part 1B，我們得到後驗分配為：

$$\theta | W, y, X \sim N[(X'(W^{-1} \otimes I_T)X)^{-1} \cdot X'(W^{-1} \otimes I_T)y, (X'(W^{-1} \otimes I_T)X)^{-1}]$$

$$W | y, X \sim IW(A, T)$$

其中 A 同之前的計算，是一個 $2N \times 2N$ 的對稱矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} (y_1^A - X_1^A \theta)'(y_1^A - X_1^A \theta) & \cdots & (y_1^A - X_1^A \theta)'(y_N^B - X_N^B \theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_N^B - X_N^B \theta)'(y_1^A - X_1^A \theta) & \cdots & (y_N^B - X_N^B \theta)'(y_N^B - X_N^B \theta) \end{bmatrix}$$

步驟 1C：

先用多維常態分配生成 $\theta^{(g+1)} | W^{(g)}, y^{(g)}, X^{(g)}$ ，再用反威夏分配 (Inverse Wishart distribution) 生成 $W^{(g+1)} | \theta^{(g+1)}, y^{(g)}, X^{(g)}$ 。

根據模型 (2.2) 與 (2.3)，其觀察方程式：

$$\begin{bmatrix} 1 - X_{1t} \\ \vdots \\ 1 - X_{Nt} \\ \frac{D_{1t}}{V_{1t}^L} \cdot \beta_{1t}^D + \frac{E_{1t}}{V_{1t}^L} \cdot \beta_{1t}^E - X_{1t} \cdot \beta_{1t}^B \\ \vdots \\ \frac{D_{Nt}}{V_{Nt}^L} \cdot \beta_{Nt}^D + \frac{E_{Nt}}{V_{Nt}^L} \cdot \beta_{Nt}^E - X_{1t} \cdot \beta_{Nt}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/V_{1t}^L & & \\ & \ddots & \\ & & 1/V_{Nt}^L \\ \beta_{1t}^U/V_{1t}^L & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_{Nt}^U/V_{1t}^L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{1t}^U \\ \vdots \\ V_{Nt}^U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{Nt} \\ v_{1t} \\ \vdots \\ v_{Nt} \end{bmatrix}$$

此處， $X_{it} \equiv X'_{0it}\theta_0 + (X'_{1it} \cdot L_{it})\theta_1 + (X'_{2it} \cdot L_{it}^2)\theta_2$ 。

在給定估計的參數以及共變異數矩陣 $\Sigma^{(g+1)}$ 和 $W^{(g+1)}$ 下，用卡爾曼濾波器得到無負債資產值的分配，然後同 Carter and Kohn (1994) 從後面往前面生成樣本。



附錄一：卡爾曼濾波器 (Kalman filter)，參照 Anderson and Moore (1979), p.105

介紹卡爾曼濾波器如何生成 $\beta(t)$ 在給定 $\gamma(t)$ 之下：

定義 $\beta(t|j) = E[\beta(t)|\gamma(j)]$ 以及 $p(t|j) = \text{var}[\beta(t)|\gamma(j)]$

當 $t = 1 \dots T$ ， $\beta(t|t)$ 是 $\beta(t)$ 在給定 $\gamma(t)$ 之下的條件平均值， $p(t|t)$ 是 $\beta(t)$ 在給定 $\gamma(t)$ 之下的條件變異數。

p.s.1

在第二步的模型下：

$$\beta(t+1) = \phi_0 + \phi_1\beta(t) + \eta(t+1), \text{cov}(\eta) = H$$

$$\gamma(t+1) = \alpha + S(t)\beta(t) + \epsilon(t+1), \text{cov}(\epsilon) = \Sigma$$

根據卡爾曼濾波器，我們得到 $\beta(t|t)$ 和 $p(t|t)$ ：

$$\beta(t|t) = \phi_0 + \phi_1\beta(t-1|t-1) + K_g(t)[\gamma(t+1) - \alpha - S(t)\beta(t-1|t-1)]$$

$$K_g(t) = \phi_1 p(t-1|t-1) S(t)' [S(t) p(t-1|t-1) S(t)' + \Sigma]^{-1}$$

$$p(t|t) = [\phi_1 - K_g(t)S(t)] p(t-1|t-1) [\phi_1 - K_g(t)S(t)]' + H + K_g(t)\Sigma K_g(t)'$$

步驟：

1. 任意給初始值 $\beta(0|0)$ 和 $p(0|0)$
2. 從 $t = 1 \dots T$ ，計算 $\beta(t-1|t-1) \rightarrow \beta(t|t)$ 以及 $p(t-1|t-1) \rightarrow p(t|t)$
3. 用 $\beta(t|t)$ 和 $p(t|t)$ 生成 $\beta(t)|\gamma(t) \sim N[\beta(t|t), p(t|t)]$

p.s.2

在第三步的模型下：

$$V(t+1) = A(t)V(t) + \epsilon(t+1), \text{cov}(\epsilon) = \tilde{\Sigma}$$

$$X(t) = S(t)V(t) + u(t), \text{cov}(u) = W$$

根據卡爾曼濾波器，我們得到 $V(t|t)$ 和 $p(t|t)$ ：

$$V(t|t) = A(t)V(t-1|t-1) + K_g(t)[X(t) - S(t)V(t-1|t-1)]$$

$$K_g(t) = A(t)p(t-1|t-1)S(t)' [S(t)p(t-1|t-1)S(t)' + W]^{-1}$$

$$p(t|t) = [A(t) - K_g(t)S(t)] p(t-1|t-1) [A(t) - K_g(t)S(t)]' + \tilde{\Sigma} + K_g(t)WK_g(t)'$$

步驟：

1. 任意給初始值 $V(0|0)$ 和 $p(0|0)$
2. 從 $t = 1 \dots T$ ，計算 $V(t-1|t-1) \rightarrow V(t|t)$ 以及 $p(t-1|t-1) \rightarrow p(t|t)$
3. 用 $V(t|t)$ 和 $p(t|t)$ 生成 $V(t)|X(t) \sim N[V(t|t), p(t|t)]$

附錄二：Forward Filter Backward Sample (FFBS)，參照 Carter and Kohn (1994)

FFBS 就是先使用卡爾曼濾波器 (Kalman filter)，從 $t = 1$ 開始到 $t = T$ 生成 $\beta(t)$ 值，再從 $t = T$ 由後往前到 $t = 1$ 重新生成新的 $\beta(t)$ 值，因為我們假設所有的貝塔值都滿足 AR(1) (Autoregressive model) 模型，所以在不同時間 t 下，時間 t 與時間 $t+1$ 的貝塔值是有相關聯的 (不同時間 t 的貝塔值並非完全獨立)，以下介紹 FFBS 如何生成 $\beta(t)$ 值在給定 $\gamma(t)$ 值和 $\beta(t+1)$ 值之下：

定義 $\beta(t|t, i) = E[\beta(t)|\gamma(i), \beta_1(t+1), \dots, \beta_i(t+1)]$

$p(t|t, i) = \text{var}[\beta(t)|\gamma(i), \beta_1(t+1), \dots, \beta_i(t+1)]$

當 $t = 1 \dots T$ ， $\beta(t|t, m)$ 是 $\beta(t)$ 在給定 $\gamma(t)$ 和 $\beta(t+1)$ 之下常態分配的平均值， $p(t|t, m)$ 是其變異數。

用 $\beta(t|t)$ 和 $p(t|t)$ 求 $\beta(t|t, m)$ 以及 $p(t|t, m)$ ：

對於卡爾曼濾波器中的模型：

$\beta(t+1) = \phi_1\beta(t) + \eta(t+1)$

$\text{cov}(\eta) = H$

我們可以用 Cholesky decomposition 分解 $H = L\Delta L'$ ，其中 L 是一個對角線都為 1 的下三角矩陣， Δ 則是一個對角矩陣。

定義：

$\tilde{\beta}(t+1) = L^{-1}\beta(t+1)$

$\tilde{\phi}_1(t+1) = L^{-1}\phi_1(t+1)$

$\tilde{\eta}(t+1) = L^{-1}\eta(t+1)$

則對於 $i = 1, \dots, m$ (m 為矩陣的維度)

$\tilde{\beta}_i(t+1) = \tilde{\phi}_{1i}(t+1)'\beta(t) + \tilde{\eta}_i(t+1)$

其中 $\tilde{\phi}_{1i}(t+1)'$ 是 $\tilde{\phi}_1(t+1)$ 的第 i 行，而 $\tilde{\beta}_i(t+1)$ 和 $\tilde{\eta}_i(t+1)$ 是 $\tilde{\beta}(t+1)$ 和 $\tilde{\eta}(t+1)$ 的第 i 個元素。

步驟：

1. 給定初始值：

$\beta(t|t, 0) = \beta(t|t)$ ，此處為附錄一中產生的 $\beta(t|t)$

$p(t|t, 0) = p(t|t)$ ，此處為附錄一中產生的 $p(t|t)$

2. 對於 $i = 1, \dots, m$ ：(此步驟中的 $\beta(t)$ 皆為附錄一中生成的值)

$\varepsilon(t, i) = \tilde{\beta}_i(t+1) - \tilde{\phi}_{1i}(t+1)'\beta(t|t, i-1)$

$R(t, i) = \tilde{\phi}_{1i}(t+1)'\tilde{\phi}_{1i}(t+1) + \tilde{\eta}_i(t+1)$

$\beta(t|t, i) = \beta(t|t, i-1) + p(t|t, i-1)\tilde{\phi}_{1i}(t+1)\varepsilon(t, i)/R(t, i)$

$p(t|t, i) = p(t|t, i-1) - p(t|t, i-1)\tilde{\phi}_{1i}(t+1)\tilde{\phi}_{1i}(t+1)'p(t|t, i-1)/R(t, i)$

3. 對於 $t = T-1, \dots, 1$ ：(Forward Filter Backward Sample / FFBS)

$\beta(t|t, m) = E[\beta(t)|\gamma(t), \beta(t+1)]$

$p(t|t, m) = \text{var}[\beta(t)|\gamma(t), \beta(t+1)]$

Generate $\beta(t)|\gamma(t), \beta(t+1) \sim N[\beta(t|t, m), p(t|t, m)]$

四、實證結果

4-1、資料

我建構一個樣本從 Wharton Research Data Services (WRDS) 資料庫，收集西元 1994 年到 2012 年期間，公司每月的債務和股東權益值。WRDS 是一個網絡商業資料，在 1993 年開發，做為美國賓夕法尼亞大學沃頓商學院 (The Wharton School at the University of Pennsylvania) 的研究數據。WRDS 提供事實的、全球性的商業資料，包含金融、經濟、市場營銷的數據，此服務已經發展成為一個超過兩百九十多名世界各地機構研究的常用工具。

資料來源主要有兩個，Mergent Fixed Income Securities Database (FISD) 和 TRACE 數據庫，這兩個數據庫都包含在 WRDS 資料庫裡，Mergent FISD 提供 1994 年到 2012 年債券發行以及交易的資料，包括信用評等、上市日期和到期日等數據，TRACE 則提供 2002 年到 2011 年期間 OTC (Over-the-Counter) 公司債券的交易數據。

我利用 CUSIP 識別碼來辨識公司，補上每月股權市場價值的樣本值，用每月股息和利息支出來計算債務的回報和股權，以控制支出政策可能會影響公司無負債資產貝塔值 (firms' unlevered asset betas) 的估計差異。

無負債資產貝塔值 β_{it}^U 服從一個條件，對於相同的時間 t 以及相同的產業類別 $\beta_{it}^U = \beta_t^U$ ，也就是在同一個產業類別下，不同公司間彼此的 β_t^U 相同。我考慮 SIC 代碼的前兩位數 (SIC2) 來分別產業，我只用那些包含至少有兩家公司一些債務數據的行業來分析。表一是一張不同產業的清單，其包含不同產業的公司數與公司一月 (firm-months) 數。我們採用的 SIC2 樣本，其包含 22 個產業共 7937 家公司，全部有 753,001 個公司一月數。

表一、樣本按產業別分示

| 產業 | 代碼 | 公司數 | 公司一月數 (N) |
|--------------------|----|------|-----------|
| Oil & gas | 13 | 412 | 37927 |
| Builders | 15 | 67 | 7012 |
| Food | 20 | 238 | 26284 |
| Paper | 26 | 115 | 11819 |
| Publishing | 27 | 144 | 13603 |
| Chemicals | 28 | 907 | 98139 |
| Petroleum products | 29 | 65 | 8222 |
| Primary metals | 33 | 146 | 15435 |
| Machinery | 35 | 675 | 66375 |
| Electric equipment | 36 | 866 | 91621 |
| Cars | 37 | 218 | 23350 |
| Instruments | 38 | 709 | 70684 |
| Transport (air) | 45 | 70 | 7721 |
| Telecom | 48 | 599 | 47708 |
| Utilities | 49 | 374 | 41583 |
| Wholesale (nondur) | 51 | 161 | 14714 |
| Retail (misc.) | 53 | 68 | 6957 |
| Hotels | 70 | 67 | 5100 |
| Equipment service | 73 | 1763 | 138159 |
| Health | 80 | 273 | 20588 |
| 總數 | | 7937 | 753001 |

此表列出了由 1994 年到 2012 年期間的樣本，由兩位數的 SIC 代碼表示，統計各產業的公司數量以及公司一月 (firm-months) 的數量 (N)。

4-2、分析

在本章節中，我討論如何估計舉債的淨效益，以及最佳的資本結構和金融政策的影響。我定義舉債等於債務的市場價值（淨現金），除以債務的市場價值（淨現金）加上股權的市場價值。

4-2-1、舉債的淨好處

考慮一個簡單的例子，假設方程式 (1.6a) 和 (1.6b) 都沒有殘差項，則我們可以得到公司負債與股權的市場價值，但是因為我們無法觀察到無負債公司的價值，所以我們無法直接的用方程式 (1.6a) 計算出 B 的值。類似的問題，當我們要估計貝塔值時，方程式 (1.6b) 的右式可以計算，但是我們沒有無負債資產的貝塔值（the unlevered asset beta）的觀察值。然而，假設在相同產業下的公司都有同樣的資產貝塔值 β^U ，則 β^L 的差異就完全被舉債的淨效益影響。假設淨效益滿足被觀察到變數 X 的方程式， $B = B(X)$ ，而且這個公式對於所有的公司都成立，則在一個產業下的所有公司，對於相同的 X 都有相同的 β^L 。

此變數 X 可以包含任何的公司特性，注意 X 可以是一個向量的觀察值，我們標示成 X_{it} ，則 $B_{it} = B(X_{it})$ 。

在本文中，我們用以下的式子估計舉債淨好處對於全部的公司價值：

$$\frac{B_{it}}{V_{it}^L} = X'_{0it}\theta_0 + (X'_{1it} \cdot L_{it})\theta_1 + (X'_{2it} \cdot L_{it}^2)\theta_2 \quad (2.1)$$

舉債的平方項可預測理論性上舉債淨好處的非線性效應，在低舉債中，稅收好處與減少代理成本可增加公司價值，但他們的邊際效應下降則造成舉債增加，此外，財務困境的成本在高 L 下也會對 B 產生負面的影響。向量 X_{0it} 、 X_{1it} 和 X_{2it} 包含公司的特質，像是營利能力、無形資產或是市價對帳面價值的比（market-to-book ratios）。表二列舉出變數 X_{it} 與 L 的統計報表。

利用這些特性和舉債的交互影響，企業改變其資產結構，可能使淨效益增長或是下降得更快速。參數向量 θ_0 、 θ_1 和 θ_2 對於所有公司都是相同的。表三為方程式 (2.1) 的估計值。

表二、統計報表

A. 統計報表

| | Mean | Percentile | | | SD |
|------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|
| | | 10 | 50 | 90 | |
| PROF | 0.5718189 | 0.4132812 | 0.6360086 | 0.7220941 | 0.1809647 |
| PPE | 0.7902506 | 0.7416472 | 0.7894291 | 0.8301158 | 0.03644095 |
| L | 0.2848486 | 0.1578724 | 0.276404 | 0.4270616 | 0.09855187 |

B. 相關係數矩陣

| | PPE | L |
|------|------------|-------------|
| PROF | 0.17117790 | -0.02070398 |
| PPE | | 0.3124014 |

其中變數定義如下：PROF 是最近期的稅息折舊及攤銷前利潤（簡稱 EBITDA）除以銷售額；PPE 是財務、產房及設備市值除以帳面資產；而 L 則是淨債務價值（現金淨債務的市場價值）除以淨債務與股權市場價值的總和。SD 為變數的標準差。

表三、參數估計

| Coefficients | Estimate | SD |
|----------------------|----------|---------|
| (Intercept) | 0.26334 | 0.05915 |
| PROF | 0.18851 | 0.24527 |
| PPE | 0.16979 | 0.17197 |
| PROF *L | 0.27543 | 0.29381 |
| PPE *L | 0.64497 | 0.36616 |
| PROF *L ² | 0.43628 | 0.35956 |
| PPE *L ² | 0.81044 | 0.41136 |

| Residuals | | | | | |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|---------|
| Min | 1Q | Median | 3Q | Max | SD |
| -0.075854 | -0.017962 | 0.001476 | 0.020395 | 0.089918 | 0.02586 |

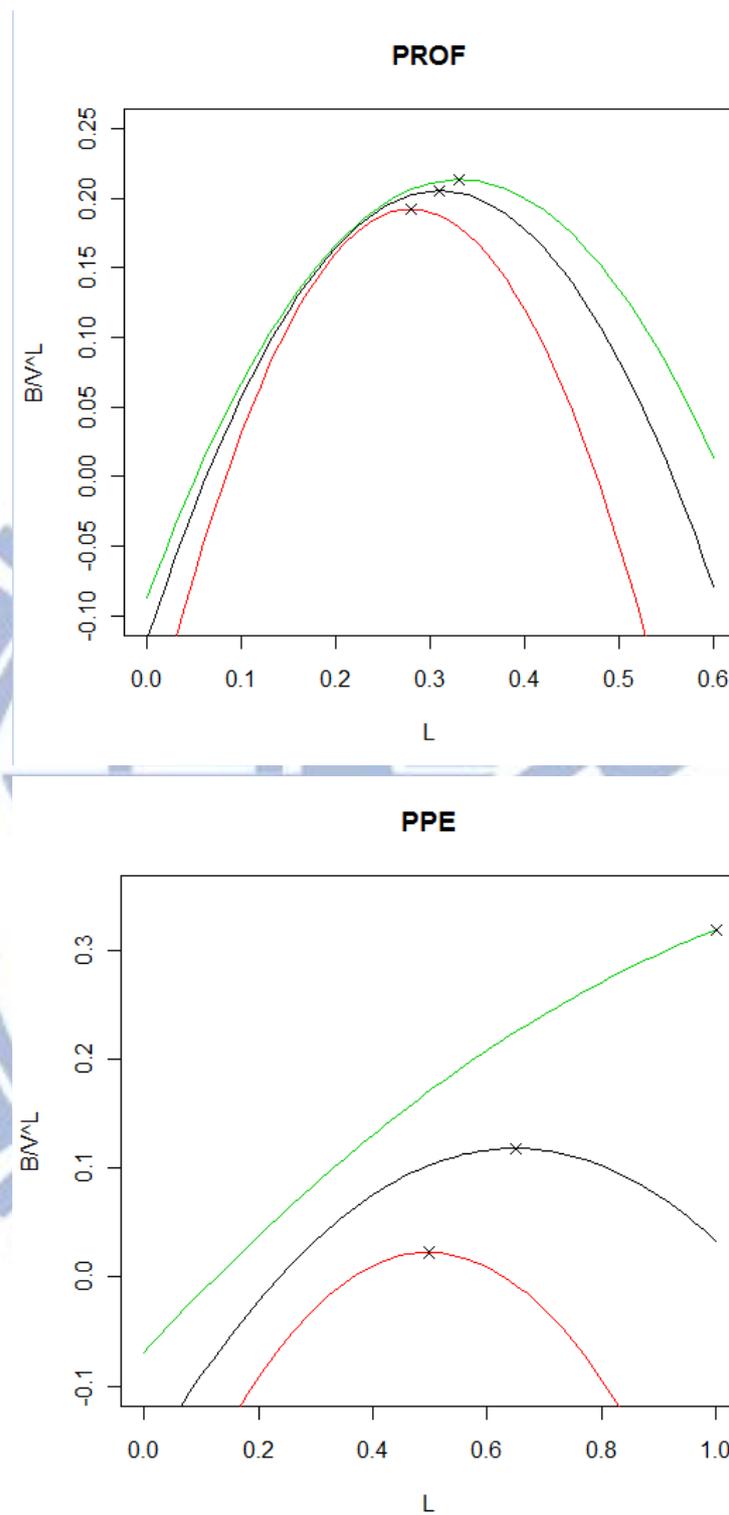
此表為 SIC2 從 1994 年到 2012 年樣本估計參數值的後驗平均數（posterior mean）和標準差（standard deviation），(2.1) 模型指出舉債的淨效益相對公司的價值 B/V^L 是一個與公司特徵相關的函數，其變數同表二定義。

債務的好處和成本並非明顯的與 B 的線性和二次項有直接連結，例如增加舉債，較少的營利留給債務屏蔽，債務融資的邊際稅率效益減少，實際的邊際稅盾效益就會少一些。這兩個公司特徵在線性和二次部分的存在，使得它更難以觀察每個變量對淨效益的總影響。

圖一為 SIC2 模型下，淨效益與舉債的比較圖。模型中所有的公司特徵都固定在中位數值，除了其中一個取其第 10、50 或 90 百分位數的值。最重要的是，在圖一中顯示當舉債增加，淨效益總是會先增加然後再下降，這意味著存在一個最佳的資本結構。與模型 (1.1) 的結果一致，低市帳比 (market-to-book) 的公司有許多有形資產、低折舊、高營利和低的收益波動，對於所有的舉債比率通常都有較高的淨效益。相比較下，在經濟衰退時，高舉債的公司都有較低的淨效益。



圖一、舉債的淨好處



此圖顯示舉債的淨效益與公司價值的分數 B/V^L ，隨著舉債的變化變動 (L 為 X 軸)，此圖根據表三估計出來的參數值做圖，圖中比較一個公司特徵在其中位數 (黑線)、10 百分位數 (紅線) 與 90 百分位數 (綠線) 的差異，公司特徵的變數定義同表二。最佳的舉債比率決定於最大的淨效益，在圖中我們用 "x" 標示。

4-2-2、最適資產結構和產業特性

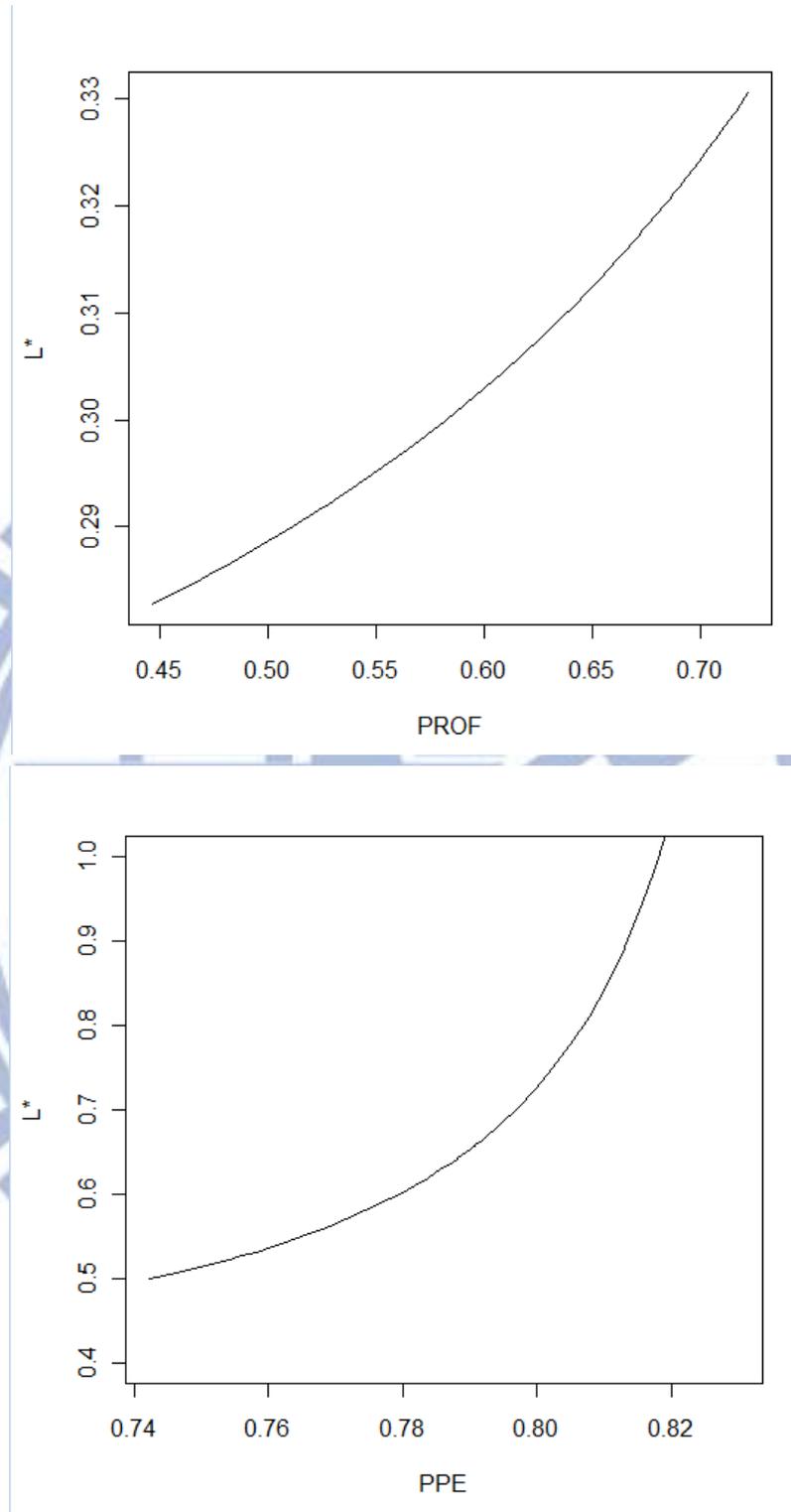
我們在此一小節探討舉債與公司特徵的變化，模型使我們可以預測公司的最佳舉債比率。

一個公司的最佳資本結構 L^* ，取決於最大化淨效益時的舉債比，在動態的資本結構世界，公司選擇再融資時，他們會產生摩擦成本，同時考慮帳戶在未來改變的舉債比率，換句話說，如果在特定的時間點，公司可以選擇舉債而不會產生摩擦成本，那麼他們選擇 L^* 。

最佳的舉債比被標記在圖一的“x”中，從圖中可以很清楚看到 L^* 系統性的變化對於每個公司特徵，圖二畫出最佳舉債與公司特徵的關係圖，我們可以得到更全面性的比較，與之前的發現一致，最佳舉債增加與有形資產，並且是一個遞減函數對於市帳比、折舊和營業利潤的波動。



圖二、最適資產結構



此圖顯示了最佳的舉債 (L^*) 如何隨著公司特徵 (X 軸) 變化，我們根據表三的模式使用 SIC2 樣本估計參數，公司特徵變數定義同表二。每個圖的 X 軸是其中一個公司特徵介於 10 百分位數到 90 百分位數的觀測值，其他公司特徵變數則保持在樣本分佈的中位數。

五、討論與結論

5-1、問題探討

我們使用蒙地卡羅馬可夫鏈 (MCMC) 來估計參數，在程式編寫的過程中會遇到一些問題，下面用條列式敘述出：

1. 在步驟 1A 中，如果可以直接生成 $\Phi^{(g+1)}, H^{(g+1)} | y^{(g)}, X^{(g)}$ ，不曉得是否會比各自生成 $\Phi^{(g+1)} | y^{(g)}, X^{(g)}, H^{(g)}$ 和 $H^{(g+1)} | y^{(g)}, X^{(g)}, \Phi^{(g+1)}$ 好。
2. 先驗 (prior) 分佈的選取也是一個考量，例如： $p(\Phi, H^{-1}) \propto |H^{-1}|^{-\frac{4N+1}{2}}$ ，先驗分佈不同造成的後驗 (posterior) 分佈也會不同，我們要如何選取比較好的先驗分佈。
3. 在方程式 (2.1) 中，方程式左邊 $\frac{v_{it}^u}{v_{it}^l}$ 應該是一個介於 0 到 1 之間的數值，但是方程式的右邊 $1 - X'_{0it}\theta_0 - (X'_{1it} \cdot L_{it})\theta_1 - (X'_{2it} \cdot L_{it}^2)\theta_2 + u_{it}$ 是一個介於正無窮大到負無窮大的值，估計參數容易因此而爆掉，因此我在程式編寫中加入了讓數值介於 0 到 1 的限制式。
4. 公司特徵的變數 X_{it} 是一個多維度的向量，維度越高，在估計參數的過程中越容易出現錯誤，錯誤可能為數字太大超出程式可以計算的數字 $2^{31}-1$ ，或是矩陣的行列式 determinant 太趨近於 0，造成反矩陣誤差過大，因此目前我只用了維度為二的 X_{it} 來估計參數。
5. 將公式 (1.6a)、(1.6b) 以及模型 (2.2)、(2.3) 做比較，可以觀察出殘差項 u_{it} 、 v_{it} 之間彼此應該存在一個相關性。同樣地在步驟 1B 中的共變異數 Σ 與步驟 1C 共變異數中的 Q 也存在著一個關係。但是在模型參數估計中，卻未必完全滿足此條件式，這可能是造成參數估計不準確的因素。

以上五點問題，還要深入探討，看看是否可以使用其他程式來改善，使得數值估計的準確度更精準。我們的模型中存在很多的限制條件式，如果我們在估計的過程中讓參數不滿足這些條件式，就會造成整個估計參數值的不準確，甚至估計出來的結果其實是錯誤的，針對此問題也要特別小心。

5-2、結論

債務融資的淨效益取決於市場價值以及公司債務和股權的貝塔值，我們需要兩個假設：1. 同一個產業內所有公司都有相同的無負債資產貝塔值（**unlevered asset beta**），2. 舉債的淨效益是一個可觀察到變量的函數。

收集公司從 1994 年到 2012 年的數據資料，我估計債務融資的淨效益現值為公司特定變量的函數，低舉債的公司舉債的淨效益會隨著舉債增加，但是當舉債變得太高時，舉債的淨效益又會下降，這表示存在一個最佳的資本結構。



六、參考文獻

- [1] Arthur G. Korteweg. “The Net Benefits to Leverage”, *The Journal of Finance*, Vol. LXV, NO. 6, Dec. 2010.
- [2] Brian D.O. Anderson, John B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1979.
- [3] Carter, Chris K. and Robert Kohn, 1994, “On Gibbs sampling for state-space models”, *Biometrika* 81, 541-553.
- [4] Gelfand, Alan E., and Adrian F.M. Smith, “Sampling-based approaches to calculating marginal densities”, *Journal of the American Statistical Association* 85, 398-409, 1990.
- [5] George Casella and Edward I. George. “Explaining the Gibbs Sampler”, *The American Statistician*, Vol. 46, No. 3, 167-174, Aug. 1992.
- [6] Johannes, Michael, and Nicholas Polson, “MCMC methods for continuous-time asset pricing models”, in Åk-Sahalia, Yacine, and Lars Hansen, eds, *Handbook of Financial Econometrics* (North-Holland), 2004.
- [7] Modigliani, Franco, and Merton H. Miller, “The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment”, *American Economic Review* 48, 261–297, 1958.
- [8] Robert, Christian P., and George Casella, *Monte Carlo statistical methods*. Springer, New York, 1999.
- [9] Siddhartha Chib and Edward Greenberg. “Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm”, *The American Statistician*, Vol. 49, No. 4., pp. 327-335, Nov. 1995.
- [10] Tanner, M. A. and Wong, W. H. “The calculation of posterior distributions by data augmentation”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, 528-540.
- [11] Zellner, Arnold. *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. Wiley, New York, 1996.