

國立交通大學

物理研究所

碩士論文

指數位能 Einstein-Kalb-Ramond 理論的幂方解

Power law solutions of Einstein-Kalb-Ramond
theory with exponential potential

研究生:王仁宏

指導教授:高文芳

中華民國一百零一年八月

指數位能 Einstein-Kalb-Ramond 理論的幂方解

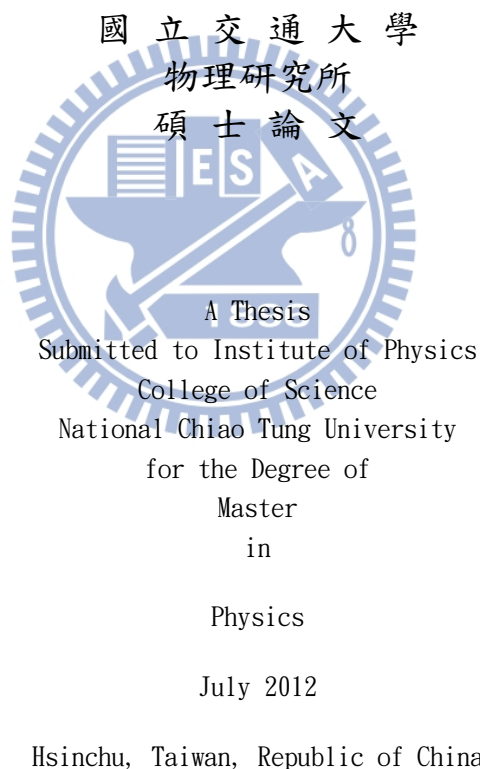
Power law solutions of Einstein-Kalb-Ramond theory with
exponential potential

研究生:王仁宏

Student: Ren-Hong Wang

指導教授:高文芳

Advisor: W.F. Kao



中華民國一百零一年八月

指數位能 Einstein-Kalb-Ramond 理論的冪方解

研究生:王仁宏

指導教授: 高文芳

國立交通大學物理研究所碩士班



我們將討論高維 Einstein-Kalb-Ramond 模型，並引入一個指數形式的位能項。在這樣的模型下，我們找到了一些 Bianchi type I 度規的冪方解。我們也對四維時空及內空間的收縮或膨脹，加以分析。結果發現所有四維時空的膨脹解，任何不均向發展最終都會減少，只有朝著 de Sitter 空間演進的膨脹冪方解是穩定的。

Power law solutions of Einstein–Kalb–Ramond theory with exponential potential

Student: Ren–Hong Wang

Advisor: Prof. W.F. Kao

Institute of Physics

National Chiao Tung University



We discussed the higher-dimensional Einstein–Kalb–Ramond cosmology in Bianchi type I metric and introduced an exponential potential model. It could be found that all of the anisotropic expanding analytic power-law solutions will evolve into de Sitter space finally.

誌 謝

感謝我摯愛的母親所付出的一切。

感謝高老師的悉心指導，讓我在這一年中對宇宙學領域從無到有學到了很多知識。

感謝Sandy陪伴我渡過的每一天。

感謝林英程學長在我寫論文時對我的建議，如果沒有學長的幫助，我很難獨力完成這篇論文。另外也感謝group中的所有學長，參與各位的討論讓我這一年受益良多。

感謝這兩年來所有修課老師的教導，讓我可以替日後的研究打好基礎。

雖然論文完成了，求學生涯階段也暫告一段落，但我想學習是一輩子的，無論是在物理的領域上，或是在未來人生的處事哲學上。我希望能永遠牢記當初踏進物理領域的初衷，不管未來走上的是什麼道路，只要心中的理想還在，何時何處都可以繼續學習。

Contents

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
1 Introduction	1
1.1 引言	1
1.2 The Friedmann Equation	2
1.3 Big Bang	4
1.4 宇宙微波背景輻射的不均向性	5
2 Classical Cosmologies from Supergravity	8
2.1 String Theory	8
2.2 Extra Dimensions	9
2.3 Kalb-Ramond Field	9
2.4 Einstein-Kalb-Ramond Cosmology	11
3 Einstein-Kalb-Ramond Cosmology in Anisotropic Spacetime	14
3.1 Einstein-Kalb-Ramond Action下的場方程式	14
3.2 場方程式的簡化	16
3.3 分析的模型 $V(\phi) = V_0 e^{\kappa\omega\phi}$	17
3.4 不均向空間解的性質	21
3.4.1 膨脹解的分析	23
3.4.2 Internal Space	27
3.4.3 Scalar Field and Torsion Field	28
4 Conclusion	30

Appendix A. 共變微分 (covariant derivative)	32
Appendix B. Curvature Tensor	35
Appendix C. Einstein Equation	37
Appendix D. Derivation of Field Equation	39
Appendix E. Solution of Torsion Field	44
Appendix F. Bianchi Classification	47
Appendix G. Einstein Tensor in Bianchi Type I Space	49
Appendix H. Proof of Lifshitz Formula	51
Bibliography	52



Chapter 1

Introduction

1.1 引言

1916年Einstein發表劃時代的鉅著廣義相對論，廣義相對論的誕生使得物理學界近百年來出現了許多新的領域，其中宇宙學便是以廣義相對論為基礎下所建立的。

目前在宇宙學領域中對早期宇宙較廣為接受的描述即為宇宙暴脹理論(inflation)。暴脹理論的提出是為了解決宇宙微波背景輻射(Cosmic Microwave Background Radiation，以下簡稱CMB)在早期的宇宙標準模型所遇到的問題。

CMB所面臨的問題在於它的大尺度均向性(isotropy)。大尺度均向性意味著早期宇宙的各個區域都有辦法進行熱交換，但以宇宙標準模型來看，在早期宇宙有某些區域是在彼此的視界(horizon)外，這樣一來便產生矛盾，因為會有超光速訊息的問題。[6]

1980年代，A. Guth提出了暴脹理論來解決這個問題。Guth假設早期宇宙經歷過一段暴脹時期，在這段期間宇宙的擴張極為快速，所以在宇宙標準模型中看似類空(spacelike)的區域其實是類時(timelike)的。[15]

然而，我們必須要有個能量來推動宇宙的暴脹，因此我們在作用量(action)中加入了一個純量場 ϕ ， ϕ 稱為暴脹子(inflaton)。近年來因為弦理論(String Theory)的出現，讓遇到瓶頸的大一統理論出現了曙光。也因為如此，許多的宇宙物理學家試著將弦理論結合到宇宙模型中來研究宇宙的發展是否在最後會朝著de Sitter時空演進，本文的Kalb-Ramond field即為一例。此外，一般推測相信內空間(internal space)

的緊緻化(compactification)過程與四維時空(physical space)的暴脹是密不可分的。[1]

1.2 The Friedmann Equation

1920年代Hubble首度測量到星系間的紅位移，證實了宇宙正在膨脹。這一個天文觀測上的重大發現奠定了之後宇宙學的發展方向。

正如之前所敘述的，現代宇宙學以廣義相對論為基礎，並且我們願意相信宇宙的樣貌如同宇宙學原理所描述，即宇宙在大尺度下是均勻(homogeneous)且均向(isotropy)的，所以我們希望宇宙膨脹的模型必須以這個框架為前提下建立。其中Friedmann equation便是在這樣的前提下描述均勻且均向性的宇宙膨脹方程式。[4, 9]

Friedmann equation所假設的度規(metric)為

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)ds_3^2 \quad (1.1)$$

$a(t)$ 為尺度因子(scale factor)且只與時間有關

考慮Einstein equation

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Λ : 宇宙常數

且假設 能動量張量(energy-momentum tensor) 為 完美流體(perfect fluid) 的形式

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

又

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (1.4)$$

$$R_{ij} = -g_{ij}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{2k}{a^2}\right) \quad (1.5)$$

$$g^{ij}R_{ij} = R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{k}{a^2}\right) \quad (1.6)$$

則我們可以找到兩個獨立的Friedmann equation，分別為 G_{00} 分量及 trace所得到的方程式

Friedmann equation :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.7)$$

trace equation :

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.8)$$

其中不同的 k 值對應到不同種類的空間

$$\begin{aligned} k = 0 & : \text{平直空間} \\ k = 1 & : \text{三維球面} \\ k = -1 & : \text{三維雙曲面} \end{aligned}$$

若是令

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

$$p \rightarrow p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

則可簡化 Friedmann equation 及 trace equation 二式成

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (1.10)$$

則我們可以解得

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(\omega+1)}} \quad (1.11)$$

a_0 為積分常數

不同的 ω 值會讓尺度因子對應到不同時期的宇宙

$$\begin{aligned} a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow \text{輻射主導} \\ a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} &\Rightarrow \text{物質主導} \end{aligned}$$

由Freidmann equation解出的尺度因子可以成功的描述宇宙誕生後 10^{-2} 秒至今的演化，但卻在描述較這時間點更早期的宇宙時出現了一些有待解決的問題。這些問題及解決的方案將會在之後的章節介紹。[16]

1.3 Big Bang

若將Friedmann equation所得到的宇宙膨脹結果進行時間反演，則我們會推得宇宙在過去會是一個奇點，即密度、溫度都無限高的狀態。大霹靂理論(Big Bang Theory)相信這個奇點便是我們宇宙的起源。從大霹靂發生的那一刻起，宇宙經歷了幾個不同的時期。[6]

普朗克時期(Planck Epoch) : $0 \text{ s to } 10^{-43} \text{ s}$

對於這個時期，目前已知的資訊還非常少，一般認為在這個時期宇宙的量子效應顯著，所以廣義相對論不足以預測這個時期發生的事，我們希望能藉由量子重力理論的發展可以更清楚的了解普朗克時期。

大一統時期(Grand Unification Epoch) : $10^{-43} \text{ s to } 10^{-36} \text{ s}$

溫度約為 10^{15} GeV 並且電磁交互作用、弱交互作用、強交互作用是合而為一的時期。

暴脹時期(Inflationary Epoch) : $10^{-36} \text{ s to } 10^{-32} \text{ s}$

此時宇宙降溫，強交互作用獨立出來，並且宇宙在這段時期快速膨脹。有關暴脹的概念會在接下來的章節介紹。

再加熱時期(Reheat Epoch)

當暴脹結束後，推動暴脹的場轉為熱能的形式重新加熱宇宙。

夸克時期(Quark Epoch) : 10^{-12} s to 10^{-6} s

目前已知的四種基本相互作用在這個時期形成，但因溫度太高還不足以形成強子。所以物質以夸克、輕子等形式存在。

強子時期(Hadron Epoch) : 10^{-6} s to 1 s

宇宙的溫度降低至quark足以束縛在一起形成hardon。至1 s時，大部份的hardon - anti hardon對都湮滅，宇宙中只留下少部份hardon。

輕子時期(Lepton Epoch) : 1 s to 10^2 s

這時期由輕子主導，如同強子一樣，直至 10^2 s時剩下少數殘留的輕子。

光子時期(Photon Epoch) : 10 s to 380000 years

由光子主控的時期，但宇宙溫度仍高，使得光子的能量仍足以與質子(proton)、電子(electron)等進行交互作用。

當宇宙年齡至380000年時，宇宙降溫，此時光子的能量已不足以與宇宙中的原子進行交互作用。至此宇宙變得透明，而光子也形成宇宙背景輻射，成為日後我可以證實大霹靂確實發生過的證據。[16]

1.4 宇宙微波背景輻射的不均向性

1965年，貝爾實驗室的A. Penzias與R. Wilson以液態氦校準過的天線接收機偵測到了意料之外的雜訊，在謹慎的排除了各種可能造成雜訊的原因之後，Penzias與Wilson確定了這個訊號是來自太空。

Penzias與Wilson發現的這個雜訊均勻且均向的佈滿天空，而物理學家

R. Dicke認為這個訊號即為大霹靂後所殘留的最好證據，在一連串的實驗及觀測後確定了這個訊號是黑體輻射，其溫度為2.73K，並具有均勻及各向同性的性質，這也與之前所提到的宇宙學原理相符，也因此這個訊號被稱為「宇宙微波背景輻射」(Cosmic Microwave Background Radiation)，簡稱C. M. B. [4, 6]

C. M. B. 的發現也進一步証實了標準宇宙學(Standard Cosmology)的預測，雖然標準宇宙學在描述宇宙的演進上取得成功，但在描述輻射主導的早期宇宙卻面臨了三個主要問題。

(I) 視界問題(horizon problem)

由C. M. B. 的發現讓我們知道現今宇宙的模樣與宇宙學原理相符。即宇宙在大尺度的結構下具有均向性及均勻性。這表示目前的可見宇宙中各處都達到了熱平衡，但若依照標準宇宙學模型往回追溯，我們發現宇宙中有許多區域是在彼此的視界(horizon)之外。若這些區域要達到熱平衡，則勢必會伴隨著超光速訊息傳遞的問題出現。

(II) 平坦性問題(flatness problem)

現今我們觀察到的宇宙在大尺度上是平坦的，意即宇宙中的物質密度非常接近平坦宇宙的臨界密度。若將時間往回推算，則在早期宇宙的物質密度與臨界密度更為接近，偏差非常的小。這樣的情況要是偶然發生的機率並不高，所以宇宙物理學家相信這是由當時尚未知曉的機制來推動。

(III) 磁單極問題

若熱大霹靂(Hot Big Bang)模型是正確的，則早期宇宙將處於極高溫的狀態。而弦論預測在這樣的狀態下，目前已知的四種基本交互作用是統一的，並且會產生大量的磁單極，多到足以構成宇宙的主要成份。但事實是，至今為止我們在宇宙中尚未發現任何磁單極的存在。

這幾個重要的問題困擾了當時的宇宙物理學家，直到了1980年代Guth提出了宇宙在初期經歷過暴脹時期的概念來解決這些問題。Guth的想法是在早期的宇宙發展中引入一個純量場作為推動暴脹機制，這個場稱為

暴脹場。暴脹場所引起的重力作用有別於一般物質，它提供了斥力，所以才使空間得以擴張，暴脹場的位能使得宇宙的空間在 10^{-30} 秒內向各方向膨脹了 10^{25} 倍之多。這個數量級即使放到天文學的尺度上來看也是一個很驚人的數字。

因為宇宙這種超光速的擴張讓原先處於視界內的區域在膨脹後落到了彼此的視界之外並且因為暴脹使得宇宙變得均勻且平坦，換句話說，原先宇宙所具有的結構被暴脹給迅速弭平了，因此暴脹的概念可以合理的解釋這三個困擾物理學家已久的重大問題，也使得暴脹理論成為宇宙學上廣為接受的理論。[15]

雖然C. M. B. 相當程度的印證了宇宙學原理。但我們知道C. M. B. 的本質是黑體輻射，其頻譜只由溫度決定，且根據狹義相對論(Special Relativity)，當我們所處的座標系與宇宙的座標系有相對運動時，便會有Doppler effect的出現，這也意味著在CMB上會有偶極不均向性(Dipole Anisotropy)的出現。

而宇宙早期的物質分佈對其後的演化有著極為重要的影響，若是在宇宙初期物質分佈完全均勻，則依照我們所知的理論來看，宇宙將難以演化出現在所觀測到的星系結構，這也成為CMB應該存在著溫度異向性的理由之一。這個溫度異向性帶著形成現今星系結構的資訊，所以長久以來物理學家都希望能從天文觀測上找到CMB的異向性，而CMB的溫度起伏也終於在1992年由COBE衛星上的儀器DMR所偵測到。由於CMB異向性的發現，我們可以藉由理論模型與被測量到的CMB頻譜做比較，進而反推宇宙的初始條件。

隨著暴脹理論的提出及量子理論的發展成熟，物理學家也了解到假設為驅動暴脹的純量場因為量子效應的關係，在空間中各點的強度會有所差異，意即存在著量子漲落(Quantum Fluctuation)。這樣的能量起伏使得宇宙中不同區域的暴脹結束時間不同，進而讓我們宇宙中存在著微小的不均勻。[11]

C. M. B. 所存在的不均向性雖然微小，但其背後卻隱含著許多基本且深刻的物理法則，因此我們也希望能藉由研究在不均向空間的宇宙模型來得到更多的資訊以了解尚未明朗的自然定律。

Chapter 2

Classical Cosmologies from Supergravity

2.1 String Theory

如何將目前已知的四個基本相互作用統一成一個基本相互作用一直是近數十年來物理學界最重要的課題。隨著量子理論發展的成熟，我們已經成功的將電磁相互作用、弱相互作用、強相互作用統合在一起，將這些規範相互作用(gauge interaction)整合在一起的模型稱為「標準模型」(Standard Model)。

以廣義相對論為基礎所建立的現代宇宙學發展出了大霹靂理論，而大霹靂理論也因為C. M. B. 的觀測發現被証實了，但我們也同時面臨了宇宙中存在時空奇點(space-time singularity)的情況，這意味著廣義相對論在處理強大重力場問題時的不完備。然而，廣義相對論並不是第一個存在奇點問題的理論，類似的問題在古典電磁學中也有，在古典電磁學的描述下，電荷(charge)是一個點，因此會有自能(self energy)無窮大的問題。但隨著量子理論的發展，我們了解到電荷並不是一個點，換句話說，量子效應的引入解決了古典電磁學的奇點問題。而因為量子理論的成功，所以物理學家希望能將廣義相對論與量子理論相結合，藉由量子效應來解決時空奇點的問題。但可惜的是，我們在整合兩種理論時遇到了難題，因為量子重力無法重整化，這表示當重力場增強時，量子效應也會增大到無法控制，進而使得理論失去可預測性。有鑑於此，我們必須找出新的方法來完成統一場論的工作。

弦論(String Theory)是目前可能成為統一場論的候選理論，有別於現實世界所能觀測的四維空間，弦為了自洽，則整個理論必須建立在

(1+3+6)維空間上，即除了我們所熟知的四維時空外還有額外的六維內空間。弦論用弦的振動態來描述各種基本粒子，在標準模型中各種不同的基本粒子其實只是弦不同的振動態，這樣的弦可以找到一種振動態對應到重力子(graviton)。重力子即為量子化的重力，而在早期宇宙的尺度下，重力的行為與古典重力相較會出現巨大的差異，所以如果要研究早期宇宙的演化，引入弦論似乎是一條可行的路。[12, 13, 17]

2.2 Extra Dimensions

額外維度(Extra dimensions)概念可以追溯自1921年出現的Kaluza-Klein Theory。這個理論主要是希望能將重力與電磁力統合在一起的模型，其概念為將空間的維度拓展到五維。在這樣的架構下，其張量方程式的不同分量分別對應到Einstein equation及Maxwell equations。

如2-1節所提到，弦論是目前最有可能統合所有基本交互作用的候選理論，而弦論在10維空間中才能自洽。但因為弦論其模型尺度極其微小的關係，若我們要以實驗來驗證需要極高的能量，而所需的能量之高，即使是目前最強大的粒子加速器LHC也遠遠不及。因此弦論難以被驗證的事實數十年來困擾著物理學家。幸運的是，雖然人類無法創造出足以驗證弦論的高能量，但自然界卻曾經存在過。

我們知道目前被廣為接受的宇宙模型所描述的早期宇宙是一個極高溫的狀態，所以宇宙學家希望能在弦論的基礎下對早期宇宙的面貌有更多了解。早期宇宙的暴脹幾乎弭平了宇宙的所有不均勻，而驅動暴脹的機制從理論被提出以來就出現了許多模型試圖加以解釋，但由於我們對於超高能量狀態下的物理了解極為有限，因此暴脹的機制目前尚未有定論。然而宇宙早期的高能環境下，弦的性質顯著，並且基於暴脹理論的成功，所以我們希望能進一步的了解弦論架構下的額外維度與早期宇宙演化之間的關係。目前的理論認為在弦宇宙學(String Cosmology)的模型下，內空間的收縮使得其能量跑到了四維時空進而導致了其加速膨脹。[14, 19]

2.3 Kalb-Ramond Field

Kalb-Ramond field是在弦論架構下的規範場。如同電磁場與電荷產生交互作用一樣，Kalb-Ramond field是與string charge產生交互作用。有別於Maxwell規範場，Kalb-Ramond field的形式為一個anti-symmetric

two tensor, 即 $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ 。依此性質, 我們可以簡單的寫下其Lorentz scalar為[12, 18]

$$- \int \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} B_{\mu\nu}(x(\sigma, \tau)) d\tau d\sigma \quad (2.1)$$

此外, 定義Kalb-Ramond field strength為

$$F_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

由此我們可以很簡單的驗證Kalb-Ramond field滿足規範不變性(gauge invariance)。

規範變換:

$$B'_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \Lambda_\beta - \partial_\beta \Lambda_\alpha \quad (2.3)$$

則由

$$F'_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha B'_{\beta\gamma} + \partial_\beta B'_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B'_{\alpha\beta}$$

可展開成

$$F'_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} + \partial_\alpha(\partial_\beta \Lambda_\gamma - \partial_\gamma \Lambda_\beta) + \partial_\beta(\partial_\gamma \Lambda_\alpha - \partial_\alpha \Lambda_\gamma) + \partial_\gamma(\partial_\alpha \Lambda_\beta - \partial_\beta \Lambda_\alpha) \quad (2.4)$$

而從常微分的對稱性知 $\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$, 則我們可以得到規範變換的項總合為零

$$\partial_\alpha(\partial_\beta \Lambda_\gamma - \partial_\gamma \Lambda_\beta) + \partial_\beta(\partial_\gamma \Lambda_\alpha - \partial_\alpha \Lambda_\gamma) + \partial_\gamma(\partial_\alpha \Lambda_\beta - \partial_\beta \Lambda_\alpha) = 0 \quad (2.5)$$

由此我們可以得知Kalb-Ramond field的確是一個滿足規範不變性的規範場。

$$F'_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.6)$$

2.4 Einstein-Kalb-Ramond Cosmology

在早期宇宙的環境中，重力的量子效應顯著，如2-1節所述，弦論是目前有希望成為統一場論的候選理論之一，所以物理學家在其研究的宇宙模型中融入了弦論來研究宇宙的演進。

因為弦論在十維空間中方能自洽，所以若希望我們的宇宙模型建立在弦的架構下，首先我們得將空間拓展到十維，即四維時空加上六維的內空間。再來便是引入會影響宇宙演化的幾個動力場，分別為描述時空幾何特性的度規張量 g_{ab} 、描述規範交互作用的Kalb-Ramond field B_{ab} ，還有與Kalb-Ramond field strength耦合的純量場 ϕ 。

在早期宇宙學剛發展的時候，我們對宇宙的研究並沒有考慮torsion field的效應，直到了Einstein-Cartan theory的出現。Einstein-Cartan theory認為，物質的質量影響了時空的曲率，而物質的spin將會影響時空的torsion。在Einstein-Kalb-Ramond theory中，我們並沒有在connection中考慮torsion的存在，取而代之的是以Kalb-Ramond field加入模型中來造成相似的效應。藉此，可以寫下其作用量(action)為

作用量：

$$S = \int \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} \partial_P \phi \partial^P \phi - V(\phi) - \frac{1}{6} e^\phi F_{MNP} F^{MNP} \right) d^{10}x \quad (2.7)$$

在[3]的文章中，作者將這個模型放到了Robertson-Walker 度規下求解動力場，其Robertson-Walker 度規為

$$ds^2 = -dt^2 + R_3^2(t) \tilde{g}_{ij}(x) dx^i dx^j + R_6^2(t) \tilde{g}_{mn}(y) dy^m dy^n \quad (2.8)$$

首先假設 ϕ 及 F_{MNP} 都是只與時間有關的函數，且 F_{MNP} 只在四維時空有值。則找出了下列方程式

$$3 \frac{\ddot{R}_3}{R_3} + 6 \frac{\ddot{R}_6}{R_6} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} e^\phi F^2 \quad (2.9)$$

$$2 \frac{k_3}{R_3^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{R}_3}{R_3} \right) + \left(3 \frac{\dot{R}_3}{R_3} + 6 \frac{\dot{R}_6}{R_6} \right) \frac{\dot{R}_3}{R_3} = -\frac{3}{2} e^\phi F^2 \quad (2.10)$$

$$5\frac{k_6}{R_6^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{R}_6}{R_6}\right) + \left(3\frac{\dot{R}_3}{R_3} + 6\frac{\dot{R}_6}{R_6}\right)\frac{\dot{R}_6}{R_6} = \frac{1}{2}e^\phi F^2 \quad (2.11)$$

$$\ddot{\phi} + \left(3\frac{\dot{R}_3}{R_3} + 6\frac{\dot{R}_6}{R_6}\right)\dot{\phi} = -2e^\phi F^2 \quad (2.12)$$

並假設解是冪方(power-law)的形式代入方程組中可以得到一組穩定解為

$$R_3(t) = R_{30}t \quad , \quad R_6(t) = R_{60}t^{-1} \quad , \quad \phi - \phi_0 = 4 \ln t$$

$$k_3 = -4R_{30}^2 \quad , \quad k_6 = 0 \quad , \quad \phi_0 = \ln \frac{8R_{30}^6}{f_0^2}$$

其中 R_{30} 、 R_{60} 為常數

由這組解我們可以發現當四維時空膨脹時，內空間會隨著收縮。比較值得討論的是，若是膨脹速率不隨時遞減，則宇宙演化至核聚變時期時就會出現問題，這不是我們所期待的。所幸在此Kalb-Ramond field及純量場及時扮演了減緩膨脹速率的角色，解決了這個問題[3]。此外，在[3]提到即使是冪方解也能產生暴脹。我們可以藉由宇宙的總熵來確認這件事。假設宇宙是準靜的(adiabatic)，即宇宙的總熵不變。總熵的值可約略計算[14]

$$S \sim 10^{88} \sim R_{3i}^3 R_{6i}^6 T_i^9 \simeq R_{3f}^3 R_{6f}^6 T_f^9$$

其中腳標 i 代表的是在暴脹發生前的尺度因子及溫度，而腳標 f 則是暴脹發生後的尺度因子及溫度

根據[14, 19]，由於量子效應的關係避免了內空間塌縮成奇點， R_{6f} 的數量級約為普朗克長度(Planck length)，且若是內空間的初始尺度足夠大，則冪方解就足夠產生暴脹。則

$$R_{3i} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad R_{3f} \sim 10^{88/3} \quad (2.13)$$

又compactification temperature接近普朗克能量(Planck energy)，即 $T_i \leq 1$ ，則

$$\frac{R_{6i}}{R_{6f}} \sim \frac{t_f}{t_i} \sim 10^{44/3} \quad (2.14)$$

由此知，在宇宙初期，內空間與四維時空的差距約有15個數量級。這樣的差距是足夠讓幂方解產生暴脹的。[3, 5, 7, 10]



Chapter 3

Einstein-Kalb-Ramond Cosmology in Anisotropic Spacetime

3.1 Einstein-Kalb-Ramond Action下的場方程式

由近代的天文觀測發現，在大尺度是均勻且均向的宇宙其實存在著些許的不均向。基於這個事實，我們有別於[3]的工作，將Einstein-Kalb-Ramond action以Bianchi type I space為度規來討論宇宙的演進。

度規：

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2 + d^2(t)\delta_{mn}dx^m dx^n \quad (3.1)$$

其中 $a_i(t)$ 、 $d(t)$ 為尺度因子且 $m, n = 4 \rightarrow 9$

作用量：

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} \partial_P \phi \partial^P \phi - V(\phi) - \frac{1}{6} e^{\kappa\phi} F_{MNP} F^{MNP} \right) \quad (3.2)$$

若我們將作用量對 g^{MN} 變分，得度規方程式：

$$\begin{aligned} G_{MN} = & \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4} g_{MN} \partial_P \phi \partial^P \phi - \frac{1}{2} g_{MN} V(\phi) \\ & + \frac{1}{12} e^{\kappa\phi} (6 F_{MPQ} F_N{}^{PQ} - g_{MN} F_{PQR} F^{PQR}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

對純量場變分，得純量場方程式：

$$D_M \partial^M \phi = -\partial_\phi V(\phi) - \frac{1}{6} e^{\kappa\phi} F_{MNP} F^{MNP} \quad (3.4)$$

對torsion field變分，得torsion equation:

$$D_M (e^{\kappa\phi} F^{MNP}) = 0 \quad (3.5)$$

若將Einstein tensor不為零的分量列出，再乘上各自的度規分量，則我們可以寫下在Bianchi type I space下的度規方程式為

Friedmann equation:

$$-H_1 H_2 - H_1 H_3 - H_2 H_3 - 18\dot{\alpha}\dot{\beta} - 15\dot{\beta}^2 = -\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{2}e^{-\kappa\phi-12\beta}\dot{\chi}^2 \quad (3.6)$$

而對 g_{11} 、 g_{22} 、 g_{33} 、 g_{44} 變分的方程式分別為

$$\begin{aligned} -\dot{H}_2 - \dot{H}_3 - H_2^2 - H_3^2 - H_2 H_3 + 6H_1\dot{\beta} - 6\ddot{\beta} - 18\dot{\alpha}\dot{\beta} - 21\dot{\beta}^2 \\ = \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}V(\phi) + \frac{1}{2}e^{-\kappa\phi-12\beta}\dot{\chi}^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} -\dot{H}_1 - \dot{H}_3 - H_1^2 - H_3^2 - H_1 H_3 + 6H_2\dot{\beta} - 6\ddot{\beta} - 18\dot{\alpha}\dot{\beta} - 21\dot{\beta}^2 \\ = \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}V(\phi) + \frac{1}{2}e^{-\kappa\phi-12\beta}\dot{\chi}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -\dot{H}_1 - \dot{H}_2 - H_1^2 - H_2^2 - H_1 H_2 + 6H_3\dot{\beta} - 6\ddot{\beta} - 18\dot{\alpha}\dot{\beta} - 21\dot{\beta}^2 \\ = \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}V(\phi) + \frac{1}{2}e^{-\kappa\phi-12\beta}\dot{\chi}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} -3\ddot{\alpha} - H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 - H_1 H_2 - H_1 H_3 - H_2 H_3 - 5\ddot{\beta} - 15\dot{\alpha}\dot{\beta} - 15\dot{\beta}^2 \\ = \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{2}e^{-\kappa\phi-12\beta}\dot{\chi}^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

而內空間中的腳標 m ， $G^m_m = G^4_4 \forall m$ ，且Hubble parameter $H_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i}$ ，詳細的變分推導過程及Kalb-Ramond field的計算見附錄。

3.2 場方程式的簡化

與均向空間相比，不均向空間下的方程組是較為複雜的，所以我們希望能簡化場方程式，讓方程式中的獨立變數減少以求得動力場的解析解。

我們可以將度規寫成如下形式[2]

$$a_1(t) = e^{\alpha_1(t)}, \quad a_2(t) = e^{\alpha_2(t)}, \quad a_3(t) = e^{\alpha_3(t)}, \quad d(t) = e^{\beta(t)}$$

$$\alpha_1(t) = \alpha(t) - 2\sigma_+(t) \quad (3.11)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha(t) + \sigma_+(t) + \sqrt{3}\sigma_-(t) \quad (3.12)$$

$$\alpha_3(t) = \alpha(t) + \sigma_+(t) - \sqrt{3}\sigma_-(t) \quad (3.13)$$

則

$$\alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t) = 3\alpha(t) \quad (3.14)$$

我們可以由Bianchi identity及純量場方程式、torsion equation解得torsion field為[1](推導過程見於附錄)

$$\dot{\chi}(t) = \gamma e^{\kappa\phi - 3\alpha + 6\beta} \quad (3.15)$$

其中 γ 為torsion field的積分常數

我們可以藉由(3.11)、(3.12)、(3.13)的度規形式來幫助簡化這些方程式。另外我們可以對度規方程式取trace再用各分量的組合來消除不均向的部份。依此可得兩個方程式

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}(G^0_0 + G^1_0 + G^2_2 + G^3_3) + \frac{1}{4}G^4_4 &= \ddot{\beta} + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} + 6\dot{\beta}^2 \\
&= \frac{1}{8}V(\phi) - \frac{1}{4}e^{-\kappa\phi-12\beta}\dot{\chi}^2 \quad (3.16)
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6}(3G^0_0 + G^1_1 + G^2_2 + G^3_3) &= \ddot{\alpha} + 3\ddot{\beta} + 15\dot{\alpha}\dot{\beta} + 3\dot{\alpha}^2 + 18\dot{\beta}^2 \\
&= \frac{V}{2} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

由此我們可以得到與 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\phi(t)$ 有關的三個場方程

$$\ddot{\alpha} + 3\ddot{\beta} + 15\dot{\alpha}\dot{\beta} + 3\dot{\alpha}^2 + 18\dot{\beta}^2 = \frac{V(\phi)}{2} \quad (3.18)$$

$$\ddot{\beta} + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} + 6\dot{\beta}^2 = \frac{1}{8}V(\phi) - \frac{\gamma^2}{4}e^{\kappa\phi(t)-6\alpha(t)} \quad (3.19)$$

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + 6\dot{\beta}\dot{\phi} = -\partial_\phi V(\phi) - \kappa\gamma^2 e^{\kappa\phi(t)-6\alpha(t)} \quad (3.20)$$

我們可以由這三個簡化後的方程式分別解出 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\phi(t)$ 三個變數。

3.3 分析的模型 $V(\phi) = V_0 e^{\kappa\omega\phi}$

有了簡化的方程式後，接下來我們需要建構一個適當的位能模型來找到方程式的解。

我們假設一個新的位能模型為

$$V(\phi) = V_0 e^{\kappa\omega\phi} \quad (3.21)$$

在此將位能的exponential指數項參數分離成 κ 、 ω 以便計算。

假設解是冪方的形式，即令

$$\alpha(t) = A \ln t, \quad \beta(t) = nA \ln t, \quad \kappa\phi(t) = mA \ln t \quad (3.22)$$

代入eq (3.18)得

$$(-A + 3B + 15nA^2 + 3A^2 + 18n^2A^2)t^{-2} = \frac{V_0}{2}t^{\omega mA} \quad (3.23)$$

代入eq (3.19)得

$$(-nA + 3nA^2 + 6n^2A^2)t^{-2} = \frac{V_0}{8}t^{\omega mA} - \frac{\gamma^2}{4}t^{(m-6)A} \quad (3.24)$$

代入eq (3.20)得

$$(-mA + 3mA^2 + 6nmA^2)t^{-2} = -\kappa\omega V_0 t^{\omega mA} - \kappa\gamma^2 t^{(m-6)A} \quad (3.25)$$

若要得到有意義的解，我們令

$$(m-6)A = \omega mA = -2 \quad (3.26)$$

而我們可以由(3.23)、(3.24)、(3.25)三式得到 κ 、 ω 的約束條件，因此我們由位能的初值條件 V_0 以及torsion field的初值條件 γ 為參數解得

$$n(V_0, \gamma) = \frac{V_0 - 2\gamma^2}{V_0 + 6\gamma^2} \quad (3.27)$$

$$m(V_0, \gamma) = 6 - \frac{2}{A(V_0, \gamma)} \quad (3.28)$$

$$\omega(V_0, \gamma) = \frac{1}{1 - 3A(V_0, \gamma)} \quad (3.29)$$

$$A(V_0, \gamma) = \frac{1}{6} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}\right) \left(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right) \quad (3.30)$$

$$\kappa^2(V_0, \gamma) = \left(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{4}\right) \left(\frac{3A(V_0, \gamma) - 1}{A(V_0, \gamma)}\right) \left(-\gamma^2 + \frac{V_0}{3A(V_0, \gamma) - 1}\right)^{-1} \quad (3.31)$$

則我們得到 $\alpha(t)$ 及 $\beta(t)$

$$\alpha(t) = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)})\left(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right) \ln t \quad (3.32)$$

$$\beta(t) = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)})\left(\frac{V_0 - 2\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right) \ln t \quad (3.33)$$

再由

$$G_2^2 - G_3^3 = (\dot{H}_2 - \dot{H}_3) + (H_2^2 - H_3^2) + H_1(H_2 - H_3) + 6(H_2 - H_3)\dot{\beta} = 0$$

得方程式

$$(\ddot{\alpha}_2 - \ddot{\alpha}_3) + (3\dot{\alpha} + 6\dot{\beta})(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_3) = 0$$

其中 $\alpha_2 - \alpha_3 = 2\sqrt{3}\sigma_-$ ，則我們可以得到

$$G_2^2 - G_3^3 = 0$$

$$2\sqrt{3}(\ddot{\sigma}_- + 3\dot{\alpha}\dot{\sigma}_- + 6\dot{\beta}\dot{\sigma}_-) = 0 \quad (3.34)$$

可解得

$$\dot{\sigma}_-(t) = k_- e^{-3\alpha(t) - 6\beta(t)} \quad (3.35)$$

而

$$\begin{aligned} G_0^0 + G_1^1 &= -V(\phi) \\ &= -2\ddot{\alpha} - 2\ddot{\sigma}_+ - 6\dot{\alpha}^2 - 6\dot{\alpha}\dot{\sigma}_+ - 4\dot{\alpha}^2 - 30\dot{\alpha}\dot{\beta} - 6\ddot{\beta} - 36\dot{\beta}^2 - 12\dot{\beta}\dot{\sigma}_+ \end{aligned}$$

則

$$G_0^0 + G_1^1 - \frac{1}{3}(3G_0^0 + G_1^1 + G_2^2 + G_3^3) = 0$$

得方程式

$$-2(\ddot{\sigma}_+ + 3\dot{\alpha}\dot{\sigma}_+ + 6\dot{\beta}\dot{\sigma}_+) = 0 \quad (3.36)$$

可解得

$$\dot{\sigma}_+ = k_+ e^{-3\alpha - 6\beta} \quad (3.37)$$

其中 k_- 、 k_+ 為積分常數

則 $-3\alpha(t) - 6\beta(t) =$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}) \left(\frac{3V_0 + 18\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2} + \frac{6V_0 - 12\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2} \right) \ln t \\ & = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}) \ln t \end{aligned}$$

$$\sigma_+(t) = k_+ \int e^{-3\alpha(t) - 6\beta(t)} dt \quad (3.38)$$

$$= \frac{2k_+}{1 \mp \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}} t^{\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)})} \quad (3.39)$$

$$\sigma_-(t) = k_- \int e^{-3\alpha(t) - 6\beta(t)} dt \quad (3.40)$$

$$= \frac{2k_-}{1 \mp \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}} t^{\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)})} \quad (3.41)$$

另外我們令 $M = \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}$ ，則可以寫出兩組幂方解為

$$a_1^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1+M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[-\frac{8k_+}{1-M} t^{\frac{1}{2}(1-M)}\right] \quad (3.42)$$

$$a_2^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1+M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[\frac{4k_+ - 4\sqrt{3}k_-}{1-M} t^{\frac{1}{2}(1-M)}\right] \quad (3.43)$$

$$a_3^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1+M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[\frac{4k_+ + 4\sqrt{3}k_-}{1-M} t^{\frac{1}{2}(1-M)}\right] \quad (3.44)$$

內空間尺度因子

$$d^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1+M)\left(\frac{V_0-2\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)} \quad (3.45)$$

純量場

$$\kappa\phi(t) = \frac{(1+M)(V_0+6\gamma^2)}{3V_0+2\gamma^2} \ln t \quad (3.46)$$

及

$$a_1^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1-M)\left(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)} \exp\left[-\frac{8k_+}{1+M}t^{\frac{1}{2}(1+M)}\right] \quad (3.47)$$

$$a_2^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1-M)\left(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)} \exp\left[\frac{4k_+ - 4\sqrt{3}k_-}{1+M}t^{\frac{1}{2}(1+M)}\right] \quad (3.48)$$

$$a_3^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1-M)\left(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)} \exp\left[\frac{4k_+ + 4\sqrt{3}k_-}{1+M}t^{\frac{1}{2}(1+M)}\right] \quad (3.49)$$

內空間尺度因子

$$d^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1-M)\left(\frac{V_0-2\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)} \quad (3.50)$$

純量場

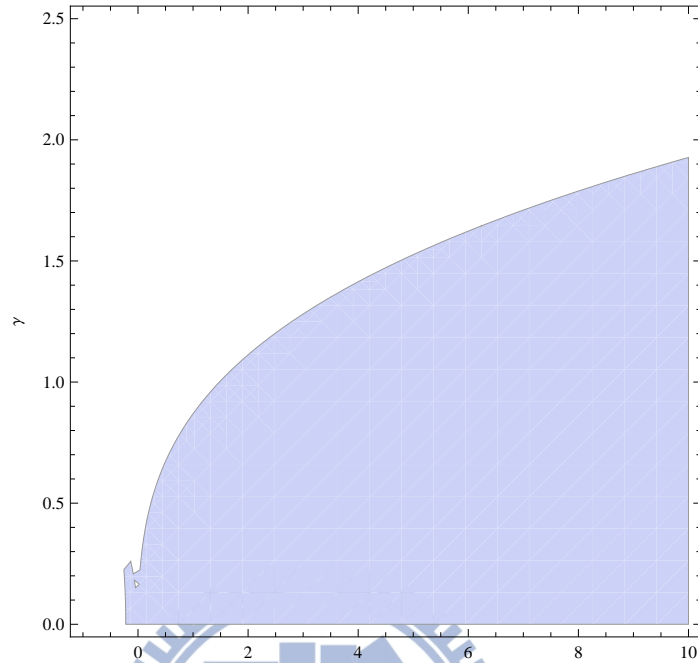
$$\kappa\phi(t) = \frac{(1+M)(V_0+6\gamma^2)}{3V_0+2\gamma^2} \ln t \quad (3.51)$$

可以發現尺度因子的不均向性質由exponential項控制，而不同的初始條件對應到的情況會在下一個章節討論。

3.4 不均向空間解的性質

在3-2節我們以冪方的形式解出了Einstein-Kalb-Ramond模型下的解析解，而根據不同的初值條件，我們可以分別討論幾種對應的情況。但首先要確認耦合的強度 κ 為實數時， V_0 、 γ^2 落在什麼範圍。

$\kappa^2 = \left(\frac{V_0+6\gamma^2}{4}\right)\left(\frac{3A-1}{A}\right)\left(-\gamma^2 + \frac{V_0}{3A-1}\right)^{-1} > 0$ 時， V_0 、 γ 落在的區間如下圖



其中 $A = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)})(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2})$

要討論尺度因子的收縮或膨脹，可以從其微分來看

$$\dot{a}_1(t) = \dot{\alpha}_1(t) \exp[\alpha_1(t)] \quad (3.52)$$

$$\dot{a}_2(t) = \dot{\alpha}_2(t) \exp[\alpha_2(t)] \quad (3.53)$$

$$\dot{a}_3(t) = \dot{\alpha}_3(t) \exp[\alpha_3(t)] \quad (3.54)$$

則我們由尺度因子的微分知道膨脹或收縮是根據其指數項的微分所控制。

其中

$$\dot{\alpha}_1(t) = \dot{\alpha}(t) - 2\dot{\sigma}_+(t) \quad (3.55)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{\sigma}_+(t) + \sqrt{3}\dot{\sigma}_-(t) \quad (3.56)$$

$$\dot{\alpha}_3(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{\sigma}_+(t) - \sqrt{3}\dot{\sigma}_-(t) \quad (3.57)$$

而令 $M = \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}$ ，則

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_{\pm}(t) = \frac{1}{6}(1 \pm M)\left(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right)t^{-1} \quad (3.58)$$

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\beta}_{\pm}(t) = \frac{1}{6}(1 \pm M)\left(\frac{V_0 - 2\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right)t^{-1} \quad (3.59)$$

3.4.1 膨脹解的分析

若希望得到膨脹解，我們先考慮位能為正的情況，則 $V_0 > 0$ 且 γ 為實數，可以知道 $M > 1$ 。我們可以先考慮取 $\dot{\alpha}_-(t)$ 的情況，得

$$\dot{\alpha}_1(t) = \frac{1}{6}(1 - M)\left(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right)t^{-1} - 2k_+t^{-\frac{1}{2}(1-M)} \quad (3.60)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = \frac{1}{6}(1 - M)\left(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right)t^{-1} + (k_+ + \sqrt{3}k_-)t^{-\frac{1}{2}(1-M)} \quad (3.61)$$

$$\dot{\alpha}_3(t) = \frac{1}{6}(1 - M)\left(\frac{V_0 + 6\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right)t^{-1} + (k_+ - \sqrt{3}k_-)t^{-\frac{1}{2}(1-M)} \quad (3.62)$$

當 $t \rightarrow \infty$ 時，且由於 $M > 1$ ，則 $-\frac{1}{2}(1 - M) > 0$ ，因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{2}(1-M)} \rightarrow \infty \quad (3.63)$$

由此我們可以知道若取 $\dot{\alpha}_-(t)$ ，則尺度因子其均向項隨時間發展的速率減緩，但不均向的部份加速，所以在這樣的情況下尺度因子到最後將由不均向項主控。接著我們要討論的是尺度因子其不均向項的初值條件 k_+ 、 k_- ，因為尺度因子在此由不均向項主控，所以在不同的初值條件情況下將會影響尺度因子是朝著收縮或者是膨脹演進。我們可以將初值條件表為下列的情況

(1) 若 $k_+ > 0$ 、 $k_- > 0$ 且 $k_+ > \sqrt{3}k_-$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) > 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) > 0$ ， $-2k_+ < 0$

(2) 若 $k_+ > 0$ 、 $k_- > 0$ 且 $k_+ < \sqrt{3}k_-$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) > 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) < 0$ ， $-2k_+ < 0$

(3) 若 $k_+ > 0$ 、 $k_- < 0$ 且 $k_+ > |\sqrt{3}k_-|$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) > 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) > 0$ ， $-2k_+ < 0$

(4) 若 $k_+ > 0$ 、 $k_- < 0$ 且 $k_+ < |\sqrt{3}k_-|$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) < 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) > 0$ ， $-2k_+ < 0$

(5) 若 $k_+ < 0$ 、 $k_- > 0$ 且 $|k_+| > \sqrt{3}k_-$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) < 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) < 0$ ， $-2k_+ > 0$

(6) 若 $k_+ < 0$ 、 $k_- > 0$ 且 $|k_+| < \sqrt{3}k_-$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) > 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) < 0$ ， $-2k_+ > 0$

(7) 若 $k_+ < 0$ 、 $k_- < 0$ 且 $|k_+| > |\sqrt{3}k_-|$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) < 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) < 0$ ， $-2k_+ > 0$

(8) 若 $k_+ < 0$ 、 $k_- < 0$ 且 $|k_+| < |\sqrt{3}k_-|$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) < 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) > 0$ ， $-2k_+ > 0$

(9) 若 $k_+ = 0$ 、 $k_- > 0$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) > 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) < 0$ ， $-2k_+ = 0$

(10) 若 $k_+ = 0$ 、 $k_- < 0$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) < 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) > 0$ ， $-2k_+ = 0$

(11) 若 $k_+ > 0$ 、 $k_- = 0$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) > 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) > 0$ ， $-2k_+ < 0$

(12) 若 $k_+ < 0$ 、 $k_- = 0$ 時， $(k_+ + \sqrt{3}k_-) < 0$ 、 $(k_+ - \sqrt{3}k_-) < 0$ ， $-2k_+ > 0$

由這些初值條件對應到的不均向項係數可知，只要 k_+ 、 k_- 其中一個非零時，至少有一個維度的不均向部份其係數會出現負值。若我們將取 $\alpha_-(t)$ 時的不均向尺度因子寫出

$$a_1^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1-M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[-\frac{8k_+}{1+M}t^{\frac{1}{2}(1+M)}\right] \quad (3.64)$$

$$a_2^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1-M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[\frac{4k_+ - 4\sqrt{3}k_-}{1+M}t^{\frac{1}{2}(1+M)}\right] \quad (3.65)$$

$$a_3^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1-M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[\frac{4k_+ + 4\sqrt{3}k_-}{1+M}t^{\frac{1}{2}(1+M)}\right] \quad (3.66)$$

我們可以看出，在 $M > 1$ 、取 $\alpha_-(t)$ 的情況下，均向的部份因為 $\frac{1}{6}(1-M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}) < 0$ ，所以是收縮的，而尺度因子又由不均向項所主控，所以可以知道在這樣的條件下，尺度因子至少會有一個維度是收縮的。

若我們考慮取 $\alpha_+(t)$ 的情況時

$$\dot{\alpha}_1(t) = \frac{1}{6}(1+M)\left(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)t^{-1} - 2k_+t^{-\frac{1}{2}(1+M)} \quad (3.67)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = \frac{1}{6}(1+M)\left(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)t^{-1} + (k_+ + \sqrt{3}k_-)t^{-\frac{1}{2}(1+M)} \quad (3.68)$$

$$\dot{\alpha}_3(t) = \frac{1}{6}(1+M)\left(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}\right)t^{-1} + (k_+ - \sqrt{3}k_-)t^{-\frac{1}{2}(1+M)} \quad (3.69)$$

可以看到當 $M > 1$ 時， $\frac{1}{6}(1+M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2}) > 0$ ，因此知道取 $\dot{\alpha}_+(t)$ 時， $\alpha(t)$ 為正。而由上述的分析可知， k_+ 、 k_- 為非零時，至少會有一個維度的不均向部份是收縮的，但在此處均向部份也是處於膨脹的狀態，所以若要得到膨脹解，需要比較的是均向項及不均向項的競爭。若我們將取 $\alpha_+(t)$ 時的不均向尺度因子寫出

$$a_1^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1+M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[-\frac{8k_+}{1-M}t^{\frac{1}{2}(1-M)}\right] \quad (3.70)$$

$$a_2^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1+M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[\frac{4k_+ - 4\sqrt{3}k_-}{1-M}t^{\frac{1}{2}(1-M)}\right] \quad (3.71)$$

$$a_3^2(t) = t^{\frac{1}{3}(1+M)(\frac{V_0+6\gamma^2}{3V_0+2\gamma^2})} \exp\left[\frac{4k_+ + 4\sqrt{3}k_-}{1-M}t^{\frac{1}{2}(1-M)}\right] \quad (3.72)$$

考慮 $t \rightarrow \infty$ 時尺度因子的演化情況，由 $M > 1$ 得 $\frac{1}{2}(1+M) > 1$ ，則

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t^{\frac{1}{2}(1+M)}} \rightarrow 0 \quad (3.73)$$

因此我們可以得知不均向部份的影響會隨著時間遞減。這也表示即使在演化初期四維空間的某些維度可能出現收縮的情況，但隨著不均向部份的影響減弱，四維時空最終還是會膨脹並且朝著 de Sitter space 的方向演化。

接著我們討論 $0 < M < 1$ 的情況，可以看到當 $0 < M < 1$ 時， $-\frac{2}{3} < 3V_0 + 2\gamma^2 < 0$ 。而與 $M > 1$ 情況不同的是，無論取 α_+ 、 α_- ， $\frac{1}{6}(1 \pm M)$ 皆為正，所以對均向項的部份我們只需考慮 $V_0 + 6\gamma^2$ 的正負即可。首先考慮 $V_0 + 6\gamma^2 > 0$ 的情況，則 $-\frac{1}{4} < V_0 < 0$ 、 $\gamma^2 > \frac{1}{24}$ ，而這樣的初值條件滿足 $\kappa^2 > 0$ ，則由這樣的條件我們可以得到 α_+ 、 α_- 皆為負，所以無論取 α_+ 或 α_- ，尺度因子的均向部份皆是收縮的。此外，若我們考慮取 α_- 且 $t \rightarrow \infty$ 時，由於 $0 < M < 1$ ，則 $-\frac{1}{2}(1-M) < 0$ ，因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{1}{2}(1-M)}}{t} \rightarrow 0 \quad (3.74)$$

可以得知尺度因子的演化由不均向項主導，因此當 $0 < M < 1$ 、取 α_- 時，由我們對 k_+ 、 k_- 的分析知道，在這樣的情況下，四維時空至少有一個維度最終會處於收縮的狀態。

而若我們考慮取 α_+ 且 $t \rightarrow \infty$ 時，則 $\frac{1}{2}(1+M) < 1$ ，因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t^{\frac{1}{2}(1+M)}} \rightarrow \infty \quad (3.75)$$

同樣的，在此條件下，尺度因子由不均向項主導，因此可以得知道四維時空最終至少會有一個維度收縮。

若考慮 $V_0 + 6\gamma^2 < 0$ ，則 $0 > V_0 > -\frac{1}{4}$ 、 $\gamma^2 < \frac{1}{24}$ ，我們可以發現在這樣的條件下即使存在著 $\kappa^2 > 0$ 的情況，但 $0 < M < 1$ 會使得尺度因子的發展由不均向項所主導，所以我們可以知道尺度因子最後至少會有一個維度出現收縮的狀態。依據上述的分析我們可以簡單的歸納出四

維時空其尺度因子在不同狀況下的對應關係。

(1). 膨脹解

均向部份為 $\alpha_+(t)$ 、位能為正、 $M > 1$ ，尺度因子的演化最終由均向項控制，因此對於不均向項的初始條件 k_+ 、 k_- 無論為列出的十二種情況任一種都會使得四維時空最終朝著膨脹的方向演進。

(2). 收縮解

(a). 均向部份為 $\alpha_-(t)$ 、位能為正、 $M > 1$ ，尺度因子的演化由不均向項主導，而由我們列出的 k_+ 、 k_- 十二種情況中，無論何種情況都無法避免有某個維度的不均向部份其係數出現負值。這表示在 $\alpha_-(t)$ 、 $M > 1$ 的條件下，尺度因子最終會是收縮的。

(b). 不均向部份為 $\alpha_+(t)$ 、位能為負、 $0 < M < 1$ ， $V_0 + 6\gamma^2 > 0$ ，則尺度因子的演化由不均向項主導，均向項收縮，尺度因子會朝收縮的方向演化。

(c). 均向項為 $\alpha_-(t)$ 、位能為負、 $0 < M < 1$ ， $V_0 + 6\gamma^2 > 0$ ，與 (b) 的分析相同，尺度因子由不均向項主控，因此在這樣的條件下，尺度因子最終也是朝向收縮的方向發展。

3.4.2 Internal Space

依據對四維時空尺度因子的分析，為了讓四維時空有膨脹解，我們選 $\dot{\beta}_+(t)$ ，則

$$\dot{\beta}(t) = \frac{1}{6}(1 + M)\left(\frac{V_0 - 2\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right)t^{-1} \quad (3.76)$$

而 $\frac{1}{6}(1 + M) > 0$ ，若要讓內空間收縮，則 $\left(\frac{V_0 - 2\gamma^2}{3V_0 + 2\gamma^2}\right)$ 須小於零，因此當 $V_0 < 2\gamma^2$ 時滿足條件。

但內空間未必要收縮，只要內空間尺度夠小，小到現代的測量技術難以觀察的程度就不違反已知的物理事實。因此若存在膨脹的內空間，只要演化到最後膨脹夠緩慢甚至停止就有可能讓內空間的尺度夠微小。若考慮內空間的膨脹解，則 $V_0 - 2\gamma^2 > 0$ ，而從 $\kappa > 0$ 所得的 $V_0 - 2\gamma^2$

關係圖中我們知道有許多組參數滿足這樣的條件。我們以 $0 < V_0 < 1$ 這樣的範圍為例舉個一般性的例子來討論。

$$V_0 = 0.05, \quad \gamma^2 = 0.024 \quad (3.77)$$

則

$$\alpha(t) = 0.35 \ln t \quad (3.78)$$

$$\beta(t) = 0.0036 \ln t \quad (3.79)$$

而內空間的膨脹由 $\beta(t)$ 所控制，因此我們知道在這樣的初值條件下內空間即使經過長時間的演化依然保持在原來的尺度附近，所以依照目前的觀測技術，內空間在這樣的尺度下是難以被察覺的。

此外，內空間的演化還存在著一個可能性[8]。同樣在 $0 < V_0 < 1$ 及 $\kappa^2 > 0$ 的條件下，我們可以舉個例子來看。令

$$V_0 = 0.05, \quad \gamma^2 = 0.025 \quad (3.80)$$

得 $V_0 - 2\gamma^2 = 0$ 則 $\beta(t) = 0$ 。而我們知道內空間的演化由 $\beta(t)$ 控制，這意味著內空間的演化是靜止的，所以若內空間一開始就處於 Planck scale，則其將難以被觀測到。

3.4.3 Scalar Field and Torsion Field

依據我們對四維時空及內空間的分析，我們將捨棄 α_- 、 β_- 的解。則取 α_+ 、 β_+ ，得

$$\kappa\phi(t) = \frac{(1+M)(V_0+6\gamma^2)}{3V_0+2\gamma^2} \ln t \quad (3.81)$$

由我們在解場方程式時所加入的約束條件知道，我們的位能模型能量會隨著時間遞減，而這樣的假設是合理的，如同之前所提到，若是四維時空的膨脹速率在宇宙演化後期沒有辦法趨緩的話，則在核合成時期便會出現問題，宇宙便不會演化至我們現今所看到的模樣。但由提供暴脹能量來源的位能是隨著時間遞減的結果得知四維時空的膨脹速率的確會隨之減慢。

接著我們考慮torsion field在三種不同情況下的演化

當內空間收縮時

$$V_0 = 0.05, \quad \gamma^2 = 0.026 \quad (3.82)$$

則

$$\dot{\chi}(t) = 0.16t^{-0.93} \quad (3.83)$$

當內空間膨脹時

$$V_0 = 0.05, \quad \gamma^2 = 0.024 \quad (3.84)$$

則

$$\dot{\chi}(t) = 0.15t^{-0.93} \quad (3.85)$$

當內空間靜止時

$$V_0 = 0.05, \quad \gamma^2 = 0.025 \quad (3.86)$$

則

$$\dot{\chi}(t) = 0.16t^{-0.93} \quad (3.87)$$

我們看到內空間三種演化情況對應到的torsion field都是朝著遞減方向所演化。但這並非意味著滿足 $\kappa^2 > 0$ 的所有初值條件 V_0 、 γ 都會使torsion field遞減。例如 $V_0 = 0.05$ 、 $\gamma = 0.06$ 就會使得torsion field膨脹，也因此限縮了可能的初值條件範圍。

Chapter 4

Conclusion

根據天文觀測找到的宇宙微小不均向性，我們承續了[3]的工作，將 Einstein-Kalb-Ramond Cosmology 拓展到不均向空間下研究，我們選擇以 Bianchi type I space 為模型探討宇宙的演化。

在 Bianchi type I 不均向空間的架構下，我們假設了一個新的位能模型為 $V(\phi) = V_0 e^{\kappa\omega\phi}$ ，而這個位能模型的能量將隨著時間遞減。在這樣的條件下，我們找到了冪方形式的解析解。這組解析解經由分析後，我們得到了所有不朝向 de Sitter space 方向演進的解都會是收縮的。而在作用量的部份，有別於[3]的模型，我們在與 Kalb-Ramond field strength 耦合的純量場上加上了一個耦合強度，這也使得我們在解場方程式時多了一個參數可供調整，避免了只存在虛數解的情況。而在耦合強度的部份，我們也找出了當其為實數時， V_0 、 γ 所落在的區間及其相對關係，並且藉此去討論解的性質。

在本文所得到的冪方解中，我們並未限定位能的正負，但當我們對參數 $M = \sqrt{1 + \frac{3}{2}(3V_0 + 2\gamma^2)}$ 加以討論時，得到了下列的結果

(1) 當 $V_0 > 0$ 時， $M > 1$ ，若取 $\alpha_+(t)$ ，則四維時空前期可能以不均向項主控，但其影響力將隨時間遞減，而最後會由膨脹的均向項主導並且朝著 de Sitter space 的方向演化。

(2) 當 $V_0 > 0$ 時， $M > 1$ ，若取 $\alpha_-(t)$ ，則四維時空尺度因子的均向項收縮並且尺度因子的演化由不均向項所主導。而隨著時間演化，最終會出現至少有一個四維時空維度收縮的結果。

(3) 當 $0 < M < 1$ 時， $V_0 < 0$ ，則無論取 α_+ 、 α_- 都會使得尺度因子的均向項收縮，而尺度因子的主控權依然在不均向項身上，最終將導致至少一個四維時空維度的收縮。

由上述的結果，我們可以歸納出一個結論，在本文的模型下，當尺度因子是由不均向項主導時，演化至後期必會出現至少有一個四維時空尺度因子收縮的結果，並且所有膨脹解的不均向發展到最後必然會減少而使得四維時空朝著 de Sitter space 的方向演化。

依據對四維時空的討論，只有當取 $\alpha_+(t)$ 時才有可能出現膨脹解，因此我們將內空間的討論情況限縮在取 $\beta_+(t)$ 的條件下。而我們在本文中的模型下找到了三種對應的情況

(1) 內空間朝向收縮的方向演進。當宇宙演化成現今的模樣時，內空間已收縮至我們看不到的尺度。

(2) 內空間以極緩慢的速率膨脹，使得內空間即使經過了長時間的演化也未能發展到足以被觀測到的程度。

(3) 內空間是靜止的，一直以來維持在原始的微小尺度

當尺度因子的發展得到合理的解釋後，我們可以發現純量場循著這樣的空間演化是遞減的，這意味著提供暴脹的能量減少，使得空間的膨脹速率逐漸趨緩，以滿足核合成時期出現的條件，並且得以形成現今我們所存在的世界。而我們由解出的 Kalb-Ramond field 知道其演化與尺度因子及純量場的走向密切相關，此外，我們也得到了並不是在所有落在 $\kappa^2 > 0$ 區間的初值條件 V_0 、 γ 都會得到 torsion field 遞減的結果。

Appendix A.

共變微分 (covariant derivative)

做為宇宙學的基礎，進一步的了解廣義相對論是必要的。要了解廣義相對論，我們必須對黎曼幾何有所掌握，在此介紹一些微分幾何的基本概念。

在平直空間中的常微分為 $\partial_\nu V^\mu$ ，而張量在座標轉換下所滿足的關係為

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (\text{A.1})$$

但

$$\begin{aligned} \partial'_\nu V'^\mu &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \partial_\beta V^\lambda + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \right] V^\lambda \end{aligned}$$

多出了

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \right] V^\lambda$$

所以 $\partial_\nu V^\mu$ 並不是一個張量，因此，在manifold上我們需要對微分有更好的定義。

考慮流形(manifold) M 上的兩個向量分別為 $T_p(M)$ 及 $T_q(M)$ 上的一個 element。其中

$T_q(M)$: M 上 q 點的切空間(tangent space)

$T_p(M)$: M 上 p 點的切空間

要對向量在流形上作微分，得先將兩個向量平移到M上同一點。
 若 $T_q(M)$ 上的向量為 $V(x^\alpha + \epsilon t^\alpha)$ 且 $T_p(M)$ 上的向量為 $V(x^\alpha)$ ，將 $V(x^\alpha + \epsilon t^\alpha)$ 平移到 $T_p(M)$ 上記為 $V'(x^\alpha + \epsilon t^\alpha) = V_{\parallel}(x^\alpha)$ 。

定義共變微分為

$$D_t V(x^\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V_{\parallel}(x^\alpha + \epsilon t^\alpha) - V(x^\alpha)}{\epsilon} \quad (\text{A. . 2})$$

定義

$$V_{\parallel}(x^\alpha) = V(x^\alpha + \epsilon t^\alpha) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x^\alpha) V^\gamma(\epsilon t^\beta) \quad (\text{A. . 3})$$

其中

$$\epsilon t^\beta = dx^\beta$$

若我們將 $V(x^\alpha + \epsilon t^\alpha)$ 展開至1st - order

$$\Rightarrow V(x^\alpha + \epsilon t^\alpha) \approx V^\alpha(x) + \partial_\beta V^\alpha(\epsilon t^\beta) = V^\alpha(x) + \partial_\beta V^\alpha dx^\beta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{\parallel}^\alpha(x) - V^\alpha(x) &= V^\alpha(x) + \partial_\beta V^\alpha dx^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma dx^\beta - V^\alpha(x) \\ &= (\partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma) dx^\beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_\beta V^\alpha = \lim_{dx^\beta \rightarrow 0} \frac{(\partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma) dx^\beta}{dx^\beta}$$

由此我們就可以得到共變微分為

$$D_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma \quad (\text{A. . 4})$$

其中 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ 為connection，用來定義流形上的向量平移。

則我們可以推廣至對 (k, l) type tensor的共變微分

$$D_\sigma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \partial_\sigma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k} + \dots - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} - \dots \quad (\text{A. . 5})$$

若依照共變微分的定義，我們要求其度規取微分為零，則

$$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{A. . 6})$$

$$D_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0 \quad (\text{A. . 7})$$

$$D_\lambda g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0 \quad (\text{A. . 8})$$

$$\Rightarrow (1.6) - (1.7) - (1.8), \text{ 且 } \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} = 0$$

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} = 0 \quad (\text{A. . 9})$$

$$\Rightarrow (1.9) \times g^{\sigma\rho} +$$

$$\Rightarrow g^{\sigma\rho}(\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho}) = 0$$

$$\text{其中 } 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g^{\sigma\rho} g_{\lambda\rho} = 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta_\lambda^\sigma = 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$$

$$\Rightarrow 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

得connection為

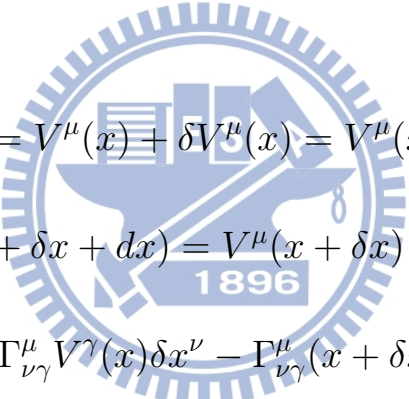
$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (\text{A. . 10})$$

Appendix B.

Curvature Tensor

定義完流形上的微分後，我們可以更進一步的討論空間彎曲的程度。首先我們考慮的為一向量由X點經二條不同的路徑(1)、(2)平移到同一個終點時會否是同一個向量。

along path 1:


$$\begin{aligned} V^\mu(x + \delta x) &= V^\mu(x) + \delta V^\mu(x) = V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\gamma}^\mu V^\gamma(x) \delta x^\nu \\ \Rightarrow V^\mu(x + \delta x + dx) &= V^\mu(x + \delta x) + \delta V^\mu(x + \delta x) \\ &= V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\gamma}^\mu V^\gamma(x) \delta x^\nu - \Gamma_{\nu\gamma}^\mu(x + \delta x) V^\gamma(x + \delta x) dx^\nu \end{aligned}$$

若我們對 $\Gamma_{\nu\gamma}^\mu(x + \delta x)$ 作展開取至1st - order

$$\Rightarrow \Gamma_{\nu\gamma}^\mu(x + \delta x) = \Gamma_{\nu\gamma}^\mu(x) + \partial_\eta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu(x) \delta x^\eta$$

$$\Rightarrow V^\mu(x + \delta x + dx) =$$

$$V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\gamma}^\mu V^\gamma \delta x^\nu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu V^\alpha dx^\beta - (\partial_\eta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu) V^\alpha \delta x^\eta dx^\beta + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha V^\gamma \delta x^\nu dx^\beta$$

along path 2 :

$$V^\mu(x + dx + \delta x) =$$

$$V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\gamma}^\mu V^\gamma dx^\nu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu V^\alpha \delta x^\beta - (\partial_\eta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu) V^\alpha dx^\eta \delta x^\beta + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha V^\gamma dx^\nu \delta x^\beta$$

$$\Rightarrow \Delta V^\mu = V_{\parallel}^{\mu(1)} - V_{\parallel}^{\mu(2)} = (\partial_\eta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\eta\alpha}^\mu + \Gamma_{\eta\nu}^\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\nu - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\eta\alpha}^\nu) V^\alpha dx^\eta dx^\beta$$

則我們可以定義

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\eta} \equiv (\partial_\eta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\eta\alpha}^\mu + \Gamma_{\eta\nu}^\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\nu - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\eta\alpha}^\nu) \quad (\text{B. . 1})$$

$R^\mu{}_{\alpha\beta\eta}$ 即為 Riemann Curvature Tensor

$$\Rightarrow \Delta V^\mu = R^\mu{}_{\alpha\beta\eta} V^\alpha dx^\eta \delta x^\beta$$

則當 $R^\mu{}_{\alpha\beta\eta} = 0$ 時， $\Delta V^\mu = 0$ ，知流形為平坦(flat)。而 $R^\mu{}_{\alpha\beta\eta}$ 的意義為衡量空間彎曲的程度。

有了 Riemann Curvature Tensor，我們可以另外定義 Ricci Curvature Tensor

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (\text{B. . 2})$$

Scalar Curvature

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{B. . 3})$$

Riemann Curvature Tensor 的一些性質

(1)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

(2)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

(3)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

(4)

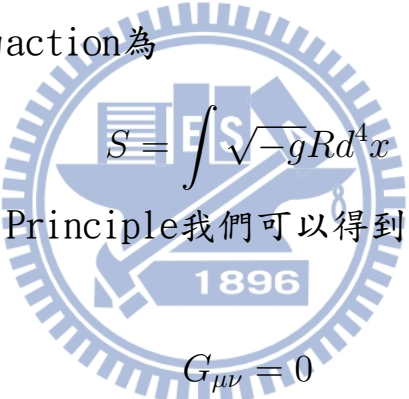
$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

Appendix C.

Einstein Equation

現代宇宙學的基礎建立在廣義相對論上，而廣義相對論中最重要的莫過於Einstein equation。有別於Einstein的想法，Hilbert另闢蹊徑地推導出了Einstein equation。

Hilbert猜測重力場的action為


$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x$$

則根據Least Action Principle我們可以得到真空中的Einstein equation

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C.1})$$

其中 $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ ，即為Einstein tensor

而Einstein認為，具有質量的物體會改變時空的曲率，因此在方程式的右邊擺上了energy-momentum tensor項，則

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (\text{C.2})$$

即為Einstein equation

常見的幾種energy-momentum模型

(I). Dust

$$T^{\mu\nu} \equiv n_0 m u^\mu u^\nu$$

n : 粒子密度 m : 粒子質量 u : 4-velocity

(II). Perfect fluid

perfect fluid : 均勻(homogeneous)、均向(isotropy)

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}$$

(III). Electromagnetic Field

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$$

另外，如果我們對Einstein equation取trace

$$g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow -R = T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$$

則我們可以得到Einstein equation的另一個形式為

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T + T_{\mu\nu}$$

(C.3)

Appendix D.

Derivation of Field Equation

對metric變分 $\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = 0$

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \delta(\sqrt{-g}g^{ab}R_{ab}) = \sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + R_{ab}g^{ab}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab}$$

而

$$\ln \det g_{ab} = \text{Tr}(g_{ab}) \quad (\text{D. . 1})$$

$$\Rightarrow \delta \ln \det g_{ab} = \frac{1}{\det g_{ab}} \delta(\det g_{ab}) = \delta \text{Tr}(g_{ab})$$

$$= \text{Tr}\left(\frac{1}{g_{ab}} \delta g_{ab}\right) = \text{Tr}(g^{ab} \delta g^{ab}) = \text{Tr}(-g_{ab} \delta g^{ab})$$

$$\Rightarrow \delta(\det g_{ab}) = \delta g = g \text{Tr}(-g_{ab} \delta g^{ab}) = -g g_{ab} \delta g^{ab}$$

$$\Rightarrow \delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ab} \delta g^{ab}$$

$$\Rightarrow \delta(\sqrt{-g}R_{ab}g^{ab}) = (\delta\sqrt{-g})g^{ab}R_{ab} + \sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab}$$

$$= \sqrt{-g}\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right)\delta g^{ab} + \sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta R_{ab} &= \partial_b(\delta\Gamma_{ca}^c) + (\delta\Gamma_{bd}^c)\Gamma_{ba}^d + \Gamma_{bd}^c(\delta\Gamma_{ca}^d) \\ &\quad - \partial_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - (\delta\Gamma_{cd}^c)\delta_{ba}^d - \Gamma_{cd}^c(\delta\Gamma_{ba}^d)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}D_b\delta\Gamma_{ca}^c &= \partial_b(\delta\Gamma_{ca}^c) + \Gamma_{bd}^c(\delta\Gamma_{ca}^d) - \Gamma_{bc}^d(\delta\Gamma_{da}^c) - \Gamma_{ba}^d(\delta\Gamma_{cd}^c) \\ D_c\delta\Gamma_{ba}^c &= \partial_c(\delta\Gamma_{ba}^c) - \Gamma_{cb}^d(\delta\Gamma_{da}^c) - \Gamma_{ca}^d(\delta\Gamma_{bd}^c) + \Gamma_{cd}^c(\delta\Gamma_{ba}^d) \\ \Rightarrow D_b\delta\Gamma_{ca}^c - D_c\delta\Gamma_{ba}^c &= g^{ba}(D_b\delta\Gamma_{ca}^c - D_c\delta\Gamma_{ba}^c)\end{aligned}$$

$$= D_b(g^{ba}\delta\Gamma_{ca}^c) - D_c(g^{ba}\delta\Gamma_{ba}^c)$$

又

$$\begin{aligned}D_a V^a &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}V^a) \\ \Rightarrow \int \sqrt{-g}D_b(g^{ba}\delta\Gamma_{ca}^c)d^{10}x &= \int \sqrt{-g}D_c(g^{ba}\delta\Gamma_{ba}^c)d^{10}x \\ &= \int \partial_b(\sqrt{-g}g^{ba}\delta\Gamma_{ca}^c)d^{10}x - \int \partial_c(\sqrt{-g}g^{ba}\delta\Gamma_{ba}^c)d^{10}x\end{aligned}$$

變成total derivative的volume integral，可化成在無窮遠處的surface integral $\Rightarrow \delta R_{ab}$ 項會消去

$$\Rightarrow \sqrt{-g}(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R)\delta g^{ab} + \sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab} = \sqrt{-g}(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R)\delta g^{ab}$$

$$\delta(\sqrt{-g}\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi) = \delta(\sqrt{-g}g^{ab}\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial_b\phi)$$

$$= (\delta\sqrt{-g})\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \sqrt{-g}\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial_b\phi\delta g^{ab}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{4} g_{ab} \partial_a \phi \partial^a \phi \right) \delta g^{ab} \\
\delta \left(\sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F^{abc} \right) &= \delta \left(\sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} g^{ad} g^{be} g^{cf} F_{abc} F_{def} \right) \\
&= \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} (\delta \sqrt{-g}) F_{abc} F^{abc} + \sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F_d{}^{bc} \delta g^{cd} \\
&\quad + \sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F_e{}^c \delta g^{cd} + \sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F_f{}^{ab} \delta g^{cf}
\end{aligned}$$

其中 $F_{abc} F_e{}^c \delta g^{be}$, $b \rightarrow a$, $e \rightarrow d$

$$\Rightarrow F_{abc} F_e{}^c \delta g^{be} = F_{bac} F_d{}^c \delta g^{ad} = -F_{abc} F_d{}^c \delta g^{ad} = F_{abc} F_d{}^{bc} \delta g^{ad}$$

同理，我們可以得到

$$F_{abc} F_f{}^{ab} \delta g^{cf} = F_{abc} F_d{}^{bc} \delta g^{ad}$$

而

$$(\delta \sqrt{-g}) \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F^{abc} = \sqrt{-g} \frac{1}{12} e^{\kappa \phi} g_{ab} F_{abc} F^{abc}$$

由此可得metric equation

對scalar field變分， $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$

$$\delta \left(\sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi \right) = \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_a \delta \phi \partial^a \phi + \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \delta \phi$$

其中

$$\sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_a \delta \phi \partial^a \phi = \partial_a \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta \phi \partial^a \phi \right) - \partial_a \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial^a \phi \right) \delta \phi$$

而 $\partial_a \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta \phi \partial^a \phi \right)$ 可化為surface integral消去

且

$$-\partial_a \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial^a \phi \right) \delta \phi = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (D_a \partial^a \phi) \delta \phi$$

$$\Rightarrow \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_a \delta \phi \partial^a \phi = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (D_a \partial^a \phi) \delta \phi$$

同理得

$$\sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \delta \phi = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (D^a \partial_a \phi) \delta \phi = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (D_a \partial^a \phi) \delta \phi$$

$$\Rightarrow \delta \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial_a \phi \partial^a \phi \right) = -\sqrt{-g} (D_a \partial^a \phi) \delta \phi$$

而

$$\delta(\sqrt{-g} V(\phi)) = \sqrt{-g} \delta V(\phi) = \sqrt{-g} \partial_\phi V(\phi) \delta \phi$$

$$\delta \left(\sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F^{abc} \right) = \sqrt{-g} \frac{k}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F^{abc} \delta \phi$$

則我們可以得到scalar field equation

對torsion field變分, $\frac{\delta S}{\delta A_{ab}} = 0$

$$F_{abc} = \partial_a A_{bc} + \partial_b A_{ca} + \partial_c A_{ab} \quad (D..2)$$

A_{ab} 是anti-symmetric tensor

$$\Rightarrow \delta F_{abc} = \partial_a \delta A_{bc} + \partial_b \delta A_{ca} + \partial_c \delta A_{ab}$$

$$\Rightarrow -\delta \left(\sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} F_{abc} F^{abc} \right) = -\sqrt{-g} \frac{1}{6} e^{\kappa \phi} (F_{abc} \delta F^{abc} + F^{abc} \delta_{abc})$$

$$F_{abc} \delta F^{abc} = F_{abc} (\partial^a \delta A^{bc} + \partial^b \delta A^{ca} + \partial^c \delta A^{ab})$$

$$F^{abc} \delta F_{abc} = F^{abc} (\partial_a \delta A_{bc} + \partial_b \delta A_{ca} + \partial_c \delta A_{ab})$$

又

$$F_{abc} \partial^b \delta A^{ca} \Rightarrow a \leftrightarrow b$$

$$\Rightarrow F_{abc} \partial^b \delta A^{ca} = F_{bac} \partial^a \delta A^{cb} = F_{abc} \partial^a \delta A^{bc}$$

同理得

$$\begin{aligned}
 F_{abc}\partial^c\delta A^{ab} &= F_{abc}\partial^a\delta A^{bc} \\
 \Rightarrow F_{abc}\delta F^{abc} &= 3F_{abc}\partial^a\delta A^{bc} \\
 \Rightarrow F^{abc}\delta F_{abc} &= 3F^{abc}\partial_a\delta A_{bc}
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 3F^{abc}\partial_a\delta A_{bc} &= 3F^{abc}g_{ad}g_{be}g_{cf}\partial^d\delta A^{ef} = 3F_{def}\partial^d\delta A^{ef} = 3F_{abc}\partial^a\delta A^{bc} \\
 \Rightarrow -\delta\left(\sqrt{-g}\frac{1}{6}e^{\kappa\phi}F_{abc}F^{abc}\right) &= -\sqrt{-g}e^{\kappa\phi}F_{abc}\partial^a\delta A^{bc} \\
 &= -\partial^a\left(\sqrt{-g}e^{\kappa\phi}F_{abc}\delta A^{bc}\right) + \partial^a\left(\sqrt{-g}e^{\kappa\phi}F_{abc}\right)\delta A^{bc} \\
 &= \sqrt{-g}D^a\left(e^{\kappa\phi}F_{abc}\right)\delta A^{bc} = 0
 \end{aligned}$$

得torsion equation

Appendix E.

Solution of Torsion Field

由torsion equation

$$D_a(e^{\kappa\phi} F^{abc}) = \partial_a(\sqrt{-g}e^{\kappa\phi} F^{abc}) = 0$$

因為 F^{abc} 是anti-symmetric tensor，令

$$F^{abc} = \epsilon^{abcd} T_d$$

其中 ϵ^{abcd} 為Levi-Civita tensor

$$\partial_a(\sqrt{-g}e^{\kappa\phi} \epsilon^{abcd} T_d) = \epsilon^{abcd} \partial_a(e^{-\kappa\phi} T_d)$$

ϵ^{abcd} : Levi-Civita symbol

令 $T_d = e^{-\kappa\phi} \partial_d \chi(t)$ ，則

$$\partial_a(\sqrt{-g}e^{\kappa\phi} \epsilon^{abcd} T_d) = \epsilon^{abcd} \partial_a \partial_d \chi = 0$$

所以 $F^{abc} = \epsilon^{abcd} T_d$ 的假設是合理的。

又

$$T_{ab}^{(\phi)} = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{4} g_{ab} \partial_c \phi \partial^c \phi - \frac{1}{2} g_{ab} V(\phi) \quad (\text{E. . 1})$$

$$T_{ab}^{(F)} = \frac{1}{12} e^{\kappa\phi} (6 F_{apq} F_b{}^{pq} - g_{ab} F_{pqr} F^{pqr}) \quad (\text{E. . 2})$$

而

$$F_{pqr} F^{pqr} = \epsilon_{pqrs} T^s \epsilon^{pqre} T_e = \epsilon_{pqrs} \epsilon^{pqre} e^{-2\kappa\phi} \partial^s \chi \partial_e \chi$$

又 $\epsilon_{pqrs}\epsilon^{pqre} = -6g_s^e$ ，同理

$$F_{apq}F_b^{pq} = \epsilon_{apqr}\epsilon_b^{pqr}T^rT_s = \epsilon_{apqr}\epsilon_b^{pqr}(e^{2\kappa\phi}\partial^r\chi\partial_s\chi)$$

$$\epsilon^{abcd}\epsilon_{cd}^{ef} = -2(g^{ae}g^{bf} - g^{be}g^{af})$$

$$\Rightarrow \epsilon_{apqr}\epsilon_b^{pqs} = \epsilon_{arpq}\epsilon_r^{pq s} = \epsilon_{arpq}\epsilon_{re}^{pq}g^{es}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{apqr}\epsilon_b^{pqs}(e^{-2\kappa\phi}\partial^r\chi\partial_s\chi) = \epsilon_{arpq}\epsilon_{re}^{pq}g^{es}(e^{-2\kappa\phi}\partial^r\chi\partial_s\chi)$$

$$= (-2(g_{ab}g_{re} - g_{ae}g_{rb}))g^{es}\partial^r\chi\partial_s\chi e^{-2\kappa\phi}$$

$$= (-2(g_{ab}g_r^s - g_a^sg_{rb})\partial^r\chi\partial_s\chi)e^{-2\kappa\phi}$$

$$= (-2g_{ab}\partial^s\chi\partial_s\chi + 2\partial_a\chi\partial_b\chi)e^{-2\kappa\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}e^{2\kappa\phi}(6F_{apq}F_b^{pq} - g_{ab}F_{pqr}F^{pqr})$$

$$= \frac{1}{12}e^{-2\kappa\phi}e^{2\kappa\phi}(12\partial_a\chi\partial_b\chi - 6g_{ab}\partial^c\chi\partial_c\chi)$$

$$= \partial_a\chi\partial_b\chi - \frac{1}{2}g_{ab}\partial_c\chi\partial^c\chi$$

則我們由Bianchi identity知

$$D^a G_{ab} = D^a (T_{ab}^{(F)} + T_{ab}^{(\phi)}) = 0 \quad (\text{E. . 3})$$

$$D^a T_{ab}^{(F)} = \frac{1}{12} D^a (e^{\kappa\phi} (6F_{apq} F_b{}^{pq} - g_{ab} F_{apq} F^{apq}))$$

$$= D^a (e^{-\kappa\phi} (\partial_a \chi \partial_b \chi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial_c \chi \partial^c \chi))$$

$$= e^{-\kappa\phi} (-\kappa \partial^a \phi) (\partial_a \chi \partial_b \chi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial_c \chi \partial^c \chi)$$

$$+ e^{-\kappa\phi} D^a (\partial_a \chi \partial_b \chi) - \frac{1}{2} e^{-\kappa\phi} D_b (\partial_c \chi \partial^c \chi)$$

$$D^a T_{ab}^{(\phi)} = \frac{1}{2} (\partial_b \phi) (\frac{1}{6} e^{\kappa\phi} F_{pqr} F^{pqr})$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_b \phi) (e^{-\kappa\phi} \partial_c \chi \partial^c \chi)$$

$$\Rightarrow D^a (T_{ab}^{(F)} + T_{ab}^{(\phi)}) = e^{-\kappa\phi} (D^a \partial_a \chi - \kappa \partial^a \phi \partial_a \chi) (\partial_b \chi) = 0$$

$$\Rightarrow D^a \partial_a \chi - \kappa \partial^a \phi \partial_a \chi = 0$$

可解得torsion field

$$\dot{\chi}(t) = \gamma e^{\kappa\phi - 3\alpha + 6\beta} \quad (\text{E. . 4})$$

Appendix F.

Bianchi Classification

Bianchi type I :

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2$$

Bianchi type II :

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(dx + zdy)^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2$$

Bianchi type III:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1^2(t)(\cosh zdx + \sinh zdy)^2 + a_2^2(t)(\sinh zdx + \cosh zdy)^2) + a_3^2(t)dz^2$$

Bianchi type IV :

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1^2(t)(dx + zdy)^2 + a_2^2(t)dy^2) + a_3^2(t)dz^2$$

Bianchi type V:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2) + a_3^2(t)dz^2$$

Bianchi type VI:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cosh zdx + \sinh zdy)^2 + a_2^2(t)(\sinh zdx + \cosh zdy)^2 + a_3^2(t)dz^2$$

Bianchi type VII:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cos zdx + \sin zdy)^2 + a_2^2(t)(\sin zdx - \cos zdy)^2 + a_3^2(t)dz^2$$

Bianchi type VIII:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cosh z dx - \sinh z \sinh x dy)^2 \\ + a_2^2(t)(\sinh z dx - \cosh z \sinh x dy)^2 + a_3^2(t)(dz + \cosh x dy)^2$$

Bianchi type IX:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cos z dx + \sin z \sin x dy)^2 \\ + a_2^2(t)(-\sin z dx + \cos z \sin x dy)^2 + a_3^2(t)(dz + \cos x dy)^2$$



Appendix G.

Einstein Tensor in Bianchi Type I Space

metric:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2 + d^2(t)\delta_{mn}dx^m dx^n \quad (G. . 1)$$

其中 $m、n = 4 \rightarrow 9$ ，而

$$a_1(t) = e^{\alpha_1(t)}, \quad a_2(t) = e^{\alpha_2(t)}, \quad a_3(t) = e^{\alpha_3(t)}, \quad d(t) = e^{\beta(t)} \quad (G. . 2)$$

Hubble parameter: $H_i(t) = \frac{\dot{a}_i(t)}{a_i(t)} = \dot{\alpha}_i(t)$

$$G_{00} = H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3 + 6(H_1 + H_2 + H_3)\dot{\beta} + 15\dot{\beta}^2 \quad (G. . 3)$$

$$G_{11} = -e^{\alpha_1(t)}(\dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_2^2 + H_3^2 + H_2 H_3 - 6H_1\dot{\beta}^2 + 6\ddot{\beta} + 6(H_1 + H_2 + H_3)\dot{\beta} + 21\dot{\beta}^2) \quad (G. . 4)$$

$$G_{22} = -e^{\alpha_2(t)}(\dot{H}_1 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_3^2 + H_1 H_3 - 6H_2\dot{\beta}^2 + 6\ddot{\beta} + 6(H_1 + H_2 + H_3)\dot{\beta} + 21\dot{\beta}^2) \quad (G. . 5)$$

$$G_{33} = -e^{\alpha_3(t)}(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + H_1^2 + H_2^2 + H_1 H_2 - 6H_3\dot{\beta}^2 + 6\ddot{\beta} + 6(H_1 + H_2 + H_3)\dot{\beta} + 21\dot{\beta}^2) \quad (G. . 6)$$

而因為internal space是對稱的，所以Einstein tensor在internal space的分量皆相同，故只需要知道 G_{44} 就知剩餘的分量

$$G_{44} = -e^{\beta(t)}((\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 + 5\ddot{\beta} + 5(H_1 + H_2 + H_3)\dot{\beta} + 15\dot{\beta}^2) \quad (\text{G. . 7})$$

又

$$\alpha_1(t) = \alpha(t) - 2\sigma_+(t) \quad (\text{G. . 8})$$

$$\alpha_2(t) = \alpha(t) + \sigma_+(t) + \sqrt{3}\sigma_-(t) \quad (\text{G. . 9})$$

$$\alpha_3(t) = \alpha(t) + \sigma_+(t) - \sqrt{3}\sigma_-(t) \quad (\text{G. . 10})$$

且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha$, $\dot{H}_i = \frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i} - \frac{\dot{a}_i^2(t)}{a_i^2} = \ddot{\alpha}_i$, 則我們可以簡化 Einstein tensor 為

$$G_{00} = H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 + 18\dot{\alpha}\dot{\beta} + 15\dot{\beta}^2 \quad (\text{G. . 11})$$

$$G_{11} = -e^{\alpha_1(t)}(\dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_2^2 + H_3^2 + H_2H_3 - 6H_1\dot{\beta}^2 + 6\ddot{\beta} + 18\dot{\alpha}\dot{\beta} + 21\dot{\beta}^2) \quad (\text{G. . 12})$$

$$G_{22} = -e^{\alpha_2(t)}(\dot{H}_1 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_3^2 + H_1H_3 - 6H_2\dot{\beta}^2 + 6\ddot{\beta} + 18\dot{\alpha}\dot{\beta} + 21\dot{\beta}^2) \quad (\text{G. . 13})$$

$$G_{33} = -e^{\alpha_3(t)}(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2 - 6H_3\dot{\beta}^2 + 6\ddot{\beta} + 18\dot{\alpha}\dot{\beta} + 21\dot{\beta}^2) \quad (\text{G. . 14})$$

$$G_{44} = -e^{\beta(t)}(3\ddot{\alpha} + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 + 5\ddot{\beta} + 15\dot{\alpha}\dot{\beta} + 15\dot{\beta}^2) \quad (\text{G. . 15})$$

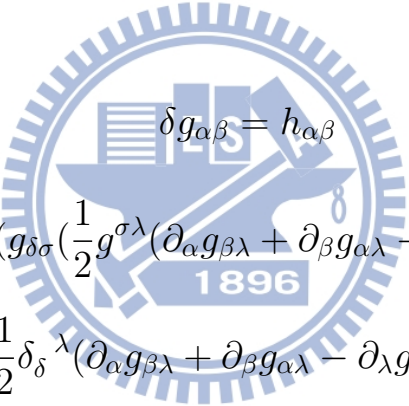
Appendix H.

Proof of Lifshitz Formula

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = g^{\gamma\delta}g_{\delta\sigma}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \delta(g^{\gamma\delta}g_{\delta\sigma}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma})$$

$$\Rightarrow g^{\gamma\delta}g_{\delta\sigma}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = g^{\gamma\delta}\delta(g_{\delta\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}) - g^{\gamma\delta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\delta g_{\delta\sigma}$$

若



$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= g^{\gamma\delta}\delta\left(g_{\delta\sigma}\left(\frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_{\alpha}g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta})\right)\right) - g^{\gamma\delta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}h_{\delta\sigma} \\ &= g^{\gamma\delta}\delta\left(\frac{1}{2}\delta_{\delta}^{\lambda}(\partial_{\alpha}g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta})\right) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}h^{\gamma}_{\sigma} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}g^{\gamma\lambda}(\partial_{\alpha}\delta g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}\delta g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}\delta g_{\alpha\beta}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}h^{\gamma}_{\sigma} \\ &= \frac{1}{2}g^{\gamma\lambda}(\partial_{\alpha}h_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}h_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\alpha\beta}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}h^{\gamma}_{\sigma} \end{aligned}$$

則

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\lambda}(D_{\alpha}h_{\beta\lambda} + D_{\beta}h_{\alpha\lambda} - D_{\lambda}h_{\alpha\beta})$$

$$D_{\alpha}h_{\beta\lambda} = \partial_{\alpha}h_{\beta\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}h_{\rho\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho}h_{\beta\rho}$$

$$D_{\beta}h_{\alpha\lambda} = \partial_{\beta}h_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\rho}h_{\rho\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\rho}h_{\alpha\rho}$$

$$\begin{aligned}
D_\lambda h_{\alpha\beta} &= \partial_\lambda h_{\alpha\beta} - \Gamma_{\lambda\alpha}^\rho h_{\rho\beta} - \Gamma_{\lambda\beta}^\rho h_{\alpha\rho} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} (D_\alpha h_{\beta\lambda} + D_\beta h_{\alpha\lambda} - D_\lambda h_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} (\partial_\alpha h_{\beta\lambda} + \partial_\beta h_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta} - 2\Gamma_{\beta\alpha}^\rho h_{\rho\lambda}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} \gamma_\lambda (\partial_\alpha h_{\beta\lambda} + \partial_\beta h_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta}) - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho g^{\gamma\lambda} h_{\rho\lambda}
\end{aligned}$$



Bibliography

- [1] W. F. Kao, "Torsion, compactification, and inflation" ,
Phys. Rev. D 47, 3639(1993)
- [2] ChiaMing Chang, W. F. Kao, Ing-Chen Lin, "Stability
analysis of the Lorentz Chern-Simons expanding
solutions", Phys. Rev. D 84, 063014(2011)
- [3] M. Grleiser and J. A. Stein-Schabes , "Classical
cosmologies from ten-dimensional supergravity" , Phys.
Rev. D 34 , 1739(1986)
- [4] Sean M. Carroll , "Spacetime and Geometry: An Introduction
to General Relativity" , Addison Wesley, Boston,
Massachusetts (2004), p113-121 , p333-337
- [5] J. A. Stein-Schabes and M. Gleiser , "Einstein-Kalb-Ramond
Cosmology" , Phys. Rev. D 34, 3242(1986)
- [6] Edward W. Kolb and Michael S. Turner , "The Early
Universe" , Westview Press, New York , 4th edition (1990),
p261-270 , p12-16
- [7] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec, and R. Rohm,
"Heterotic String" , Phys. Rev. Lett. 54, 502 (1985)
- [8] William J. Marciano , "Time Variation of the Fundamental
"Constants" and Kaluza-Klein Theories" , Phys. Rev. Lett.
52, 489(1984)
- [9] T. Padmanabhan , "Gravitation, Foundations and Frontiers" ,
Cambridge University Press, New York, 1st edition (2010),
p466-474

- [10] E. W. Kolb, D. Lindley, and D. Seckel, “More dimensions — Less entropy” , Phys. Rev. D 30, 1205(1984)
- [11] S. Bonometto , V. Gorini , U. Moschella , “Modern Cosmology” , Academic Press,Utah , First edition (2003), p86-88
- [12] Barton Zwiebach , “A First Course in String Theory” , Cambridge University Press, New York, 2nd Edition(2004), p6-11 , p356-362
- [13] E. Alvarez, “Superstring Cosmology” , Phys. Rev. D 31, 418(1985)
- [14] R. B. Abbott, S. M. Barr, and S. D. Ellis, “Kaluza-Klein Cosmologies and inflation” Phys. Rev. D 30,720 1984
- [15] Alan Guth , “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems” , Phys. Rev. D 23, 347-356(1981)
- [16] Steven Weinberg , “Cosmology” , Oxford University Press, New York (2008), p34-45 , p59-65
- [17] Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder , “An Introduction To Quantum Field Theory” , Westview Press, New York , Reprint edition (1995) , p781-791
- [18] Michael Kalb and P. Ramond , “Classical direct interstring action” , Phys. Rev. D 9,2273(1974)
- [19] John D. Barrow and J. Stein-Schabes , “Kaluza-Klein mixmaster universes” , Phys. Rev. D 32,1595(1985)
- [20] 張家銘, 林英程 , private communication