

# 國立交通大學

理學院科技與數位學習學程  
碩士論文

利用波的干涉研究超晶格與碎形圖案

Investigation of superlattice and fractal patterns  
with wave interference

研究生：陳錦玫

指導教授：陳永富 教授

中華民國 101 年 6 月

利用波的干涉研究超晶格與碎形圖案

Investigation of superlattice and fractal patterns with wave interference

研究生：陳錦玫

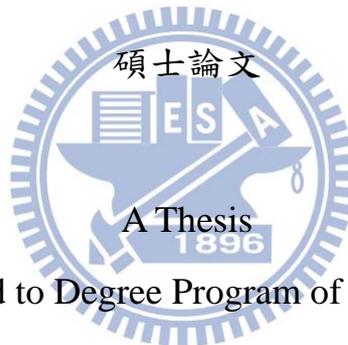
Student : Chin-Mei Chen

指導教授：陳永富

Advisor : Yung-Fu Chen

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程



Submitted to Degree Program of E-Learning  
College of Science

National Chiao Tung University

In partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2012

Husinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年六月

# 利用波的干涉研究超晶格與碎形圖案

研究生:陳錦玫

指導教授:陳永富教授

國立交通大學理學院科技與數位學習學程

## 摘 要

利用不同方向的平面波疊加，可以產生各式各樣的美麗圖案，而本論文主要研究的圖案為超晶格及碎形晶格。平行光通過等距分佈在光罩圓環上的孔洞可形成單一晶格或準晶格圖案，在原本的孔洞旁各增加一個夾相同角度的孔洞，形成的圖形即為超晶格。以圓環上原本的孔洞為中心，將孔洞分布在較小半徑的圓環上，使雷射光照射其上干涉疊加後所產生的圖案即為二層碎形晶格，依此類推出多層的碎形晶格圖案。本論文將利用數學軟體-Mathcad 模擬干涉圖形，並設置雷射光學實驗產生干涉圖案，理論與實驗圖形兩廂吻合。

# Investigation of superlattice and fractal patterns with wave interference

Student : Chin-Mei Chen

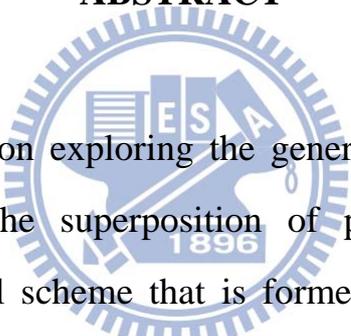
Advisor : Dr. Yung-Fu Chen

Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

## ABSTRACT

The logo of National Chiao Tung University is a circular seal. It features a central shield with a book and a torch. The letters 'ES' are on the left and 'A' is on the right. Below the shield is the year '1896'. The entire seal is surrounded by a gear-like border.

The thesis is focused on exploring the generation of various superlattice and fractal patterns via the superposition of plane waves with different directions. An experimental scheme that is formed with a collimated light to illuminate a mask with multiple apertures regularly distributed on a ring is employed to generate the crystal and quasicrystal patterns. Furthermore, we add a hole next to every original hole on the ring to experimentally generate the superlattice patterns. It is also found that the second floor of the fractal patterns can be generated with laser light to illuminate the mask with multiple apertures distributed on a ring of smaller radius which the original holes as its center. Finally, the same method is exploited to generate the multi-layered fractal patterns.

## 誌 謝

很開心自己選擇了交大理學院碩士在職專班就讀，更高興可以跟著陳永富教授的實驗室做研究。在這兩年中，從交大所開設的課程中學習到很多專業上的知識，在陳永富老師的實驗室裡更是學習到許多有關研究工作方面的知識及所需要具備的態度與精神。感謝陳永富老師不僅是讓我在物理專業上的知識的更加紮實，老師的人生經驗分享更是使我收獲良多，開啟很多往後生活及教學上的智慧；也感謝梁興弛學長在實驗的進行、理論模擬軟體的應用以及論文寫作上給予極大的指導與協助；還有感謝實驗室裡其他的學長姐們不時給予的指導協助與關懷，很榮幸很開心自己是這個實驗室的一員。最後感謝專班的同學們，你們讓我過了快樂又充實的二年，能與你們一起學習成長很棒，這段日子會在我的記憶中永存且懷念。

# 目 錄

中文摘要	.....	i
英文摘要	.....	ii
誌謝	.....	iii
目錄	.....	iv
圖表目錄	.....	v
一、	緒論.....	1
1.1.	研究動機.....	1
1.2.	本論文結構.....	3
二、	自然科學中的圖騰.....	4
2.1.	準晶格圖騰(Quasi crystal).....	4
2.2.	超晶格圖騰(Super lattice).....	9
2.3.	碎形圖騰(Fractal).....	11
三、	二維超晶格圖騰之分析與產生.....	16
3.1.	二維超晶格的理論模式.....	22
3.2.	光學干涉實驗架構.....	23
3.3.	實驗結果與討論.....	24
3.4.	結論.....	32
四、	三維超晶格圖騰之分析與產生.....	34
4.1.	三維超晶格的理論模式.....	34
4.2.	光學干涉實驗架構.....	36
4.3.	實驗結果與討論.....	37
4.4.	結論.....	43
五、	碎形晶格圖騰之分析與產生.....	44
5.1.	二層碎形晶格的理論模式.....	45
5.2.	二層碎形晶格的實驗結果與討論.....	48
5.3.	多層碎形晶格的理論模式.....	55
5.4.	結論.....	60
六、	結論與未來展望.....	61
參考文獻	.....	62

## 圖表目錄

圖 1.1	以水為媒介的干涉圖騰.....	2
圖 1.2	以沙為媒介的干涉圖騰.....	2
圖 2.1	3、4、6 重對稱示意圖.....	5
圖 2.2	自然界 Quasi-crystal 礦物圖與分子結構圖.....	7
圖 2.3	典型對稱晶格模擬圖樣.....	8
圖 2.4	各種高對稱性的準晶格模擬圖樣.....	8
圖 2.5	2 組分布在六角形頂點上的波源.....	9
圖 2.6	超晶格-I 干涉圖形.....	10
圖 2.7	分佈在內外二層六角形上的波源.....	10
圖 2.8	超晶格-II-干涉圖形.....	10
圖 2.9	美麗的海岸線.....	12
圖 2.10	蕨葉碎形與樹枝碎形.....	12
圖 2.11	精確自相似圖集.....	13
圖 2.12	半自相似(曼德布拉特圖集).....	14
圖 3.1	海更士原理及繞射現象示意圖.....	16
圖 3.2	平面波在空間中行進之示意圖.....	18
圖 3.3	光罩上 3 對稱孔洞分佈圖.....	19
圖 3.4	各種晶格及準晶格結構.....	20
圖 3.5	多增加一相對角度孔洞之光罩.....	23
圖 3.6	實驗架構.....	24
圖 3.7	3 個孔洞之光罩.....	25
圖 3.8	3 個光源干涉實驗、理論圖案.....	26
圖 3.9	3 對稱孔洞示意圖.....	27
圖 3.10	3 對稱超晶格之實驗、理論圖案.....	27
圖 3.11	4 對稱孔洞示意圖.....	28
圖 3.12	4 對稱晶格與超晶格實驗、理論圖案.....	28
圖 3.13	5 對稱孔洞示意圖.....	29
圖 3.14	5 對稱超晶格之實驗、理論圖案.....	30
圖 3.15	6 對稱孔洞示意圖.....	31
圖 3.16	6 對稱超晶格之實驗、理論圖案.....	31
圖 4.1	光罩孔洞.....	34
圖 4.2	實驗架構.....	37
圖 4.3	中間開孔的 3 對稱夾 $10^\circ$ 之實驗、理論 2D 及 3D 圖案...	39
圖 4.4	中間開孔的 3 對稱夾 $15^\circ$ 之實驗、理論 2D 及 3D 圖案...	40
圖 4.5	中間開孔的 3 對稱夾 $20^\circ$ 之實驗、理論 2D 及 3D 圖案...	41

圖 4.6	中間開孔的 3 對稱夾 $30^\circ$ 之實驗、理論 2D 及 3D 圖案...	42
圖 5.1	分形樹.....	45
圖 5.2	單層孔洞位置.....	46
圖 5.3	3 對稱二層碎形式孔洞位置.....	47
圖 5.4	2、4、5 對稱的二層碎形式孔洞位置分佈.....	48
圖 5.5	實驗架構.....	49
圖 5.6	2 對稱碎形晶格理論、實驗圖.....	50
圖 5.7	3 對稱碎形晶格理論、實驗圖.....	51
圖 5.8	4 對稱碎形晶格理論、實驗圖.....	51
圖 5.9	5、8、9 對稱碎形晶格理論、實驗圖.....	52
圖 5.10	2 對稱 $Z_T$ 理論圖.....	54
圖 5.11	3 對稱 $Z_T$ 理論圖.....	54
圖 5.12	4 對稱 $Z_T$ 理論圖.....	54
圖 5.13	三層碎形式孔洞位置.....	55
圖 5.14	三層碎形式孔洞位置放大圖.....	55
圖 5.15	3 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形.....	57
圖 5.16	2 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形.....	58
圖 5.17	4 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形.....	58
圖 5.18	5 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形.....	58
圖 5.19	2 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形.....	59
圖 5.20	3 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形.....	59
圖 5.21	4 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形.....	59
圖 5.22	5 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形.....	59

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

美麗多變的圖案一直能緊緊捉住萬生萬物目光，也是廣為人們所深入研究探索其形成原因。小時候玩吹泡泡，總是被肥皂泡膜上的七彩顏色吸引著目光，到了中學才知道它的成因來自於光的干涉；1803年，楊格(Thomas Young) 第一次以雙狹縫干涉(double slit interference) 實驗證實光的波動性，也得到雙狹縫的干涉圖形為明暗相間的直條紋，若以白光進行干涉，就可產生漂亮七彩相間的直條紋。使光通過二個小縫(孔)可產生直條紋，那麼如果讓光通過很多的小縫(孔)，所產生的圖案又會是如何？小縫(孔)的數目、排列方式又會如何影響著圖案的顯現？



科學家做過很多關於波干涉的實驗，如利用液體(圖 1.1)或沙子(圖 1.2)為介質，將其放在一穩定垂直振盪的振動體表層上，振動體垂直振盪產生平面波，而這些沙子或液體介質會因其振盪而產生移動而形成特殊排列圖騰；改變振動體的振盪頻率，就可以使其介質的排列出現各種不同的漂亮圖案。自然界中存在著很多「波」，如水、光、甚至是電子、中子…等等的都具有波動性，它們的行為都可以用一個微分方程來描述；量子力學中的薛丁格方程式，其方程式的解就是一個波函數，因為薛丁格的方程式是線性微分方程式，所以可以利用波

函數的疊加(*superposition*)得到相同頻率下的不同干涉圖案。

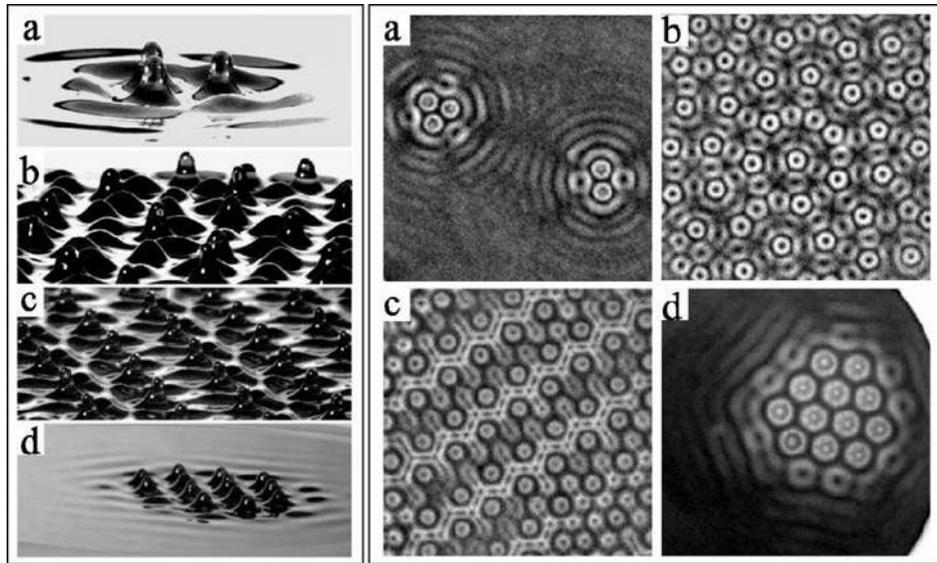


圖 1.1 以水為媒介的干涉圖騰



圖 1.2 以沙為媒介的干涉圖騰

而本論文的主要工作分為兩部分：其一是研究平面波的疊加所產生的干涉圖案，把理論式子輸入數學軟體 *Mathcad* 中，將其疊加後的圖像描繪出來；另一工作是以具有高度穩定性及同調性良好的雷射

光，照射在一個能產生多條光束的光罩板上，此光罩板在精密的鑿製下分佈許多孔洞，孔洞規律排列在一虛擬的圓上，深入探究各種不同數目、不同排列的孔洞所產生的各式各樣的光波干涉圖騰、其干涉圖騰變化的維度(二維或三維)、其干涉圖騰的變化是否具有週性性，因而得到一連串的波干涉圖騰集，並將實驗結果與數學軟體 Mathcad 模擬出的干涉圖形兩相對照比較。

最後更期待可以將本論文的實驗結果，融入筆者自己本身的中學教學課程中，更希望藉由美麗的光干涉圖騰集引發學生學習高中物理光學的興趣。



## 1.2 本論文結構

本論文第二章主要在介紹自然科學中的圖騰，包含了晶格、準晶格圖騰、超晶格圖騰以及碎形晶格圖騰。第三章探討二維超晶格的理論模式以及利用光學實驗干涉出超晶格圖騰並加以分析。第四章探討三維超晶格的理論模式以及利用光學實驗干涉出超晶格圖騰並加以分析。第五章則針對碎形晶格圖形進行理論分析與實驗圖騰討論。第六章為結論及未來可發展的方向。

## 第二章 自然科學中的圖騰

在我們的生活周遭充滿了各式各樣的圖騰，小時候從萬花筒中看到了因為一個微小角度的轉動，就讓圖形出現了大轉變；在伊斯蘭教的建築、地毯、壁畫中，也看到了很多豐富的圖樣；在自然界很多生物似乎因應著某種生存法則，產生了不同的圖騰，如花瓣的疊序、葉子生成的排序、鳳梨的外皮鱗片、雛菊花冠的排列、蜻蜓的翅膀紋路、鸚鵡螺的紋路……等都是有趣且有序的圖騰；而不管是人工合成或天然的礦物中，也發現很多化合物、合金的晶格排列一樣充滿了多變卻也有序的圖樣。在這章節中我們將介紹幾種自然科學中常見的圖騰。



### 2.1 準晶格圖騰(*Quasi crystal*)

在自然界中有許多不同的礦物，而他們的晶格排列可區分為無結晶形、準結晶形及結晶形—無結晶形晶格的原子排列是混雜不規則的，它們不具有垂直及平行對稱及旋轉對稱的特性；結晶形晶格的原子排列是有垂直及平行對稱的，它的結構可以以同樣的原子或原子團規則重複排列來表示；準結晶格的原子排列則是具有旋轉對稱但不具有垂直及平行對稱的特性。一般典型的晶格，是指具有重覆性長程且有序的排列，其經由平移對稱或旋轉對稱操作後，仍可得到自己本身的晶格圖樣，典型晶格只有 2 重、3 重、4 重及 6 重對稱。所謂的平

移對稱就是指平行移動某部分晶格一段距離後，仍可回復成原本的晶格圖樣；所謂的旋轉的對稱操作是繞著通過晶格點的軸作旋轉某一角度後可得到自己本身的晶格，2、3、4、6重對稱的晶格，分別是旋轉 $180^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $60^\circ$ 後可得到自己本身的晶格圖樣(圖 2.1)。而準晶格(*Quasi crystal*)具有與晶格相似的重覆性長程有序的排列，但準晶格僅具有晶格的旋轉對稱卻不具有晶格的平移對稱性；不過一般典型晶格只能具有2重、3重、4重及6重旋轉對稱性，但是準晶格可以具有其他重的對稱性，例如5重、7重、8重對稱性或者更高重的對稱性。

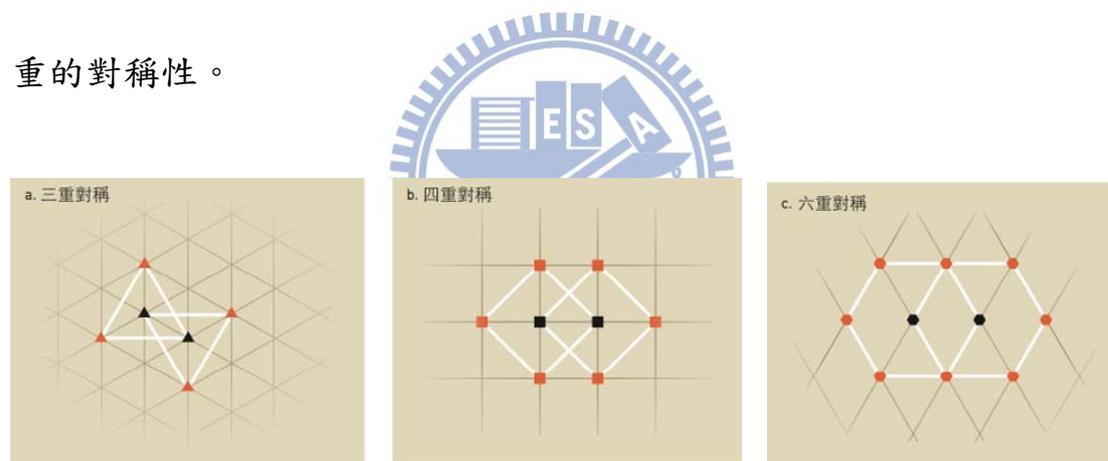


圖 2.1 3、4、6 重對稱示意圖

準晶格的原子具有比原子更精巧且長程的對稱特性，它的原子的位置都分佈在其對稱軸上，可以利用具週期性且有無理數比的多個波長來疊加描述[1]，而這種描述法可以產生出各式各樣不同的 *Quasi-crystal* 圖案，包括其 5、7 及更高階旋轉對稱圖形。榮獲 2011 年諾貝爾化學獎的丹·舍特曼是第一個正式發表發現準晶體的人，

1984 年他和以色列理工學院的同事在快速冷卻的鋁、錳合金中發現了一種新的金屬相，其電子繞射斑具有明顯的 10 重對稱性，同年 Ishimasa 也在鎳-鉻合金中發現 12 對稱的準晶格圖形[2]。在這之後，有數以百計的準晶體在全球各地的實驗室中被合成。

而在兩個世紀以前，科學家只發現有 2、3、4 與 6 重對稱的晶格存在於礦物中，其他如 5 與 7 重對稱的晶格，甚至於更高階的對稱晶格未在礦物中發現。一直到了 2009 年礦物學上的一篇論文發表才替準晶體是否能在自然條件下形成提供了證據：Peter Lu 等人在俄羅斯的哈吐卡 (*Khatyrka*) 河的樣本中之一塊鋁鋅銅礦石上發現了  $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$  組成的準晶體顆粒，具有十重對稱的繞射圖樣(圖 2.2)，和實驗室中合成的一樣[1]，這樣的結構第一次在自然界中被發現，從此也開啟了準晶格的探測方向。

而光波的干涉疊加也可以產生典型的晶格和準晶格的圖騰，其原理類似全像微影技術，皆是利用多個光源去干涉，再將其以定量的角度旋轉，產生了多個干涉平面波，其疊加後強度顯像在接受器上[3]，故多重光束干涉技術(*Multi-beam interference technique*)[4]常被用來產生光學中各種具有週期結構的晶格圖案及準週期結構的準晶格圖案。圖 2.3、圖 2.4 就是利用波函數去描述平面波的干涉疊加，並且以數學軟體 *Mathcad* 模擬描繪出各式各樣的典型圖案，圖中的  $q$  表

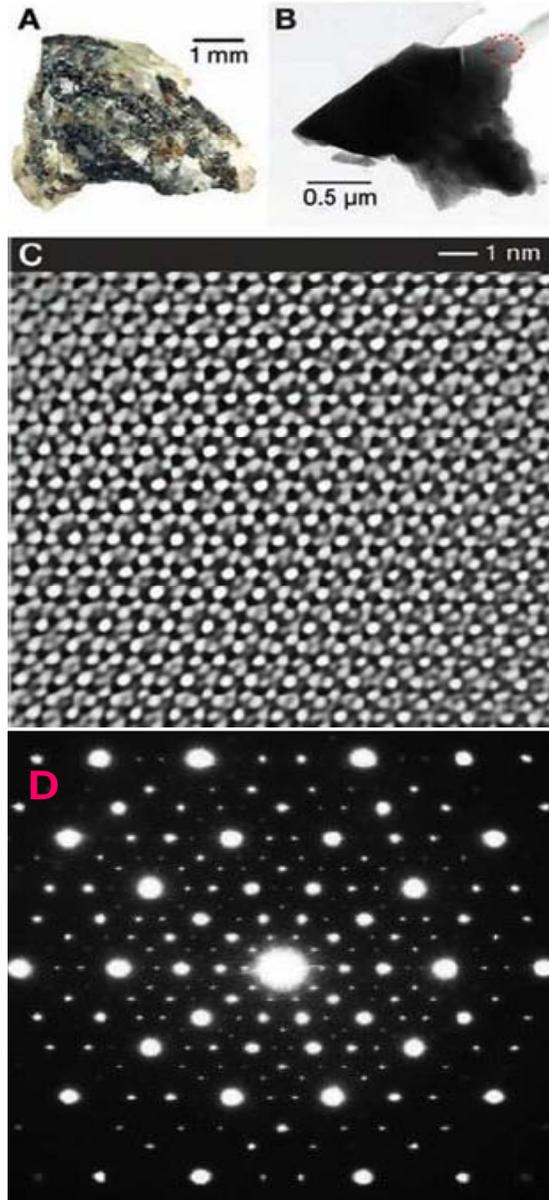


圖 2.2 (A) $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$  礦物原貌 (B)純  $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$  礦物  
(C)穿透式電子顯微鏡測量圖 (D)X-射線粉末繞射測量圖

示為利用幾個等分的平面波去疊加；圖 2.3 為  $q=3$ 、4 與 6 重對稱的晶格圖案；而圖 2.4 為  $q=5$ 、7、8、16、21 與 30 等較高重對稱性的準晶格圖樣。我們將在後面章節有詳細的理論推導式子來說明利用波函數來描述的平面波干涉疊加。

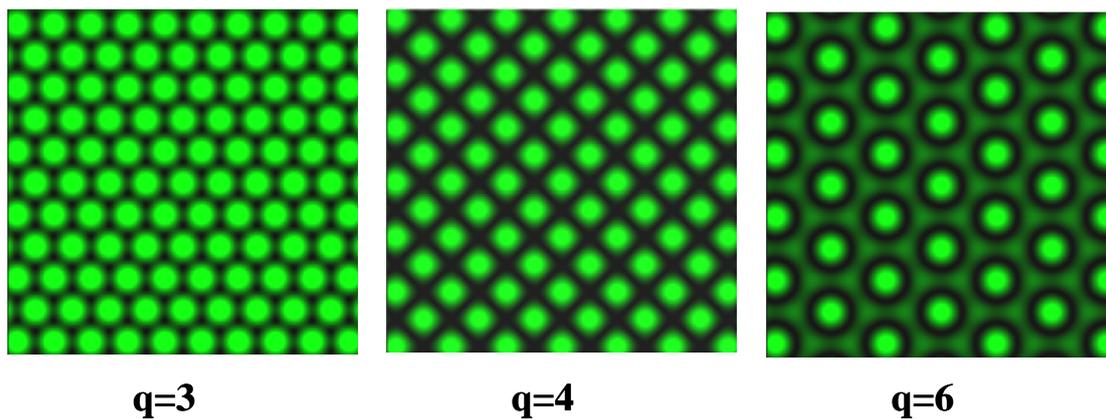


圖 2.3 典型對稱晶格模擬圖樣

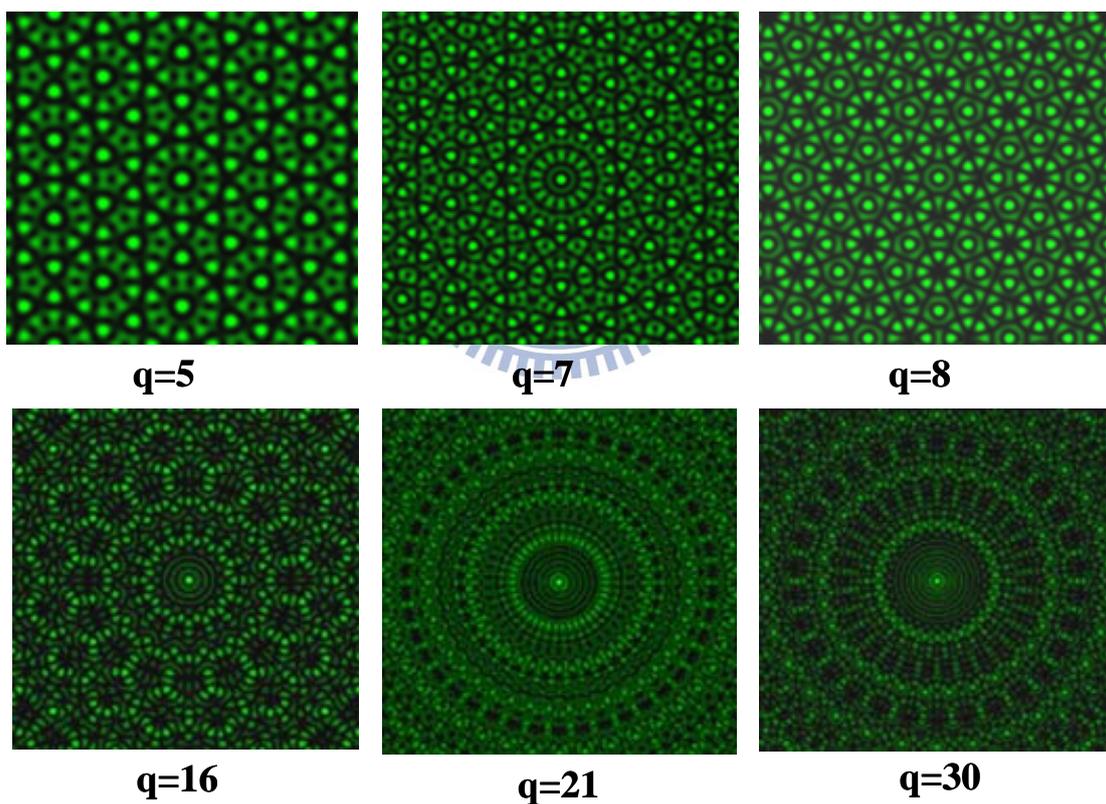


圖 2.4 各種高對稱性的準晶格模擬圖樣

## 2.2 超晶格圖騰(*Super lattice*)

超晶格是指二個或二個以上獨立而晶格相互影響的晶體。1998年 A.Kudrolli、B.Pier、J.P.Gollub 等人發表了在表面波上的超晶格圖形[5]，其圖形大部分是由二個六角晶格相互疊加而形成。第一種超晶格-I 的干涉圖形(圖 2.6)是由 2 組等分佈在六角形頂點上的波源干涉疊加而成，其二組波源振動頻率比 6:7、相鄰 2 波源所夾的相對角度為  $22^\circ$  (圖 2.5)；另一種超晶格-II 的干涉圖形(圖 2.8)是由 2 組分佈在內外二層六角形頂點上的波源干涉疊加而成(圖 2.7)，其二組波源的波長比為  $\sqrt{3}:1$ ，所產生的圖樣具有時間週期性條紋、6 重對稱性；其文章中也提及可以調整波源振幅的大小及振動頻率來形成各式基底的晶格。因此同樣的我們也可利用多重光學束技術，改變不同光束間的夾角，在屏幕上干涉疊加出不同的超晶格圖形，我們另將於後面的章節詳細討論。

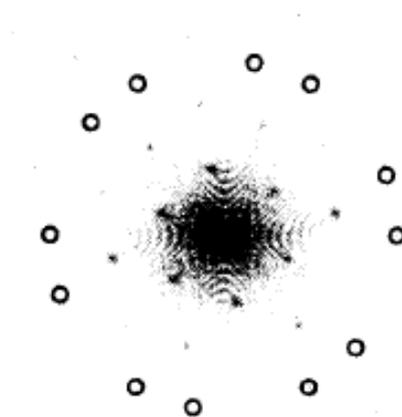


圖 2.5 2 組分布在六角形頂點上的波源

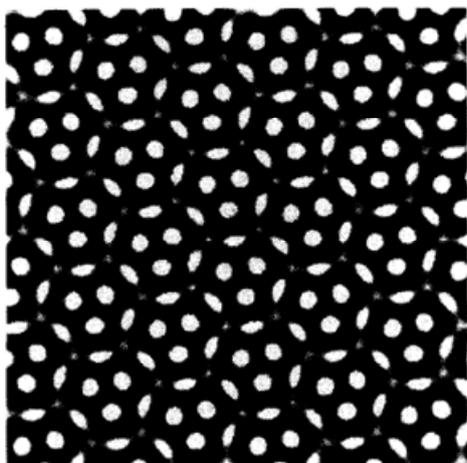


圖 2.6 超晶格-I 干涉圖形

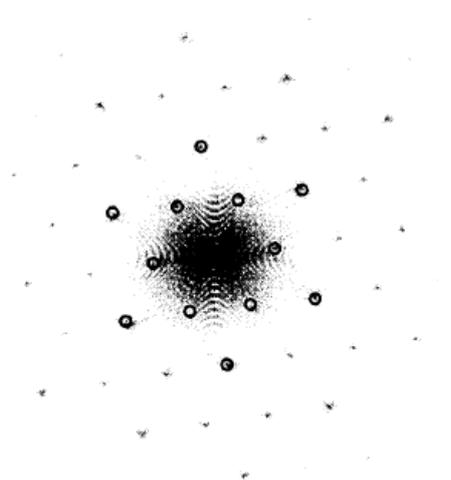


圖 2.7 分佈在內外二層六角形上的波源

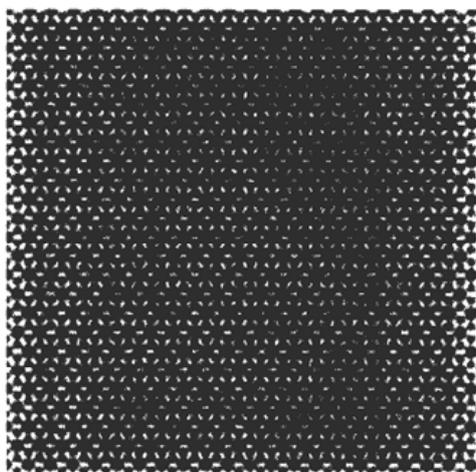


圖 2.8 超晶格-II-干涉圖形

## 2.3 碎形圖騰(*Fractal*)

「碎形」一詞是由曼德布拉特(*Benoit B. Mandelbrot*)所創造 [6,7]，碎形通常被定義為一個粗糙或零碎的幾何形狀，可以分成數個小部分，且每一部分具有自相似的性質；對於碎形結構，自我相似就是尺度一層一層縮小的結構重複性，它們不僅在越來越小的尺度裡重複細節，而且是以某種固定的方式將細節縮小尺寸，造成某種循環重現的複雜現象。碎形在自然界隨處可見，雪花晶體、河流分叉、動物的犄角、螺貝圖、樹幹枝桠、血管分支、綿延的海岸線、雲彩的邊緣以及天空的閃電，這些複雜的形態都是碎形，他們的特徵都是結構上相似的重複性。例如我們把某一海岸線風景照片，如下圖 2.9，裁切其中某部分貼到照片中另一部分，並不會影響我們對此張照片的印象，或是裁切某部分將之放大，也不改變我們對此照片原本的印象。又如同蕨葉碎形與樹枝碎形(圖 2.10)，每個小框其實都是大框的縮小版，如果我們瞪大眼睛看著小框，小框都是由更小的相似細節所構成，而且看著它們，就如同看到該蕨葉或樹枝的整體。碎形在「大尺度」與「小尺度」的自我相似，意味著部分/整體一種革新性的關係，碎形就是不同尺度的自我元素彼此套嵌的呈現。



圖 2.9 美麗的海岸線

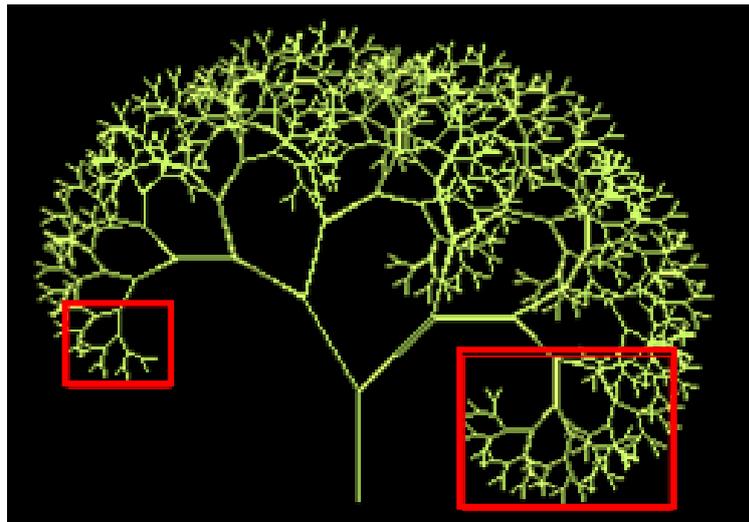
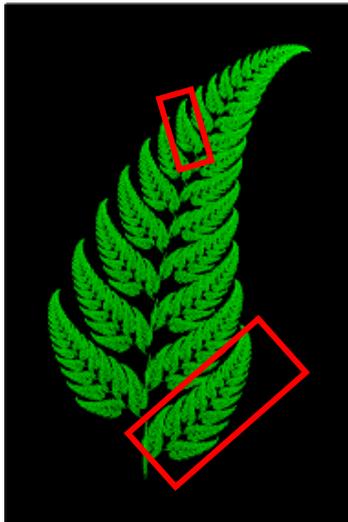


圖 2.10 蕨葉碎形與樹枝碎形

碎形可依據其自相似分類成三種：

(1)精確自相似(*Exact self-similarity*)：

這是最強的一種自相似，碎形在任一尺度下都顯得一樣。由迭代函數系統定義出的碎形通常會展現出精確自相似，如(圖 2.11)中每種圖形去切割成很多小部分，每一部分都與原圖非常相似。

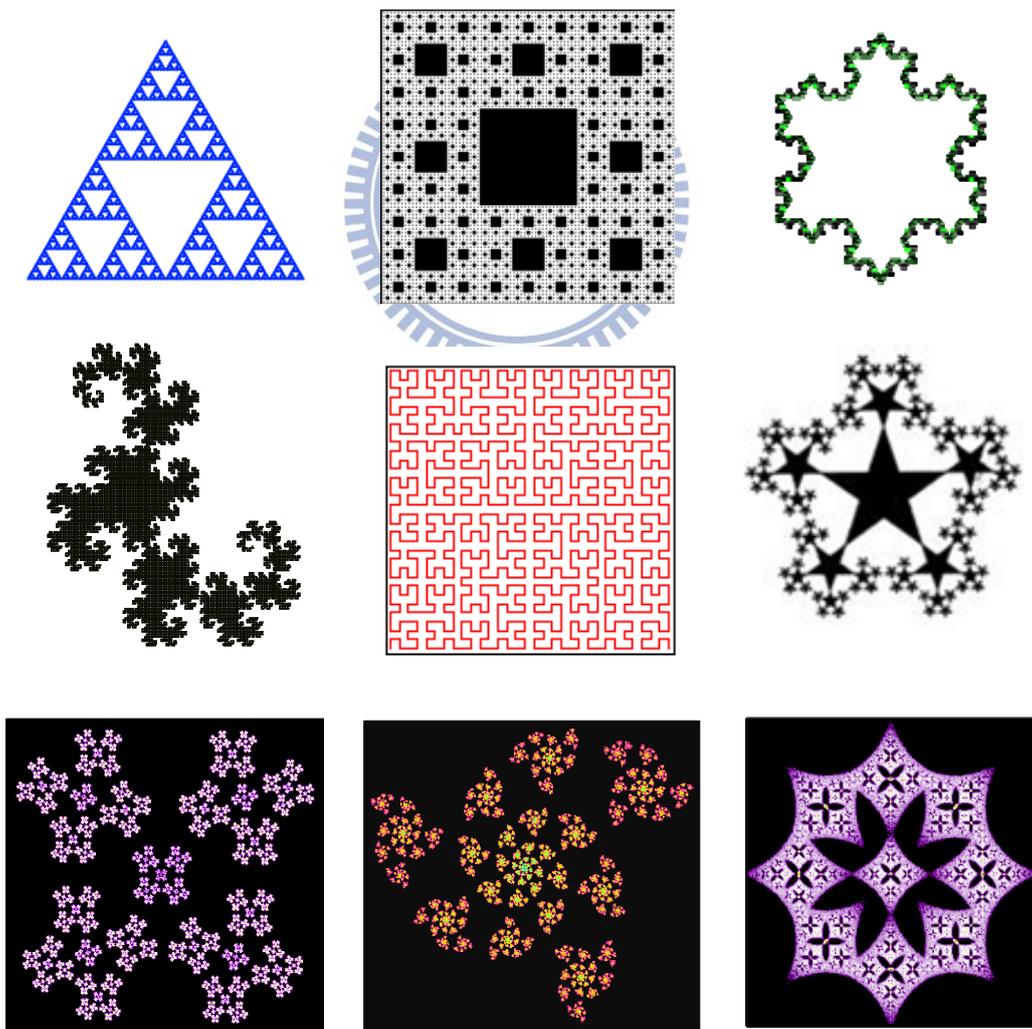


圖 2.11 精確自相似圖集

(2) 半自相似(*Quasi self-similarity*) :

這是一種較鬆的自相似，碎形在不同尺度下會顯得大略(但非精確)相同。半自相似碎形包含有整個碎形扭曲及退化形式的縮小尺寸。由遞迴關係式定義出的碎形通常會是半自相似，如著名的曼德布拉特圖集(圖 2.12)由大尺度一直 zoom in 進入小尺度裡，會發現其內也包含了精細的圖形，不同尺度下會有幾組自相似的情形出現，但並非全部都自相似。

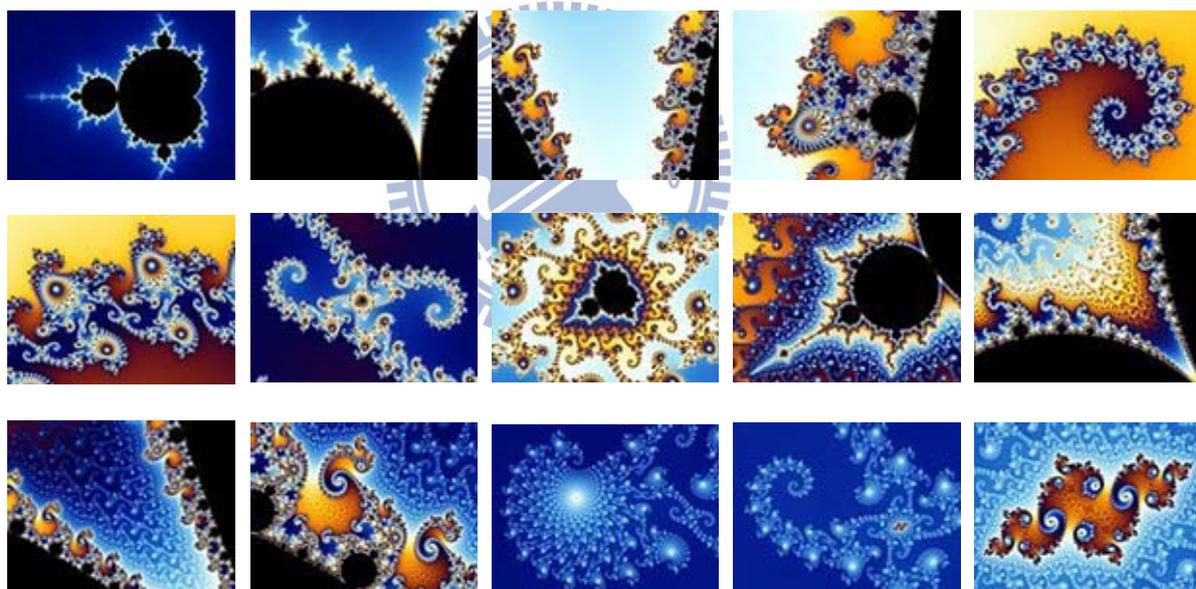


圖 2.12 半自相似(曼德布拉特圖集)

(3) 統計自相似(*Statistical self-similarity*) :

這是最弱的一種自相似，這種碎形在不同尺度下都能保有固定的數值或統計測度。大多數對「碎形」合理的定義自然會導致某一類型

的統計自相似。隨機碎形就是統計自相似的一個例子，如布朗運動的軌跡、綿延的海岸線。

碎形的圖集裡看似零碎粗糙的幾何形狀，但卻具有某種規則有序的相似性，那麼我們希望可以嘗試利用多重光束干涉技術，設計雷射光不同的入射的位置、數目，使其干涉疊加出如同碎形般自相似的圖案，我們留待於後面的章節詳細討論以雷射光干涉出碎形晶格圖騰的方式及分析其理論模式。



### 第三章 二維超晶格圖騰之分析與產生

波在傳播過程中，如果遇到與其波長大小差不多的障礙物（或孔洞）時，波會明顯偏離原來直線傳播的方向而發生繞射(*diffraction*)。繞射的原理是根據海更士(*Huygens*)原理—下一個波的行為，可以由此刻波前上的點當作新波源推演而出(圖 3.1(a))。當波長愈長、障礙物(或小孔)大小與波長接近時，因相對的波動性顯著，所以容易觀察到其繞射現象。若行進波遇到與波長大小相當或小於波長的物體，則行進波會以此物體的邊界為新波源中心，形成環型波看似繞過此物體繼續前進(圖 3.1(b))；當行進波遇到與波長大小相當或小於波長的孔洞時，則會以此孔洞為中心，形成環型波繼續前進(圖 3.1(c))。

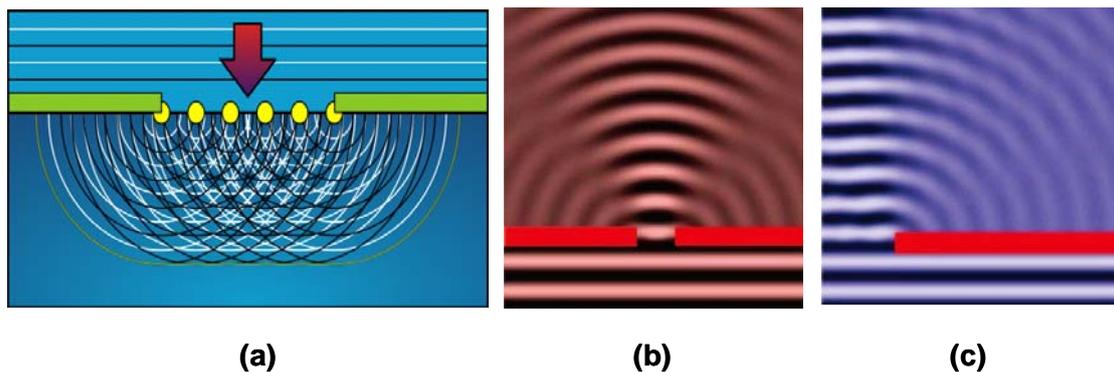


圖 3.1 (a)海更士原理示意圖

(b)行進波遇到小孔時的繞射現象

(c)行進波遇到障礙物時邊緣的繞射現象

干涉的原理是指二個或二個以上的波相遇時所造成的疊加現象，若光束通過二個或以上的小孔時，會各自以小孔為中心，形成環形波繼續前進，在孔後方相遇疊加形成干涉現象。1803 年，楊格(Thomas Young) 第一次以雙狹縫干涉(double slit interference)實驗證實光的波動性，也得到雙狹縫的干涉圖形為明暗相間的直條紋，其條紋寬度的近似式為  $\Delta y = \frac{r\lambda}{d}$ ，其中  $d$  為雙狹縫間距， $r$  為狹縫到屏幕距離， $\lambda$  為光波長。

在 Peter Lu 的『Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture』文獻[8]中有提及，利用數個平面波干涉可以產生出不同晶格、準晶格(Quasi-crystal)圖像，其原理與全像微影技術類似，皆是利用數個光源去干涉，再將其以定量的角度去旋轉，產生數個干涉平面波，而將數個干涉波疊加的強度顯影在接收器上[3]，就可以得到晶格、準晶格的光干涉圖案。

所謂平面波就是一個有固定頻率的波，其波形是振幅固定且平行的無窮平面，其平面與其行進方向向量垂直(圖 3.2)，如同貝賽爾光束(Bessel beam) [9-14]與貝塞爾高斯光束(Bessel Gaussian) [15]其沿著光軸方向具有近似恆定的光照度而光場的橫截面具有窄光束分佈，這兩種光束都具有傳播距離很遠而不發散的特性，所以被稱為無繞射光

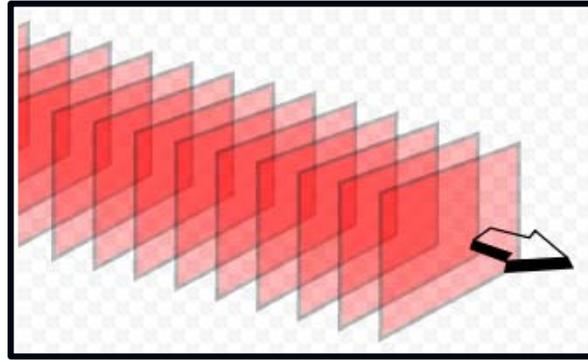


圖 3.2 平面波在空間中行進之示意圖

束(non-diffraction beam)。1987 年，第零階貝塞爾光場分佈之無繞射光束被提出來[9-10]，其特點為此光束在無邊界自由空間中傳播時，與光軸垂直的每個橫向取樣平面的光場照度峰值總能保持相同，橫向光照度分佈非常集中，具有很強的空間侷限性。這種光場在傳播的過程中並不會發生發散的現象，這類光束被稱作無繞射光束。無繞射光束具有主光斑尺寸小的特點，而且具有較高的照度峰值、方向性佳與傳播距離遠等優點。在實際的光學系統中，元件孔徑所產生的邊界條件是存在的，所以無法得到所需的無繞射光束；然而從電腦模擬和實驗結果證明在有限孔徑的條件下，近似貝塞爾分佈的光束仍然可以傳播到相當遠的一段距離並保持無繞射光束的主要特性。我們可以利用幾何軸向錐鏡(axicon)[16]、全像片[17]、圓對稱周期性光柵[18]、繞射式軸向錐鏡[19]、繞射光學元件[20]……等都可用來產生近似的無繞射光束，做為本章波干涉實驗所需要的平面波。

遠場上二維的晶格或準晶格結構的光學場可以用平面波的疊加

來表示，因為一個平面波通過光罩板後變成數個有不同  $K$  值 ( $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ )

的平面波，今我們利用圓柱座標  $(\rho, \phi)$  來描述光罩上孔洞的位置(圖 3.3)

以及屏幕上每一點的位置，將這些平面波疊加後的表示式為：

$$\psi_q(\rho, \phi) = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{i\phi_s} e^{iK_s \cdot \rho} \quad (3.1)$$

其中  $K_s = (K \cos(\frac{2\pi s}{q}), K \sin(\frac{2\pi s}{q}))$ ,  $\rho = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ ， $q$  值指光罩板上的

孔數， $A_s$ ， $K_s$ ，和  $\phi_s$  分別是第  $s$  個平面波的振幅、橫向波向量和初始

相位。為了方便描述，我們將  $\psi_q(\rho, \phi)$  中的一些參數作代表性的假設，

$A_s = \frac{1}{q}$  和  $\phi_s = 0$ ，因此  $\psi_q(\rho, \phi)$  可表示為：

$$\Psi_q(\rho, \phi; K) = \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{s=0}^{q-1} e^{iK\rho \cos(\phi - (2\pi \frac{s}{q}))} \quad (3.2)$$

當  $q=2,3,4,6$  時， $\psi_q$  的強度會呈現出週期性晶格的圖案，這些圖案會

對應到典型的二維晶體結構；其餘  $q$  值， $\psi_q$  的強度所呈現出來的圖案

則會對應到二維準晶體結構。圖 3.4 為利用數學軟體 *Mathcad* 模擬出

來的  $q=3,4,5,6,7,8,16,21,30$  的  $|\Psi_q(\rho, \phi, K)|^2$  的圖案。

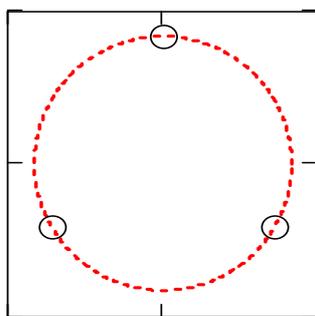


圖 3.3 光罩上 3 對稱孔洞分佈圖

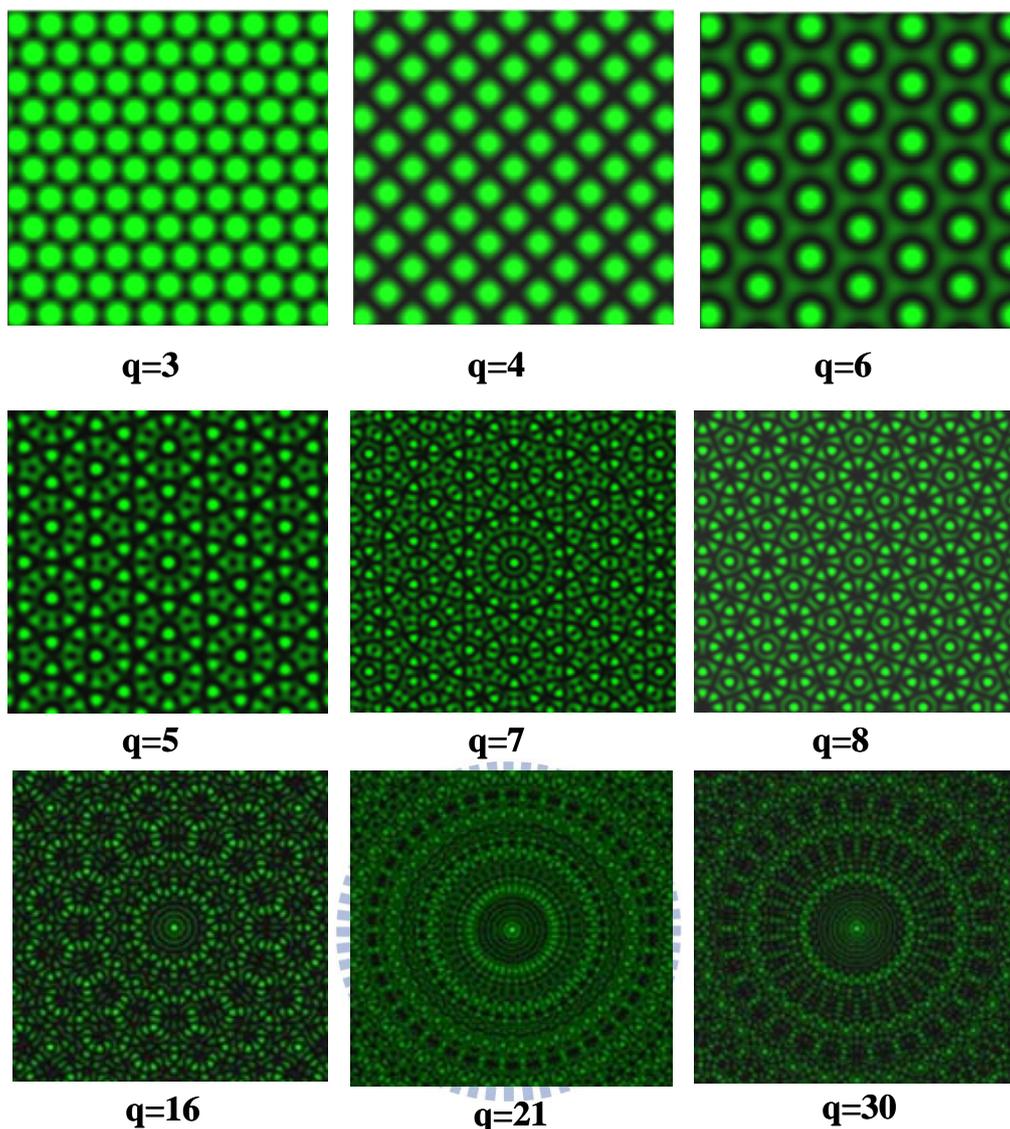


圖 3.4 各種晶格及準晶格結構

平面波疊加的方法是表示不同  $K$  值的平面波在焦點的圖案，如果我們想知道任何平面的光場就必須引用傅式光學(*Fourier optics*)的觀念，假設鏡後一段距離  $z$  的 *complex field*  $u(\rho, \phi, z)$  是通過光單板的 *input field*  $u_0(\rho', \phi')$  經過轉換後而得：

$$u(\rho, \phi, z) = \frac{-i}{\lambda f} e^{ik(f+z)} \iint u_0(\rho', \phi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2f}\left(1-\frac{z}{f}\right)} e^{-i\frac{2\pi\rho\rho'}{\lambda f}\cos(\phi-\phi')} \rho' d\phi' d\rho' \quad (3.3)$$

其中  $\lambda$  是輸入光的波長， $f$  是聚焦透鏡的焦距。假設輸入光是一道半徑為  $a$  的圓圈的光，則通過光罩板的光場  $u_0(\rho', \phi') = \delta(\rho' - a)$ ，將此式代回上述(3.3)後可得：

$$u(\rho, \phi, z) = \frac{-i2\pi a}{\lambda f} e^{ik(f+z)} e^{i\frac{ka^2}{2f}\left(1-\frac{z}{f}\right)} J_0\left(\frac{2\pi a}{\lambda f} \rho\right) \quad (3.4)$$

其中  $J_0(\cdot)$  是 *Bessel function of zero order*。式(3.4)說明當  $q$  值很大時，遠場的圖案結構會越趨向於 *Bessel beam*。若光罩板上有多個孔洞，則通過光罩板的光場可表示為：

$$u_0(\rho', \phi') = \left(\frac{1}{q}\right) \delta(\rho' - a) \sum_{s=0}^{q-1} \delta(\phi' - \phi_s) \quad (3.5)$$

所以輸出(output field)可表示為：

$$u(\rho, \phi, z) = \frac{-ia}{\lambda f} e^{ik(f+z)} e^{i\frac{ka^2}{2f}\left(1-\frac{z}{f}\right)} \Psi_q^*\left(\rho, \phi, \frac{2\pi a}{\lambda f}\right) \quad (3.6)$$

其中  $\Psi_q^*\left(\rho, \phi, \frac{2\pi a}{\lambda f}\right) = \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} e^{ims\frac{2\pi}{q} e^{ik\rho \cos[\phi - (\frac{2\pi s}{q})]}}$ ， $m$  是整數， $e^{ims\frac{2\pi}{q}}$  此項表示不同  $K$

值的平面波的 *relative phase*。由此關係式我們可以得知在任何一垂直  $z$  軸的平面上的圖案是晶格結構或準晶格結構。而本論文的實驗設置中，都沒有傾斜光罩板的角度，因此沒有 *relative phase*(亦即

$e^{ims\frac{2\pi}{q}} = e^{is\Phi} = 0$ )。

### 3.1 二維超晶格的理論模式

二個獨立但晶格相互作用的晶體即稱為超晶格(*Super lattice*)，在 2.2 節我們曾提及 1998 年 *A.Kudrolli*、*B.Pier*、*J.P.Gollub* 等人發表了在表面波上的超晶格圖形[5]；今我們希望能利用光學實驗設置，以光波的干涉疊加在屏幕上顯像出各式各樣的超晶格的圖形。前面曾提及單一個的晶格結構或準晶格結構之描述式子為(式 3.2)，若在原本的晶格結構光束或準晶格結構光束旁各增加一相對角度的光束，亦即在原本的孔洞旁各增加一相對角度的孔洞(圖 3.5)，會有第二個晶格或準晶格結構，而將此二組光束所產生的結構光束干涉疊加後之圖案即稱為超晶格。本章將利用數學軟體 *Mathcad* 理論模擬平面波干涉後的超晶格圖形，再佐以光學實驗圖形兩廂驗證。

我們藉由圓柱座標表示法來定量描述平面波結構光束之疊加：

$$\psi_q^I(\rho, \phi; K_1) = \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{s=0}^{q-1} e^{iK_1 \rho \cos(\phi - (2\pi \frac{s}{q}))} \quad (3.7)$$

$$\psi_q^{II}(\rho, \phi; K_2) = \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{s=0}^{q-1} e^{iK_2 \rho \cos(\phi - (2\pi \frac{s}{q}))} \quad (3.8)$$

$$K_1 = [K \cos(\frac{2\pi}{q}s), K \sin(\frac{2\pi}{q}s)] \quad (3.9)$$

$$K_2 = [K \cos(\frac{2\pi}{q}s + \theta), K \sin(\frac{2\pi}{q}s + \theta)] \quad (3.10)$$

$$\rho = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \quad (3.11)$$

$$\Psi_q = \psi_q^I + \psi_q^{II} \quad (3.12)$$

式子(3.7)為原本單一晶格結構，式子(3.8)為加上相對角度的另一個單一晶格結構， $q$  為孔洞數， $K$  為橫向波向量 ( $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ )， $\theta$  為二組孔洞所夾的相對角度；式子(3.12)為這二個相差一相對角度的晶格結構光束干涉疊加後的式子，疊加後對應的晶格結構即為超晶格圖騰。

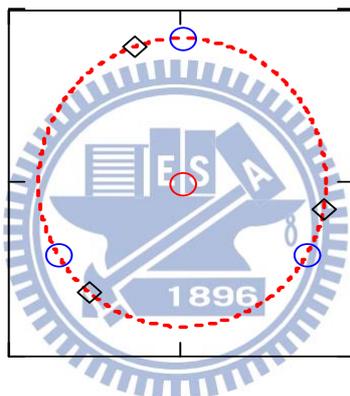


圖 3.5 多增加一相對角度孔洞之光罩

## 3.2 光學干涉實驗架構

實驗架構(圖 3.6)，我們使用具有線偏振的氦氖雷射做為入射光源，其波長為 632.8nm，輸出功率為 20mW；利用光束擴束器(Beam expander)使氦氖雷射的發散角小於 0.1m rad，使其均勻的照射在光罩上。實驗前先利用雷射加工在鋼板設備上鑿出實驗所需要的孔洞數分佈之光罩(Mask)，光罩上環形的半徑為 5mm，孔洞半徑為 0.1mm。

透鏡焦距為 1000mm，利用透鏡聚焦成像在焦點上，再使用數位相機紀錄光束干涉後的成像。

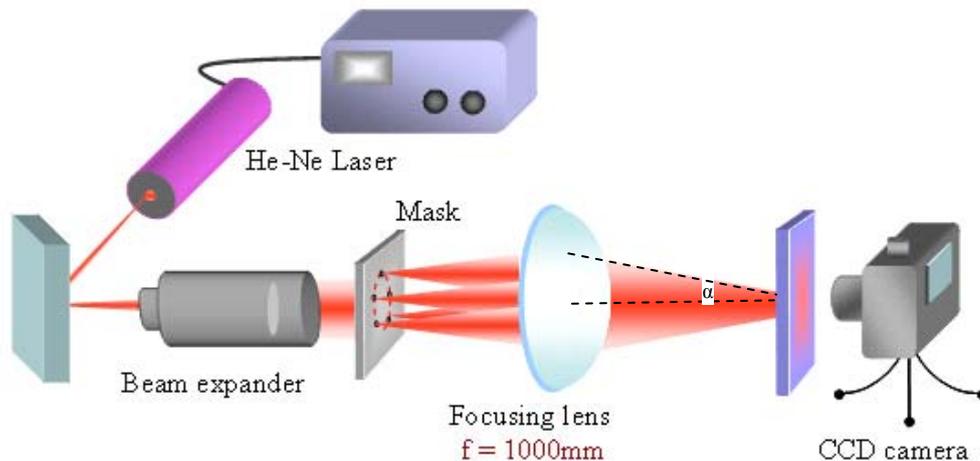


圖 3.6 實驗架構

### 3.3 實驗結果與討論

利用數個光源干涉疊加後可產生單一個晶格或準晶格圖案，本章實驗設計仿照 2.2 節所提過的表面波上的超晶格圖形的形成方法，先讓雷射光束均勻照射在一鑿等距 3 孔洞的光罩(圖 3.7)，光束通過孔洞後形成 3 個平面波干涉疊加，在屏幕上可得到一個 3 對稱的晶格圖案(圖 3.8)；而後在每個孔洞旁各增加一夾相同角度的孔洞，一樣讓雷射光束均勻照射在光罩上，形成二組 3 孔洞的干涉平面波，由其所干涉疊加後顯像在接收器上，即可得到超晶格圖案。接著改變不同的相對角度，所干涉疊加產生的超晶格圖騰亦會呈現不同的樣貌。而相鄰孔洞所夾的相對角度需要仔細選取，若二組相鄰孔洞所夾的相對角

度過大，其疊加後產生的干涉條紋圖案容易跟 3 對稱重複或變成 3 對稱性的倍數，如 6、9、12……；反之若所夾的相對角度過小，其疊加後產生的干涉條紋圖案之間並無顯著的差距。

本實驗所選取的相對夾角為  $10^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $25^\circ$ 、 $30^\circ$  (圖 3.9)，其光通過孔洞後所產生的波干涉疊加圖案(圖 3.8)會隨著相對角度的改變而出現不同的圖騰。(圖 3.8)是一個標準的 3 對稱晶格的理論與實驗對照圖形，從(圖 3.10)來看，當相對夾角為  $10^\circ$  時，內部同樣呈現了 3 對稱晶格的圖形，而外圍邊界出現明暗相間的直條紋，根據本章一開始之敘述，可知明暗相間的直條紋出現是因相鄰夾一角度的 2 孔所互相干涉形成的。隨著每增加  $5^\circ$  的改變，可看出所夾的相對角度愈大(即相鄰 2 孔之間距變大)，外圍的干涉條紋愈來愈細( $\Delta y = \frac{r\lambda}{d}$ )且界線愈來愈不平滑，內部的 3 對稱圖樣干涉線條愈來愈寬，使得晶格數目愈來愈少，從相對夾角  $10^\circ$  時內部的晶格數目有數十個到相對夾角為  $30^\circ$ ，內部的晶格數目僅剩 4、5 個，內部的 3

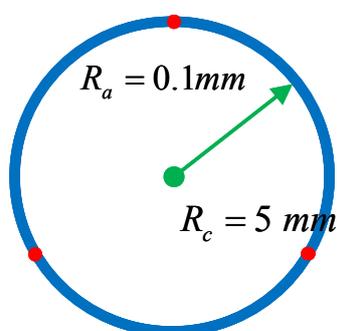
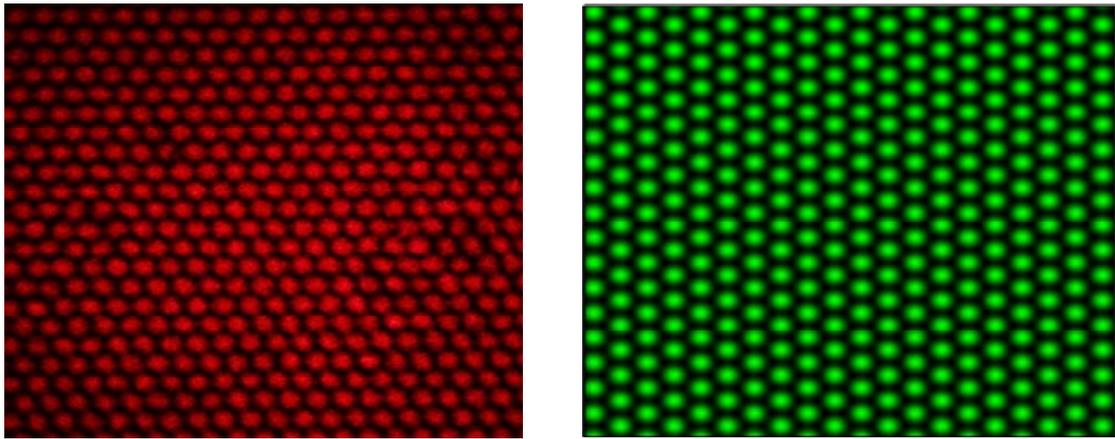


圖 3.7 3 個孔洞之光罩



實 驗

理 論

圖 3.8 3 個光源干涉實驗、理論圖案

對稱晶格呈現類似小花的圖樣，而周圍的邊界干涉條紋趨像圓滑弧狀，邊界已不明顯。從實驗結果看來，不管夾任何角度的 3 對稱的 Super lattice 圖形，儘管在外圍邊界出現二個晶格互相干涉條紋，內部依然呈現 3 對稱的晶格圖形，整體超晶格圖形依然延續了晶格圖形的平移對稱性及旋轉對稱性。對照理論程式模擬圖形與實際光學干涉實驗結果相對照，二者圖形相當一致，因此我們可以再依照此模式去模擬出其他重對稱性的超晶格圖騰。

單一組 4 對稱孔洞及夾一相對角度的二組 4 對稱孔洞(圖 3.11)依照上述相同的理論模式與實驗設置，將 3 對稱更改為 4 對稱。(圖 3.12)為 4 對稱超晶格圖騰的理論模擬與光學干涉實驗之對照，其圖形邊界一樣出現了明暗相間的干涉直條紋，內部依然保有原來的晶格圖樣，但 4 對稱超晶格的圖騰相當特別，不管增加孔洞後所夾的相

對角度是多少，所呈現的圖案皆相當類似，僅僅只是內含的晶格數目  
隨著夾角變大而變少。

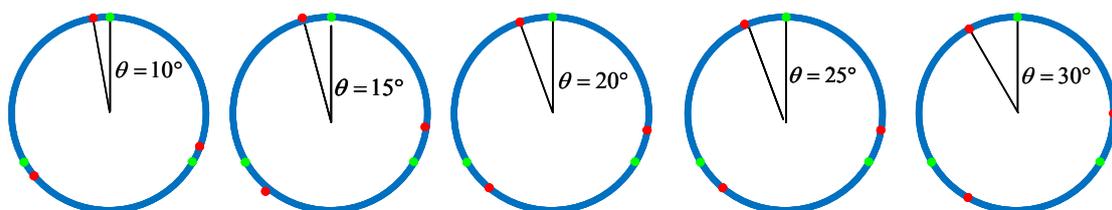


圖3.9 3對稱孔洞示意圖

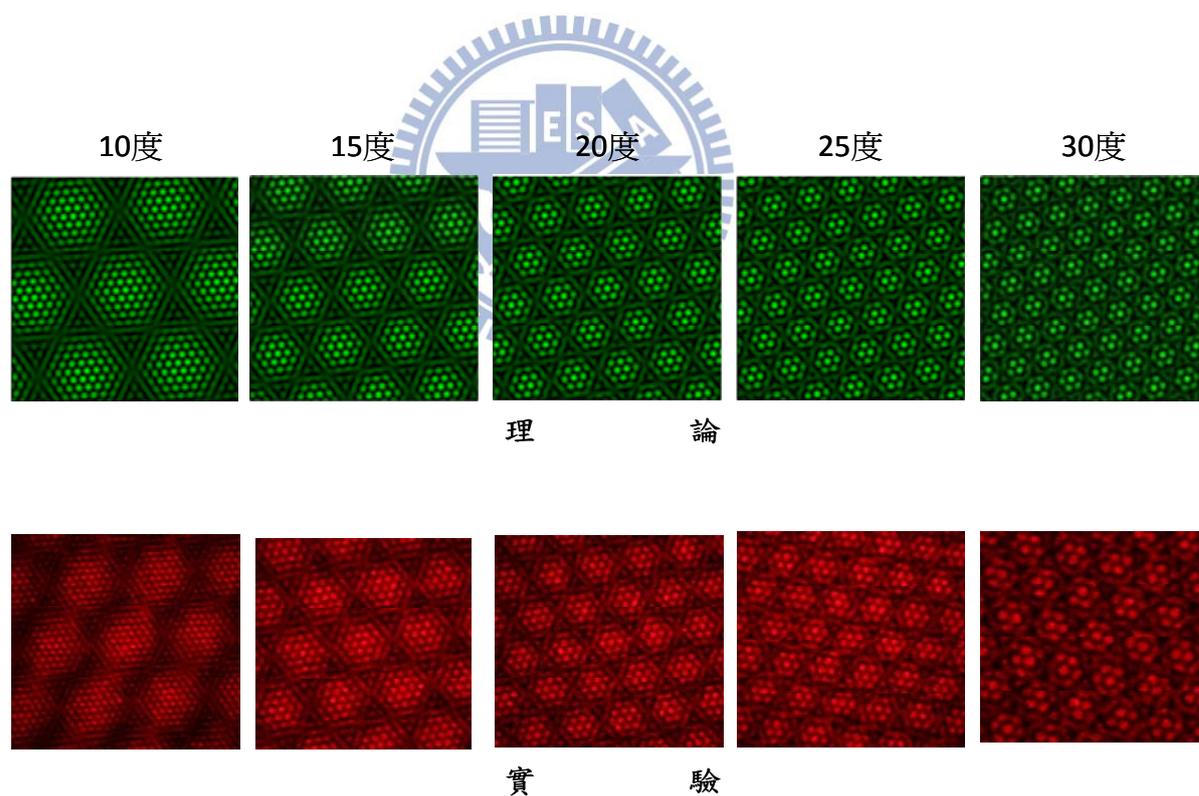


圖 3.10 3 對稱超晶格之實驗、理論圖案



圖 3.11 4 對稱孔洞示意圖

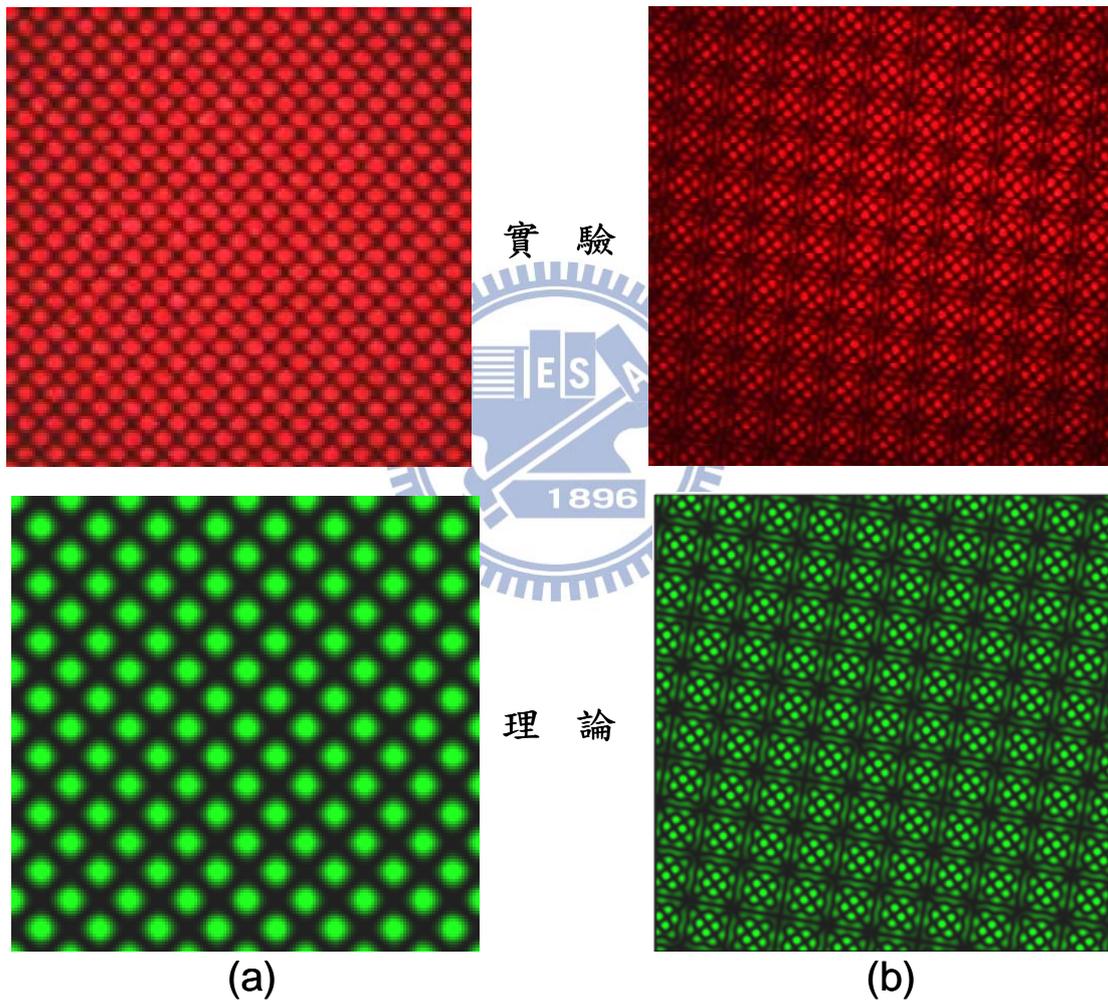


圖 3.12 (a)4 對稱晶格實驗、理論對照圖

(b)4 對稱超晶格實驗、理論對照圖

單一組 5 對稱孔洞及夾一相對角度的二組 5 對稱孔洞(圖 3.13)依照上述相同的理論模式與實驗設置，將 3 對稱更改為 5 對稱。(圖 3.14) 為 5 對稱之超晶格圖案理論模擬與實驗操作對照圖。當  $0^\circ$  時，是一個標準 5 對稱準晶格圖案，當夾角為  $10^\circ$  時，其圖形邊界一樣出現了明暗相間的干涉直條紋而內部依然看得到原來的 5 對稱準晶格圖形，且整個圖騰依然具有旋轉對稱性；當  $20^\circ$  時，圖形邊界有明暗相間的條紋，內部的 5 對稱準晶格結構的邊界有明顯對稱分佈的黑點，黑點間有相間的圓弧狀干涉條紋，整個圖騰具有旋轉對稱性；當  $30^\circ$  時，圖形邊界有明暗相間的條紋，而內部又延伸出一精美的結構圖騰，其準晶格結構邊界幾乎都出現雙線條條紋趨向圓弧狀，整體圖騰具有旋轉對稱性。



單一組 6 對稱孔洞及夾一相對角度的二組 6 對稱孔洞(圖 3.15)依照上述相同的理論模式與實驗設置，將 3 對稱更改為 6 對稱。(圖 3.16) 為 6 對稱之超晶格圖案理論模擬與實驗操作對照圖，因孔位數變多會影響角度的取樣，故在此我們在角度取決上會變小。當  $0^\circ$  時，是一個標準 6 對稱晶格圖樣，當  $5^\circ$  時，圖樣呈現平移對稱性，其圖形邊界一樣出現了明暗相間的干涉直條紋，內部依然保有原始的晶格，隨著角度變大，邊界逐漸擴大，內部結構的晶格數目變少，同樣出現多樣化的圖騰結構。

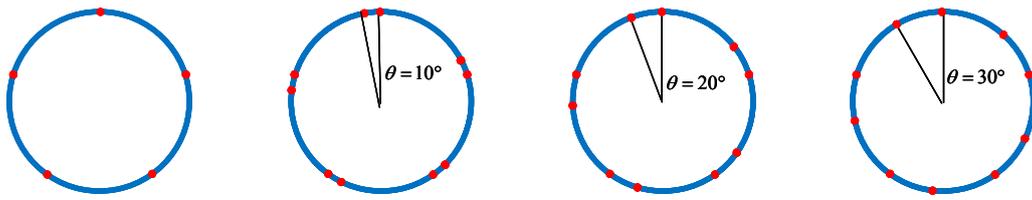


圖 3.13 5 對稱孔洞示意圖

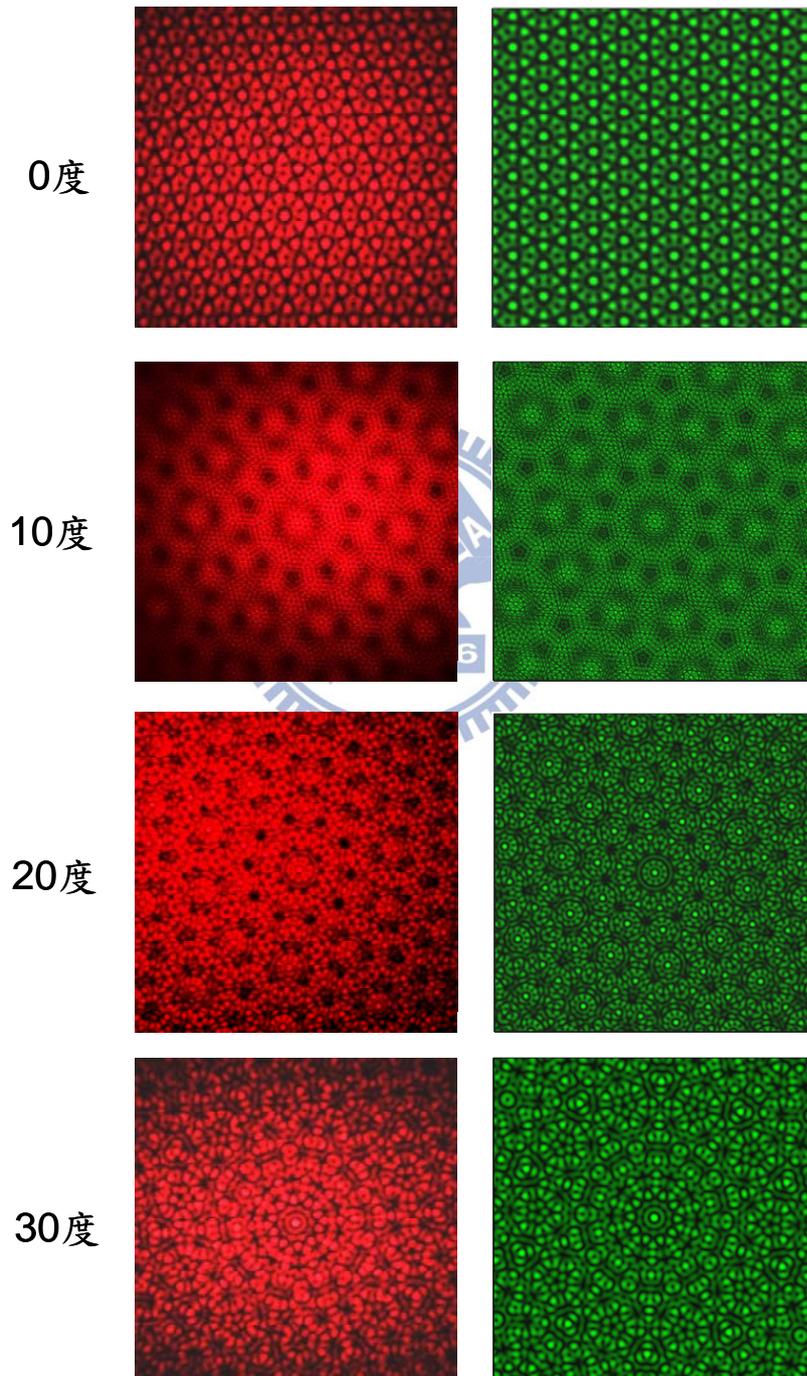


圖 3.14 5 對稱超晶格之實驗、理論圖案

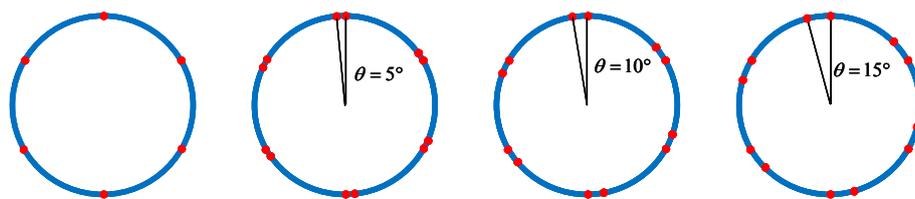


圖 3.15 6 對稱孔洞示意圖

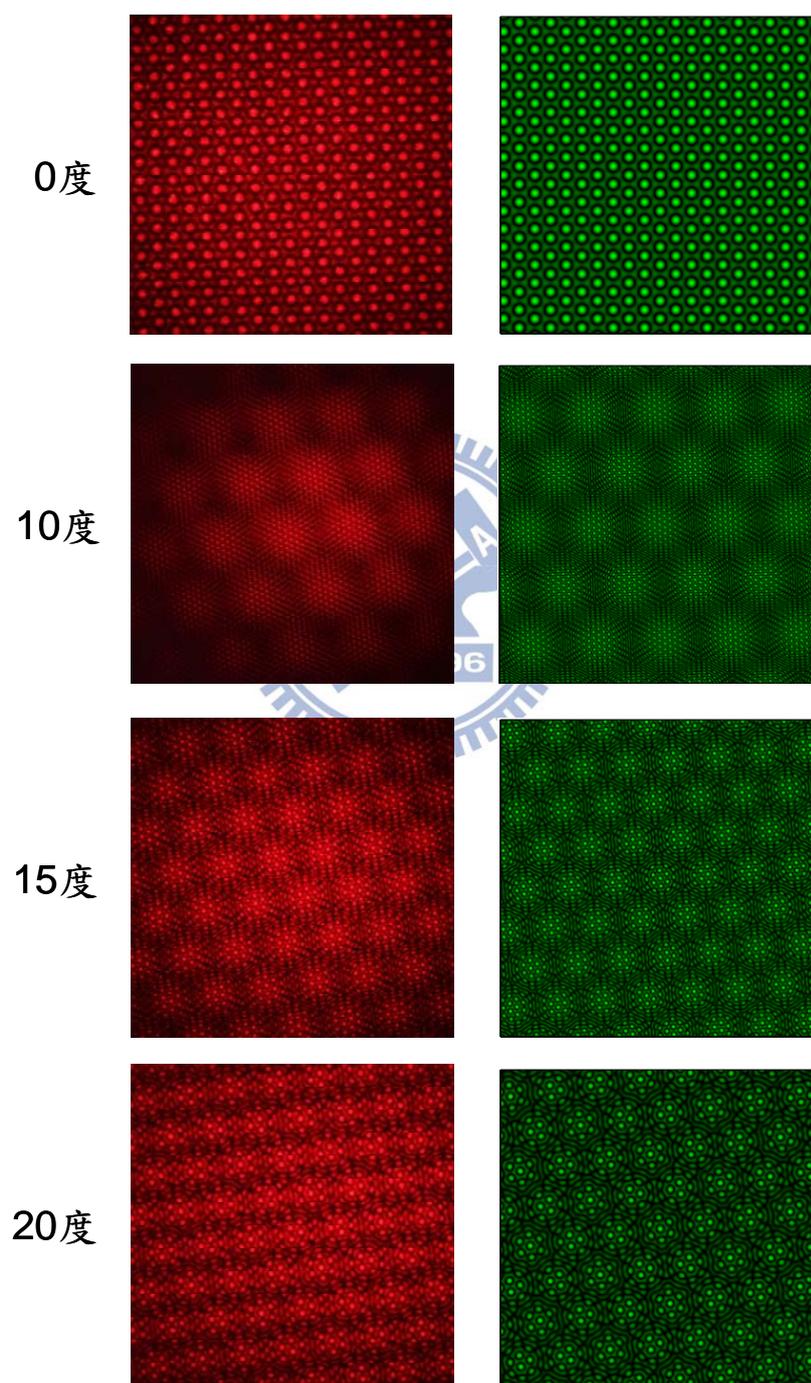


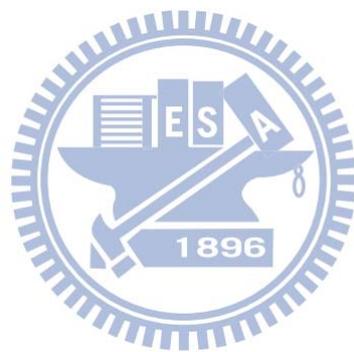
圖 3.16 6 對稱超晶格之實驗、理論圖案

綜合以上 3、4、5、6 超晶格干涉光學實驗及理論模擬圖形的討論可知，我們可以經由干涉圖樣的中輕鬆的分辨出其屬於幾重對稱圖樣，其  $q$  對稱的超晶格圖形對應其  $q$  對稱的晶格圖形，都具備相同的平移對稱性或旋轉對稱性，因此藉由這樣的規則性我們也可以推測出高對稱性的圖樣的樣貌及其對稱性，同時也期待著會有更多變化性的圖騰結構等著被發現讚嘆！

### 3.4 結論

從 3.3 節的實驗與理論圖形可看出，在一圓環上等距離的開  $q$  孔洞，可讓  $q$  束平面波干涉疊加在屏幕上形成一  $q$  對稱晶格圖樣；而多加一組夾相對角度的  $q$  束平面波與原本的  $q$  束平面波干涉疊加在屏幕上形成了一  $q$  對稱超晶格圖騰。在超晶格圖騰中可觀察到原本的  $q$  對稱晶格圖樣，亦同時在外圍邊緣區多觀察到因相鄰夾一相對角度之二束平面波所造成的干涉直條紋，隨著所夾角度的變大(二束平面波間距加大)，直條紋的寬度變細變少( $\Delta y = \frac{r\lambda}{d}$ )，而角度大到一定程度，邊界的干涉直條紋愈趨圓弧狀而且不明顯，唯一例外的是 4 對稱超晶格，其所夾角度對圖樣的影響並不大，僅僅只影響內部結構所含的晶格數目。而 3、4、6 對稱超晶格圖騰也和 3、4、6 對稱晶格圖騰一樣，具有平移對稱性及旋轉對稱性，5 對稱超晶格圖騰和 5 對稱晶格圖騰

一樣，具有旋轉對稱性，且圖騰結構上的變化很美麗多樣。故我們可以繼續依照此模式，另鑿不同的光罩孔洞，讓光束通過光罩孔洞後形成多道平面波，在顯像器上干涉疊加出以其他更高重對稱晶格為基底的超晶格圖騰，定能找到更多變化令人驚艷的美麗圖騰。



## 第四章 三維超晶格圖騰之分析與產生

上一章我們介紹了二維超晶格的圖騰變化系列，在這一章欲嘗試利用不同方式將數個平面波干涉疊加，試著尋找更多不同的圖騰。延續上一章的光罩孔洞，今在光罩環形的中心點再多鑿一孔洞（圖 4.1），使通過環上孔洞及中心孔洞的數個平面波干涉疊加，其在屏幕上所呈現出來的圖樣會呈現如何的變化？此章節將繼續利用數學軟體 *MathCad* 理論模擬以及配合雷射光學干涉實驗觀察，找出更多不同的圖騰樣式。

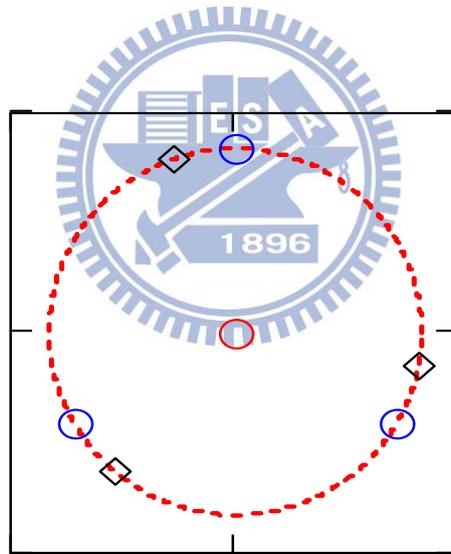


圖 4.1 光罩孔洞

### 4.1 三維超晶格的理論模式

我們一樣藉由圓柱座標表示法來定量描述數個平面波結構光束之疊加式子為：

$$\psi_q^1(\rho, \phi, K_1) = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{iK_1 \rho \cos[\phi - (2\pi \frac{s}{q})]} = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{i(K_{1x} \cdot x + K_{1y} \cdot y + K_{1z} \cdot z)} \quad (4.1)$$

$$\psi_q^2(\rho, \phi, K_2) = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{iK_2 \rho \cos[\phi - (2\pi \frac{s}{q})]} = \sum_{s=0}^{q-1} A_s e^{i(K_{2x} \cdot x + K_{2y} \cdot y + K_{2z} \cdot z)} \quad (4.2)$$

$$K_1 = [K \sin \alpha \cos(\frac{2\pi}{q} n), K \sin \alpha \sin(\frac{2\pi}{q} n), K \cos \alpha] \quad (4.3)$$

$$K_2 = [K \sin \alpha \cos(\frac{2\pi}{q} n + \theta), K \sin \alpha \sin(\frac{2\pi}{q} n + \theta), K \cos \alpha] \quad (4.4)$$

$$\rho = (\rho \sin \vartheta \cos \phi, \rho \sin \vartheta \sin \phi, \rho \cos \vartheta) \quad (4.5)$$

$$\psi_p = A_p e^{iK \cdot z} \quad (4.6)$$

$$\Psi_q = \psi_q^1 + \psi_q^2 + \psi_p \quad (4.7)$$



式子(4.1)、(4.2)為環上夾相對角度的二組平面波，式子(4.6)為通過中間孔洞的平面波， $K$  為波數( $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ )， $z$  為  $z$  軸上的位置， $A_n$ 、 $k_n$  分別為第  $s$  個平面波的振幅及橫向波向量， $\theta$  為相對角度；式子(4.7)為這三組平面波再次疊加後的式子，其中  $\psi_q^1$ 、 $\psi_q^2$  的橫向波向量  $z$  軸的分量相同，皆為  $K_z = K \cos \alpha$ ，而  $\psi_p$  的橫向波向量  $z$  軸的分量為  $K$ ，因其橫向波向量的值不同，故其圖形會隨著  $z$  軸的改變，有一個週期性的變化距離，形成了隨著顯像屏幕位置的移動，具備了三維變化的超晶格圖騰。其 *Revival* 的距離關係式子的推導如下：

$$(K - K_z)Z_T = 2m\pi$$

$$KZ_T(1 - \cos \alpha) = KZ_T(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})$$

$$\therefore \frac{R}{f} \approx \sin \alpha$$

$$\Rightarrow = KZ_T(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{f^2}})$$

$$\approx KZ_T[1 - (1 - \frac{R^2}{2f^2})]$$

$$= KZ_T \frac{R^2}{2f^2}$$

$$= Z_T \frac{\pi R^2}{\lambda f^2} = 2m\pi$$

$$\Rightarrow Z_T = \frac{2\lambda f^2}{R^2} \tag{4.8}$$

其中  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ ， $\lambda$  為光波長， $R$  為光罩上環形半徑， $f$  為聚焦成像透鏡之焦距， $\alpha$  為通過圓環上一孔洞的光束與通過圓環中心孔洞的光束之間的夾角(其值很小，在本論文光學實驗設置上  $\alpha = \tan^{-1}(\frac{R}{f})$ ， $f \gg R$ )。

(式 4.8)說明了圖形隨著  $z$  軸位置的改變，干涉的圖形也會出現變化，但每隔一段距離會重覆一次圖形循環，此段距離即為  $Z_T$ ，亦即圖形 *Revival* 的距離。

## 4.2 光學干涉實驗架構

實驗架構(圖 4.2)，我們使用具有線偏振的氦氖雷射做為入射光源，其波長為 632.8nm，輸出功率為 20mW；利用光束擴束器(Beam

expander)使氦氖雷射的發散角小於  $0.1\text{m rad}$ ，使其均勻的照射在光罩上。實驗前先利用雷射加工在鋼板設備上鑿出本實驗所需要的孔洞數分佈之光罩((Mask)，環上 2 組分佈相同的孔洞，環中心鑿一孔洞，光罩上環形的半徑為  $5\text{mm}$ ，孔洞半徑為  $0.1\text{mm}$ ，中間的孔洞半徑為  $(0.15)\text{mm}$ 。透鏡焦距為  $1000\text{mm}$ ，利用透鏡聚焦成像，再使用數位相機紀錄光束干涉後的成像。

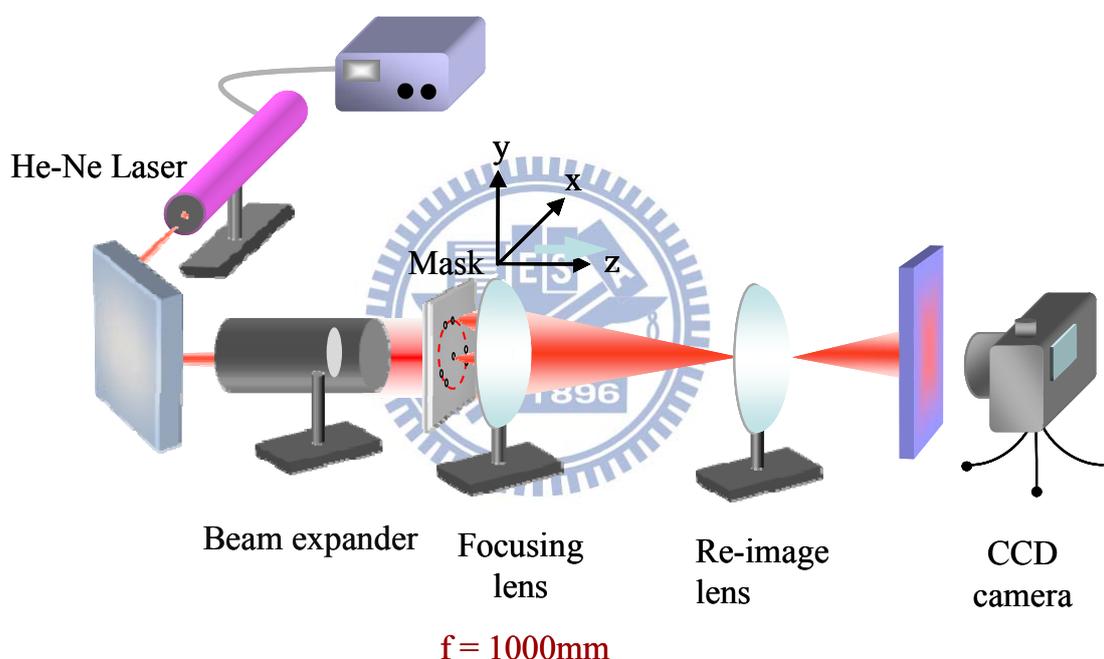


圖 4.2 實驗架構

### 4.3 實驗結果與討論

從上一章討論得知二組夾相對角度的 3 對稱的平面波所干涉而成的圖樣，其所夾相對角度的大小影響外圍干涉直條紋的粗細，也影響內部 3 對稱晶格數目，角度為大，條紋愈細，晶格數愈少。而在這

章節我們在光罩中間多鑿一孔洞，讓擴束光束均勻通過孔洞，在屏幕上干涉疊加後形成圖案。從(圖(4.3(a)、(b))、圖(4.4(a)、(b))、圖(4.5(a)、(b))、圖(4.6(a)、(b))來看，在上一章所看到的干涉圖形中，外圍邊界的干涉條紋及內部3對稱晶格圖樣依然可見，但隨著 $z$ 軸距離的不一樣，也發現圖樣產生了一些變化。就圖(4.3(a)、(b))來看， $z = 1000\text{mm} \sim 1052\text{mm}$  隨著 $z$ 的改變，干涉的亮、暗紋也隨之移動，從外部邊界的干涉條紋來看，最暗處由左漸漸往右偏移再到下一晶格的邊界上為一循環；以內部的3對稱晶格來看，中間的亮點，由暗轉為最亮再回到暗，為一週期圖樣的循環距離。再由圖(4.5(a)、(b))來看，內部的晶格數目分佈類似花瓣圖樣，也可看出花瓣的亮暗隨著 $z$ 軸改變出現變化， $z=1003\text{mm}$  內部有3個明顯的圓暗紋、 $z=1011\text{mm}$  內部有6個明顯的圓暗紋且中間夾一個超亮點、 $z=1021$  內部有3個明顯的圓暗紋但和 $z=1003$ 的3個圓暗紋恰成相對、 $z=1033$  內部再次呈現6個明顯的圓暗紋但中間亮點比 $z=1011\text{mm}$ 暗、 $z=1050\text{mm}$  則與 $z=1003\text{mm}$ 的圖案幾乎相同，至此為一循環距離。從 *Mathcad* 程式也模擬出隨著 $z$ 軸改變所出現的亮暗變化之3D圖(圖(4.3(c))、圖(4.4(c))、圖(4.5(c))、圖(4.6(c))，可以看到其隨著第三維的變化而出現的週期反覆性，進而影響了整體圖騰的樣貌，讓超晶格圖騰集的呈現更豐富。

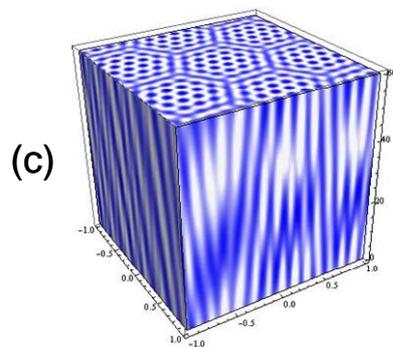
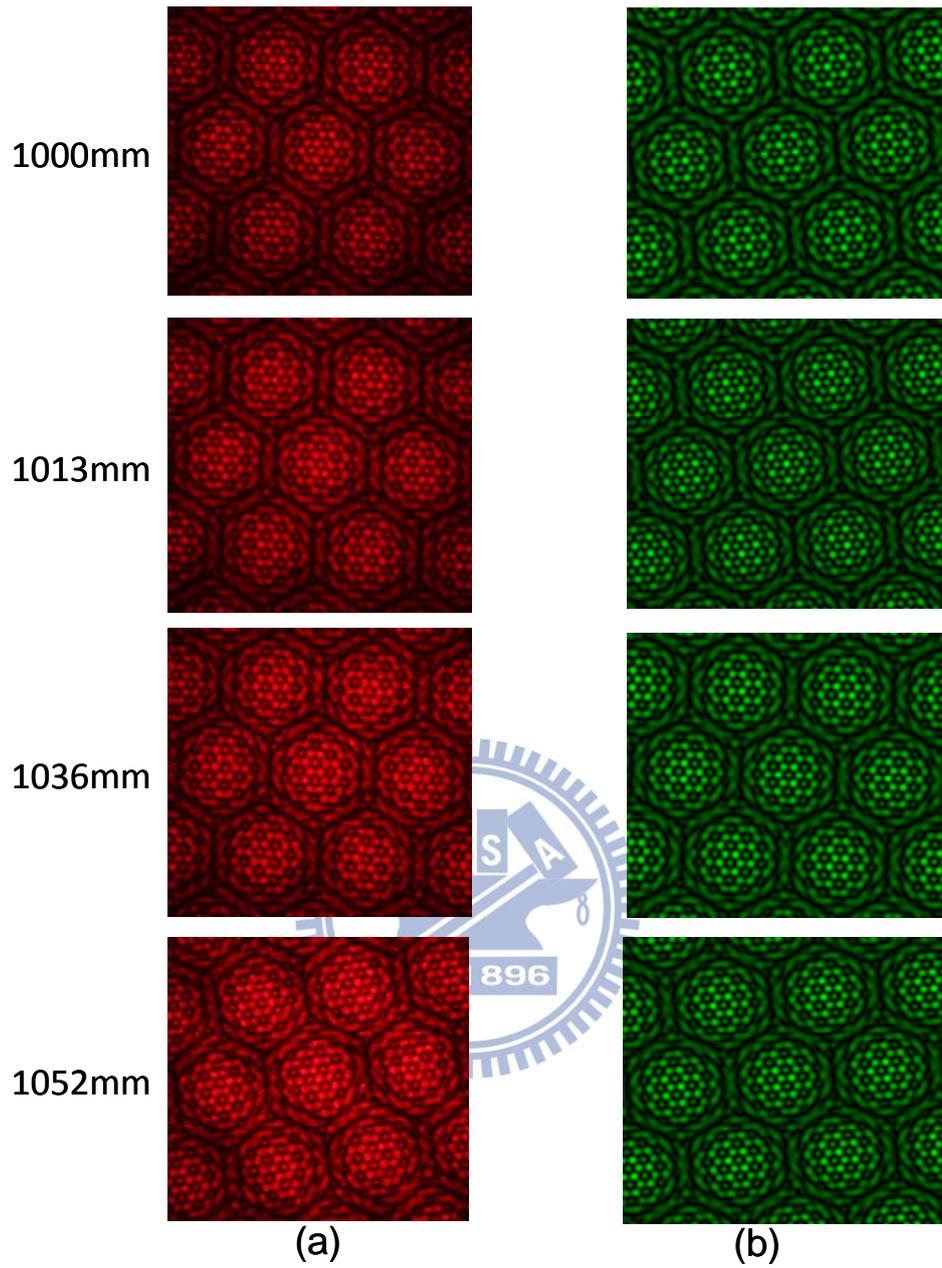


圖 4.3 (a)中間開孔的 3 對稱夾  $10^\circ$  實驗圖 (b)中間開孔的 3 對稱夾  $10^\circ$  理論圖  
(c)中間開孔的 3 對稱夾  $10^\circ$  理論 3D 圖

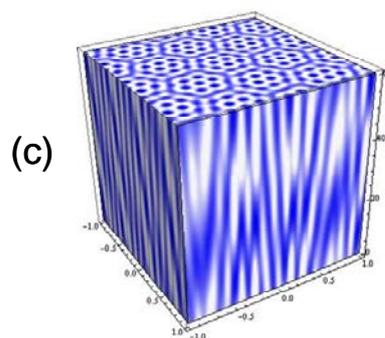
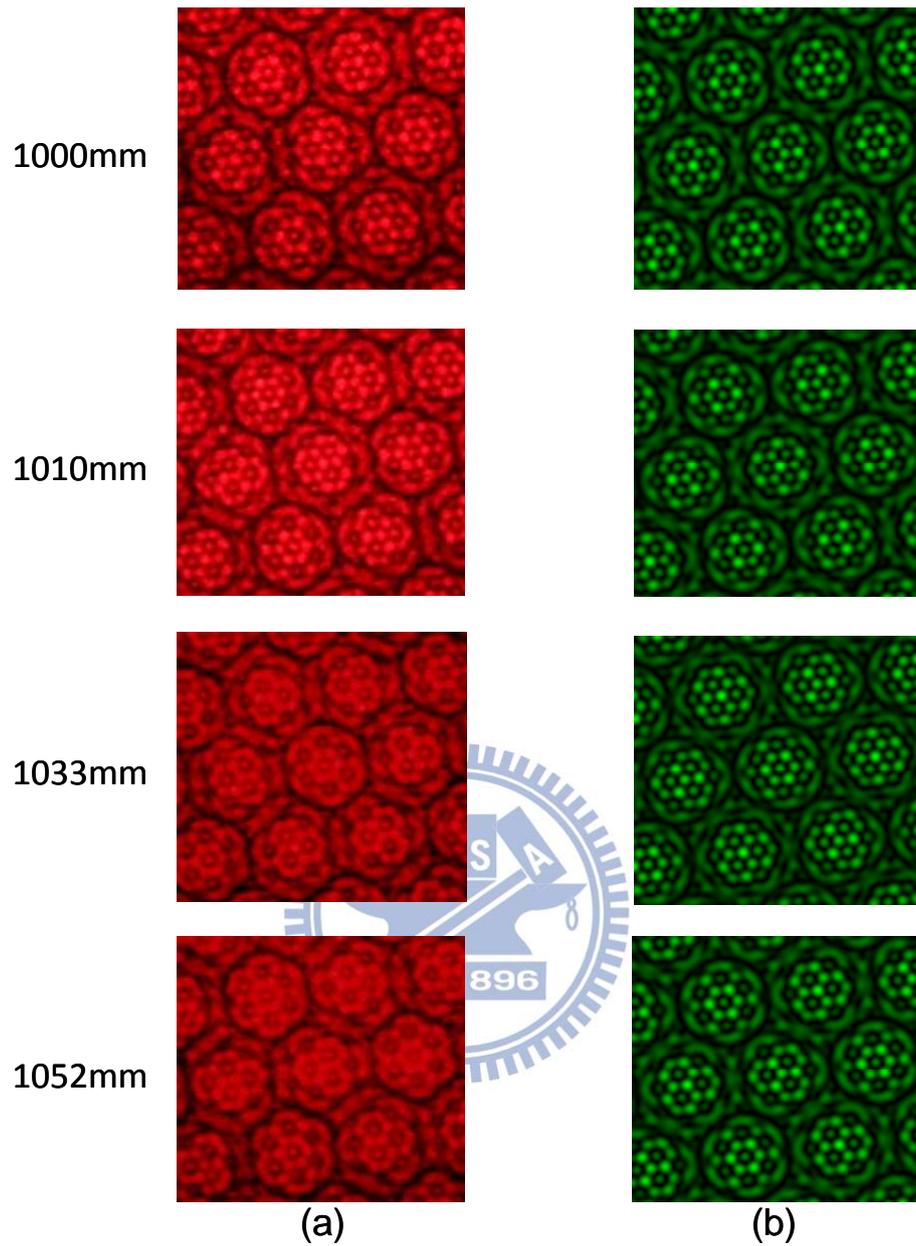


圖 4.4 (a)中間開孔的 3 對稱夾  $15^\circ$  實驗圖 (b)中間開孔的 3 對稱夾  $15^\circ$  理論圖

(c)中間開孔的 3 對稱夾  $15^\circ$  理論 3D 圖

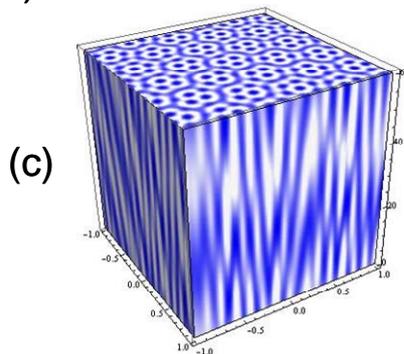
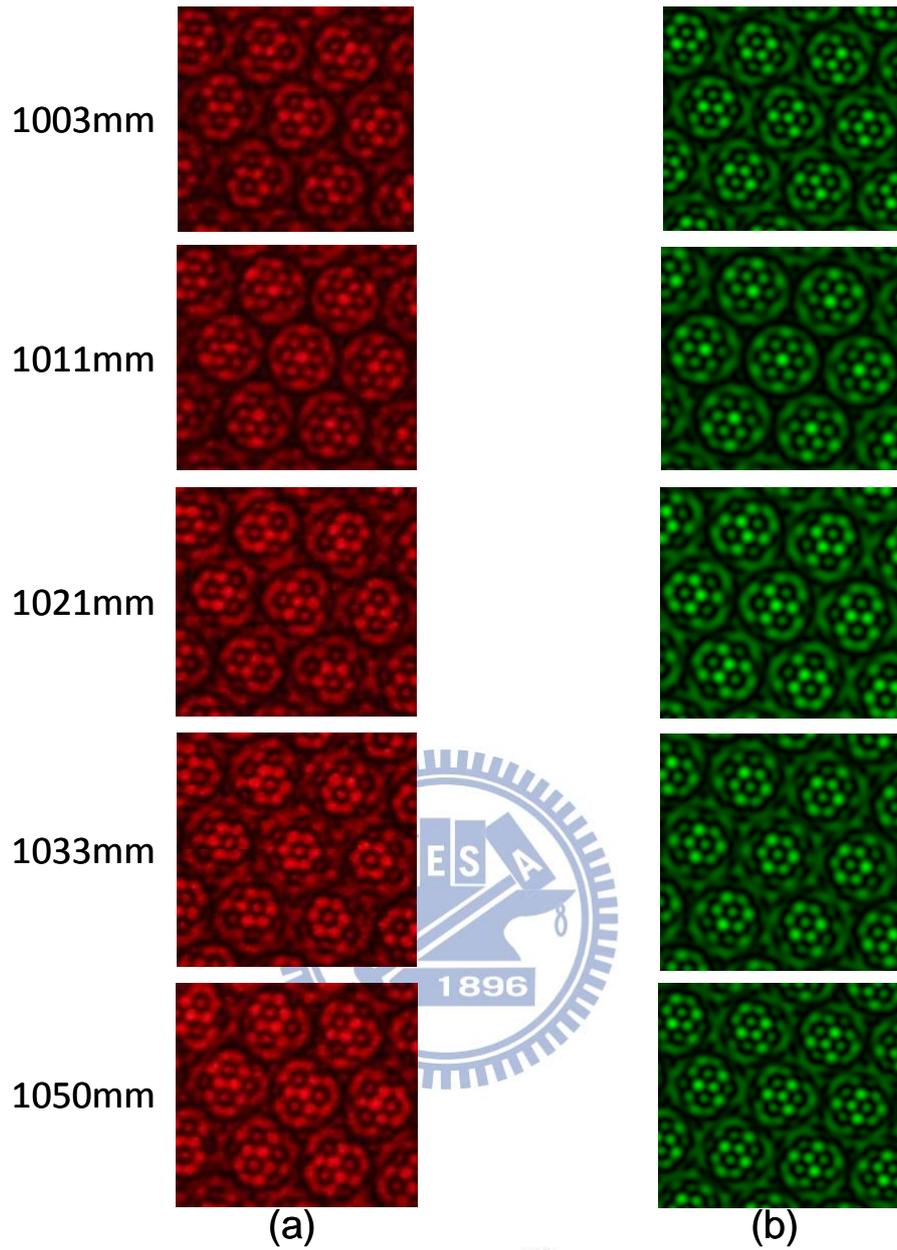


圖 4.5 (a)中間開孔的 3 對稱夾  $20^\circ$  實驗圖 (b)中間開孔的 3 對稱夾  $20^\circ$  理論圖

(c)中間開孔的 3 對稱夾  $20^\circ$  理論 3D 圖

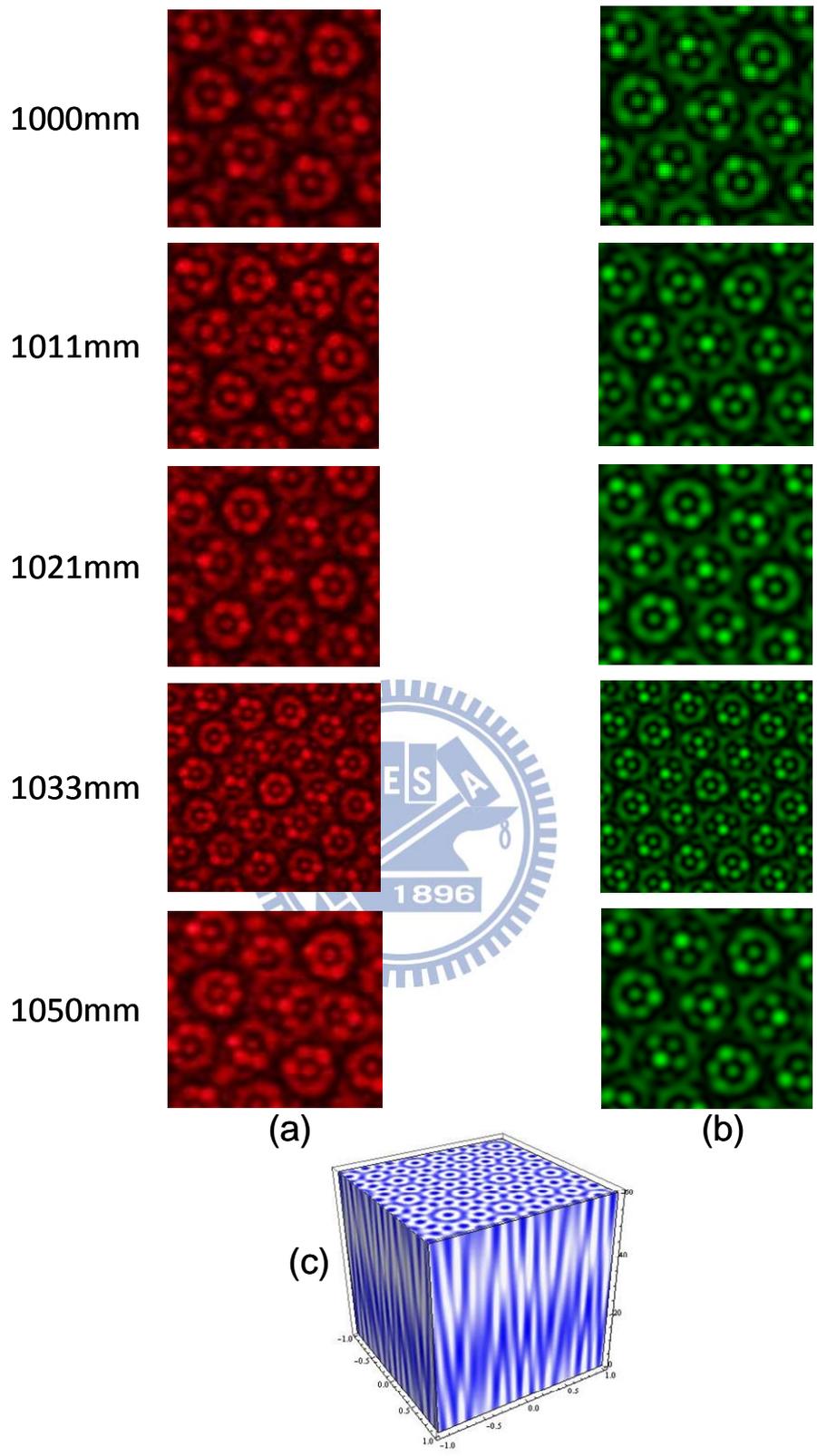


圖 4.6 (a)中間開孔的 3 對稱夾  $30^\circ$  實驗圖 (b)中間開孔的 3 對稱夾  $30^\circ$  理論圖

(c)中間開孔的 3 對稱夾  $30^\circ$  理論 3D 圖

綜合上述的實驗結果，夾  $10^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $30^\circ$  的 *Revival* 距離為 52mm、52mm、50mm、50mm，而在上一節的理論分析中提到式子(4.8)為重覆出現圖形的週期距離( $Z_T$ )，將我們光學實驗所用的設備數據  $\lambda = 632.8\text{nm}$ 、 $R = 5\text{mm}$ 、 $f = 1000\text{mm}$  代入式子(4.8)，所得到的  $Z_T = 50.6\text{mm}$ ，對照實驗所得到的各相對夾角的 revival 距離，與所夾的角度並無太大關係，皆與理論值 50.6mm 相去不遠，說明了實驗數據與理論分析數據大致相符。

#### 4.4 結論

由以上的實驗與理論的圖樣可得知，超晶格(*Super lattice*)的干涉圖樣可以很多樣化，若僅僅只有二組夾相對角度的 3 對稱圖樣，其圖形的變化就可以相當多變，外圍干涉條紋由寬、直變化到細、弧，內部的晶格條紋由細變寬、數目也由多漸漸變少，出現非常豐富的圖樣，不過僅止於二維維度；而在加入圓中心的孔洞所造成的干涉圖樣，除了可看到原本二維多變的干涉圖樣外，同時也出現隨著  $z$  軸而有明亮不同的圖形變化，進入到三維維度的變化，使得可觀察的圖騰更加多變。因此也可以類推其他重對稱性晶格超晶格或準晶格超晶格的，應該也可以出現豐富有層次性的圖騰集，將來亦可再嘗試另鑿不同對稱性夾不同相對夾角的光罩孔洞，去發現更多漂亮的超晶格圖集。

## 第五章 碎形晶格圖騰的分析與產生

碎形具有自相似的特性，所謂的「自相似性」是指將一圖形中的任意部分不斷的細分成很多小部分，每一部分仍然可以展現出或近似於原來的圖形。分形樹(圖 5.1)就是碎形的一個例子，若將分形樹細分成許多小部分，每一小部分都跟原來的圖形相似。我們可以試著來拆解分形樹，以中間的主枝幹為基底層，分別在 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3}$ 枝幹長的位置各長出第二層新枝幹，其分布在一左一右且長度縮短為第一層層主枝幹長的 $\frac{1}{3}$ 並同時各將新枝幹逆時針及順時針旋轉 $\frac{\pi}{6}$ ，如此一來總共有 5 段相同長度的第二層枝幹(圖 5.1(a))；接著再依照上述長出新枝之模式，在這 5 段枝幹上再依序長出第三層新枝幹，其長度為第一層主枝幹長的 $(\frac{1}{3})^2$ ，共有 25 段相同長度的第三層枝幹(圖 5.1(b))；以同樣方法繼續分枝生長，會得到 125 段相同長度的第四層枝幹(圖 5.1(c))……；以此類推生長新枝幹下去，就會長成一顆分形樹。不論將此樹細分成多麼微小，最原始的生長模式一直存在，每個小部分都會自相似原來的樹木。

本論文在第二章曾經提及碎形根據自相似形態可分成三大類，精確自相似、半自相似、統計自相似，上述的分形樹就是屬於精確自相似類。而以下本章所欲探討的——利用波干涉出碎形晶格的圖騰——也是屬於精確自相似類，在設計孔洞分布的模式是仿照分形樹的概念，分

析其理論模式並以 *Mathcad* 程式輔助模擬出各種碎形晶格圖騰，並同時設置雷射光進行干涉實驗，以期望得到各種碎形晶格圖騰。

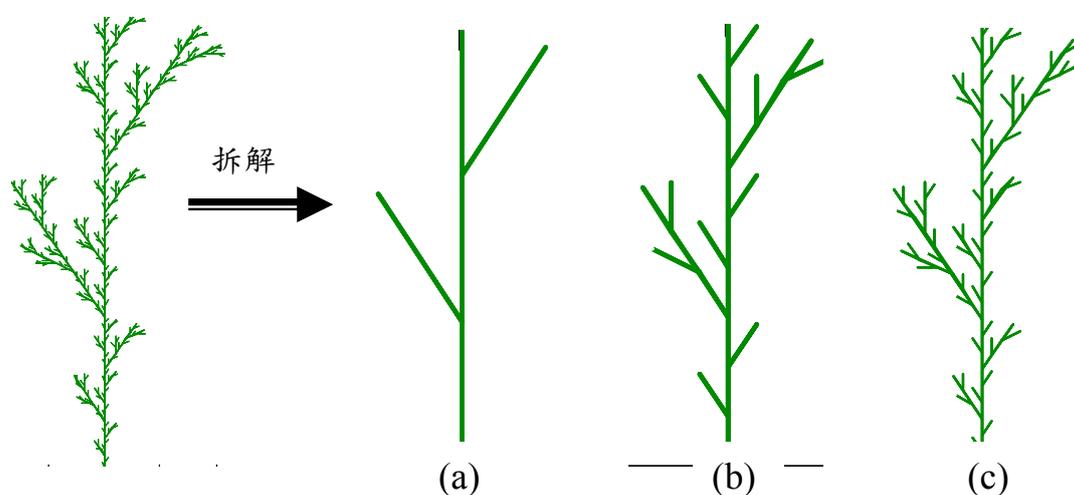


圖 5.1 分形樹

## 5.1 二層碎形晶格的理論模式

單一組的  $q$  對稱晶格圖騰可利用  $q$  個平面波干涉而成，我們在第二章介紹過單一組  $q$  對稱的晶格圖形(圖 2.3)、(圖 2.4)，亦在第三章中提及多個平面波之干涉疊加的理論模式，而本節依然以平面波干涉疊加理論來探討光罩上的孔洞為碎形式分佈法的二層孔洞，將通過這些孔洞之平面波干涉疊加後所產生的圖騰集。以下理論模式皆以 3 對稱為例來闡述。

如同本章一開頭所分析的分形樹方法來分佈光罩上孔洞的位置。我們利用複數平面座標系來描述光罩上孔洞位置，單層的孔洞位置(圖 5.2)的分佈方法為以  $Z_0=0$  為起點， $R$  為孔洞與起點的直線距離

(即光罩環半徑)，均等分佈在環上，角度分別為 $\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{2 \cdot 2\pi}{3}$ 、 $\frac{3 \cdot 2\pi}{3}$ ，其 3

孔洞表示法為：

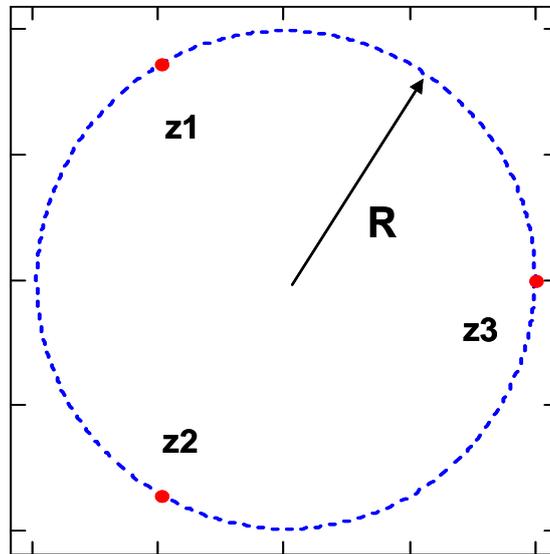


圖 5.2 單層孔洞位置

$$Z_1 = R \cdot e^{i \frac{1 \cdot 2\pi}{3}} + Z_0 \quad (5.1)$$

$$Z_2 = R \cdot e^{i \frac{2 \cdot 2\pi}{3}} + Z_0 \quad (5.2)$$

$$Z_3 = R \cdot e^{i \frac{3 \cdot 2\pi}{3}} + Z_0 \quad (5.3)$$

而二層碎形式孔洞分佈方式依照分形樹拆解法概念，利用複數平面座標，單層 3 孔洞表示法為上述式子(5.1)、(5.2)、(5.3)，而二層碎形式孔洞位置分佈的方法(圖 5.3)是各以上述單層的 3 孔洞位置為起點，孔洞與起點的直線距離縮小為 $\frac{R}{3}$ ，分佈的相對角度和第一層相同，如此可得到 9 個孔洞位置，而這 9 個孔洞位置之表示法為：

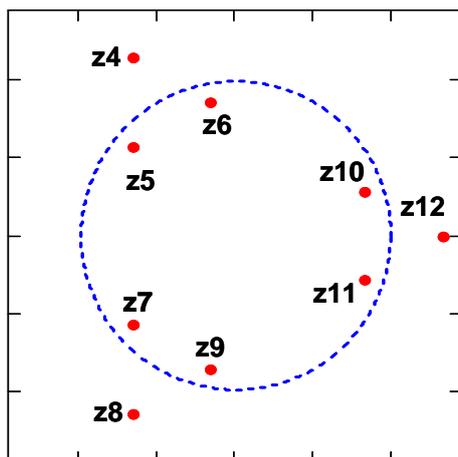


圖 5.3 3 對稱二層碎形式孔洞位置

$$Z_4 = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{1.2\pi}{3}} + Z_1 \quad (5.4)$$

$$Z_5 = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{2.2\pi}{3}} + Z_1 \quad (5.5)$$

$$Z_6 = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{3.2\pi}{3}} + Z_1 \quad (5.6)$$

$$Z_7 = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{1.2\pi}{3}} + Z_2 \quad (5.7)$$

$$Z_8 = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{2.2\pi}{3}} + Z_2 \quad (5.8)$$

$$Z_9 = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{3.2\pi}{3}} + Z_2 \quad (5.9)$$

$$Z_{10} = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{1.2\pi}{3}} + Z_3 \quad (5.10)$$

$$Z_{11} = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{2.2\pi}{3}} + Z_3 \quad (5.11)$$

$$Z_{12} = \frac{R}{3} \cdot e^{i \frac{3.2\pi}{3}} + Z_3 \quad (5.12)$$



將通過上述 9 個孔洞的平面波干涉疊加的式子為

$$\psi = \sum_{s=4}^{12} A_s e^{iK_s \cdot \rho} \quad , \quad \text{其中 } A_s、K_s \text{ 分別為第 } s \text{ 個平面波的振幅及橫向波向量}$$

量，即可得到 3 對稱二層碎形晶格圖案。

依照上述方法可類推出 2 對稱、4 對稱、5 對稱…、任意對稱的二層碎形式孔洞位置(圖 5.4)之複數平面座標表示法。

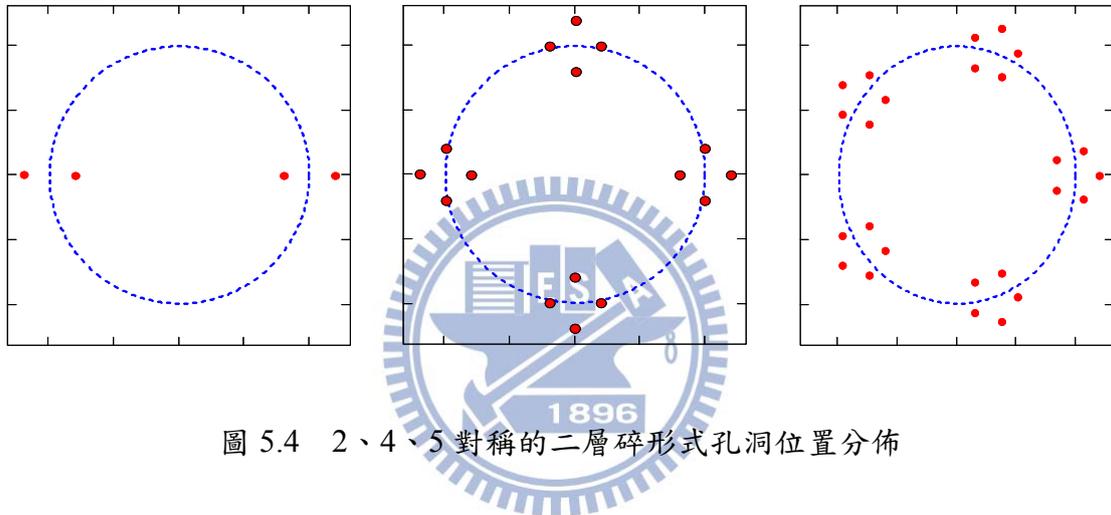


圖 5.4 2、4、5 對稱的二層碎形式孔洞位置分佈

## 5.2 二層碎形晶格的實驗結果與討論

設置實驗架構(圖 5.5)，我們使用具有線偏振的氦氖雷射做為入射光源，其波長為 632.8 nm，輸出功率為 20 mW；利用光束擴束器(Beam expander)使氦氖雷射的發散角小於 0.1 m rad，使其均勻的照射在光罩上。實驗前先利用雷射加工在鋼板設備上鑿出實驗所需要的孔洞數分佈(二層碎形式孔洞分佈)之光罩(Mask)，光罩上環形的半徑為

5 mm，孔洞半徑為 0.1 mm。透鏡焦距為 1000 mm，利用透鏡聚焦成像，使用數位相機紀錄光束干涉後的成像。

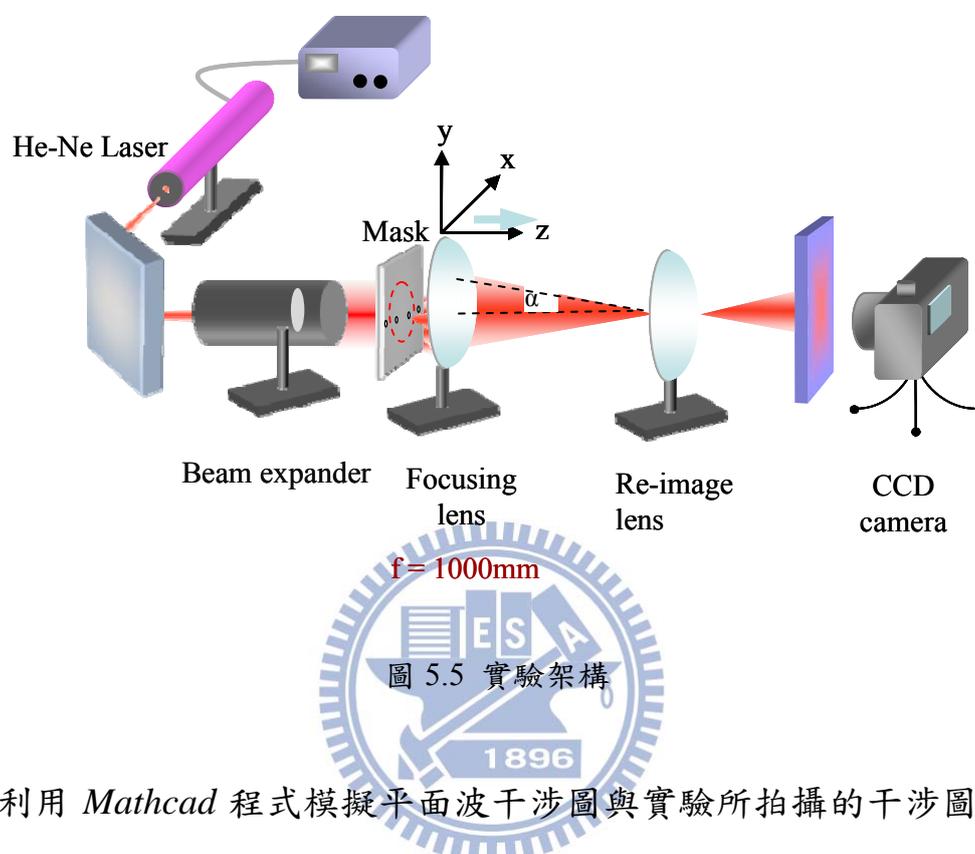


圖 5.5 實驗架構

利用 *Mathcad* 程式模擬平面波干涉圖與實驗所拍攝的干涉圖相互對照，當平面波通過 2、4、5 對稱的二層碎形式分佈的孔洞後，所干涉疊加的圖形，可以發現各圖形中有二層相似的圖形(圖 5.6)、(圖 5.7)、(圖 5.8)、(圖 5.9)：大框框(尺度 1.6 mm)與縮小 10 倍(尺度 0.16 mm)的小框框的圖形彼此相似；2 對稱的大尺度可看到二層不同寬度明暗相間的直條紋干涉圖，縮小成小尺度看內層直條紋干涉與原圖自相似；3 對稱的大尺度可看到二層的 6 角形晶格圖，內層圖案與大尺寸自相似；4 對稱的大尺度可看到二層方形晶格圖，縮小成小尺度看內層方形晶格干涉圖與原圖自相似；更高對稱如 5、8 與 9 的大尺

度皆可看到二層多重對稱晶格干涉圖形，縮小成小尺度其內層晶格圖形與原圖自相似；以上皆符合碎形的定義裡，圖形裁切成很多小部分，小部分的圖樣依然與原始圖形相似，成功的利用平面波干涉出碎形晶格圖騰。

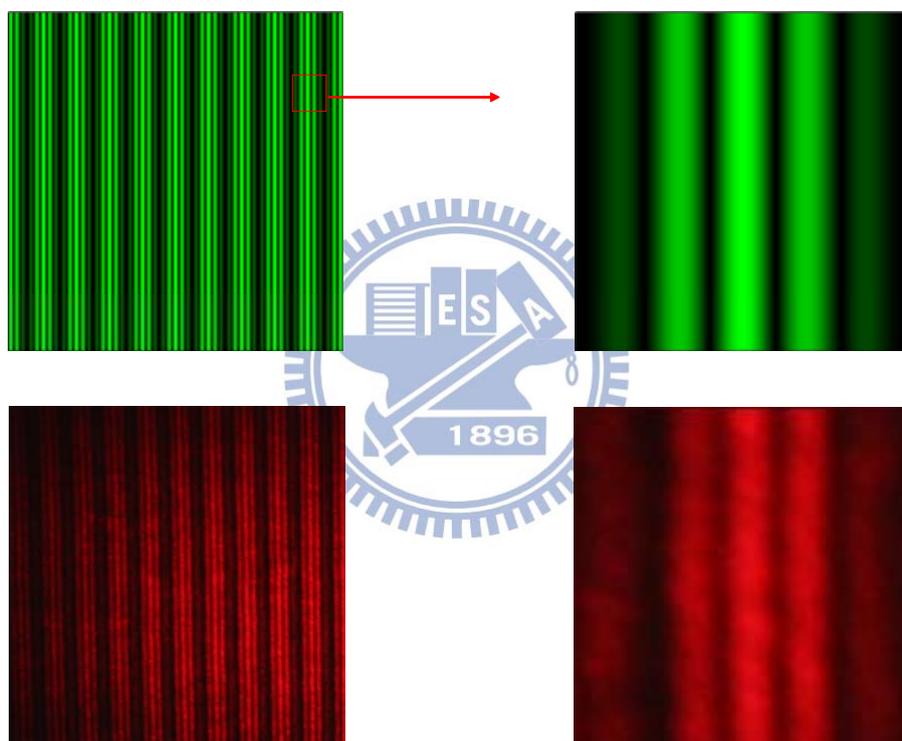


圖 5.6 2 對稱碎形晶格理論、實驗圖

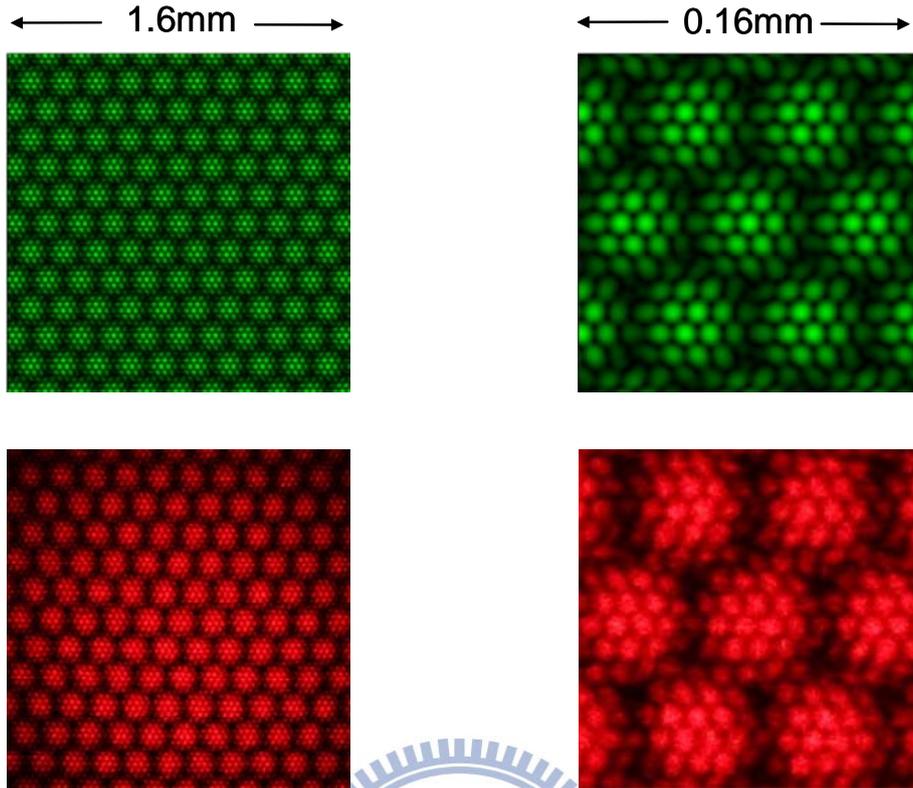


圖 5.7 3 對稱碎形晶格理論、實驗圖

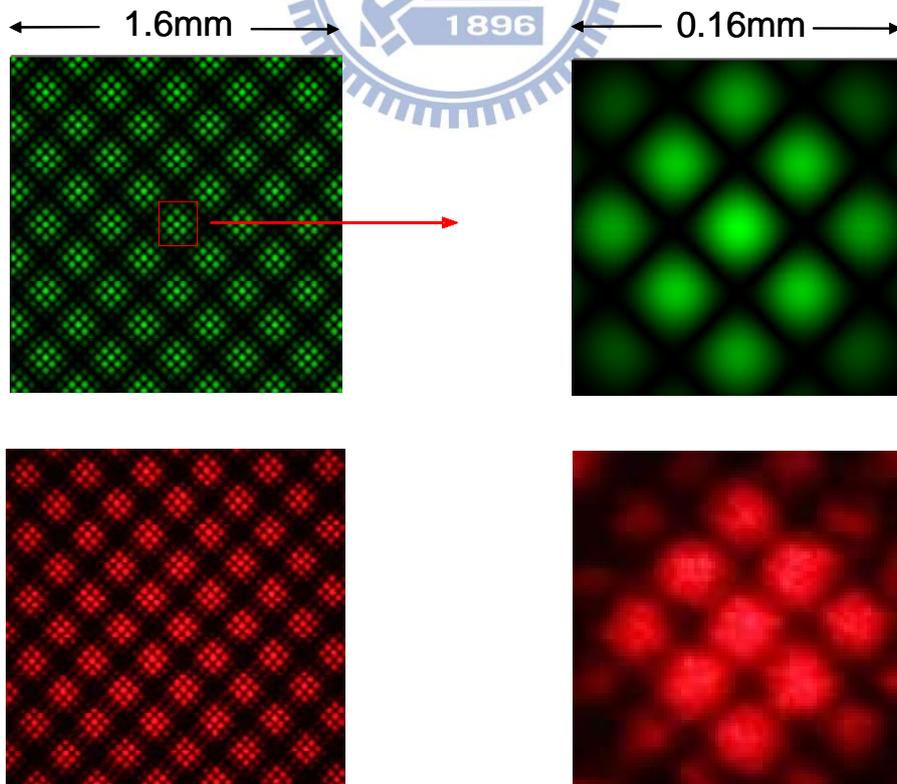


圖 5.8 4 對稱碎形晶格理論、實驗圖

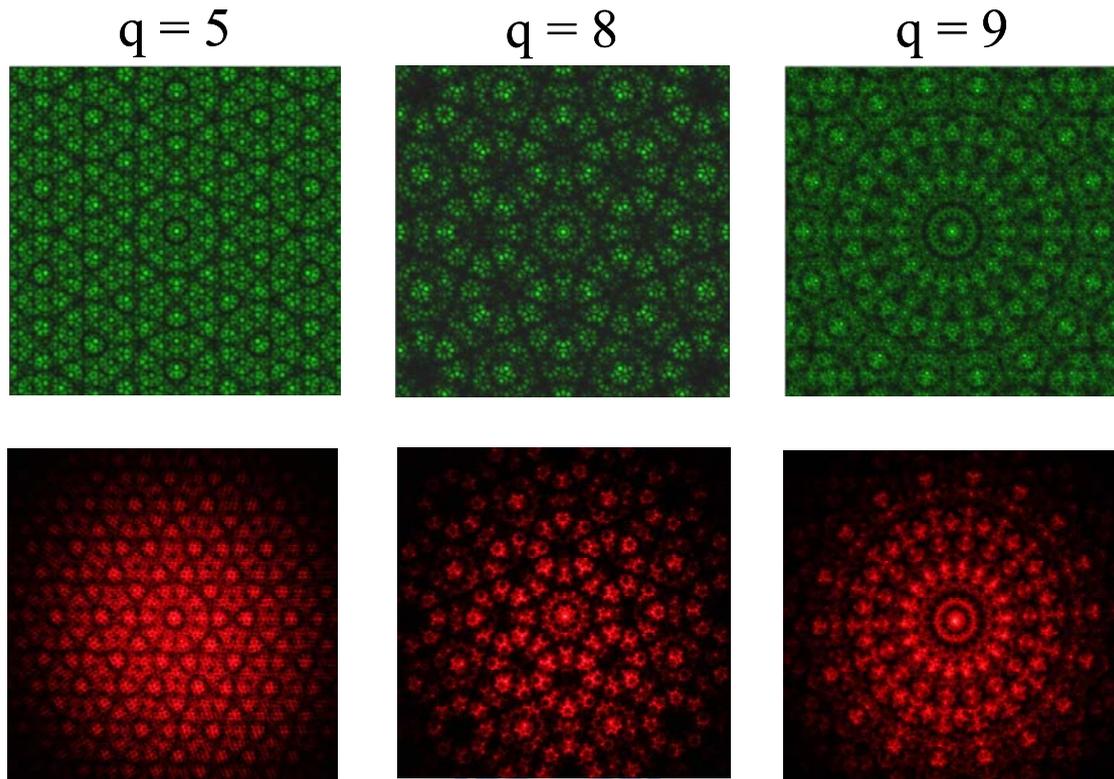


圖 5.9 5、8、9 對稱碎形晶格理論、實驗圖

而在第四章我們曾提及三維的超晶格圖形，其圖騰會隨著  $z$  軸有一週期性的圖騰集，其 *Revival* 的距離為  $Z_r = \frac{2\lambda f^2}{R^2}$ ，影響的因素與波長( $\lambda$ )、透鏡焦距( $f$ )及  $R$  有關( $R$  的因素來自於干涉的平面波的  $k$  向量，一種為通過環上的孔洞的平面波，一種是通過環中心孔洞的平面波，二者的  $k$  向量與  $R$  有正相關)，而此章節所使用的波長與透鏡焦距皆與超晶格圖騰實驗使用的相同，最大的不同是孔洞的分佈將使通過孔洞的平面波之  $k$  向量不同，因此推論此種碎形式孔洞分佈所干涉而成的圖形，應該也會像三維超晶格圖騰一樣，不是只侷限於二維維度上的變化，而是具有三維維度上的變化，也可能隨著  $z$  軸有一週期性的圖騰集，並有一段 *Revival* 的距離。因此我們先從 *Mathcad* 程式

去模擬碎形似的孔洞分佈的三維干涉圖形，確實從模擬干涉圖形中發現有三維維度上的變化特性。

(圖 5.10)、(圖 5.11)、(圖 5.12)分別為利用 *Mathcad* 模擬出的二層碎形式孔洞分佈的 2、3、4 重對稱，在同一尺度下其隨著  $z$  軸的改變所出現的圖騰變化集。就 2 重對稱(圖 5.10)來說， $z = 1000\text{mm}$  時有很明顯的粗暗紋中間夾著細暗紋， $z = 1004\text{mm}$  時細暗紋中亦再夾著更細的暗紋， $z = 1008\text{mm}$  時粗暗紋再次出現但位置整體可視為往右偏移一小段距離， $z = 1012\text{mm}$  時又回到與  $z = 1004\text{mm}$  相同的圖形， $z = 1016\text{mm}$  則回到與  $z = 1000\text{mm}$  完全相同的圖形，其模擬出來的 Revival 距離為  $16\text{mm}$ 。3 重對稱(圖 5.11)  $z = 1000\text{mm}$  時，可看到內外部分之邊界非常清楚，內部晶格完整呈現 3 重對稱， $z = 1006\text{mm}$ ，內外部分之邊界變淡，內部晶格圖案也出現一些變化轉成類似消波柱的圖形， $z = 1010\text{mm}$ ，邊界為明顯的雙條紋分佈，內部晶格變成單個圓形圖案， $z = 1014\text{mm}$ ，圖形與  $z = 1006\text{mm}$  相似， $z = 1020\text{mm}$  時則回到與  $z = 1000\text{mm}$  相同圖形，其模擬出來的 Revival 距離為  $20\text{mm}$ 。4 重對稱(圖 5.12)  $z = 1000\text{mm}$  時，內外部分之邊界明顯，內部晶格完整呈現 4 重對稱， $z = 1004\text{mm}$ ，邊界線擴大但趨向淡化，內部晶格依然呈現 4 重對稱， $z = 1008\text{mm}$ ，整個圖形看來內部僅剩單個晶格數，邊界由雙條紋構成， $z = 1012\text{mm}$ ，圖形與

$z = 1004\text{mm}$  相同， $z = 1016\text{mm}$ ，圖形與  $z = 1000\text{mm}$  相同，其模擬出來的 Revival 距離為  $16\text{mm}$ 。根據以上討論，可驗證一開始的推論——會有三維的 Revival 距離。

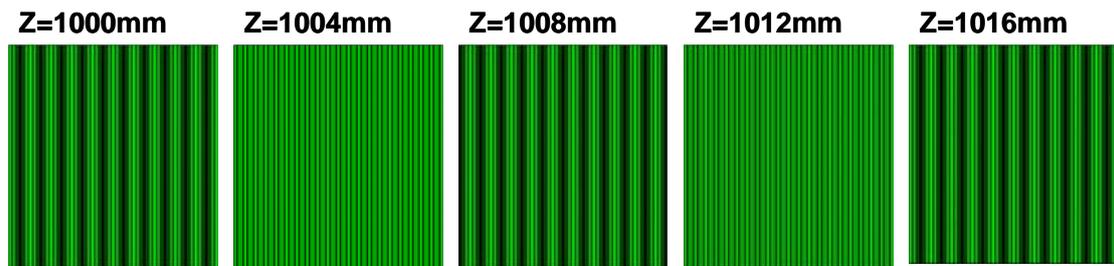


圖 5.10 2 對稱  $Z_T$  理論圖

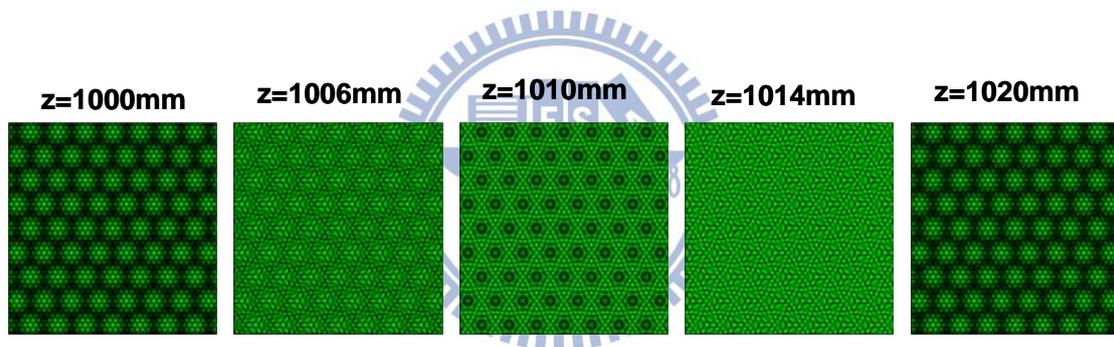


圖 5.11 3 對稱  $Z_T$  理論圖

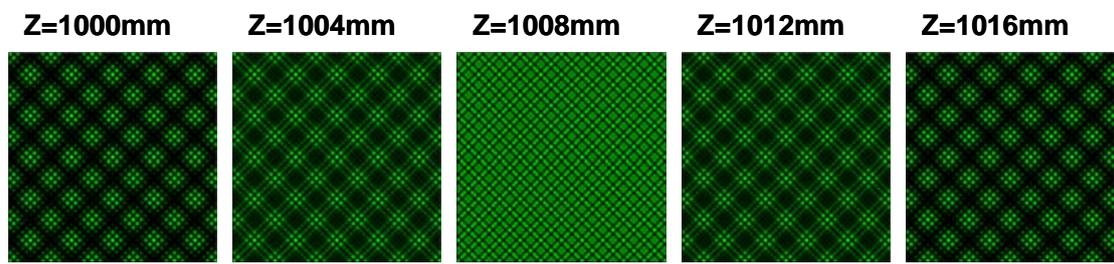


圖 5.12 4 對稱  $Z_T$  理論圖

### 5.3 多層碎形晶格的理論模式

在上一節中，藉由分解分形樹模式之方法，我們以複數平面座標方式來描述光罩上二層碎形式分佈之孔洞位置，那麼是否能找出多層碎形式分佈之孔洞位置的通式？本節依然以 3 對稱為例出發，試著尋找一通式，可涵蓋多對稱多層碎形式分佈之孔洞位置座標關係式。延續上一節之方法，以上節所描述之二層的 9 孔洞位置為起點，而新孔洞分佈與起點的距離(半徑長度)縮小為  $\frac{R}{3^2}$ ，其中  $R$  為光罩原始環形半徑，分佈的相對角度和原始分佈相同，如此可得到 27 個孔洞位置，此 27 個孔洞位置如圖 5.13 且圖 5.14 為局部的放大圖，其數學表示法為以下所列出：

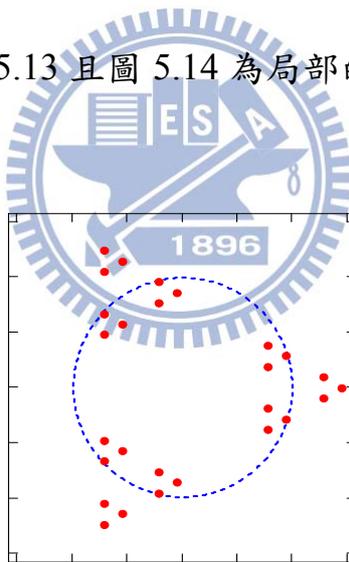


圖 5.13 三層碎形式孔洞位置

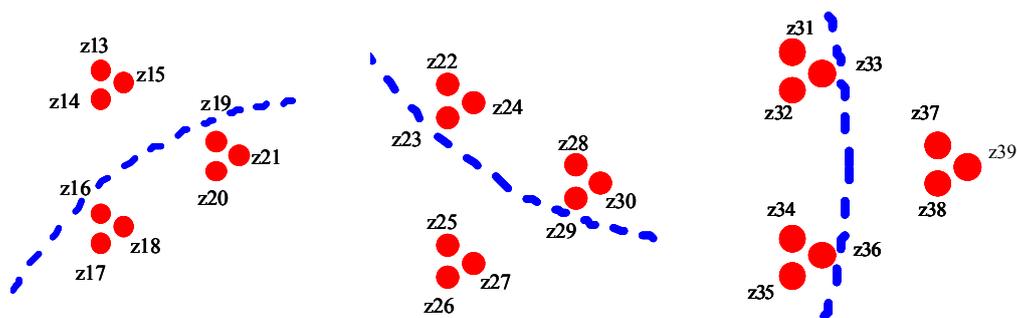
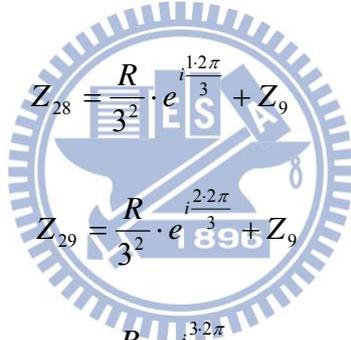


圖 5.14 三層碎形式孔洞位置放大圖

$$\begin{aligned}
Z_{13} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_4 & Z_{22} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_7 & Z_{31} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_{10} \\
Z_{14} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_4 & Z_{23} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_7 & Z_{32} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_{10} \\
Z_{15} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_4 & Z_{24} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_7 & Z_{33} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_{10} \\
Z_{16} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_5 & Z_{25} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_8 & Z_{34} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_{11} \\
Z_{17} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_5 & Z_{26} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_8 & Z_{35} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_{11} \\
Z_{18} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_5 & Z_{27} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_8 & Z_{36} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_{11} \\
Z_{19} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_6 & Z_{28} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_9 & Z_{37} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{1.2\pi}{3}} + Z_{12} \\
Z_{20} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_6 & Z_{29} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_9 & Z_{38} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{2.2\pi}{3}} + Z_{12} \\
Z_{21} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_6 & Z_{30} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_9 & Z_{39} &= \frac{R}{3^2} \cdot e^{i\frac{3.2\pi}{3}} + Z_{12}
\end{aligned}$$



將通過上述 27 個孔洞的平面波干涉疊加的式子為

$$\psi = \sum_{s=13}^{39} A_s e^{iK_s \cdot \rho}$$

，其中  $A_s$ 、 $K_s$  分別為第  $s$  個平面波的振幅及橫向波向量，即可得到 3 對稱三層碎形晶格干涉圖案。原圖(圖 5.15)原始的觀看尺度為 16mm，我們 zoom in  $\frac{1}{10}$  倍看，可到和原圖一樣的晶格結構，再 zoom in  $\frac{1}{5}$  倍看，一樣可看到和原圖相似的晶格結構，共有 3 層尺度晶格結構，形成了 3 對稱的三層碎形晶格干涉圖騰。

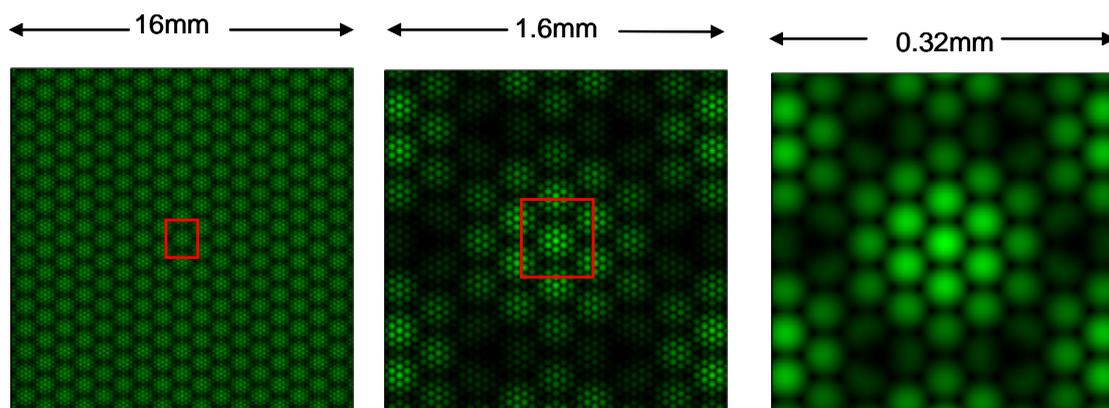


圖 5.15 3 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形

綜合以上的討論過程與結果，我們找出一個符合  $Q$  對稱  $k$  層碎形式之各孔洞位置座標表示通式為：

$$Z_{n+1+Q\left(\frac{Q^{k-1}-1}{Q-1}\right)+Q\cdot\delta} = \frac{R}{Q^{k-1}} \cdot e^{i\frac{(n+1)\cdot 2\pi}{Q}} + Z_{\delta+\frac{Q^{k-1}-1}{Q-1}} \quad (5.13)$$

其中  $n=0, \dots, (Q-1)$ ， $\delta=0, \dots, Q^{k-1}$ ，可以依據此通式，利用 *Mathcad* 程式模擬出各種的多層碎形干涉圖騰。(圖 5.16)、(圖 5.17)、(圖 5.18) 分別為利用 *Mathcad* 程式所模擬出來的 2 對稱、4 對稱、5 對稱之 3 層碎形式孔洞分佈之干涉圖騰集，可看到每種對稱圖騰集都可以發現在不同尺度下(分別為 16mm、1.6mm、0.32mm 三種尺度)，都出現相同的干涉圖形，與碎形的自相似特性一樣，可稱此圖騰集為 3 層碎形晶格圖騰集，其中圖 5.19、圖 5.20、圖 5.21)、圖 5.22 分別為利用 *Mathcad* 程式所模擬出來的 2 對稱、3 對稱、4 對稱、5 對稱之 4 層碎形式孔洞分佈之干涉圖騰集，可看到每種對稱圖騰集都可以發現在不同尺度下(分別 16mm、1.6mm、0.32mm、0.16mm 四種尺度)，

都出現相似的干涉圖形，與碎形的自相似特性一樣，可稱此圖騰集為 4 層碎形晶格圖騰集。如此下去，我們可以輕易的利用 *Mathcad* 程式來模擬出想看到的  $Q$  對稱具有  $k$  層變化的任意碎形晶格干涉圖騰集。

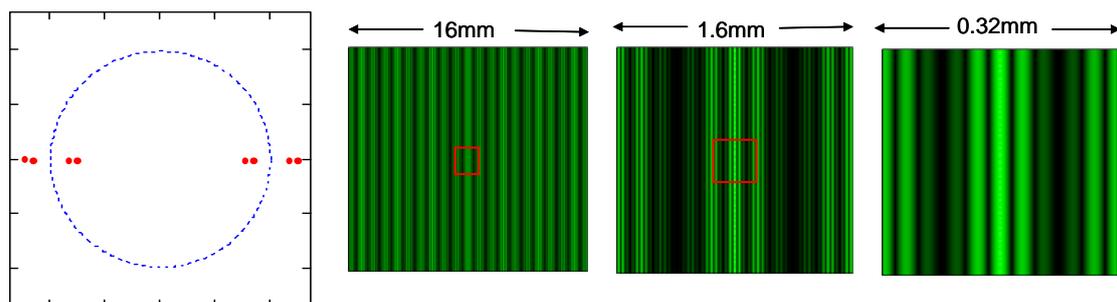


圖 5.16 2 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形

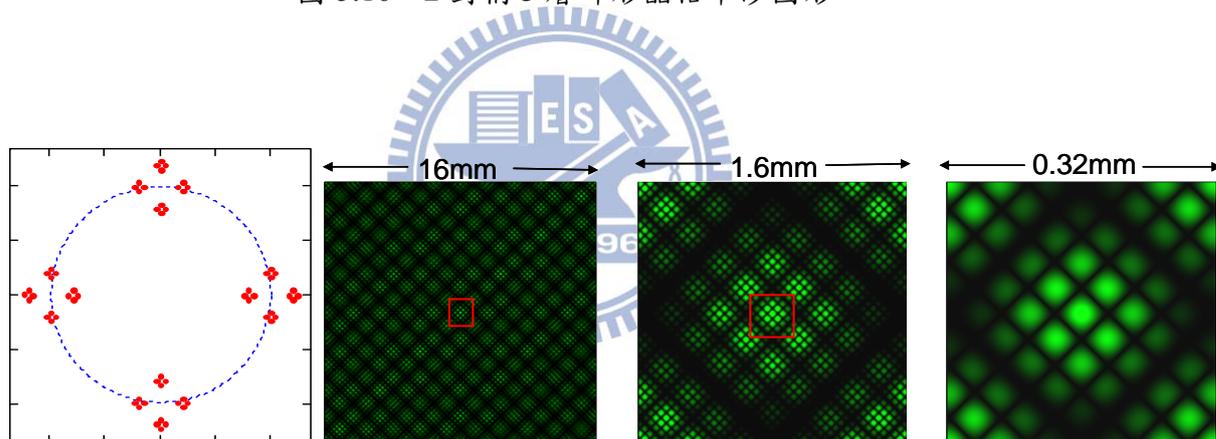


圖 5.17 4 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形

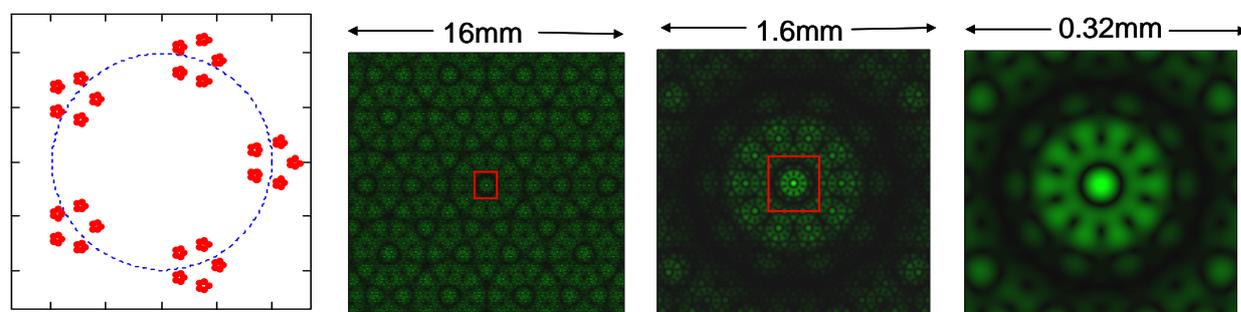


圖 5.18 5 對稱 3 層碎形晶格干涉圖形

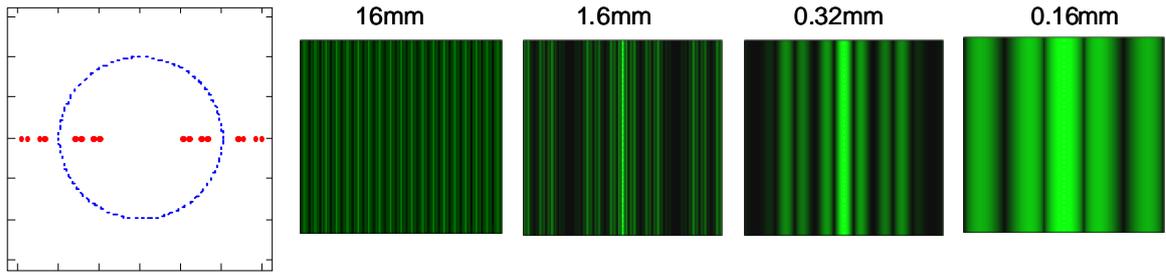


圖 5.19 2 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形

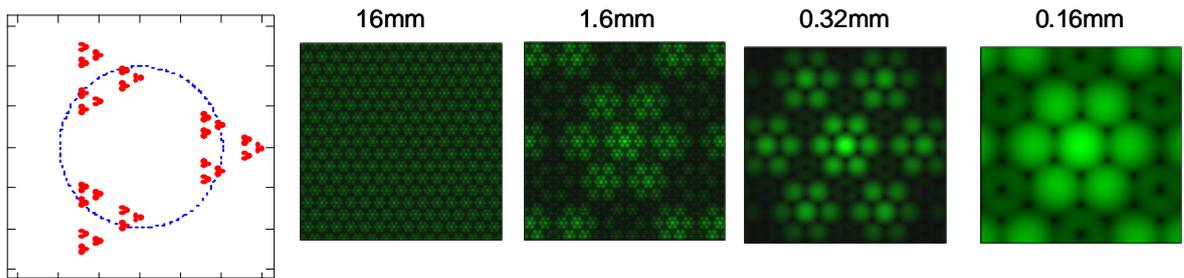


圖 5.20 3 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形

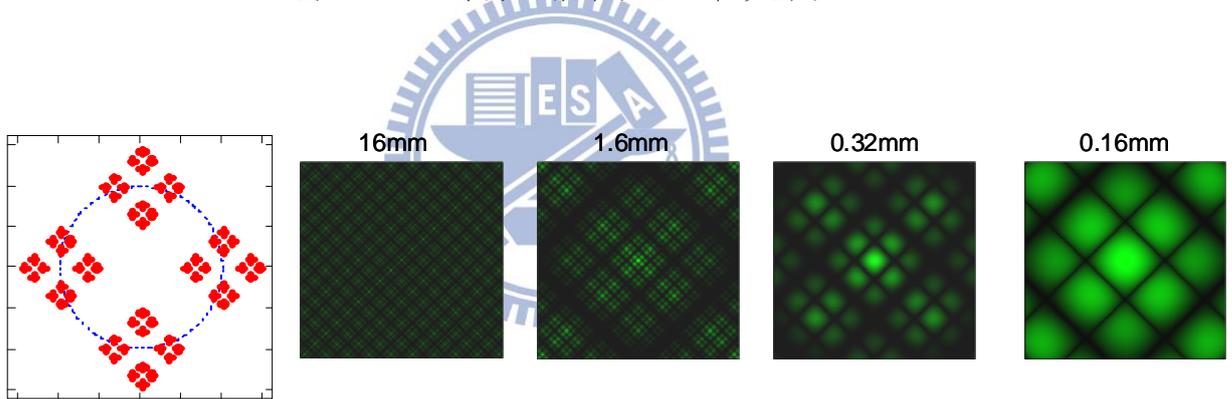


圖 5.21 4 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形

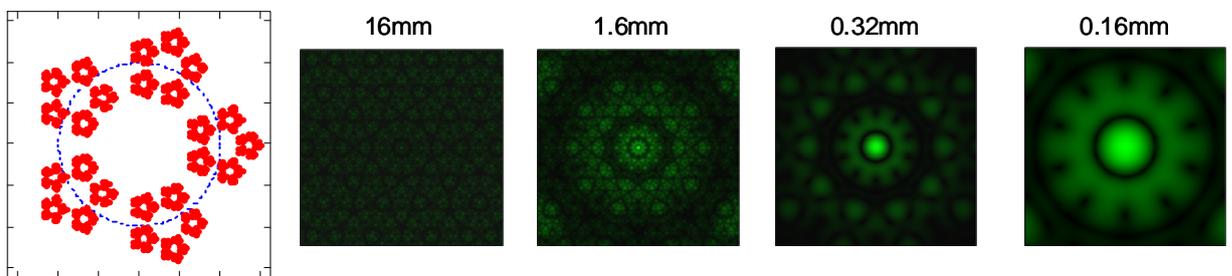


圖 5.22 5 對稱 4 層碎形晶格干涉圖形

而在 5.2 節裡我們曾討論過圖形在三維維度上的變化，在波長與透鏡焦距皆相同的條件下，孔洞的分佈將使通過孔洞的平面波之  $k$  向量不同，因而讓圖形不只侷限於二維維度上的變化，而具有三維維度上的變化，隨著  $z$  軸有一週期性的圖騰集，並有一 *Revival* 的距離。因此未來工作也可以針對多對稱多層的碎形式孔洞分佈去進行波干涉，根據理論模擬佐以實驗實地操作，去找出各種不同的碎形晶格圖騰集。

## 5.4 結論

由以上的理論分析模擬與實驗結果圖騰集可得知，從二層 2.3.4.5 重對稱碎形晶格 (*Fractal crystal*) 出發，找出其平面波干涉疊加的理論模式，進而推出多層多重對稱碎形晶格的波干涉疊加的理論模式，並利用數學軟體 *Mathcad* 模擬出碎形晶格圖騰集，並佐以一些實驗驗證，也發現實驗與理論的圖形相當吻合。但 3 層以上的碎形晶格干涉圖騰集，礙於尚未製作產生多層碎形晶格圖騰所需要的光罩，故還未有實驗圖騰可相佐証，未來的工作將可繼續朝此方向，並增加三維維度上的圖騰收集，可得到更多更豐富的碎形晶格圖騰集。

## 第六章 結論與未來展望

本論文利用光學干涉實驗在第三章及第四章得到 3、4、5、6 重超晶格圖騰集(二維和三維變化)及在第五章得到 2、4、5 重對稱之二層碎形晶格圖騰集(二維變化)，將來可以繼續在三維的超晶格圖騰實驗方面繼續研究，另鑿不同對稱孔洞且中間開孔或甚至在不同位置提供第三組干涉平面波，應該可以獲得更多令人可以期待的美麗圖樣出來。而在 5.3 節中我們討論了多層碎形式孔洞之干涉的圖案，從數學軟體 *Mathcad* 模擬出來的圖騰集也相當具有變化性，不僅止於二維圖騰的變化，甚至隨著屏幕擺放的位置，會顯像出不同的圖騰，有三維上的變化性；因此未來我們亦可以繼續去鑿不同對稱且更多層的碎形孔洞分佈，設置光學干涉實驗，得到一連串的光學干涉碎形圖騰目錄集冊。

而筆者在第一章的研究動機中曾提及希望將本論文的實驗結果，融入筆者自己本身的中學教學課程中，而目前所得到的各式各樣多變且美麗的圖騰集，相信定能引發學生學習高中物理光學的興趣，也期待能有更多的學生進而對物理產生更進一步的深入研究動能。

## 參考文獻

- [1] L. Bindi, P. J. Steinhardt, N. Yao, and P. J. Lu, "Natural Quasicrystals," *Science* 324, 1306-1309 (2009)
- [2] T. Ishimasa, H. U. Nissen, and Y. Fukano, "New ordered state between crystalline and amorphous in Ni-Cr particles," *Phys Rev Lett* 55 (1985).
- [3] J. Li, Y. Liu, X. Xie, P. Zhang, B. Liang, L. Yan, J. Zhou, G. Kurizki, D. Jacobs, K. S. Wong, and Y. Zhong, "Fabrication of photonic crystals with functional defects by one-step holographic lithography," *OPTICS EXPRESS* 16(17) 12899-12904 (2008).
- [4] X. Wang, C. Y. Ng, W. Y. Tam, C. T. Chan, P. Sheng, "Large-Area Two-Dimensional Mesoscale Quasi-Crystals", *Adv. Mater.* 15, 1526-1528 (2003).
- [5] A. Kudrolli, B. Pier, and J. P. Gollub, "Superlattice patterns in surface waves", *Phys D* 123, 99-111 (1998).
- [6] B. B. Mandelbrot, "How long is the coast of Britain Statistical self similarity and fractional dimension," *Science* 155, 636-638 (1967).
- [7] B. B. Mandelbrot, "Fractals, Form, Chance and Dimension," San Francisco, W.H. Freeman & Co (1977).
- [8] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, "Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture," *Science* 315, 1106-1110 (2007).
- [9] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly, "Diffractive-free beams," *Phys. Rev. Lett.* 58, 1499-1501 (1987).
- [10] J. Durnin, "Exact solution for non-diffracting beams," *J. Opt. Soc. Am. A.* 4, 651-654 (1987).

- [11] V. V. Kotiyar, S. N. Khonina, and V. A. Soifer, "Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes," *J.Mod.Opt.* 43, 1231-1239(1995).
- [12] C. Paterson and R. Smith, "Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms," *Opt.Commun.* 124, 121-130(1996).
- [13] C. Paterson and R. Smith, "Helicon waves: propagation-invariant waves in a rotating coordinate system," *Opt. Commun.* 124, 131-140(1996).
- [14] L. Niggl, T. Lanzl, and M. Maier, "Properties of Bessel beams generated by periodic gratings of circular symmetry," *J.Opt. Soc. Am. A* 14, 27-33(1997).
- [15] K. M. Iftexharuddin, A. A. S. Awwal, and M. A. Karim, "Gaussian-to-Bessel beam transformation using a split refracting system," *Appl.Opt.* 32, 2252-2256 (1993)
- [16] R. M. Herman and T. A. Wiggins, "Production and uses of diffractionless beams," *J.Opt. Soc. Am. A* 8, 932-942 (1991).
- [17] J. Turunen, A. Vasara, A. T. Friberg, "Holographic generation of diffraction free beams," *Appl.Opt.*, 27, 3959-3962(1988).
- [18] L. Niggl, T. Lanzl, and M. Maier, "Properties of Bessel beams generated by periodic gratings of circular symmetry," *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(1), 27-33(1997).
- [19] P. Vahiman, V. Kettunen, M. Kuittinen, J. Turunen, A. T. Friberg, "Electromagnetic analysis of nonparaxial Bessel beams generated by diffractive axicons," *J.Opt. Soc. Am. A*, 14(8), 1817-1824(1997).

[20] R. Piestun, J. Shamir, "Control of wave-front propagation with diffractive elements," Opt. Lett. 18(11), 771-773(1994).

