

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩士論文

利用數學計算研究紐結圖像

Visualization of knots with Mathematical computation

研究生：張鳳蘭

指導教授：陳永富 教授

中華民國 101 年 6 月

利用數學計算研究紐結圖像
Visualization of knots with Mathematical computation

研究生：張鳳蘭

Student : Feng-Lan Chang

指導教授：陳永富

Advisor : Yung-Fu Chen

國立交通大學
理學院科技與數位學習學程
碩士論文

A Thesis

Submitted to Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年六月

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 理學院 數位學習組 學程 碩士班 張鳳蘭 君

所提論文 (中文) 利用數學計算研究紐結圖像

(英文) Visualization of knots with Mathematical computation

合於碩士資格標準，業經本委員會評審認可。

口試委員：

莊重

陳永富

鍾天吉

指導教授：

陳永富

班主任：

鍾天吉

中華民國 101 年 5 月 25 日

利用數學計算研究紐結圖像

研究生：張鳳蘭

指導教授：陳永富教授

國立交通大學理學院科技與數位學習學程



本文主要是利用數學軟體來探討「紐結(knots)」。首先探討二維的利薩如(Lissajous)圖形、擺線、次擺線等二維平面曲線圖形。其次，延伸到三維的利薩如紐結、擺線紐結、環面紐結、裝飾紐結等紐結。針對利薩如紐結，進行一系列不同相位及頻率的分析；接著觀察擺線紐結、環面紐結的三角函數參數方程中各項係數改變時，所得的規律及變化；以及研究在裝飾紐結上微調數學式時所產生的特殊紐結型式。此外，還會探討經由 $SU(2)$ 群所進行從利薩如紐結轉換到擺線紐結的 $SU(2)$ 紐結。最後將進一步試著將紐結圖形的變化與樂理的音階理論做對照，結合數學軟體及數學原理，設計出一個簡易的紐結樂譜或紐結音符。

Visualization of knots with Mathematical computation

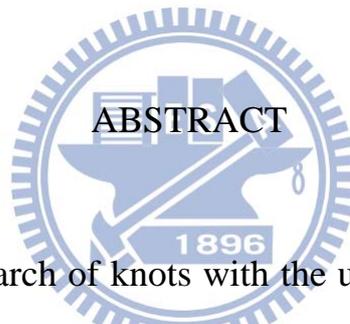
Student : Feng-Lan Chang

Advisor : Dr.Yung-Fu Chen

Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University



The paper is the research of knots with the use of Mathematical software. Firstly, we introduce two-dimensional curves such as Lissajous figures, cycloids, and trochoids. Then, we extend to the three- dimensional knots such as Lissajous knots, trochoid knots, torus knots, and the decorative knots. In the study of Lissajous knots, we have a series of analysis between the different phases and frequencies. For the trochoid knots and the torus knots, we focus on the affection of the various coefficients in the formulas to the knot patterns. We also try to have the formulas varied in order to result in the special shape of knots. Besides, there is a heavy discussion about $SU(2)$. Furthermore, we can generate the $SU(2)$ knots using the idea of $SU(2)$ transformations combined with the 3D knot generating formula. Finally ,we introduce the musical theory about scales for the goal of designing knot notes.

誌 謝

有段話的大意如下：「人在這一生中會遇到哪些人，遭遇怎樣的事，會有何成就或困頓或心思情念，都是上一世就寫好的劇本。」對我來說，可以在交大 DPSS 實驗室學習近兩年這件事，應該是生命中一個很大的轉彎。

在這裏，遇到了亦師亦友的老師—陳永富老師。陳老師對教育的熱忱、以及在講課時的生動活潑，對同樣是教育工作者的我來說，有很正面的啟發及感染力。此外，老師對研究的投入及對學生的提攜指點更是樹立了良好的典範。因此，對老師的感謝及敬佩，非筆墨可表述。

在這裏，還遇到了陳老師的眾多高徒，個個身懷絕技，總是能三兩下，就破除我的迷思。因此，心中升起感謝之意時，也有更多的崇拜。在此要感謝所有給我協助的高徒們：梁興弛是最辛苦的一位，用了很多時間及心力一路陪我研究；黃郁仁是第一個一直被我用怪問題打擾的人；小江在我想退縮時及時地伸手拉了一把；董容晨細心嚴謹的推理讓我透徹物理與數學的交集；依萍在口試前給我的關鍵提問，助我更淡定地準備口試。此外，毓捷、冠瑋老大、彥廷、威哲、段必、政猷、建志、舜子…分別大大小小的給了我許多協助及鼓勵，我都點滴在心中。因此，我對 DPSS 實驗室的註解是：「我的一生最美好的場景，就是遇見你們，謝謝你們所有人。」

而最後要感謝的一個最重要的人，就是每天帶給我很多笑容的老公。一直以來的「彩衣娛妻」，讓我可以堅持到現在。謝謝你，文棋老公！

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖表目錄	v
一、	簡介.....	1
1.1	研究動機.....	1
1.2	本文架構.....	2
二、	利薩如曲線與次擺線曲線.....	3
2.1	利薩如曲線(Lissajous curve).....	3
2.2	擺線、外擺線與內擺線.....	6
2.3	次擺線、外次擺線與內次擺線.....	10
三、	利用 $SU(2)$ 探討利薩如曲線到擺線的幾何轉換.....	16
3.1	$SO(3)$ 群.....	16
3.2	$SU(2)$ 群.....	21
3.3	利薩如與次擺線的幾何轉換.....	22
四、	紐結.....	29
4.1	利薩如紐結(Lissajous knots).....	29
4.2	環面紐結.....	34
4.2.1	(p,q)-環面紐結.....	34
4.2.2	擺線與次擺線紐結.....	37
4.3	$SU(2)$ 紐結.....	43
五、	複雜裝飾紐結.....	46
5.1.	裝飾環面紐結.....	46
5.2.	裝飾擺線紐結.....	54
5.3	裝飾紐結與音符.....	59
六、	結論與未來展望.....	63
6.1	結論.....	63
6.2	未來展望.....	64
附錄一	66
參考文獻	71

圖表目錄

圖 2-1	Special cases of Lissajous curves.....	4
圖 2-2	Lissajous patterns.....	5
圖 2-3	擺線 Cycloids	6
圖 2-4	不同 R/r 比值的外擺線	7
圖 2-5	不同 R/r 比值的內擺線	7
圖 2-6	R/r 比值為最簡分數時的外擺線.....	8
圖 2-7	R/r 比值為最簡分數時的內擺線.....	8
圖 2-8	R/r 比值為無理數時的外擺線.....	9
圖 2-9	R/r 比值為無理數時的內擺線.....	9
圖 2-10	(a)短幅次擺線(b)擺線(c)長幅次擺線.....	11
圖 2-11	$R/r=10$ 隨著 λ 變化的外次擺曲線.....	12
圖 2-12	$R/r=10$ 隨著 λ 變化的內次擺曲線.....	13
圖 2-13	$\lambda=0.7$ 時不同 R/r 比值的短幅外次擺線.....	13
圖 2-14	$\lambda=1.5$ 時不同 R/r 比值的長幅外次擺線.....	14
圖 2-15	$\lambda=0.7$ 時不同 R/r 比值的短幅內次擺線.....	14
圖 2-16	$\lambda=1.5$ 時不同 R/r 比值的長幅內次擺線.....	15
圖 3-1	固定 Z 軸的 SO(3)座標旋轉.....	17
圖 3-2	$\omega_1/\omega_2=1/5$ 時不同 $\tilde{\alpha}$ 所對應的各式 SU(2)曲線.....	26
圖 3-3	$\omega_1/\omega_2=-1/5$ 時不同 $\tilde{\alpha}$ 所對應的各式 SU(2)曲線.....	27
圖 3-4	$\omega_1/\omega_2=\pm 1/2$ 時不同 C_1, C_2 比值時 SU(2)轉換前後圖.....	27
圖 3-5	$\omega_1/\omega_2=\pm 1/3$ 時不同 C_1, C_2 比值時 SU(2)轉換前後圖.....	28
圖 3-6	$\omega_1/\omega_2=\pm 3/7$ 時不同 C_1, C_2 比值時 SU(2)轉換前後圖.....	28
圖 4-1	(a)非交錯紐結(b)交錯紐結.....	30
圖 4-2	$(\phi_x, \phi_y) = (0.5\pi, \pi)$ 時, 不同 (n_x, n_y, n_z) 所對應的利薩如紐結...	31
圖 4-3	(n_x, n_y, n_z) 相同時, 相位不同的利薩如紐結.....	32
圖 4-4	$(n_x, n_y, n_z) = (2, 3, 7)$ 時, 不同 (ϕ_x, ϕ_y) 的利薩如紐結.....	33
圖 4-5	$(n_x, n_y, n_z) = (2, 5, 7)$ 時, 不同 (ϕ_x, ϕ_y) 的利薩如紐結.....	33
圖 4-6	(2,3)-環面紐結(Trefoil)	35
圖 4-7	(p,q)-環面紐結.....	35
圖 4-8	三葉紐結(i): (a) Righthand Trefoil (b) Lefthand Trefoil.....	41
圖 4-9	三葉紐結(ii): (2,3)擺線紐結(inwards) $q > 0$	42
圖 4-10	三葉紐結(iii): (2,3)-環面紐結(Trefoil).....	42
圖 5-1	裝飾環面紐結型一(5.2)式, 變化 r 值	47
圖 5-2	裝飾環面紐結型一(5.2)式, 變化 q 值.....	47

圖 5-3	裝飾環面紐結型二(5.3)式，變化 r 值	48
圖 5-4	裝飾環面紐結($q_n > p$)	49
圖 5-5	裝飾環面紐結($p > q_n$ for some q_n)	53
圖 5-6	裝飾擺線紐結	55
圖 5-7	(a)祖母結(b)平方結	58
圖 5-8	五線譜	59
圖 5-9	數字簡譜與音名	60
圖 5-10	鋼琴鍵盤與升降半音	60
圖 5-11	音階示意圖	61
圖 5-12	紐結音符	61
表 4.1	(p, s)擺線紐結	39
表 4.2	$SU(2)$ 紐結， $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 5$	44
表 4.3	$SU(2)$ 紐結， $\omega_1 : \omega_2 = 1 : -5$	45



第一章 簡介

1.1 研究動機

自 1847 年出版《拓樸學的初步研究》一書後，這本由高斯的學生利斯亭所撰寫的專題著作，開啟了拓樸學家對於紐結的討論與研究。直到今日，數學家們對於紐結研究所得出的紐結定義、紐結模型、紐結理論、及所謂的紐結等價與紐結不變量等概念，一直是研究活動的焦點。其中最主要的有二：一是 1926 年的亞歷山大多項式，將每一種紐結都配上一個變數 t 的多項式，並按照一個標準計算程序而得，可用於辨別一個三葉結與一個平結；二是 1984 年的瓊斯多項式，被認為是亞歷山大多項式的某種變體，但對於辨別紐結更為有效，可以將左向三葉結和右向三葉結區別開來。至 1996 年，已有十二個或甚而更多新近出現的紐結多項式；這些多項式的不變量的意義仍然是拓樸學家在探討核算的主題，似乎和量子物理學的關係匪淺[1,2]。

在交大 DPSS 實驗室及「科學計算與視覺化」這門課中，學習到用 mathcad 這個數學軟體來設計紐結，也討論了其相關的數學式及數學理論。這引發了我對於用數學原理來設計紐結的興趣與好奇。但我所關注的焦點，主要是利薩如紐結(Lissajous knots)、擺線與次擺線紐結(cycloid and trochoid knots)、及環面紐結(torus knots)。文中會先介紹二維曲線的利薩如曲線與擺線的數學式及其對應的圖形，並探討利用 $SU(2)$ 進行利薩如曲線與

擺線的幾何轉換原理。接著，利用數學軟體呈現三度空間的紐結曲線(利薩如紐結、擺線紐結、SU(2)紐結)並依其數學式進行分析及探討，再將紐結數學參數方程在三角函數的類別及項數、各係數值等進行若干不同的變化以得到各式各樣特殊的裝飾紐結。本文最後將進一步嘗試將音符與紐結類型做對照，製作出一套紐結音符。

1.2 本文架構

本文第一章為簡介，說明研究的主旨與內容。自第二章起，先介紹二維曲線，包括有：利薩如曲線、內/外擺線、內/外次擺線。第三章則是介紹SO(3)和SU(2)的空間旋轉矩陣，並探討如何利用SU(2)將三度空間中的利薩如曲線轉換為擺線。第四章進入本文的主題之一：將第二章的二維曲線擴充至三度空間變成「利薩如紐結」、「擺線紐結」及在紐結理論中已廣泛討論的「環面紐結」，並探討當紐結數學式的頻率、相位不同時，紐結型態的變化及差異。接著是利用SU(2)畫出從利薩如紐結轉換為擺線紐結之間的過渡紐結--SU(2)紐結。第五章是進一步將「環面紐結」、「擺線紐結」數學式中的頻率、振幅等係數做不同的組合及變化，設計出各式各樣的「裝飾紐結」。最後將紐結的變化圖樣與音符結合，設計出簡單的紐結音符。第六章則是結論和未來展望。

第二章 利薩如曲線與次擺線曲線

2.1 利薩如曲線(Lissajous curve)

Lissajous figures 是由兩個互相垂直的正弦曲線或餘弦曲線在坐標平面上合成的曲線；也可以說，方向互相成直角的兩振動，重疊時所形成的位移圖形。我們可以從質點在平面上運動，其 x 、 y 坐標隨簡諧運動而振盪的情形來說明。Lissajous figures 的方程式可以如下表示：

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cdot \cos \omega_x t \\y(t) &= B \cdot \cos(\omega_y t + \phi)\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 A 、 B 分別表示 x 、 y 方向振盪時的振幅， ω_x 、 ω_y 為角頻率， ϕ 為 x 坐標及 y 坐標之相差[3]。若考慮 $\omega_x = \omega_y = \omega_0$ 頻率相同時，且若兩運動同相，即 $\phi = 0$ ，則可得 $y = \frac{B}{A}x$ 的直線軌跡，其所呈現的振動為簡諧運動，振幅為 $\sqrt{A^2 + B^2}$ ，令其位移為 r ，則可得方程式為： $r = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega_0 t$ ；若兩個運動方向互相垂直，當 $\phi = \pi$ 時，可得 $y = -\frac{B}{A}x$ 的直線軌跡，其所呈現的振動也是簡諧運動，振幅為 $\sqrt{A^2 + B^2}$ 。所以當 $\phi = 0$ 或 π ，兩個同頻率且互相垂直的簡諧運動之重疊，其結果為同頻率之直線諧和運動(Rectilinear harmonic Motion)，如圖 2-1(a)。同樣地，考慮相同頻率 $\omega_x = \omega_y = \omega_0$ ，若當 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 時，此一沿 x 軸及沿 y 軸之運動為二次運動(Quadratic Motion)，如圖 2-1(b)。此時之方程式為： $y = B \cdot \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -B \sin \omega_0 t$ ，與 $x = A \cdot \cos \omega_0 t$ 合併後，可得

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ 的橢圓軌跡方程式。我們可以藉由求出質點在 $x=+A$ 處之速度來證明 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 時為順時針方向。證明如下：因為 $x = A \cos \omega_0 t = A$ ，所以 $\cos \omega_0 t = 1$ 。

因為在 $x=+A$ 處之速度方向為平行於 y 軸，其沿 y 軸之分量為

$v_y = dy/dt = -\omega_0 B \sin \omega_0 t = -\omega_0 B$ 。因為 v_y 為負值，故知運動方向必然向下，得

證為順時針方向。若 $\phi = -\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}$ 時，可以得到同一個橢圓，但運動方向為

逆時針方向。因此，當相差 $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ 時，兩個同頻率之簡諧運動重疊之結果為

一橢圓運動(Elliptical Motion)。當 $A=B$ 時，橢圓變為圓，而為圓周運動，

如圖 2-1(c)。

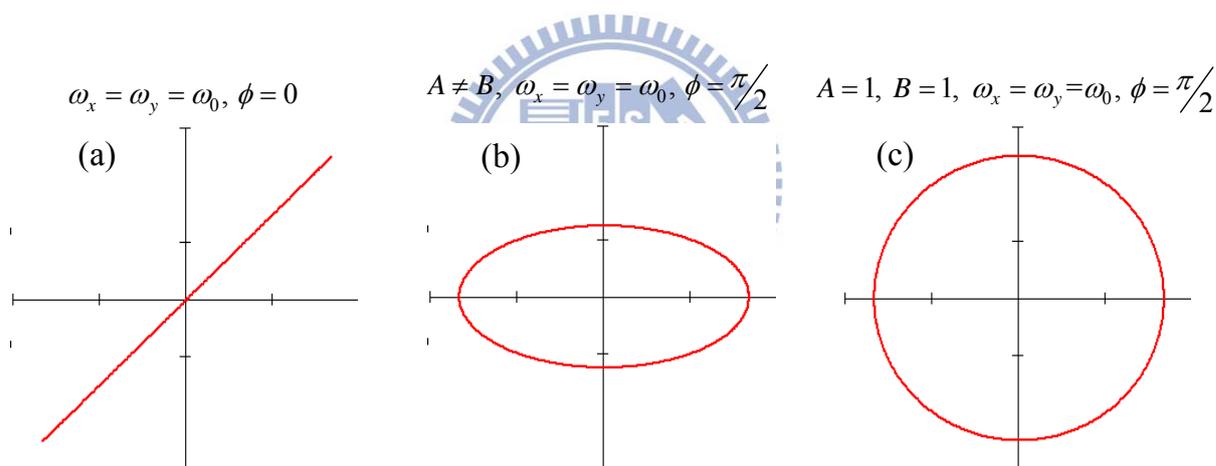


圖 2-1 Special cases of Lissajous curves

另一種重要的 Lissajous figures，則是兩個不同頻率而且互相垂直之兩個簡諧運動之重疊，即式(1)之重疊；其合成之路徑決定於角頻率之比值 $\omega_x : \omega_y$ 及相差 ϕ 值。下圖 2-2 為不同頻率比以及在不同相位角下，所形成的各式各樣曲線。

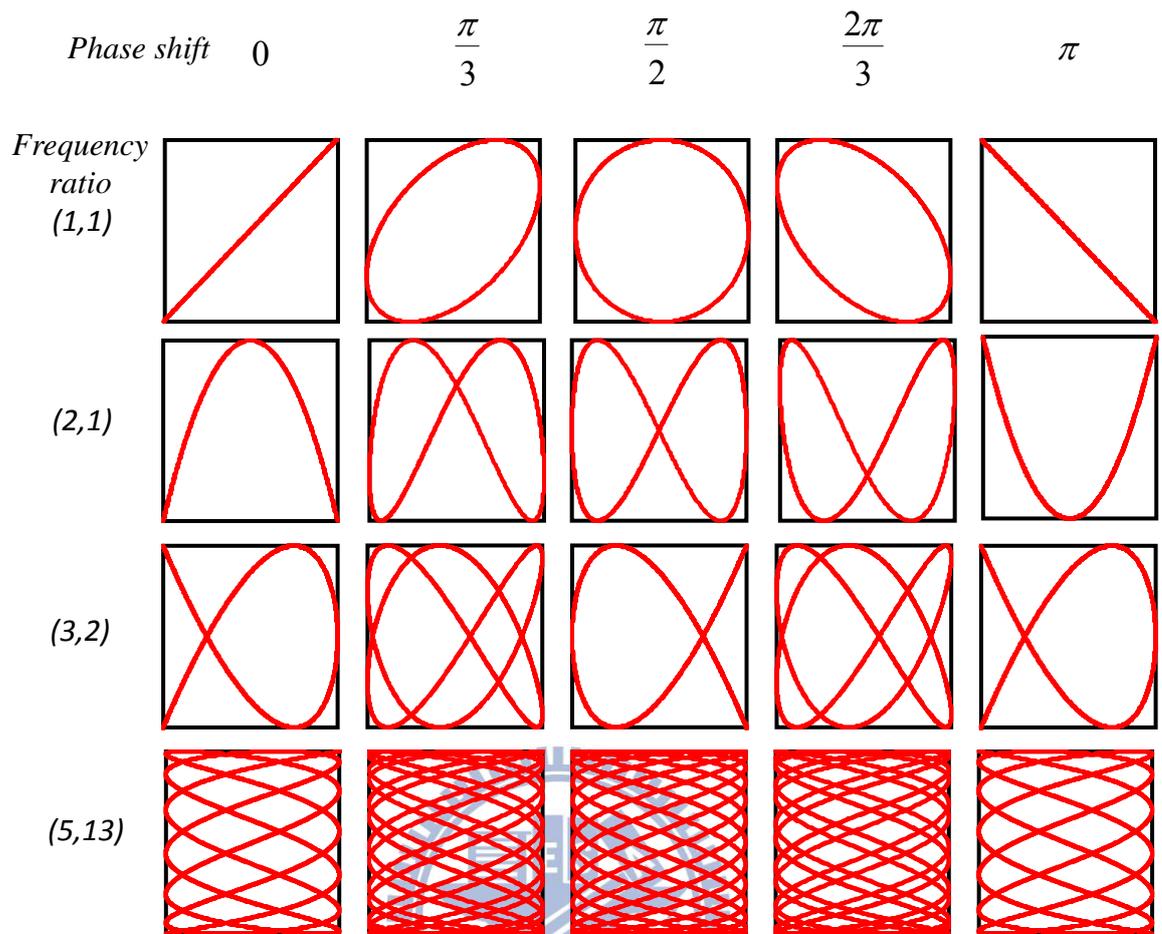


圖 2-2 Lissajous Patterns

2.2 擺線、外擺線與內擺線

擺線(Cycloid)是一移動的圓沿一固定直線相切而滾動時，圓周上一特定點的軌跡[4]，如圖 2-3 所示：

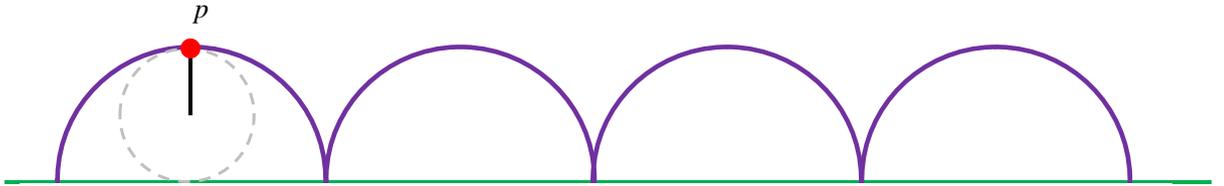


圖 2-3 擺線 Cycloid

擺線軌跡參數方程可以表示成：

$$\begin{aligned} x &= r\theta - r \cdot \sin \theta \\ y &= r - r \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中(2.2)式中 r 表動圓半徑， θ 表圓周轉的角度。

另外，外擺線及內擺線(epicycloid and hypocycloid)則是一個移動圓沿一固定圓進行外切及內切的滾動(但無滑動)，移動圓上面圓周的某一特定點的軌跡，分別稱為外擺線及內擺線。簡言之，外擺線就是動圓圓周上某特定點在一固定圓外部沿圓周滾動的軌跡；而內擺線則是沿圓周內部滾動所形成的軌跡[4]。外擺線和內擺線的軌跡參數方程分別如(2.3)式與(2.4)式：

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos\frac{R+r}{r}\theta \\ y &= (R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\theta + r\cos\frac{R-r}{r}\theta \\ y &= (R-r)\sin\theta - r\sin\frac{R-r}{r}\theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 R 表固定圓半徑， r 表動圓半徑， θ 表兩圓連心線與固定圓的水平直徑此兩線之間所夾的角度。圖 2-4 與圖 2-5 為改變 R 與 r 的比值所形成各式的外擺線與內擺線曲線。

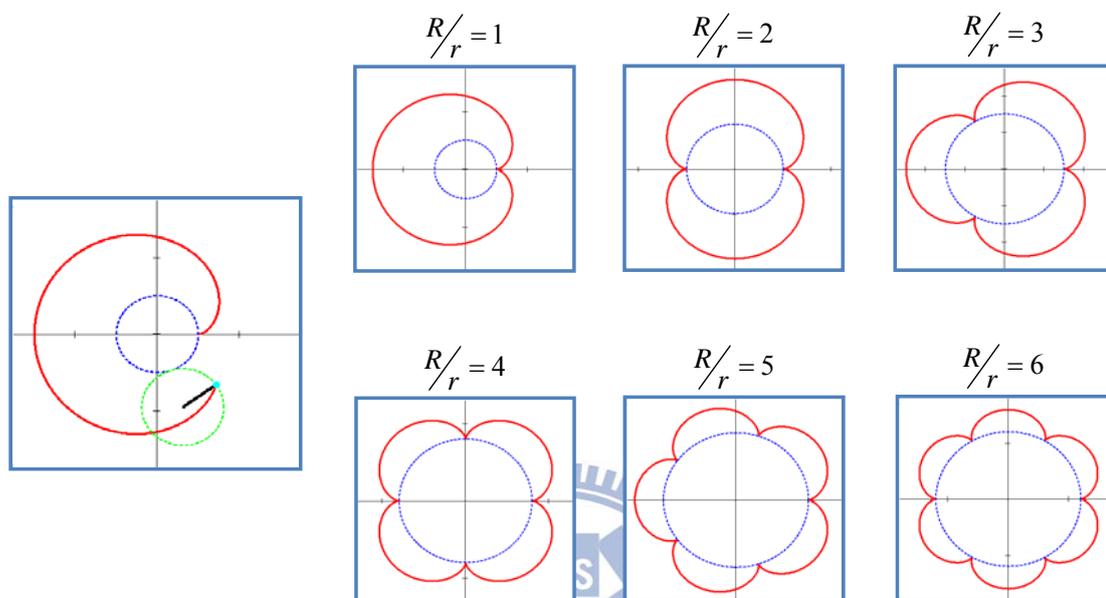


圖 2-4 不同 R/r 比值的外擺線

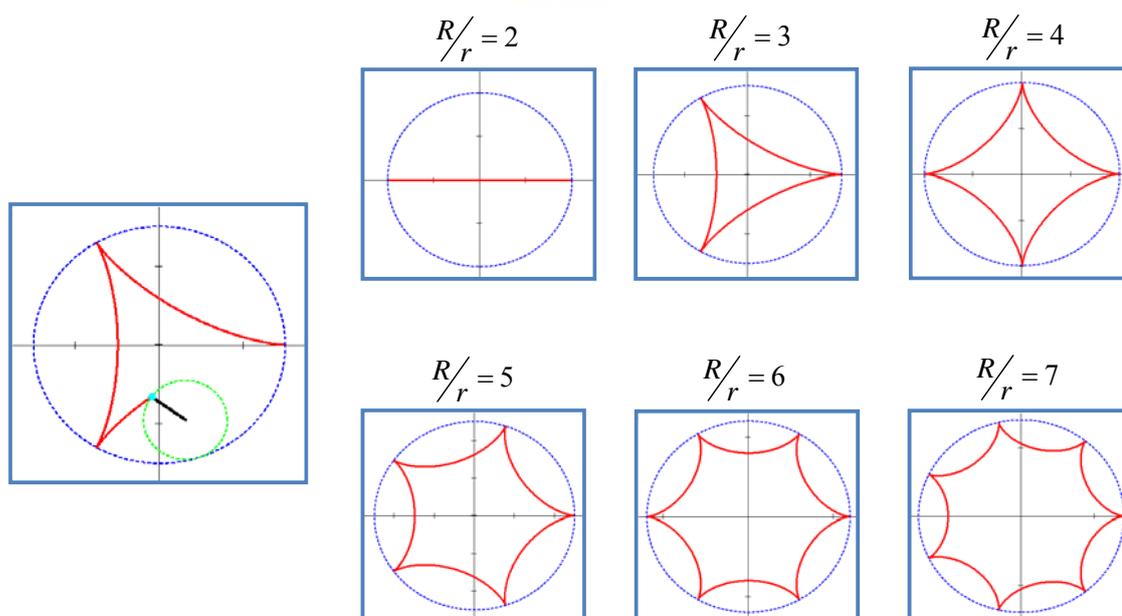


圖 2-5 不同 R/r 比值的內擺線

內擺線的參數方程式(2.4)式是用 $-r$ 取代外擺線參數式(2.3)式的 r 所得到的。其中有幾個比較有趣的情況，例如：當 $R/r=1$ 的外擺線時，亦稱為心臟線 cardioid，如圖 2-4 所示，其方程可簡化為：

$$x = 2r \cos \theta - r \cos 2\theta, y = 2r \sin \theta - r \sin 2\theta \quad (2.5)$$

當 $R/r=4$ 的內擺線時，稱為星形線 astroid，如圖 2-5 所示，其方程可簡化為：

$$x = R \cos^3 \theta, y = R \sin^3 \theta \quad (2.6)$$

然而 R/r 的比值不一定要為整數，只要其比值為一有理數(即可以化成分數形式)，亦可以形成封閉的軌跡曲線，下圖 2-6 與圖 2-7 為當 R/r 比值為一個最簡分數時所呈現出來的軌跡。

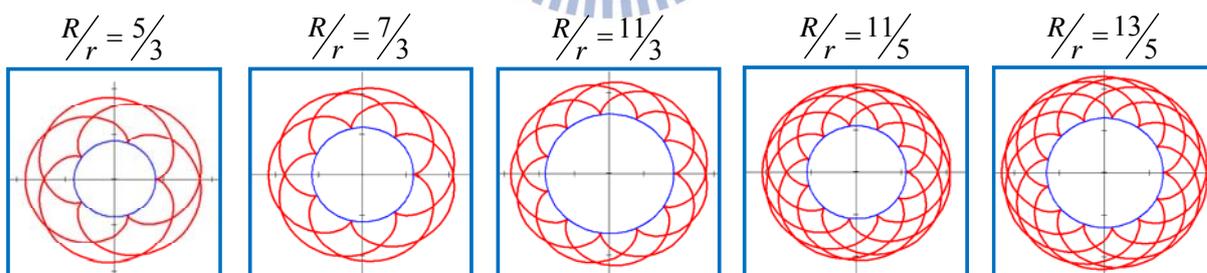


圖 2-6 R/r 比值為最簡分數時的外擺線

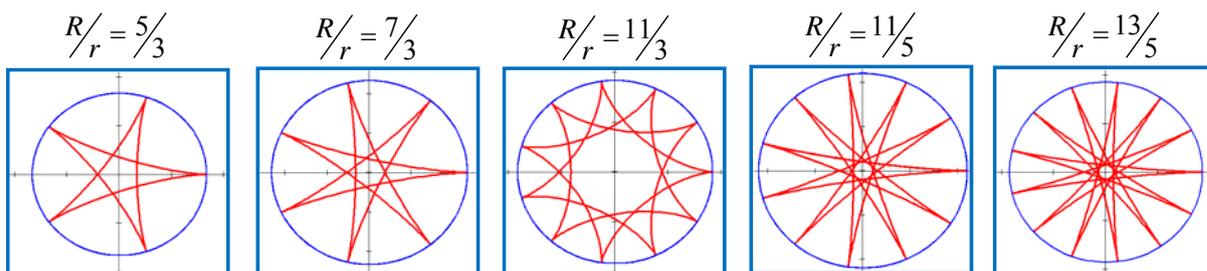


圖 2-7 R/r 比值為最簡分數時的內擺線

除此之外，也可以將上述外擺線及內擺線的參數方程式(2.3)及式(2.4)

同時簡化如下：

$$\begin{aligned} x(\theta) &= m_1 \cdot \cos(p \cdot \theta) + n_1 \cdot \cos(q \cdot \theta) \\ y(\theta) &= m_2 \cdot \sin(p \cdot \theta) + n_2 \cdot \sin(q \cdot \theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

擺線、外擺與內擺線等，其最主要的幾何表現是所觀察的軌跡點，恰落在動圓的圓周上，即恰為動圓的某切點位置。不論是外擺線或內擺線的兩圓(動圓、固定圓)其半徑比值必須是有理數，即半徑比須為(最簡)整數比，此時觀察點 P 的軌跡才會是一封閉曲線；若為無理數比值時，曲線將呈現無窮盡的滾動軌跡線，動點 P 不能返回起始位置，則曲線是不封閉的[4, 5]，圖 2-8 與圖 2-9 是 R/r 比值為無理數時的外擺線與內擺線的曲線。

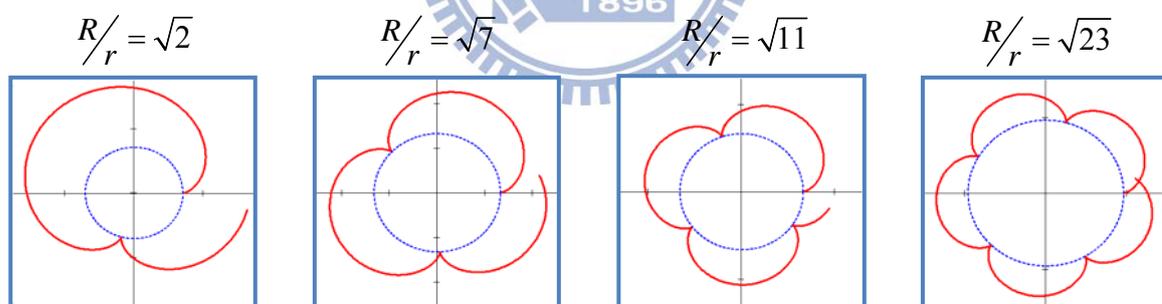


圖 2-8 R/r 比值為無理數時的外擺線

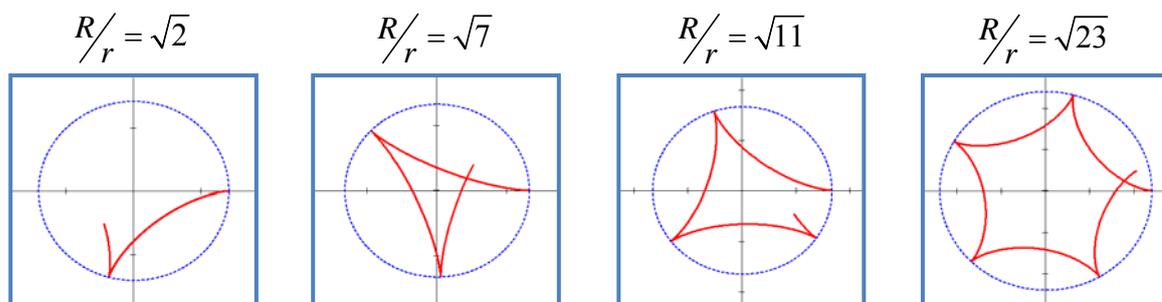


圖 2-9 R/r 比值為無理數時的內擺線

2.3 次擺線、外次擺線與內次擺線

次擺線(Trochoid)和擺線(Cycloid)最主要的差別是被觀察的特定點 P 不是在動圓上，而是在動圓內部或外部的某一定點。下表 2.1 整理出擺線與次擺線的差異性。當定點 P 在動圓內時的軌跡稱為短幅次擺線(curtate trochoid)或收縮次擺線(contracte trochoid)；當定點 P 在動圓外時，其軌跡稱為長幅次擺線(prolate trochoid)或外展次擺線(extended trochoid)[5]，如圖 2-10 所示。

表 2.1 擺線與次擺線分類

依直線而轉		擺線 Cycloid	次擺線 Trochoid 包括：短幅、長幅
依圓而轉	圓外	外擺線 Epicycloid	外次擺線 Epitrochoid 包括：短幅、長幅
	圓內	內擺線 Hypocycloid	內次擺線 Hypotrochoid 包括：短幅、長幅
動圓半徑 r/圓心 O 動圓的某點 P		$\overline{PO} = r$	$\overline{PO} < r$ 、 $\overline{PO} > r$

其軌跡參數方程，不同於(2.2)式的單一個 r，而是以 a 為動圓半徑，b 為觀察點到圓心的距離來表示：

$$\begin{aligned} x &= a\theta - b \cdot \sin \theta \\ y &= a - b \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

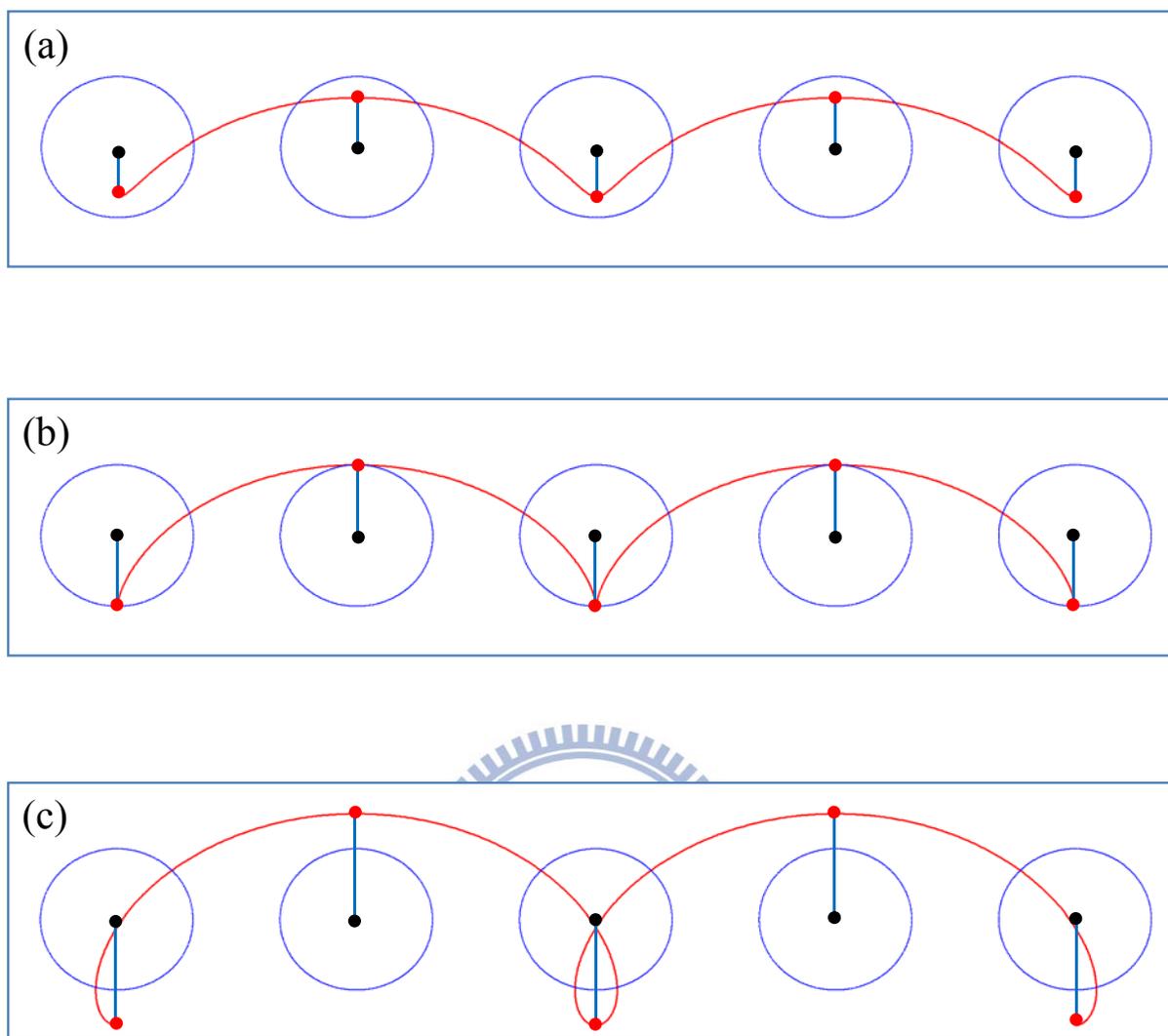


圖 2-10 (a)短幅次擺線 (b)擺線 (c)長幅次擺線

外次擺線及內次擺線(epitrochoid 及 hypotrochoid)則是一個移動圓沿一定圓進行外切及內切的滾動(但無滑動)，動圓內或外某一特定點的軌跡。與次擺線(Trochoid)相同，依觀察點 P 是在動圓內或外，又都可再分為短幅及長幅的外次擺線或內次擺線(epitrochoid、hypotrochoid)。其參數方程類似於外擺線、內擺線的軌跡參數方程式(2.3)與(2.4)式，差別在於式中的第二項的 r 要乘上小於或大於 1 的常數，以代表短幅或長幅的區別。外次擺線

(epitrochoid)及內次擺線(hypotrochoid)的參數方程表示如下[6]：

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - \lambda r \cos\frac{R+r}{r}\theta \\ y &= (R+r)\sin\theta - \lambda r \sin\frac{R+r}{r}\theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\theta + \lambda r \cos\frac{R-r}{r}\theta \\ y &= (R-r)\sin\theta - \lambda r \sin\frac{R-r}{r}\theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

式子(2.9)與(2.10)中的 $\lambda < 1$ 時為短幅， $\lambda > 1$ 時為長幅。其中 R 表固定圓半徑， r 表動圓半徑， θ 表兩圓連心線與固定圓的水平直徑此兩線之間所夾的角度。圖 2-11 與圖 2-12 為固定 R/r 的比值為 $R/r=10$ 時，改變不同的 λ 值，得到變化由短幅到長幅的外次擺及內次擺的曲線圖。

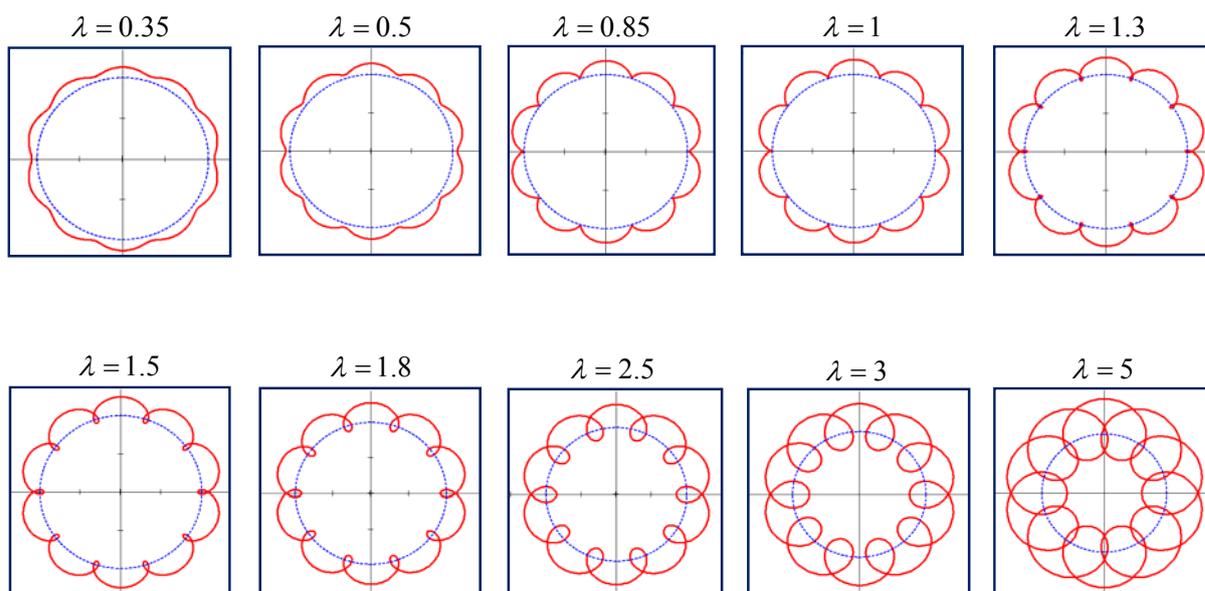


圖 2-11 $R/r=10$ 隨著 λ 變化的外次擺曲線

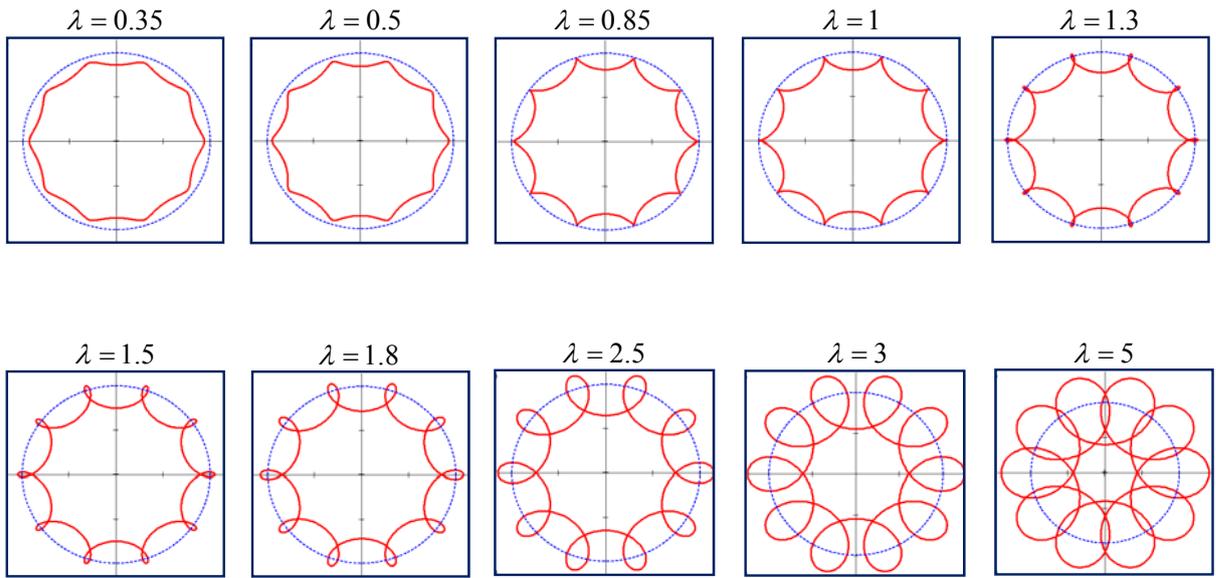


圖 2-12 $R/r=10$ 隨著 λ 變化的內次擺曲線

接著我們固定 λ 值，研究不同 R/r 比值情況下，內、外次擺線的曲線，圖 2-13 為 $\lambda=0.7$ 時不同 R/r 比值的外次擺曲線圖；圖 2-14 為 $\lambda=1.5$ 時，不同 R/r 比值的外次擺曲線圖。

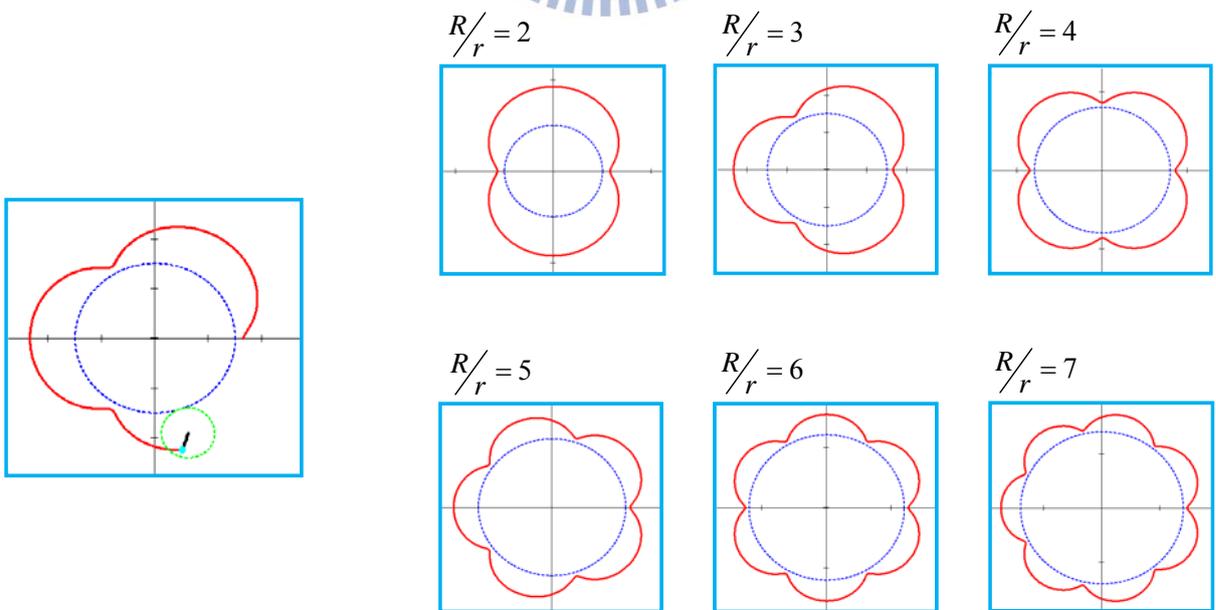


圖 2-13 $\lambda=0.7$ 時不同 R/r 比值的短幅外次擺線

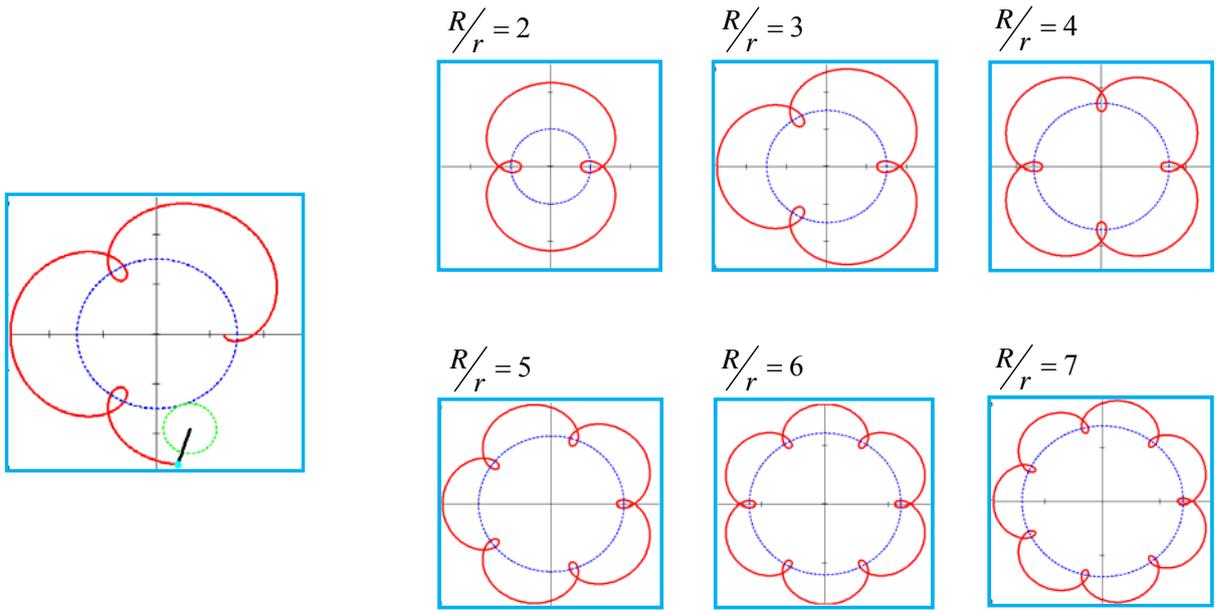


圖 2-14 $\lambda = 1.5$ 時不同 R/r 比值的長幅外次擺線

另外，圖 2-15 與圖 2-16 分別為 $\lambda = 0.7$ 與 $\lambda = 1.5$ 時，不同 R/r 比值的內次擺曲線圖。

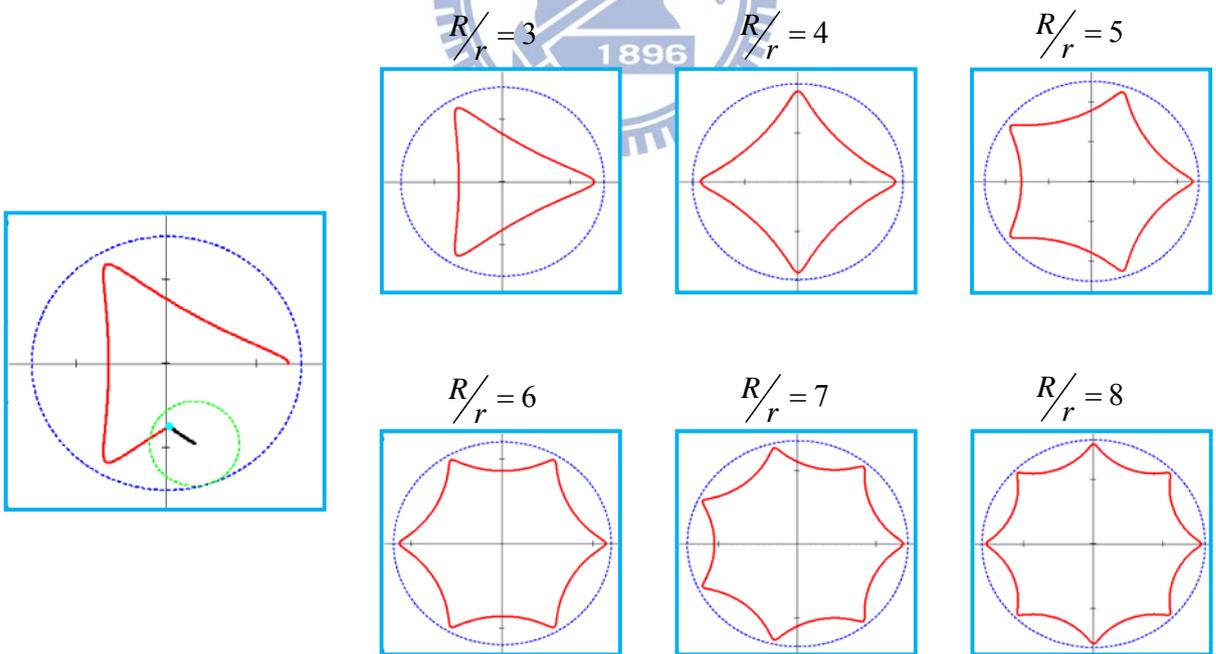


圖 2-15 $\lambda = 0.7$ 時不同 R/r 比值的短幅內次擺線

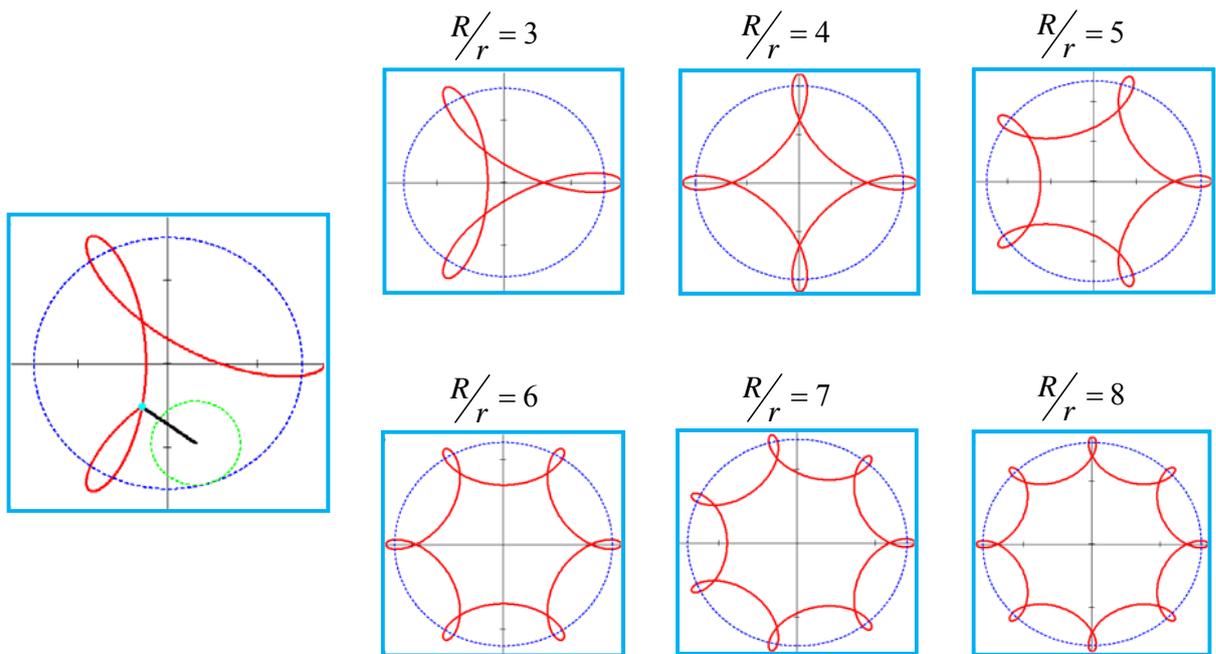


圖 2-16 $\lambda = 1.5$ 時不同 R/r 比值的長幅內次擺線

最後，不論是次擺線、外次擺線或內次擺線(trochoid、epitrochoid、hypotrochoid)，其方程式都可以簡化成如前 2.2 節的(2.7)式，而這個式子會與下一章節中的環面紐結有密切的關係。

$$\begin{aligned} x(\theta) &= m_1 \cdot \cos(p \cdot \theta) + n_1 \cdot \cos(q \cdot \theta) \\ y(\theta) &= m_2 \cdot \sin(p \cdot \theta) + n_2 \cdot \sin(q \cdot \theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

第三章 利用 SU(2) 探討利薩如曲線到擺線的幾何轉換

3.1 SO(3) 群

「正交群」(orthogonal groups)，記為 $O(n)$ ，是歐氏空間的正交變換(orthogonal transformation)產生的群，也可說是由全體 $n \times n$ 正交矩陣($n \times n$ orthogonal matrices)所組成的群。其中 $SO(3)$ 群是指「special 3×3 orthogonal matrices」，「special」在此強調矩陣的行列式 determinant 值必須為 1 [4]。

$SO(3)$ 的一個典型代表為「三維實空間的旋轉矩陣」，如下式表示：[7,8]

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\varphi \text{ 為對固定的 } Z \text{ 軸所旋轉的角度}) \quad (3.1)$$

可以容易檢驗得 $R_z(\varphi)$ 滿足正交性(內積為 0)，以及行列式值為 1。

令歐氏空間中任一個元素其坐標向量為 (x, y, z) ，用(3.1)式進行旋轉如下：將 z 軸固定，經由線性變換在 xy 座標平面上旋轉 φ 角度，將 (x, y, z) 轉動到新的坐標 (x', y', z') ，數學式如下：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

圖示如下圖 3-1：

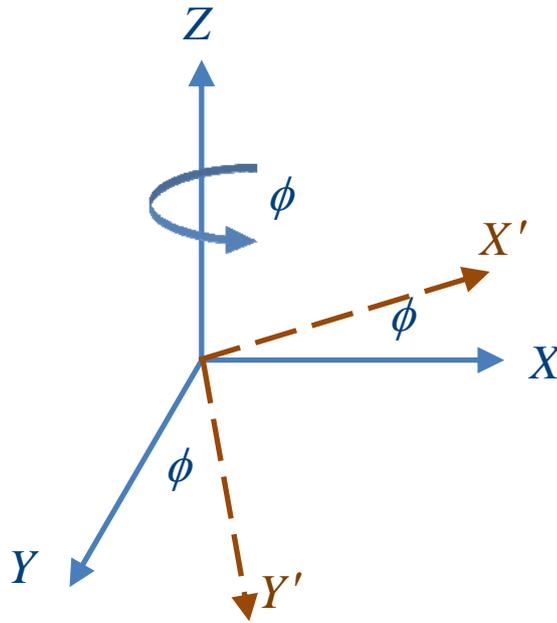


圖 3-1 固定 Z 軸的 SO(3)座標旋轉

同樣地，也可以得到將 x 軸及 y 軸固定，且分別旋轉 ψ 及 θ 角度時的 SO(3) 矩陣如(3.3)式：

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

正交群 SO(n)與么正群 SU(n) (3.2 節)皆有「生成元」(generator)。此乃因其皆屬「李群」(Lie groups)。李群主要是探討連續群(continuous groups)，群元素都具解析性(analytic)，故可用微分及解析式來產生群的生成元。依次說明 SO(2)、SO(3)的生成元。

SO(2)旋轉矩陣是在二維 xy 平面進行旋轉的線性變換矩陣，如(3.4)式：

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

對 $R(\varphi)$ 做微分，並令 $\varphi=0$ 時，得到生成元 σ_2 如 (3.5) 式。式子中加入 i 的複係數，是為了符合「合冪型矩陣」(Hermitian) 有共軛轉置的複數域對稱矩陣的型式，：

$$-idR(\varphi)/d\varphi \Big|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} \Big|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 \quad (3.5)$$

將(3.4)式的 $SO(2)$ 旋轉矩陣 $R(\varphi)$ 用單位矩陣 I_2 及(3.5)式的生成元 σ_2 矩陣做線性組合如(3.6)式：

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = I_2 \cos \varphi + i\sigma_2 \sin \varphi = \exp(i\sigma_2 \varphi) \quad (3.6)$$

由(3.6)式的指數式可看出 σ_2 為 $R(\varphi)$ 的生成元。此外，可知：矩陣的乘法相當於角度的加法，如(3.7)式：

$$R(\varphi_2)R(\varphi_1) = \exp(i\sigma_2 \varphi_2) \exp(i\sigma_2 \varphi_1) = \exp(i\sigma_2(\varphi_1 + \varphi_2)) = R(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (3.7)$$

此時利用：當旋轉角度 $\varphi \approx 0$ 時，表示旋轉矩陣 $R(\varphi)$ 趨近於單位矩陣 I_2 ，可進一步推得小角度時的 $SO(2)$ 旋轉的 $R(\varepsilon)$ 指數解析式(3.8)式：

$$R(\varepsilon) = \exp(i\varepsilon S) = I_2 + i\varepsilon S + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

此(3.8)式的 $R(\varepsilon)$ 指數解析式是將 $SO(2)$ 旋轉矩陣 $R(\varphi)$ (3.6)式中的 φ 用小角度 ε 來取代，並用 S 取代生成元 σ_2 。

同理，可利用微分得 $SO(3)$ 的三個生成元 S_x, S_y, S_z 。將三維實空間的旋

轉矩陣如(3.1)及(3.3)式，並列於下：

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

以(3.1)式 $R_z(\varphi)$ 為例，如下方(3.9)式來微分 $R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，

$$-idR_z(\varphi)/d\varphi \Big|_{\varphi=0} = S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

得到 S_z ，此時仿照 SO(2) 在 3.8 式 $R(\varepsilon)$ 的指數解析表示式中的小角度 ε ，我

們用極小值 $\delta\varphi$ 取代 $R_z(\varphi)$ 的 φ ，可得 $R_z(\delta\varphi)$ 的解析式如下：

$$R_z(\delta\varphi) = I_3 + i \cdot \delta\varphi \cdot S_z \quad (3.10)$$

我們從(3.10) $R_z(\delta\varphi)$ 的解析式得到 S_z 為 R_z 群的生成元。

仿照 SO(2) 旋轉矩陣考慮旋轉角度 $\varphi \approx 0$ 的情況：當 SO(3) 旋轉有限角度時，相當於連續小角度的累加，因為此時矩陣的乘法相當於角度的加法，

如(3.7)式，及由(3.10) $R_z(\delta\varphi)$ 的解析式，便可得(3.11)式：

$$R_z(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2) = (I_3 + i \cdot \delta\varphi_1 \cdot S_z)(I_3 + i \cdot \delta\varphi_2 \cdot S_z) \quad (3.11)$$

進一步令 $\delta\varphi = \varphi/N$ ，若 $N \rightarrow \infty$ 時，進一步得指數解析式(3.12)式：

$$R_z(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} [I_3 + (i\varphi/N)S_z]^N = \exp(i\varphi S_z) \quad (3.12)$$

從(3.12)式中，再次確認 S_z 為 R_z 群的生成元。

同理，可推得 SO(3)群的另兩個子群 R_x, R_y 的生成元 S_x, S_y 如下：

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

因為 SO(2)群只有 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 這一個線性獨立的生成元(generator)，所以

SO(2)群的次數(order)為 1。而 SO(3)群則有：

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

這三個線性獨立的生成元，所以 SO(3)群的次數為 3。

總結來說，在 SO(2)群的實數 2×2 矩陣只有一個參數，即一個旋轉角，只有一個生成元 σ_2 ，為一階的；在 SO(3)群的實數 3×3 矩陣，有三個獨立參數，即有三個尤拉角(Euler angles)，共有三個生成元 S_x, S_y, S_z ，是三階的。當一向量在三維實空間順次經由三個尤拉角： α 角、 β 角、 γ 角旋轉時，其分量在轉動中的變換矩陣 R 稱為空間旋轉矩陣 SO(3)群。如(3.15)式：

$$SO(3) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

3.2 SU(2)群

「么正群」(unitary groups)，記為 $U(n)$ ，是由 n 維複數向量空間的么正變換(unitary transformation)所成之群，也可說是由全體 $n \times n$ 么正矩陣($n \times n$ unitary matrix)所組成的群[4]。

SU(2)特指「special 2×2 unitary matrices」所形成的「特殊么正群」，「special」強調行列式為 1 的 2×2 么正矩陣。SU(2)群有三個生成元，即所謂的「包立矩陣」(Pauli matrices) σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，次數為 3，有三個實連續參數 ξ 、 η 、 ζ (Caley-Klein parameters)。SU(2)的一般形式為(3.16)式：[8]

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\zeta} \sin \eta \\ -e^{-i\zeta} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (*: \text{conjugates 共軛}) \quad (3.16)$$

將(3.16)式微分，可以得到 SU(2)的三個生成元(3.17)式；及相對應的三個

U_1 、 U_2 、 U_3 (the elements of SU(2)) (3.18)式：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$U_1 = \exp(ia_1\sigma_1/2), \quad U_2 = \exp(ia_2\sigma_2/2), \quad U_3 = \exp(ia_3\sigma_3/2) \quad (3.18)$$

總結來說，我們建立了 SU(2)群與 SO(3)群之間的矩陣表示式的對應：

$$SO(3) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) \quad SU(2) \equiv U(\alpha, \beta, \gamma) = U_3(\gamma)U_2(\beta)U_1(\alpha)$$

這代表：三維實數空間的 SO(3)旋轉，可用二維複數平面的 SU(2)旋轉來表現。旋轉過程如下：

(1) 利用 U_3 ，以 z 軸為固定軸旋轉 α 角，(得 x', y', z' 軸)

(2) 利用 U_2 ，以 y' 軸為固定軸旋轉 β 角，(得 x'', y'', z'' 軸)

(3) 最後用 U_3 ，以 z'' 軸為固定軸旋轉 γ 角。

對照 SO(3) 旋轉的(3.15)式矩陣乘積，SU(2) 旋轉矩陣可表示成(3.19)式，

SU(2) 旋轉矩陣 $U(\alpha, \beta, \gamma)$ ：

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \gamma) &= U_3(\gamma)U_2(\beta)U_3(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sin \beta/2 \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \sin \beta/2 & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

若對照(3.16)式的 SU(2) 一般式，可知其三個實連續參數 ξ 、 η 、 ζ 對照如下：

$$\xi = \frac{\gamma + \alpha}{2}, \quad \eta = \frac{\beta}{2}, \quad \zeta = \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

3.3 利薩如與次擺線的幾何轉換

在 3.2 節已知 SU(2) 可以等價地如同 SO(3) 進行三維空間的旋轉，這一小節的主題是討論：將「利薩如曲線」轉換成「次擺線」的 SU(2) 矩陣 U 。

量子力學(Quantum mechanics)的哈密頓算符(Hamiltonian) \hat{H} 運動方程如下(3.20)式 [9]：

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad v_1 = \tilde{x} + i \cdot \tilde{p}_x, v_2 = \tilde{y} + i \cdot \tilde{p}_y \quad (3.20)$$

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 為常數， ω_0 為自然共振頻率

首先，討論主要概念為以下幾點：

(一) 說明預期目標：欲將哈密頓算符(Hamiltonian) \hat{H} 運動方程中的線性變換

矩陣 $\begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix}$ 對角化成為 $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$ 的微分方程。

此時 $\frac{dZ_1}{dt} = -i\omega_1 Z_1$ ， $\frac{dZ_2}{dt} = -i\omega_2 Z_2$ 為兩獨立的簡諧振盪(two harmonic oscillators without coupling)，方程解型如：

$$Z_1 = c_1 e^{-i\omega_1 t}, Z_2 = c_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (3.21)$$

又因為 $Z_1 = x + i \frac{v_x}{\omega_1}$ ， $Z_2 = y + i \frac{v_y}{\omega_2}$ ，故在(3.21)式解中取實部 $x(t), y(t)$ 。當

$x(t), y(t)$ 的振盪頻率不同時($\omega_1 \neq \omega_2$)，即為 Lissajous curves。

反之，一開始未對角化的方程 $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} \omega_1 & a \\ b & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$ ， $ab \neq 0$ ，此時

$i \frac{dZ_1}{dt} = \omega_1 Z_1 + a Z_2$ ， $i \frac{dZ_2}{dt} = b Z_1 + \omega_2 Z_2$ 為兩耦合振盪(two coupling

oscillators)，意即兩個振盪器有交互作用。其 $x(t), y(t)$ 形成的圖形為擺線/次擺線。

(二) 將(3.20)式 $i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 乘上 $(-i)$ ，則得

$$A = -i \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

(三) 進一步利用 3.2 節中的 SU(2) 生成元 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 (Pauli matrices)(3.17 式)，

展開 A 得到 \hat{A} ，

$$\hat{A} = -i \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix} = -i \left[\omega_0 \hat{I} + \frac{\Omega_1}{2} \sigma_1 + \frac{\Omega_2}{2} \sigma_2 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right] \quad (3.23)$$

(四) 對 \hat{A} (3.23) 式進行么正轉換，其數學式為 unitary transformation

$$M'_{2 \times 2} = U M_{2 \times 2} U^* \quad (3.24)$$

其中 U 、 U^* 為 SU(2) 的生成元及其對應的反矩陣 (inverse matrix)，是用來進行基底變換的么正矩陣，也就是用來進行座標軸的旋轉。 $M_{2 \times 2}$ 為 \hat{H} 中的線性變換矩陣 2×2 方陣 \hat{A} (非對角化矩陣)、 $M'_{2 \times 2}$ 為 $M_{2 \times 2}$ 的相似矩陣，是建構在用 U 、 U^* 變換基底後的線性變換矩陣。最後目標是為了得到一個最佳矩陣「對角線矩陣」，即 $M'_{2 \times 2}$ ，以顯示出 \hat{H} 微分方程解的特性。

(五) 在第四點中的 U 、 U^* ，我們依序利用了 U_3 和 U_2 這兩個 SU(2) 群的元素來

進行以 z 軸和 y 軸為固定軸的座標軸旋轉。這裏須使用量子力學

(quantum mechanics)中所謂的 spin operator，型如： $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$ 、 $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2$ ，

則可得 U_3 、 U_2 及 U_3^* 、 U_2^* 如下：

$$U_3 = e^{-\frac{i\alpha\hat{S}_z}{\hbar}} = \exp(-i\alpha\sigma_3/2) \text{、} U_3^* = \exp(i\alpha\sigma_3/2)$$

$$U_2 = e^{-\frac{i\alpha\hat{S}_y}{\hbar}} = \exp(-i\beta\sigma_2/2) \text{、} U_2^* = \exp(i\beta\sigma_2/2) \quad (3.25)$$

(六)令 \hat{H} 微分方程對應的線性變換矩陣為 \hat{A} (3.23)式，進行兩次的么正變換如下：

$$\hat{B} = U_3\hat{A}U_3^* \text{，} \hat{D} = U_2\hat{B}U_2^* \quad (3.26)$$

其中 \hat{D} 即預期目標的對角線矩陣。

(七)因為在第六點中利用 U_3 、 U_2 來進行基底變換的線性轉換，即

$$U_2U_3\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{，其中} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{為非對角化矩陣} \hat{A} \text{基底下的解向量，} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{為對}$$

角線矩陣 \hat{D} 基底下的解向量。

因此可得其逆轉換如：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = U_3^*U_2^* \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

則 $U_3^*U_2^* = \hat{U}$ 即是將「利薩如曲線」轉換成「次擺線」的SU(2)矩陣U，其詳細計算過程於附錄一討論。

透過附錄一及(3.27)式，可得哈密頓算符 (Hamiltonian) \hat{H} 運動方程

(3.20)式的解：

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\tilde{\alpha}/2)\cos(\tilde{\beta}/2) & -\exp(-i\tilde{\alpha}/2)\sin(\tilde{\beta}/2) \\ \exp(i\tilde{\alpha}/2)\sin(\tilde{\beta}/2) & \exp(i\tilde{\alpha}/2)\cos(\tilde{\beta}/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

其中 $\tilde{\alpha} = \tan^{-1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, $\tilde{\beta} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}{\Omega_3}$, $\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Omega}{2}$, $\omega_2 = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}$,

$\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}$, 而 $u_1(t) = c_1 e^{-i(\omega_1 t - \phi_1)}$, $u_2(t) = c_2 e^{-i(\omega_2 t - \phi_2)}$ 為之前所述 Lissajous

參數式。同時，取 $v_1(t), v_2(t)$ 的實部可得 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ 參數軌跡方程式如下：

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = c_1 \cos(\tilde{\beta}/2) \cos(\omega_1 t - \phi_1 - \tilde{\alpha}/2) - c_2 \sin(\tilde{\beta}/2) \cos(\omega_2 t - \phi_2 - \tilde{\alpha}/2) \\ \tilde{y}(t) = c_1 \sin(\tilde{\beta}/2) \cos(\omega_1 t - \phi_1 + \tilde{\alpha}/2) + c_2 \cos(\tilde{\beta}/2) \cos(\omega_2 t - \phi_2 + \tilde{\alpha}/2) \end{cases} \quad (3.29)$$

因此當改變 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ 時，可以利用(3.29)式得到一系列的曲線，下圖 3-2 為

$\omega_1 : \omega_2 = 1:5$ 且 $\tilde{\beta} = \pi/2$, $(C_1, C_2) = (1.5, 1)$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 時不同 $\tilde{\alpha}$ 所對應的各式曲線；

圖 3-3 則是將 $\omega_1 : \omega_2$ 改為 $\omega_1 : \omega_2 = 1:-5$ 所對應的各式各樣曲線，由圖可以發現

當 ω_1 與 ω_2 互為異號時，會由內次擺線變成外次擺線。

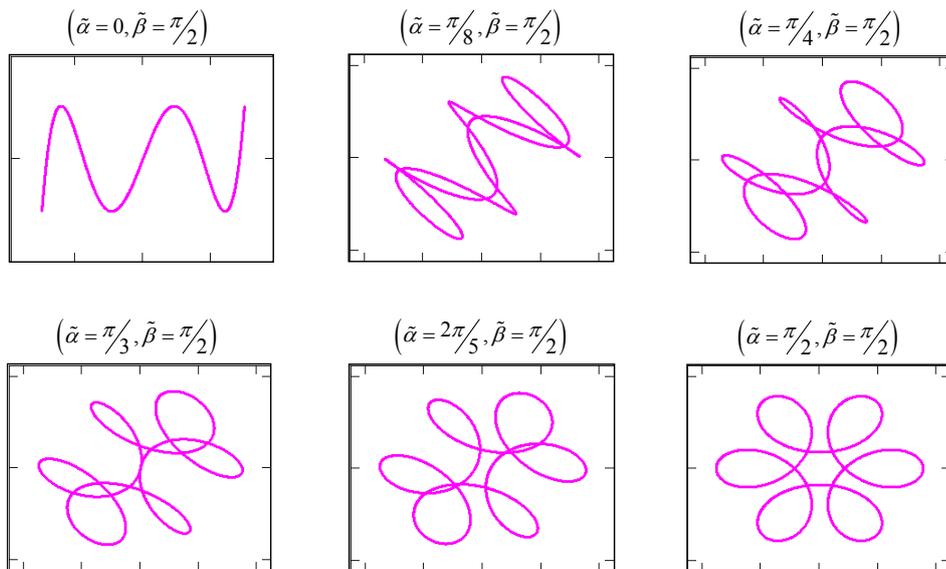


圖 3-2 $\omega_1/\omega_2 = 1/5$ 時不同 $\tilde{\alpha}$ 所對應的各式 SU(2) 曲線

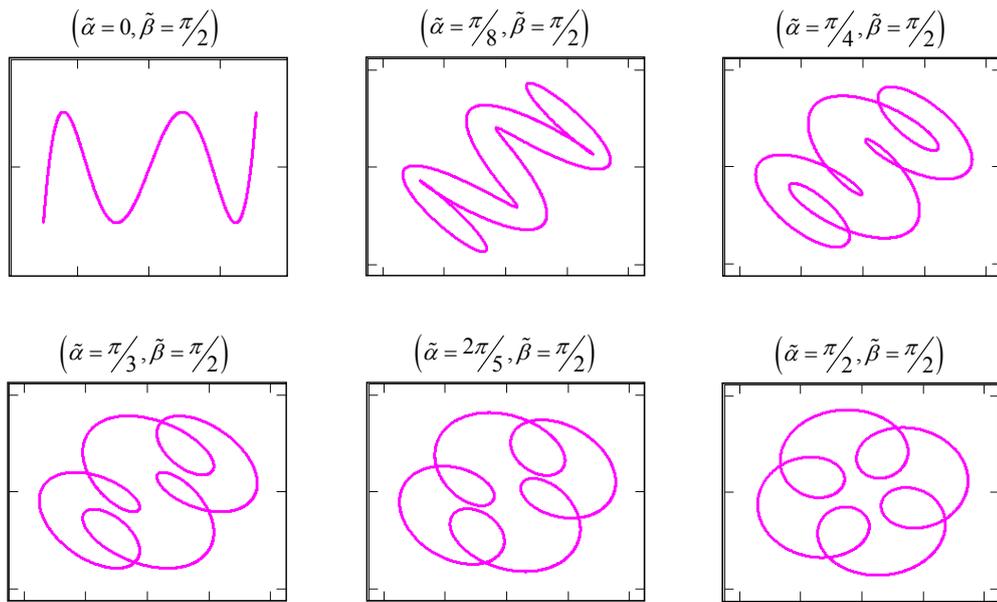


圖 3-3 $\omega_1/\omega_2 = -1/5$ 時不同 $\tilde{\alpha}$ 所對應的各式 SU(2) 曲線

透過圖 3-2 與 3-3 可以發現，當 $\tilde{\alpha} = \pi/2$ ， $\tilde{\beta} = \pi/2$ 時候曲線將完整的由利薩如曲線轉換成次擺線，因此可以透過 SU(2) 的方法同時改變 (C_1, C_2) ，將利薩如曲線轉換成不同型式的擺線或次擺線，其對應圖如下圖 3-4 其 $\omega_1/\omega_2 = \pm 1/2$ ：

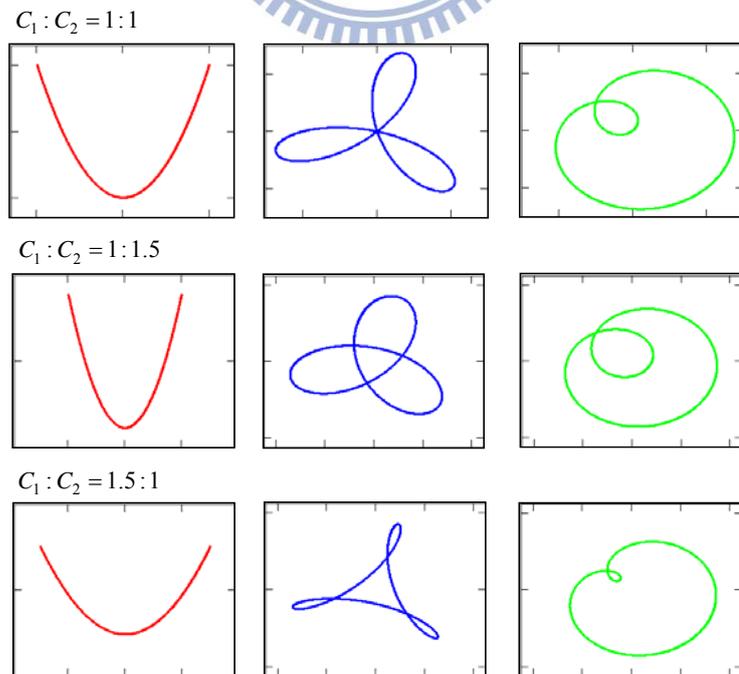


圖 3-4 $\omega_1/\omega_2 = \pm 1/2$ 時不同 C_1, C_2 比值時 SU(2) 轉換前後圖

同樣的，圖 3-5 和圖 3-6，分別為 $\omega_1/\omega_2 = \pm 1/3$ 和 $\omega_1/\omega_2 = \pm 3/7$ 的結果。

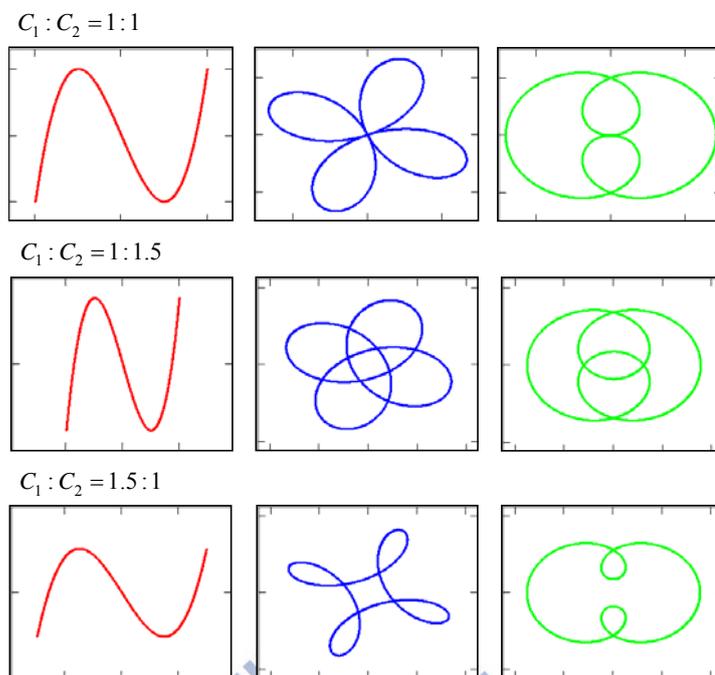


圖 3-5 $\omega_1/\omega_2 = \pm 1/3$ 時不同 C_1, C_2 比值時 SU(2) 轉換前後圖

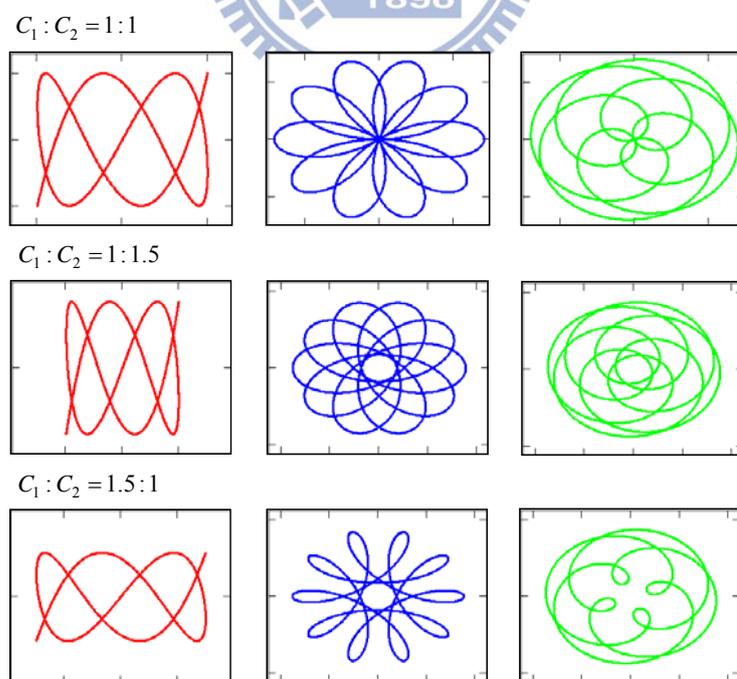


圖 3-6 $\omega_1/\omega_2 = \pm 3/7$ 時不同 C_1, C_2 比值時 SU(2) 轉換前後圖

第四章 紐結

4.1 利薩如紐結(Lissajous knots)

一般在數學或科學上所討論的紐結，是指在三維空間中的封閉曲線，不能利用剪斷後、再重新連接的方式來改變其迴圈路徑，起始點和結束點是同一個位置[10]。在本文第二章曾討論過二維平面的「利薩如曲線」，而本節則是探討三維空間的利薩如紐結。在此之前，須先說明兩類紐結：傅利葉紐結(Fourier knots)與交錯紐結(alternating knots)，先給予初步介紹。

傅利葉紐結

所有的紐結都屬於所謂的「傅利葉紐結」(Fourier knots) [11]，利薩如紐結(Lissajous knots)也不例外。我們可說：所有紐結的參數方程都來自於傅利葉紐結的參數方程。下面列出傅利葉紐結的數學式：

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=1}^l a_k \cos(u_k t + \varphi_k) \\y(t) &= \sum_{k=1}^m b_k \cos(v_k t + \phi_k) \\z(t) &= \sum_{k=1}^n c_k \cos(w_k t + \gamma_k)\end{aligned} \quad (a, b, c, l, m, n, u, v, w, \varphi, \phi, \gamma) : \text{常數} \quad (4.1)$$

換言之，傅利葉紐結在三維空間的三個方向軸上分別是一獨立且包含有限個相異頻率之線性組合的振盪曲線，即有限項的 $\cos \theta$ 的傅利葉級數。

交錯紐結

紐結曲線環繞時，每一個相鄰結點呈現的是依序上下交錯穿越的情況，此即紐結表上呈現的最簡模式圖形，也是紐結表所謂的交叉數的涵義。如下圖 4-1：

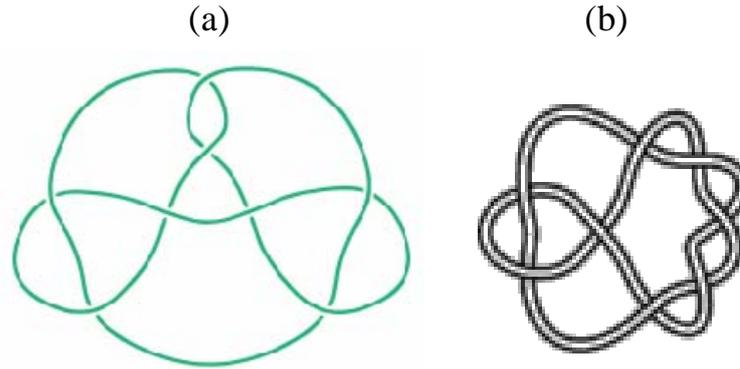


圖 4-1 (a)非交錯紐結(b)交錯紐結

圖 4-1(a)，在其中間有兩處連續相鄰結點的交叉線，水平方向線圈皆同時由上方通過下方的線圈。在這種情況下，就不符合交錯紐結的義涵，且交叉數(crossing number)也隨之減少了。所謂的「knotted」是指有效的交叉；而「unknot」或「the trivial knot」的交叉數為 0[12]。這是紐結表最主要的分類依據，也是在判別不同紐結時的第一個基本元素。

利薩如圖形是兩垂直方向的簡諧振盪運動投影在 xy 平面上的二維曲線圖形(如第二章所述)，這告訴我們所有的三維紐結可以在二維平面上投影出利薩如曲線[10]。由此可知：不論是數學式或是環繞(交織)情況，利薩如紐結可說是紐結類型中，最基本也最原始的一種，也可能是諸理論科學及應用科學中許多方程或動態模式下的解。

利薩如紐結則是在每一方向軸 $x(t), y(t), z(t)$ 上，各僅包含一項 $\cos \theta$ 函數的傅利葉紐結。利薩如紐結的數學式如下[10,13]：

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_x \cos(B_x t + C_x) \\
 y(t) &= A_y \cos(B_y t + C_y) \\
 z(t) &= A_z \cos(B_z t + C_z)
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

我們可以取 $A_x = A_y = A_z = 1, C_z = 0$ ，因為那並不會改變利薩如紐結的拓樸性質。所以利薩如紐結的數學式簡化如下：

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \cos(n_x t + \phi_x) \\
 y(t) &= \cos(n_y t + \phi_y) \\
 z(t) &= \cos(n_z t)
 \end{aligned}
 \left(\begin{array}{l}
 n_x, n_y, n_z : \text{frequency} \\
 \phi_x, \phi_y : \text{phase} \\
 0 \leq t < 2\pi
 \end{array} \right) \quad (4.3)$$

如同在二維利薩如曲線的圖形，我們必須取三個互質的頻率值，如此可得環繞路徑及交叉數為最簡單(不重覆)的利薩如紐結。若非互質時，其紐結圖形將與最簡整數比的紐結相同。同時，在三個投影平面($xy, yz, xz, plane$)所得到的利薩如曲線也會對應於第二章所述的同一頻率比之曲線圖形。以下將以 (n_x, n_y, n_z) 的頻率值及 ϕ_x, ϕ_y 相位值，來分析利薩如紐結在各種不同頻率及相位組合的圖形變化及差異。下圖 4-2 為不同 (n_x, n_y, n_z) 的利薩如紐結。

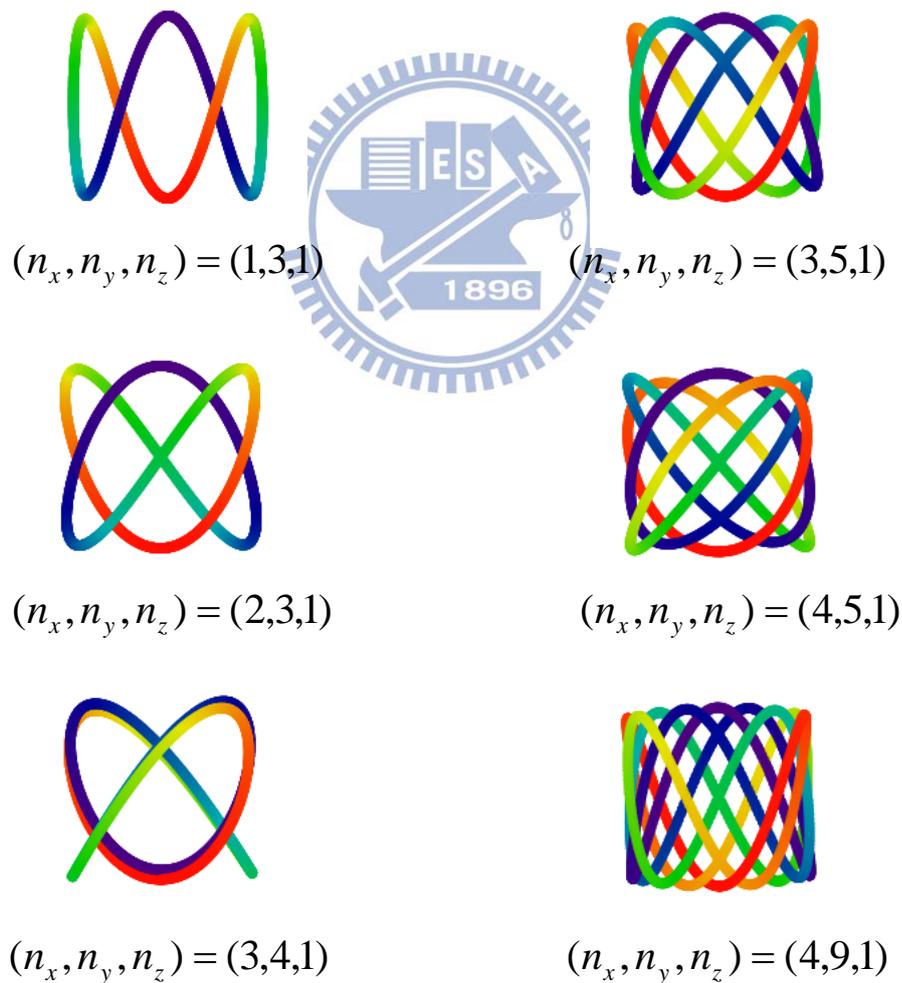


圖 4-2 $(\phi_x, \phi_y) = (0.5\pi, \pi)$ 時，不同 (n_x, n_y, n_z) 所對應的利薩如紐結(xy projections)

如果頻率相同時，但相位 ϕ_x, ϕ_y 不同，則利薩如紐結為不同類型，如下

圖 4-3 所示：

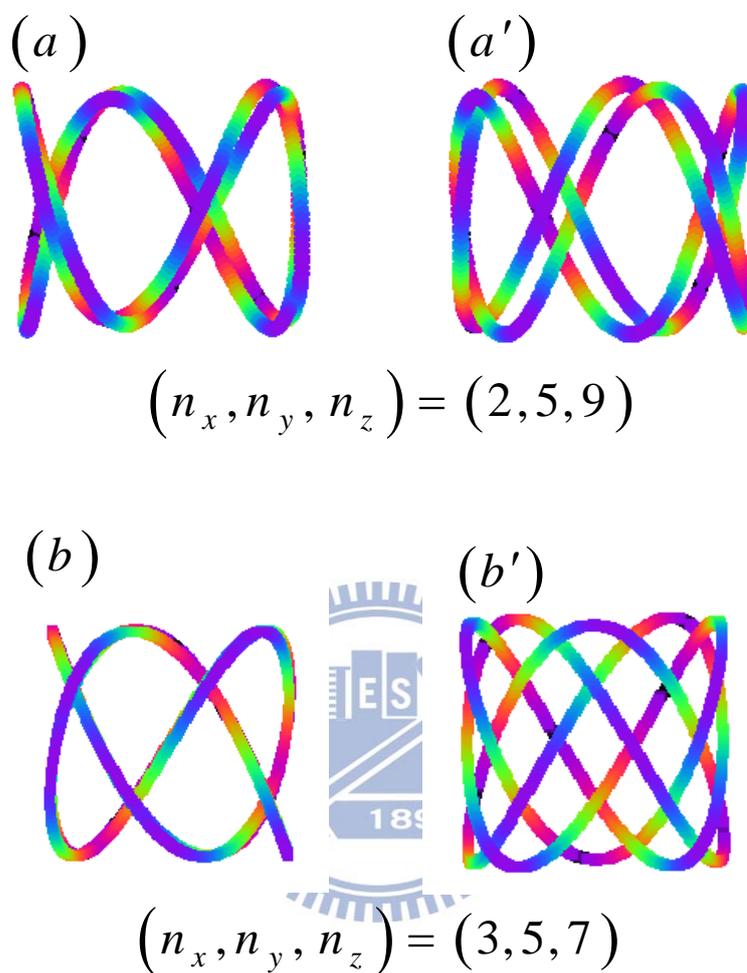


圖 4-3 (n_x, n_y, n_z) 相同時，相位不同的利薩如紐結(xy projections)

$$(a) (\phi_x, \phi_y) = (0.8, 0.6) \quad (a') (\phi_x, \phi_y) = (0.1, 0.6);$$

$$(b) (\phi_x, \phi_y) = (0.7, 0.1) \quad (b') (\phi_x, \phi_y) = (0.1, 0.7)$$

在頻率 (n_x, n_y, n_z) 相同，但相位 ϕ_x, ϕ_y 組合不同時將得到不同類型的利薩如紐結，這和二維利薩如曲線的情況相似。

此外，當頻率 n_x, n_y 與相位 ϕ_x, ϕ_y 所形成的關係式 $n_x \phi_y - n_y \phi_x = C \cdot n_x \cdot n_y$ 或

$\frac{\phi_y}{n_y} - \frac{\phi_x}{n_x} = C$ 的值相同時，紐結在 xy 平面的投影利薩如曲線將會相同，如圖

4-4 與圖 4-5 所示， C 值依序為 $C = \frac{\phi_y}{n_y} - \frac{\phi_x}{n_x} = 0.1\bar{3}$ 與 -0.06π ，其中圖 4-4(a)

為紐結分類表中的 knot 5_2 而(b) 為 knot $7_4[13]$ 。



圖 4-4 $(n_x, n_y, n_z) = (2, 3, 7)$ 時，不同 (ϕ_x, ϕ_y) 的利薩如紐結(xy projections)

(a) $(\phi_x, \phi_y) = (0.2, 0.7)$ (b) $(\phi_x, \phi_y) = (0.4, 1)$

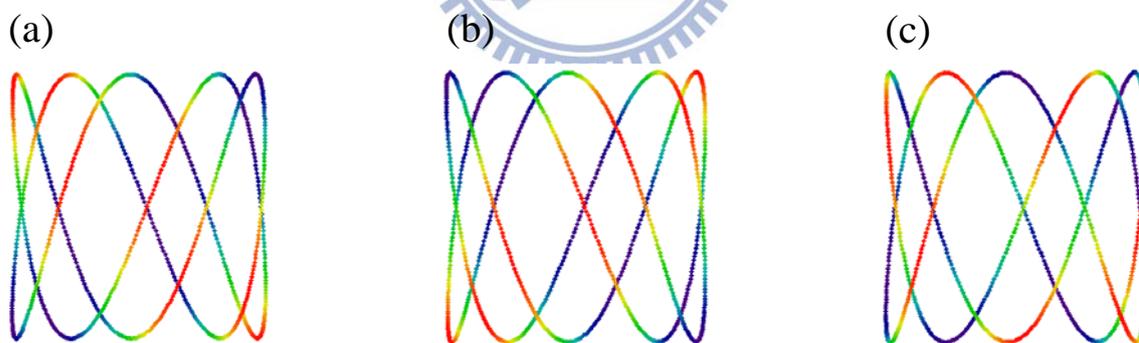


圖 4-5 $(n_x, n_y, n_z) = (2, 5, 7)$ 時，不同 (ϕ_x, ϕ_y) 的利薩如紐結(xy projections)

(a) $\phi_x = 0.4\pi, \phi_y = 0.7\pi$ (b) $\phi_x = 0.1\pi, \phi_y = -0.05\pi$ (c) $\phi_x = 0.48\pi, \phi_y = 0.9\pi$

由圖 4-4 與圖 4-5 可以發現 $\frac{\phi_y}{n_y} - \frac{\phi_x}{n_x} = C$ 值相同時，紐結的環繞路徑雖不同(即

不同類型紐結)，但在 xy -平面的 2D 投影利薩如曲線卻會相同。

在此利用了數學軟體，呈現出不同頻率組合及相位差的利薩如紐結；進一步地分析比較，得到利薩如紐結的幾何變化，跟二維的利薩如曲線比較起來，情況相似卻也更顯得複雜。在 3D 的立體空間中，相位的差異對於紐結曲線的環繞交叉情形，影響很大；當頻率組合相同時，小幅度的相位差異及相位組合不同的變化，將造成相對應結點其不同的上下穿越的交叉法，更何況是頻率組合不同時那更多元且複雜的差異性。近來紐結不變量的學說及研究大量出現，即在分析歸類紐結的多樣性。本文主旨雖然著重在利用數學計算研究紐結圖像變化，對於紐結不變量不多予討論，但可想而知，其中必包含了紐結結構的重要內涵。

4.2 環面紐結

4.2.1 (p,q) -環面紐結

標準的 (p,q) -環面紐結(Torus knots)是沿著輪胎表面環繞的紐結，其數學參數式表示如下(4.4)式[14]：

$$\begin{aligned} x(t) &= (d + a \cos(qt)) \cos(pt) \\ y(t) &= (d + a \cos(qt)) \sin(pt) \\ z(t) &= a \sin(qt) \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 a 表示輪胎內徑； d 為環面中心軸至輪胎內徑上圓心的距離； p 是繞環面中心對稱軸的圈數，最後 q 是繞輪胎面的圈數。例如我們所熟知的(2,3)-環面紐結正是所謂的三葉紐結，其數學參數方程為：

$$\begin{aligned} x(t) &= (d + a \cos(3t)) \cos(2t) \\ y(t) &= (d + a \cos(3t)) \sin(2t) \\ z(t) &= a \sin(3t) \end{aligned} \quad \text{where } d > a > 0 \tag{4.5}$$

透過(4.5)式可以得到三葉紐結如圖 4-6。除此之外，圖 4-7 呈現更多的環面紐結：

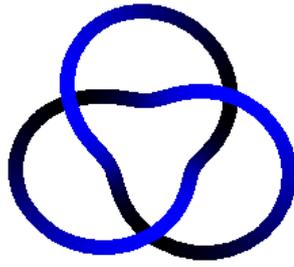


圖 4-6 (2,3)-環面紐結(Trefoil)

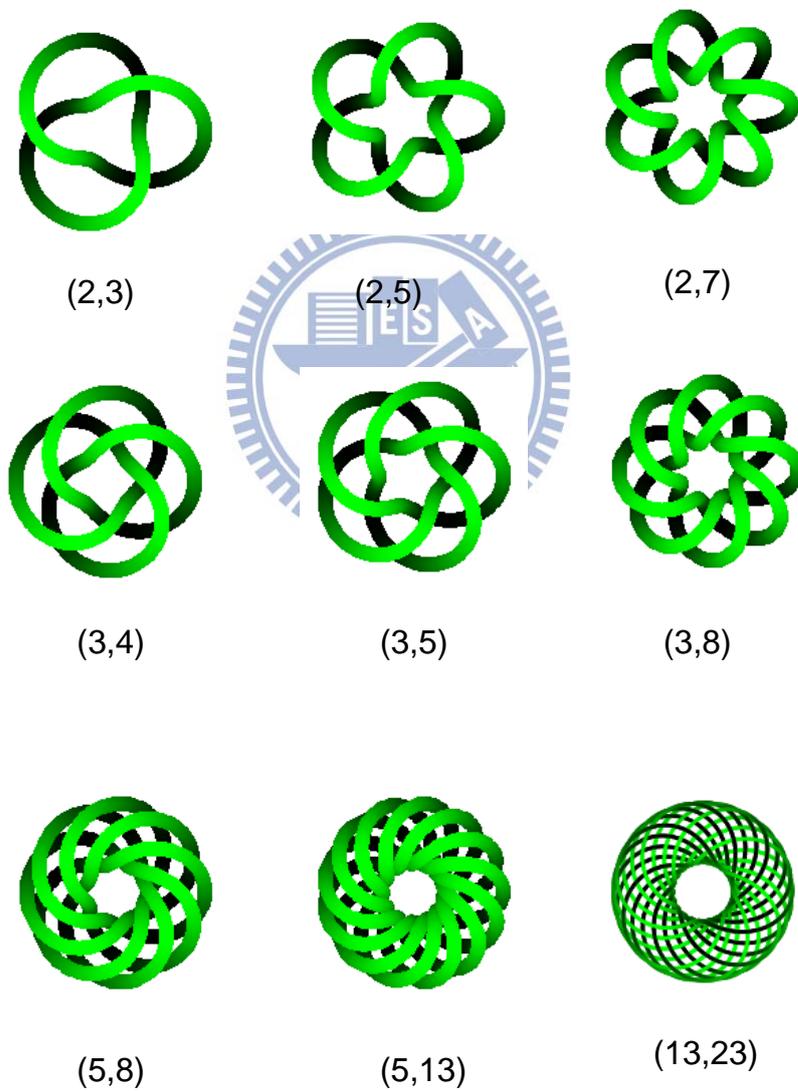


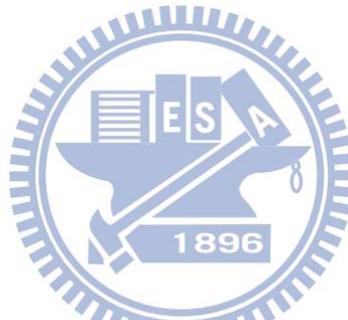
圖 4-7 (p,q) -環面紐結 (xy -plane view)

4.1 節中曾經提到傅利葉紐結，依相關研究得知[11]，環面紐結其實是非線性的三角函數式，意即是三角函數式的二次方以上的數學參數方程。我們利用三角函數的積化和差公式，將 (p,q) -環面紐結的非線性方程式轉化成線性組合的三角函數式。如此一來， (p,q) -環面紐結很顯然地正符合前述所提的傅利葉紐結。其數學推導如下：

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] && \text{(積化和差公式)} \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]\end{aligned}$$

而 (p,q) -環面紐結參數方程為：

$$\begin{aligned}x(t) &= (d + a \cos(qt)) \cos(pt) \\ y(t) &= (d + a \cos(qt)) \sin(pt) , \\ z(t) &= a \sin(qt)\end{aligned}$$



將 $x(t)$ 改寫如下

$$\begin{aligned}x(t) &= (d + a \cos(qt)) \cos(pt) = d \cdot \cos(pt) + a \cdot \cos(pt) \cdot \cos(qt) \\ &= d \cdot \cos(pt) + \frac{a}{2} \cos(pt + qt) + \frac{a}{2} \cos(pt - qt)\end{aligned}$$

同理改寫 $y(t) = (d + a \cdot \cos(qt)) \sin(pt)$ ，我們得到 (p,q) -環面紐結的線性組合的三角函數式為：

$$\begin{aligned}x(t) &= d \cdot \cos(pt) + \frac{a}{2} \cos(pt + qt) + \frac{a}{2} \cos(pt - qt) \\ y(t) &= d \cdot \sin(pt) + \frac{a}{2} \sin(pt + qt) + \frac{a}{2} \sin(pt - qt) \\ z(t) &= a \cdot \sin(qt)\end{aligned} \tag{4.6}$$

從(4.6)式中，不但可知 (p,q) -環面紐結是傅利葉紐結的一種，也可以預見環面紐結和下一段所欲討論的擺線/次擺線紐結之間的密切關聯性。

4.2.2 擺線與次擺線紐結

在 1880 年之間，由泰特(P. G. Tait)首先製成的紐結表中[12]，非零交叉數的頭一個紐結為 knot 3_1 ，即三葉紐結(Trefoil)，正是 4.2.1 節所討論的(2,3)-環面紐結((2,3)-torus knot 圖 4-6)。近年來，學者泰勒(L. D. Taylor) [15]研究出可利用擺線/次擺線的二維 x 及 y 的數學參數方程，再加入 z 方向的參數式，得到如同環面紐結形式的 3D 擺線/次擺線紐結。而另外，Edward 用微電腦創作出 18、19 世紀時許多造型特殊的紐結裝飾物件，當時是畫 2D 的電腦圖案，其採用的數學式近似第二章(2.7)式的二維曲線擺線/次擺線簡化參數方程，如此我們便不須利用標準的環面紐結參數方程(4.4)式，只要利用較簡易的擺線/次擺線紐結參數方程，就可得到各式各樣的環面紐結。

我們希望可以讓擺線/次擺線紐結由二維擺線/次擺線曲線擴充而來，在此先再列出(2.7)式的二維擺線簡化參數方程式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= m_1 \cdot \cos(p \cdot \theta) + n_1 \cdot \cos(q \cdot \theta) \\y(\theta) &= m_2 \cdot \sin(p \cdot \theta) + n_2 \cdot \sin(q \cdot \theta)\end{aligned}\quad (2.7)$$

而泰勒在文章裡[15]所用的三維擺線/次擺線紐結參數方程式可寫成(4.7)式：

$$\begin{aligned}x(t) &= m \cdot \cos(p \cdot t) + n \cdot \cos(q \cdot t) \\y(t) &= m \cdot \sin(p \cdot t) + n \cdot \sin(q \cdot t) \\z(t) &= h \cdot \sin(s \cdot t) \quad (p, q, s : \text{nonzero integers}) \\0 < \theta < 2\pi\end{aligned}\quad (4.7)$$

透過(2.7)式和(4.7)式兩式對照後，可確認三維擺線/次擺線紐結正是利用二維擺線擴充到 3D 立體空間所形成的環繞迴圈而得到。將擺線/次擺線紐結參數方程(4.7)式對照上一小節中的(4.6)式(p, q)-環面紐結之線性組合的三角函數式，可發現兩數學式的相異及相似性：(4.6)式在 x 式及 y 式中各比(4.7)式多了 $d \cdot \cos(pt)$ 及 $d \cdot \sin(pt)$ ，且 x 、 y 式的末兩項的變數為 $(p+q)t$ 及 $(p-q)t$ ，這些都可用代數式及三角函數式 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的恆等式來改寫，由此我們看出

環面紐結和擺線/次擺線紐結之間透過數學式所顯示的關聯。

此外，擺線/次擺線紐結參數方程(4.7)式和環面紐結(4.6)式一樣，也符合傅利葉紐結的級數式(4.1)式。以下為方便故，將僅以「擺線紐結」一詞來通稱「擺線/次擺線紐結」，除非特別強調「次擺線」時，才採用「次擺線紐結」一詞。

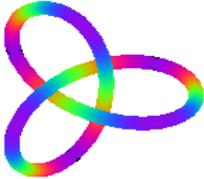
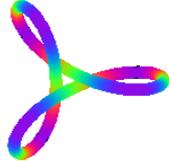
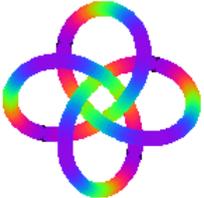
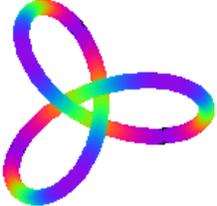
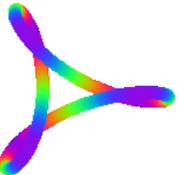
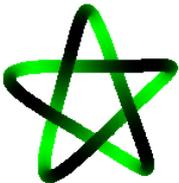
擺線紐結參數方程式(4.7)中， q 值的正負會決定環面紐結在 $x-y$ 平面投影的迴圈向外或向內。當 $q < 0$ 時，環面紐結的迴圈向外(outwards)，對應於內擺線/內次擺線(Hypocycloid/Hypotrochoid)；當 $q > 0$ 時，環面紐結迴圈向內(inwards)，對應於外擺線/外次擺線(Epicycloid/Epitrochoid)。

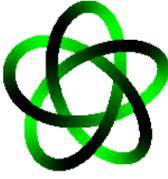
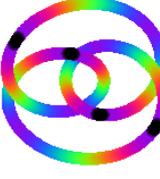
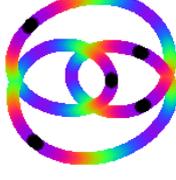
一般情況下，擺線紐結方程(4.7)式取 p 值 > 0 。若同時符合 $p \geq 2$ ， $q < 0$ (outwards)， $s = p + |q|$ ，及 $\left| \frac{n}{m} \right| < 1$ 的數學關係時，所得到的擺線紐結就是「標準」的 (p,s) -環面紐結。這個 (p,s) 的 p 代表的是環繞環面中心軸的環繞圈數 p ，相當於 (p,q) -環面紐結的 p ；而 $s = p + |q|$ 的 s 代表的是環繞輪胎面的圈數，相當於 (p,q) -環面紐結的 q 。

反之，若(4.7)式無法同時符合 $p \geq 2$ ， $q < 0$ (outwards)， $s = p + |q|$ ，及 $\left| \frac{n}{m} \right| < 1$ 的數學條件時，用 mathcad 所得到的擺線紐結將無法確定是否為標準的環面紐結，有可能只是近似的環面紐結或一般的裝飾紐結。又若進一步在(4.7)式再加入任意項的 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ ，所得到是下一章所要探討的複雜裝飾紐結。

今仿 (p,q) -環面紐結一詞的用法，接下來的圖例分析將採用 (p,s) 擺線紐結一詞，如下表 4-1，分別依(1) $p=1$ 及 $p \geq 2$ 、(2) $q > 0$ 及 $q < 0$ 、(3) $s = p + |q|$ 成立與否、(4) $\left| \frac{n}{m} \right| > 1$ 或 $\left| \frac{n}{m} \right| < 1$ ，並利用(4.7)式來探討 (p,s) 擺線紐結。[15]

表 4.1 (p,s) 擺線紐結：其中前 8 圖為 outwards，後 4 圖為 inwards

p	q	s	$\frac{ n }{m}$	類別對照	數學參數方程	Mathcad (xy -plane view)
1	-2	3	1.5	(1,3)擺線紐結 (2,3)環面紐結 右手三葉紐結	$x(t) = \cos(t) + 1.5\cos(-2t)$ $y(t) = \sin(t) + 1.5\sin(-2t)$ $z(t) = 0.35\sin(3t)$	
1	-2	3	0.8	(1,3)擺線紐結 裝飾環面紐結	$x(t) = \cos(t) + 0.8\cos(-2t)$ $y(t) = \sin(t) + 0.8\sin(-2t)$ $z(t) = 0.35\sin(3t)$	
1	-3	4	1.5	(1,4)擺線紐結 裝飾環面紐結	$x(t) = \cos(t) + 1.5\cos(-3t)$ $y(t) = \sin(t) + 1.5\sin(-3t)$ $z(t) = 0.35\sin(4t)$	
2	-1	3	0.8	(2,3)擺線紐結 (2,3)環面紐結 左手三葉紐結	$x(t) = \cos(2t) + 0.8\cos(-t)$ $y(t) = \sin(2t) + 0.8\sin(-t)$ $z(t) = 0.35\sin(3t)$	
2	-1	3	1.5	(2,3)擺線紐結 裝飾環面紐結	$x(t) = \cos(2t) + 1.5\cos(-t)$ $y(t) = \sin(2t) + 1.5\sin(-t)$ $z(t) = 0.35\sin(3t)$	
2	-3	5	0.45	(2,5)擺線紐結 (2,5)環面紐結	$x(t) = \cos(2t) + 0.45\cos(-3t)$ $y(t) = \sin(2t) + 0.45\sin(-3t)$ $z(t) = 0.35\sin(5t)$	

2	-7	9	0.25	(2,9)擺線紐結 (2,9)環面紐結	$x(t) = \cos(2t) + 0.25\cos(-7t)$ $y(t) = \sin(2t) + 0.25\sin(-7t)$ $z(t) = 0.35\sin(9t)$	
3	-2	5	0.45	(3,5)擺線紐結 (3,5)環面紐結	$x(t) = \cos(3t) + 0.45\cos(-2t)$ $y(t) = \sin(3t) + 0.45\sin(-2t)$ $z(t) = 0.35\sin(5t)$	
1	3	4	1.5	(1,4)擺線紐結 數字 8 紐結 裝飾環面紐結	$x(t) = \cos(t) + 1.5\cos(3t)$ $y(t) = \sin(t) + 1.5\sin(3t)$ $z(t) = 0.25\sin(4t)$	
1	3	5	1.5	(1,5)擺線紐結 非交錯紐結	$x(t) = \cos(t) + 1.5\cos(3t)$ $y(t) = \sin(t) + 1.5\sin(3t)$ $z(t) = 0.25\sin(5t)$	
3	5	8	1.5	(3,8)擺線紐結 裝飾環面紐結	$x(t) = \cos(3t) + 1.5\cos(5t)$ $y(t) = \sin(3t) + 1.5\sin(5t)$ $z(t) = 0.25\sin(8t)$	
2	5	7	0.75	(2,7)擺線紐結 裝飾環面紐結	$x(t) = \cos(2t) + 0.75\cos(5t)$ $y(t) = \sin(2t) + 0.75\sin(5t)$ $z(t) = 0.35\sin(7t)$	

現在將利用擺線紐結參數方程 (4.7) 式來設計三葉紐結，有 $q < 0$ 及 $q > 0$ 兩種不同的模式來呈現，數學式各為(4.8)式(4.10)式[15]，再加上標準環面紐結的數學方法(4.11)式[14]，分(i)~(iii)三點討論：

(i) $q < 0$ 的情況：例如 $q = -2$ 及 $q = -1$ ，圖 4-8(a)及(b)

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) + 1.5\cos(-2t) & p &= 1, q = -2, \\ y(t) &= \sin(t) + 1.5\sin(-2t) & s &= p + |q| = 3 \\ z(t) &= 0.35\sin(3t) & & \text{Trefoil(righthand)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

上面 $q < 0$ 的參數方程(4.8)又可改寫如下(4.9)式

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) - 1.5\cos(2t) & p &= 1, q \equiv -2 \text{ still, } x(t) \text{ eqs. change} \\ y(t) &= \sin(t) + 1.5\sin(2t) & s &= p + |q| = 3 \\ z(t) &= 0.35\sin(3t) & & \text{Trefoil(lefthand)} \\ [x,y,eqs. &\equiv \text{hypocycloid}] & & \end{aligned} \quad (4.9)$$

此處強調的是二維 x 及 y 的數學參數方程式加減法的不同，進而與內、外擺線方程的對應型式，而非著眼於 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 的奇偶函數特性。此時，對應的圖例為圖 4-8(a)Righthand Trefoil，是 outwards 的內擺線形式。

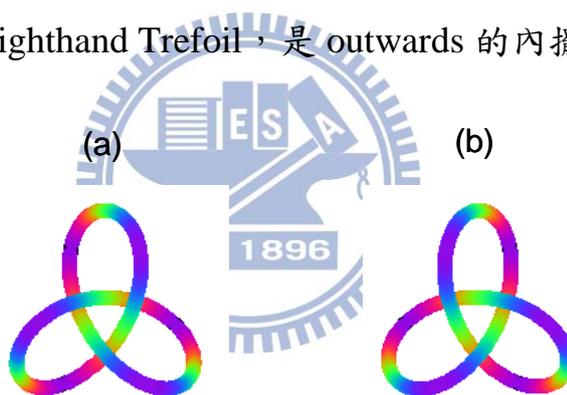


圖4-8 三葉紐結(i)：(a) Righthand Trefoil (b) Lefthand Trefoil

(4.8)式的 p 值=1，即表 4.1 的第 1 個表格裡的圖例，本文稱之為(1,3)擺線紐結，此時雖不符對應於標準 (p,q) -環面紐結的 $p \geq 2$ 的數學條件，但實際上，紐結圖樣符合(2,3)環面紐結的類型。圖 4-8(b)Lefthand Trefoil 即表 4.1 的第 4 個表格裡的圖例，符合 $p \geq 2$ ， $q = -1 < 0$ ， $s = p + |q|$ ，及 $\left| \frac{n}{m} \right| < 1$ 的數學條件，此時(2,3)擺線紐結正是(2,3)環面紐結。

(ii) $q > 0$ 的情況：例如 $q = 5$ ，圖 4-9

$$\begin{aligned}
 x(\theta) &= \cos(2\theta) + 0.3 \cos(5\theta) \\
 y(\theta) &= \sin(2\theta) + 0.3 \sin(5\theta) \\
 z(\theta) &= 0.35 \sin(3\theta)
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$



圖 4-9 三葉紐結(ii)：(2,3)擺線紐結(inwards) $q > 0$

(iii) 用標準的(2,3)環面紐結數學式：(同於 4.2.1 節所述)圖 4-10

$$\begin{aligned}
 x(t) &= (12 + 6 \cos(3t)) \cos(2t) \\
 y(t) &= (12 + 6 \cos(3t)) \sin(2t) \\
 z(t) &= 6 \sin(3t)
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

我們可以得到同於(4.5)式的(4.11)式之三葉紐結如圖 4-10 所示：

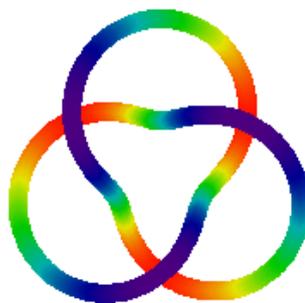


圖 4-10 三葉紐結(iii)：(2,3)-環面紐結(Trefoil)

可畫出「環面紐結」的數學式不只一種，在此已討論「標準環面紐結方程」及「擺線紐結方程」這兩類參數式。從運用數學軟體的實際作圖中可以知道，代入係數值的微小差異，可能會得到完全不同的紐結類型；就算是同一類別的環面紐結，也可以用不同的數學式來表現。例如前述的三葉紐結，除了文中所使用的(i)~(iii)這三種討論分析的數學方法之外，尚可

用「傅利葉紐結」的簡易方程來繪製得到。而另一個具代表性的「數字 8 紐結」(the figure eight knot)也有相同的情況，其所對應的數學參數方程不只一種。而不論是環面紐結或擺線紐結的參數式，如同利薩如紐結般，其數學本質最終都可以歸結到所謂的「傅利葉紐結」[11]。

4.3 SU(2)紐結

在 3.3 節已討論過「利薩如曲線」和「次擺線」之間的 SU(2)幾何轉換。由圖 3-2 及圖 3-3 也列出了兩類曲線之間的轉換過程中的過渡曲線圖例。[9] 本節將接續這樣的想法，進一步呈現三維立體空間中，「利薩如紐結」和「擺線紐結」之間的「過渡紐結」，我們稱之為 SU(2)紐結。

我們已知「利薩如曲線」轉換成「次擺線」的 SU(2)矩陣方程為：

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\tilde{\alpha}/2)\cos(\tilde{\beta}/2) & -\exp(-i\tilde{\alpha}/2)\sin(\tilde{\beta}/2) \\ \exp(i\tilde{\alpha}/2)\sin(\tilde{\beta}/2) & \exp(i\tilde{\alpha}/2)\cos(\tilde{\beta}/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

其中 $u_1(t) = c_1 e^{-i(\omega_1 t - \phi_1)}$ ， $u_2(t) = c_2 e^{-i(\omega_2 t - \phi_2)}$ 為 Lissajous 參數式。如此一來，「利薩如曲線」轉換成「次擺線」的數學方程式為：

$$\tilde{x}(t) = \text{Re}[v_1(t)] = \text{Re}\left\{\exp(-i\tilde{\alpha}/2)\cos(\tilde{\beta}/2)u_1(t) - \exp(-i\tilde{\alpha}/2)\sin(\tilde{\beta}/2)u_2(t)\right\} \quad (4.12)$$

$$\tilde{y}(t) = \text{Re}[v_2(t)] = \text{Re}\left\{\exp(i\tilde{\alpha}/2)\sin(\tilde{\beta}/2)u_1(t) + \exp(i\tilde{\alpha}/2)\cos(\tilde{\beta}/2)u_2(t)\right\}$$

則 $v_1(t), v_2(t)$ 的實部 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ 參數軌跡方程式為：

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = c_1 \cos(\tilde{\beta}/2)\cos(\omega_1 t - \phi_1 - \tilde{\alpha}/2) - c_2 \sin(\tilde{\beta}/2)\cos(\omega_2 t - \phi_2 - \tilde{\alpha}/2) \\ \tilde{y}(t) = c_1 \sin(\tilde{\beta}/2)\cos(\omega_1 t - \phi_1 + \tilde{\alpha}/2) + c_2 \cos(\tilde{\beta}/2)\cos(\omega_2 t - \phi_2 + \tilde{\alpha}/2) \end{cases} \quad (3.29)$$

現在將對照前面章節中的圖 3-2 及圖 3-3，呈現出由(3.29)式的 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ 再加上 $z(t) = c_1 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_z]$ 所得對應圖 3-2、3-3 的 SU(2)紐結，下表 4.2 與表 4.3 為整理出來的結果，分別為 $\omega_1 : \omega_2 = 1:5$ 與 $\omega_1 : \omega_2 = 1:-5$ 與不同 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ 結果。

表 4.2 SU(2) 紐結， $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 5$ ， $(C_1, C_2) = (1.5, 1)$ ， $\tilde{\beta} = \pi/2$ ， $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ， $\phi_z = 0$

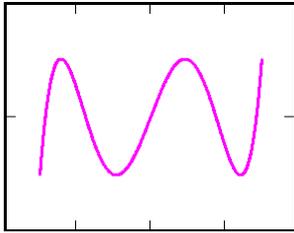
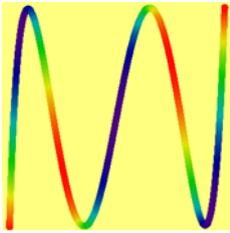
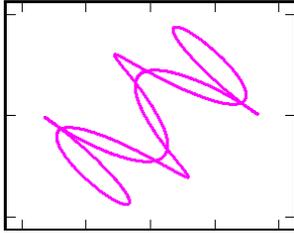
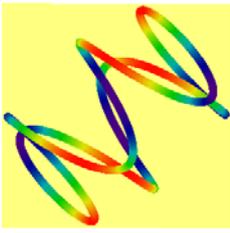
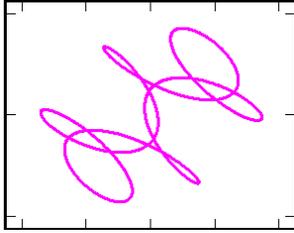
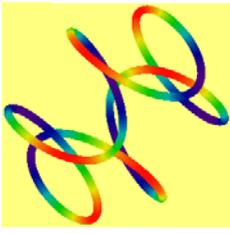
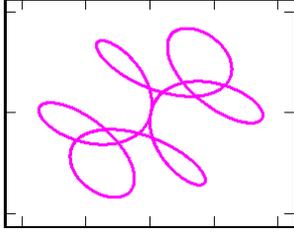
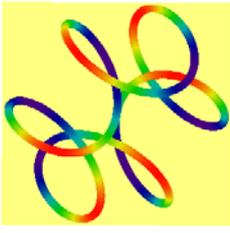
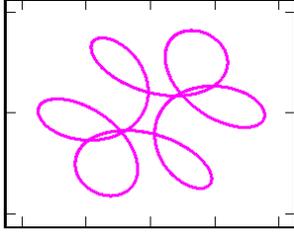
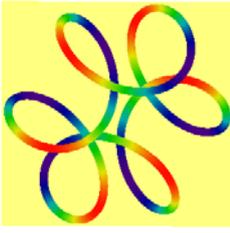
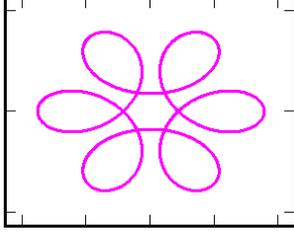
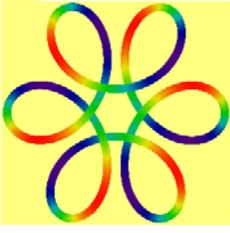
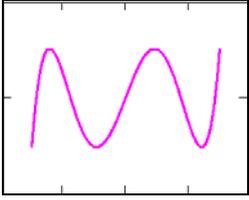
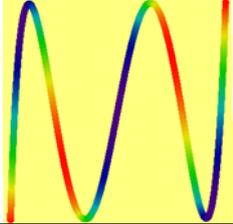
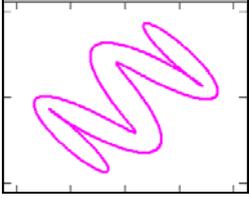
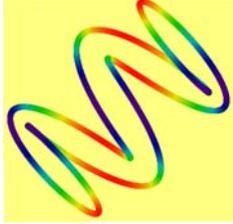
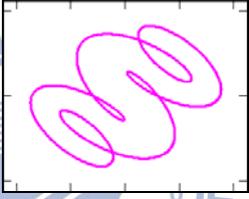
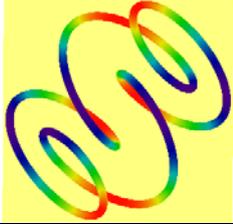
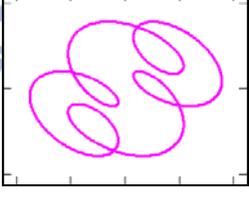
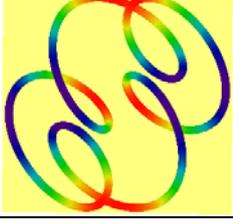
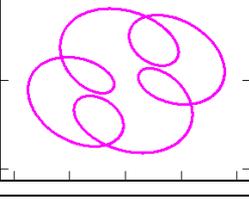
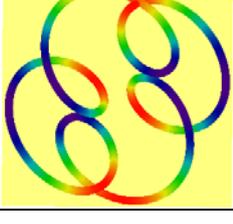
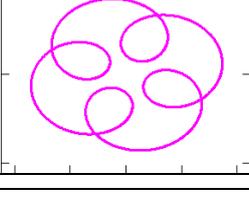
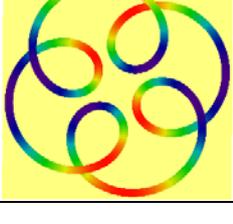
$\omega_1 : \omega_2$	(C_1, C_2)	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	SU(2) 曲線	SU(2) 紐結
1:5	1.5:1	0	$\pi/2$		
1:5	1.5:1	$\pi/8$	$\pi/2$		
1:5	1.5:1	$\pi/4$	$\pi/2$		
1:5	1.5:1	$\pi/3$	$\pi/2$		
1:5	1.5:1	$2\pi/5$	$\pi/2$		
1:5	1.5:1	$\pi/2$	$\pi/2$		

表 4.3 SU(2) 紐結， $\omega_1 : \omega_2 = 1 : -5$ ， $(C_1, C_2) = (1.5, 1)$ ， $\tilde{\beta} = \pi/2$ ， $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ， $\varphi_z = 0$

$\omega_1 : \omega_2$	(C_1, C_2)	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	SU(2) 曲線	SU(2) 紐結
1:-5	1.5:1	0	$\pi/2$		
1:-5	1.5:1	$\pi/8$	$\pi/2$		
1:-5	1.5:1	$\pi/4$	$\pi/2$		
1:-5	1.5:1	$\pi/3$	$\pi/2$		
1:-5	1.5:1	$2\pi/5$	$\pi/2$		
1:-5	1.5:1	$\pi/2$	$\pi/2$		

第五章 複雜裝飾紐結

5.1 裝飾環面紐結

標準的 (p, q) -環面紐結(Torus knots)的數學式仿(4.4)式，可寫為：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(p\theta)[1 + r \cos(q\theta)] \\y(\theta) &= \sin(p\theta)[1 + r \cos(q\theta)] \\z(\theta) &= r \sin(q\theta)\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中 p 表示繞環面中心對稱軸的圈數， q 表示繞輪胎面的圈數。在 4.2.1 節我們呈現了一系列的 (p, q) -環面紐結(見圖 4-7)。而本章節我們將探討所謂的「裝飾環面紐結」，其已跳脫(5.1)式「標準環面紐結」的數學式，進而在(5.1)式中的 $r \cos(q\theta)$ 或 $r \sin(q\theta)$ 項後面可任意加若干項的 $r_n \cos(q_n\theta)$ 或 $r_n \sin(q_n\theta)$ ，且也已跳脫標準環面紐結方程中所要求： z 式的 q 值必須和 x 式、 y 式的 q 或 q_n 為相同數值的限制。唯有一個條件限制：至少須有一個 q_n 和 p 為互質。

裝飾環面紐結的一般通式有兩型，表示方法分別如下(5.2)式與(5.3)式：[14]

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(p\theta)[1 + r_1 \cos(q_1\theta) + r_2 \cos(q_2\theta) + \dots] \\y(\theta) &= \sin(p\theta)[1 + r_1 \cos(q_1\theta) + r_2 \cos(q_2\theta) + \dots] \\z(\theta) &= r_3 \sin(m_1\theta)\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(p\theta)\{1 + r_1[\cos(q_1\theta) + r_2 \cos(q_2\theta) + \dots]\} \\y(\theta) &= \sin(p\theta)\{1 + r_1[\cos(q_1\theta) + r_2 \cos(q_2\theta) + \dots]\} \\z(\theta) &= r_3 \sin(m_1\theta) + r_4 \sin(m_2\theta)\end{aligned}\tag{5.3}$$

我們將利用數學軟體來呈現多種造型特殊的裝飾環面紐結。

將(5.2)式取 $(p, q_1, q_2, m_1, r_3) = (2, 5, 10, 5, 0.35)$ ，分別固定 $r_1 = 0.6$ 及 $r_2 = 0.75$ ，變化 $r_2 = 0.75、0.5、0.3$ 及 $r_1 = 0.2、0.6、9$ 時，會出現一系列變化的裝飾環面紐結，如下圖 5-1 所呈現：

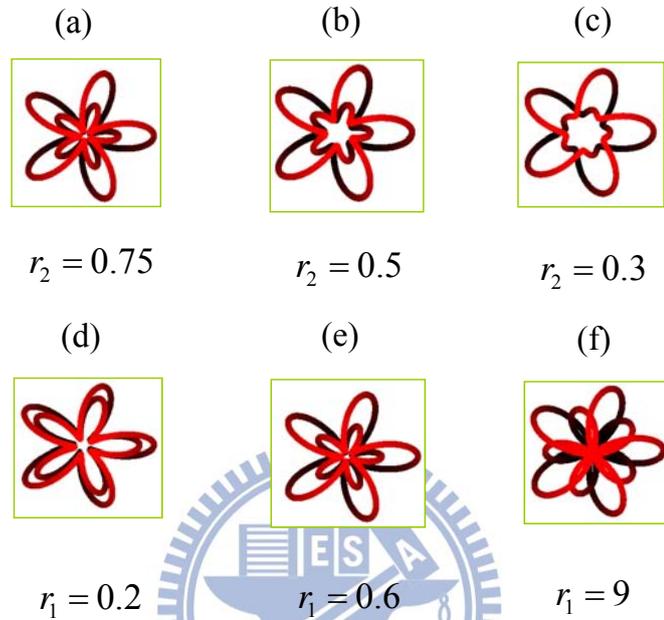


圖 5-1 裝飾環面紐結型一(5.2)式，(a), (b), and (c) : $r_1 = 0.6$; (d), (e), (f) : $r_2 = 0.75$ 。

接著將(5.2)式的 $r_1 = 0.6$ 及 $r_2 = 0.75$ 保持不變，改成變化 (q_1, q_2) 值，其所呈現的圖示如圖 5-2 所示，這裡取 $(p, r_1, r_2, m_1, r_3) = (2, 0.6, 0.75, 5, 0.35)$ 。

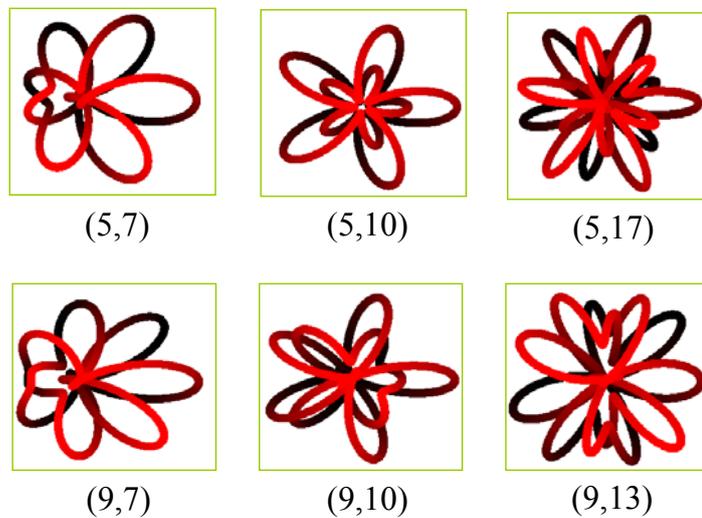


圖 5-2 裝飾環面紐結型一(5.2)式，固定 $r_1 = 0.6$ 及 $r_2 = 0.75$ ，變化 (q_1, q_2) 值

接著是第二型的裝飾環面紐結，採用數學式(5.3)式。同樣地，我們設定的係數的常數值及變化值和第一類型(5.2)式時相近為：

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos(2\theta) \{1 + r_1[\cos(5\theta) + r_2 \cos(10\theta)]\} \\ y(\theta) &= \sin(2\theta) \{1 + r_1[\cos(5\theta) + r_2 \cos(10\theta)]\} \\ z(\theta) &= 0.35 \sin(5\theta) \end{aligned} \tag{5.4}$$

第二型裝飾環面紐結的圖例如下圖 5-3：

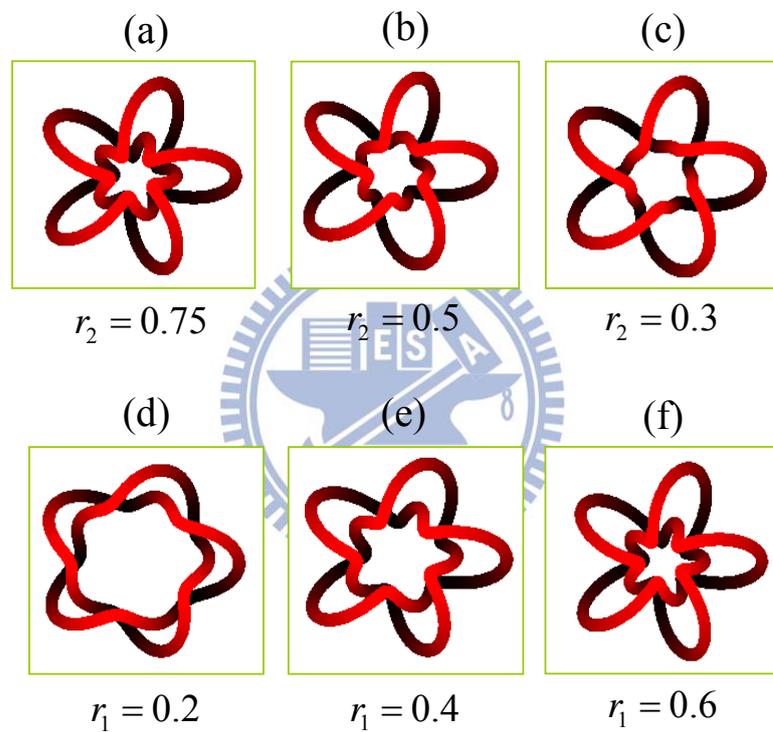


圖 5-3 裝飾環面紐結型二(5.3)式，(a), (b), (c)： $r_1 = 0.6$ ；(d), (e), (f)： $r_2 = 0.75$

最後，我們利用數學軟體呈現若干種造型特殊的裝飾環面紐結，其數學式的主要架構皆與上述兩型其中之一相同，也會列出紐結圖案所對應的數學式及係數值的變化，見圖 5-4。

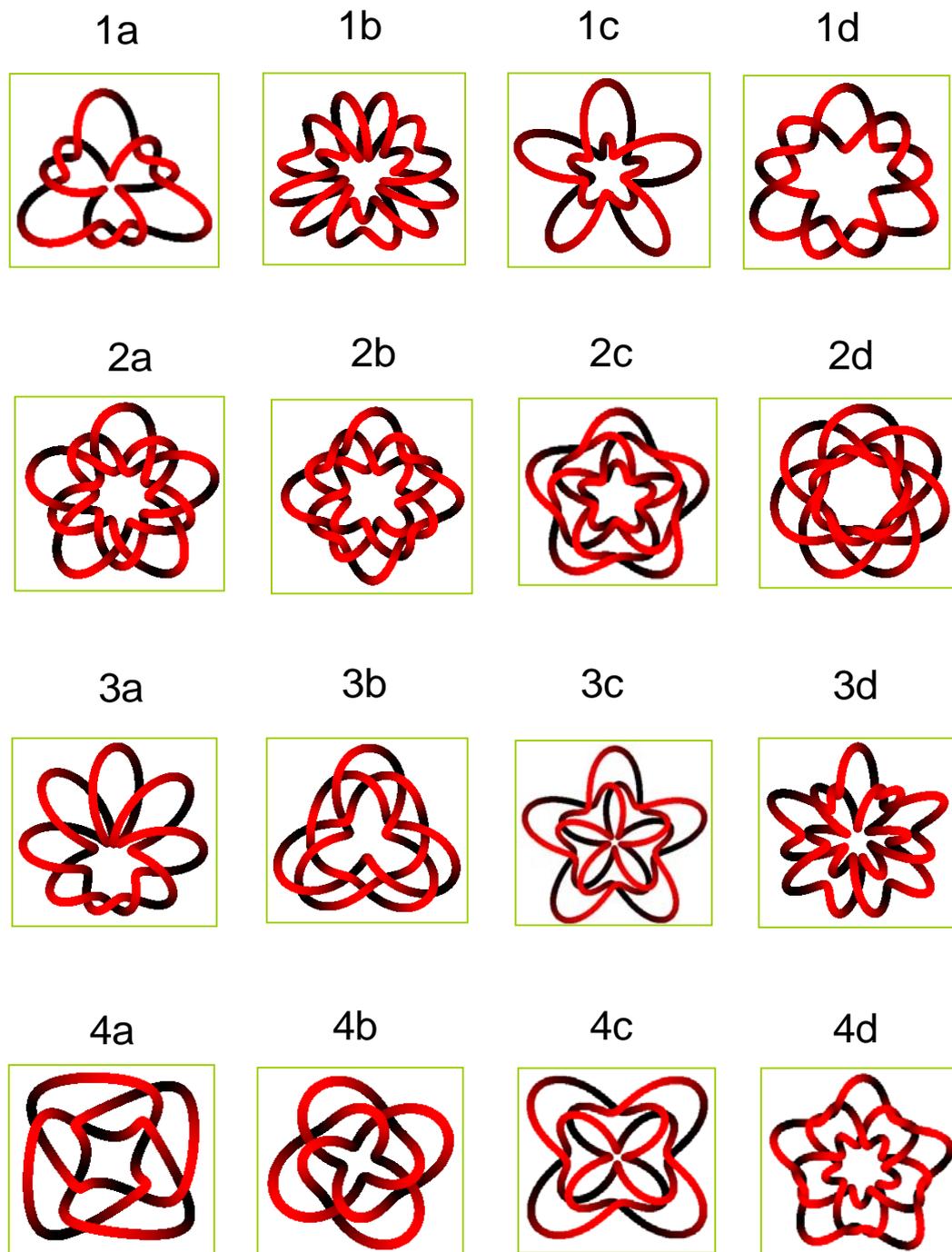


圖 5-4 裝飾環面紐結($q_n > p$)

圖 5-4 細分為四類，第一類包括 1a、1b、1c、1d 四圖， p 值皆為 2，且 q_n 值皆大於 p 值。同時，所有 q_n 值呈倍數關係。數學式如下：

1a 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(2\theta)[1 + 0.45 \cos(3\theta) + 0.4 \cos(9\theta)] \\y(\theta) &= \sin(2\theta)[1 + 0.45 \cos(3\theta) + 0.4 \cos(9\theta)] \\z(\theta) &= 0.2 \sin(9\theta)\end{aligned}\tag{5.5}$$

1b 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(2\theta)[1 + 0.15 \cos(3\theta) + 0.35 \cos(9\theta) - 0.4 \cos(15\theta)] \\y(\theta) &= \sin(2\theta)[1 + 0.15 \cos(3\theta) + 0.35 \cos(9\theta) - 0.4 \cos(15\theta)] \\z(\theta) &= 0.25 \sin(15\theta)\end{aligned}\tag{5.6}$$

1c 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(2\theta)\{1 + 0.6[\cos(5\theta) + 0.75 \cos(10\theta)]\} \\y(\theta) &= \sin(2\theta)\{1 + 0.6[\cos(5\theta) + 0.75 \cos(10\theta)]\} \\z(\theta) &= 0.35 \sin(5\theta)\end{aligned}\tag{5.7}$$

1d 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(2\theta)[1 + 0.15 \cos(3\theta) + 0.35 \cos(9\theta)] \\y(\theta) &= \sin(2\theta)[1 + 0.15 \cos(3\theta) + 0.35 \cos(9\theta)] \\z(\theta) &= 0.25 \sin(15\theta)\end{aligned}\tag{5.8}$$

除了 1c 紐結數學式是型二(5.3)式，1a、1b、1d 都是型一(5.2)式。補充說明一點，1a、1b、1c 的紐結數學式得自 Taylor 的研究，1d 則是在操作數學軟體時，依相同規則刪減或代值所得到的變化圖形，圖 5-4 中 2a~4d 一系列的紐結也有相同的情況。

第二類包括 2a、2b、2c、2d、3c、4c、4d 七圖， p 值皆大於 2，其 q_n 值仍皆大於 p 值。同時，所有 q_n 值仍呈整數倍的關係。數學式如下：

2a 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(3\theta)[1 + 0.3 \cos(5\theta) + 0.5 \cos(10\theta)] \\y(\theta) &= \sin(3\theta)[1 + 0.3 \cos(5\theta) + 0.5 \cos(10\theta)] \\z(\theta) &= 0.2 \sin(20\theta)\end{aligned}\tag{5.9}$$

2b 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(3\theta)[1 + 0.35 \cos(4\theta) + 0.25 \cos(16\theta)] \\y(\theta) &= \sin(3\theta)[1 + 0.35 \cos(4\theta) + 0.25 \cos(16\theta)] \\z(\theta) &= 0.2 \sin(20\theta)\end{aligned}\tag{5.10}$$

2c 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(4\theta)\{1 + 0.5[\cos(5\theta) + 0.4 \cos(20\theta)]\} \\y(\theta) &= \sin(4\theta)\{1 + 0.5[\cos(5\theta) + 0.4 \cos(20\theta)]\} \\z(\theta) &= 0.35 \sin(15\theta)\end{aligned}\tag{5.11}$$

2d 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(5\theta)[1 + 0.35 \cos(7\theta) + 0.25 \cos(14\theta)] \\y(\theta) &= \sin(5\theta)[1 + 0.35 \cos(7\theta) + 0.25 \cos(14\theta)] \\z(\theta) &= 0.25 \sin(21\theta)\end{aligned}\tag{5.12}$$

3c 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(3\theta)\{1 - 0.5[\cos(5\theta) + 0.75 \cos(15\theta)]\} \\y(\theta) &= \sin(3\theta)\{1 - 0.5[\cos(5\theta) + 0.75 \cos(15\theta)]\} \\z(\theta) &= 0.35 \sin(10\theta)\end{aligned}\tag{5.13}$$

4c 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(3\theta)\{1 - 0.5[\cos(4\theta) + 0.75 \cos(12\theta)]\} \\y(\theta) &= \sin(3\theta)\{1 - 0.5[\cos(4\theta) + 0.75 \cos(12\theta)]\} \\z(\theta) &= 0.3 \sin(8\theta)\end{aligned}\tag{5.14}$$

4d 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(3\theta)\{1 + 0.5[\cos(5\theta) + 0.4\cos(20\theta)]\} \\y(\theta) &= \sin(3\theta)\{1 + 0.5[\cos(5\theta) + 0.4\cos(20\theta)]\} \\z(\theta) &= 0.35\sin(25\theta)\end{aligned}\tag{5.15}$$

其中 2a、2b、2d 是型一(5.2)式，2c、3c、4c、4d 是型二(5.3)式。

第三類包括 3a、3b、3d 三圖，這類的 q_n 值仍皆大於 p 值。但其 q_n 值之間並沒有倍數關係。數學式如下，都是型一(5.2)式：

3a 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(2\theta)[1 + 0.4\cos(7\theta) + 0.485\cos(9\theta)] \\y(\theta) &= \sin(2\theta)[1 + 0.4\cos(7\theta) + 0.485\cos(9\theta)] \\z(\theta) &= 0.3\sin(9\theta)\end{aligned}\tag{5.16}$$

3b 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(3\theta)[1 + 0.4\cos(7\theta) + 0.3\cos(9\theta)] \\y(\theta) &= \sin(3\theta)[1 + 0.4\cos(7\theta) + 0.3\cos(9\theta)] \\z(\theta) &= 0.3\sin(14\theta)\end{aligned}\tag{5.17}$$

3d 紐結數學式：

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \cos(2\theta)[1 + 0.475\cos(5\theta) + 0.35\cos(17\theta)] \\y(\theta) &= \sin(2\theta)[1 + 0.475\cos(5\theta) + 0.35\cos(17\theta)] \\z(\theta) &= 0.3\sin(15\theta)\end{aligned}\tag{5.18}$$

第四類包括 4a、4b 兩圖，這類的特色是在 x 、 y 式中混合了 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ ， q_n 值皆大於 p 值，且仍保持倍數或等差數列的關係。數學式如下：

4a 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= \cos(3\theta)[1 + 0.35 \cos(6\theta) + 0.6 \sin(4\theta)] \\
y(\theta) &= \sin(3\theta)[1 - 0.35 \cos(6\theta) + 0.6 \sin(4\theta)] \\
z(\theta) &= 0.2 \sin(8\theta)
\end{aligned}
\tag{5.19}$$

4b 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= \cos(3\theta)\{1 + 0.45[\cos(4\theta) + 0.75 \sin(8\theta)]\} \\
y(\theta) &= \sin(3\theta)\{1 + 0.45[\cos(4\theta) + 0.75 \sin(8\theta)]\} \\
z(\theta) &= 0.2 \sin(8\theta)
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

其中 4a 是型一(5.2)式，4b 是型二(5.3)式。

前述的圖 5-4 是 q_n 值大於 p 值的情況，下面呈現的是某些 q_n 值小於 p 值的情況，這時的紐結圖形和前述略有不同。如圖 5-5。

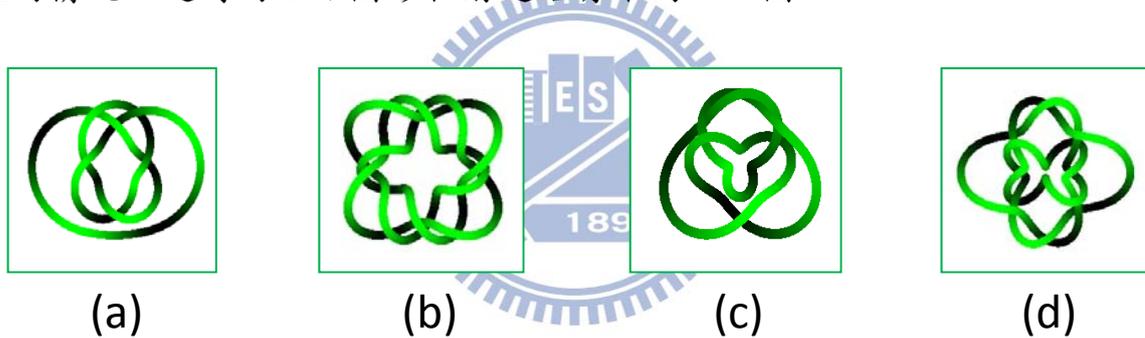


圖 5-5 裝飾環面紐結($p > q_n$ for some q_n)

圖 5-5(a)紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= \cos(3\theta)[1 + 0.25 \cos(2\theta) - 0.35 \cos(\theta) + 0.35 \cos(5\theta)] \\
y(\theta) &= \sin(3\theta)[1 + 0.25 \cos(2\theta) - 0.35 \cos(\theta) + 0.35 \cos(5\theta)] \\
z(\theta) &= 0.2 \sin(7\theta)
\end{aligned}
\tag{5.21}$$

圖 5-5(b)紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= \cos(3\theta)[1 + 0.25 \cos(2\theta) - 0.35 \cos(10\theta)] \\
y(\theta) &= \sin(3\theta)[1 + 0.25 \cos(2\theta) - 0.35 \cos(10\theta)] \\
z(\theta) &= 0.2 \sin(10\theta)
\end{aligned}
\tag{5.22}$$

圖 5-5(c) 紐結數學式：

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos(3\theta) \{1 - 0.525[\cos(2\theta) - 0.2 \cos(\theta) + 0.6 \cos(7\theta)]\} \\ y(\theta) &= \sin(3\theta) \{1 - 0.525[\cos(2\theta) - 0.2 \cos(\theta) + 0.6 \cos(7\theta)]\} \\ z(\theta) &= 0.2 \sin(5\theta) - 0.1 \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (5.23)$$

圖 5-5(d) 紐結數學式：

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos(3\theta) \{1 + 0.5[\cos(2\theta) + 0.75 \cos(10\theta)]\} \\ y(\theta) &= \sin(3\theta) \{1 + 0.5[\cos(2\theta) + 0.75 \cos(10\theta)]\} \\ z(\theta) &= 0.2 \sin(8\theta) \end{aligned} \quad (5.24)$$

其中(a)(b)是型一(5.2)式，(c)(d)是型二(5.3)式。

5.2 裝飾擺線紐結

我們在 4.2.2 節討論過 (p, s) 擺線紐結可以如(4.7)式：

$$\begin{aligned} x(t) &= m \cdot \cos(p \cdot t) + n \cdot \cos(q \cdot t) \\ y(t) &= m \cdot \sin(p \cdot t) + n \cdot \sin(q \cdot t) \\ z(t) &= h \cdot \sin(s \cdot t) \end{aligned} \quad \begin{matrix} (p, q, s : \text{nonzero} \\ \text{intergers}) \end{matrix} \quad (4.7)$$

$0 < \theta < 2\pi$

也討論過：當 $p \geq 2$ ， $q < 0$ ， $s = p + |q|$ ，及 $\left| \frac{n}{m} \right| < 1$ 的條件同時成立時，所得到的「 (p, s) 擺線紐結」就是「標準 (p, s) -環面紐結」。反之，若(4.7)式無法同時符合 $p, q, s, \left| \frac{n}{m} \right|$ 的數學條件時，我們用 mathcad 所得到的擺線紐結將無法確定是否為標準的環面紐結，有可能只是近似的環面紐結或一般的裝飾紐結。

現在我們將微調各數值 $(p, q, s, \left| \frac{n}{m} \right|)$ ，或者在 x 、 y 、 z 式加入 $\cos(\alpha \cdot t)$ 或 $\sin(\beta \cdot t)$ 項，呈現各式各樣的裝飾擺線紐結，如圖 5-6。[15]

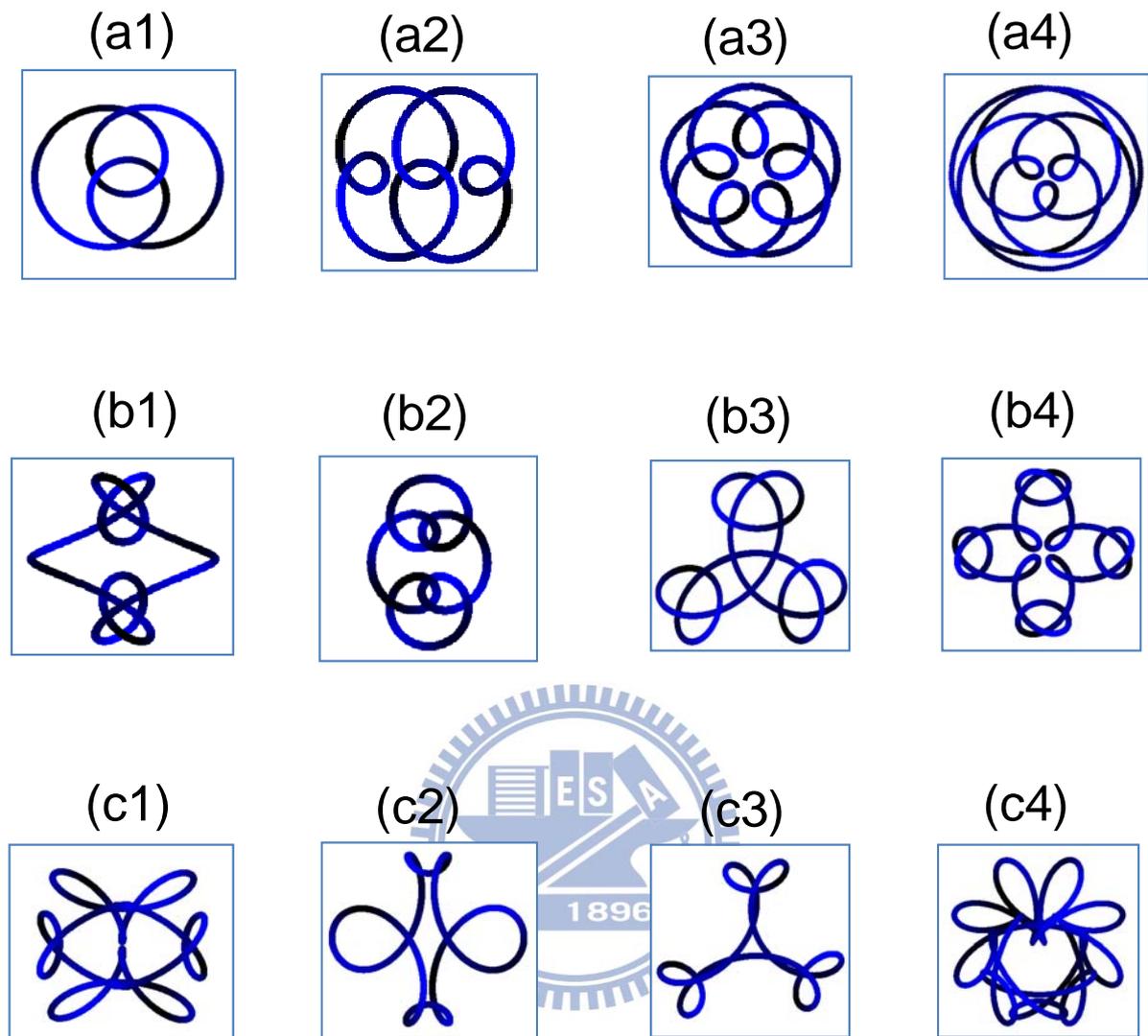


圖 5-6 裝飾擺線紐結

現依序列出圖 5-6 各裝飾擺線紐結的數學式：

(a1)紐結數學式：

$$x(t) = \cos(t) + 1.5 \cos(3t)$$

$$y(t) = \sin(t) + 1.5 \sin(3t)$$

$$z(t) = 0.25 \sin(4t)$$

(5.25)

(a2)紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1.5 \cos(t) + 0.35 \cos(3t) - 0.9 \cos(5t) \\
y(t) &= \sin(t) + 0.35 \sin(3t) - 0.9 \sin(5t) \\
z(t) &= 0.35 \sin(8t) - 0.2 \sin(2t)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

(a1) (a2) 紐結的 $q > 0$ 迴圈向內(inwards)，其中(a1)即「數字 8 紐結」，其 $\left| \frac{n}{m} \right| > 1$ 。

(a3) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos(2t) + 0.67 \cos(7t) \\
y(t) &= \sin(2t) + 0.67 \sin(7t) \\
z(t) &= 0.2 \sin(10t) - 0.1 \sin(5t)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

(a4) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos(4t) + 0.875 \cos(7t) \\
y(t) &= \sin(4t) + 0.875 \sin(7t) \\
z(t) &= 0.35 \sin(12t) - 0.15 \sin(3t)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

(a3) (a4) 紐結和(a1) (a2) 一樣， $q > 0$ 迴圈向內(inwards)，但 $\left| \frac{n}{m} \right| < 1$ ，再加上 $p \geq 2$

後面兩點 ($\left| \frac{n}{m} \right| < 1$ ， $p \geq 2$) 符合 4.2.2 節所述環面紐結的數學條件，故此時又可

視為「裝飾環面紐結」。

至於(b1)、(b2)、(b3)、(b4)這四個裝飾擺線紐結在 x 、 y 、 z 式增加了

$\cos(\alpha \cdot t)$ 或 $\sin(\beta \cdot t)$ 的項數， q_n 值則可能同時包含正負值。其數學式如下：

(b1) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.75 \cos(t) + 0.8 \cos(3t) + 0.98 \cos(-5t) \\
y(t) &= 1.5 \sin(t) + 0.665 \sin(3t) + 0.45 \sin(-5t) \\
z(t) &= 0.35 \sin(8t) + 0.15 \sin(2t)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

(b2) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.75 \cos(t) + 0.8 \cos(5t) \\
y(t) &= 1.5 \sin(t) + 0.8 \sin(5t) \\
z(t) &= 0.35 \sin(8t) + 0.125 \sin(2t)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

(b3) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.59 \cos(t) + 0.3 \cos(-2t) - 0.45 \cos(-5t) \\
y(t) &= 0.59 \sin(t) + 0.3 \sin(-2t) - 0.45 \sin(-5t) \\
z(t) &= 0.1 \sin(9t) + 0.25 \sin(6t)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

(b4) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.6 \cos(t) + 0.25 \cos(-3t) - 0.26 \cos(9t) \\
y(t) &= 0.6 \sin(t) + 0.25 \sin(-3t) - 0.26 \sin(9t) \\
z(t) &= 0.12 \sin(16t) - 0.06 \sin(4t)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

此(b)系列紐結的特色是「複合型式」(compound patterns)。其中(b1)、(b2)為「成對紐結」(pairs of knots, 或 knot pairs)，分成兩群組的型式；(b1)呈現了4個交叉數而(b2)為6個交叉數的成對紐結。(b3)與(b4)則進一步擴充其「分群」的型式，稱之為「群組型紐結」(Larger Groupings of Knots)；(b3)分為「三群」，而(b4)是分為「四群」的裝飾擺線紐結。

至於(c1)、(c2)、(c3)、(c4)這四個裝飾擺線紐結，則是自由變化各項數值後得到的紐結圖形。數學式如下：

(c1) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.6 \cos(t) + 0.3 \cos(-5t) - 0.26 \cos(9t) \\
y(t) &= 0.6 \sin(t) + 0.3 \sin(-5t) - 0.26 \sin(9t) \\
z(t) &= 0.12 \sin(16t) - 0.06 \sin(4t)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

(c2) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.6 \cos(t) + 0.25 \cos(-3t) - 0.26 \cos(-5t) \\
y(t) &= 0.6 \sin(t) + 0.25 \sin(-3t) - 0.26 \sin(-5t) \\
z(t) &= 0.1 \sin(9t) + 0.25 \sin(6t)
\end{aligned}
\tag{5.34}$$

(c3) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.6 \cos(t) + 0.25 \cos(-2t) - 0.26 \cos(-5t) \\
y(t) &= 0.6 \sin(t) + 0.25 \sin(-2t) - 0.26 \sin(-5t) \\
z(t) &= 0.1 \sin(9t) + 0.25 \sin(6t)
\end{aligned}
\tag{5.35}$$

(c4) 紐結數學式：

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.6 \cos(2t) + 0.3 \cos(-7t) - 0.26 \cos(13t) \\
y(t) &= 0.6 \sin(2t) + 0.3 \sin(-7t) - 0.26 \sin(13t) \\
z(t) &= 0.12 \sin(16t) - 0.06 \sin(4t)
\end{aligned}
\tag{5.36}$$

仔細比較(c1)至(c4)的數學式，會發現：只是微小的變化某些係數值，所呈現的裝飾擺線紐結將會有完全不同的樣貌。

與 5.1 節的裝飾環面紐結比較之下，裝飾環面紐結的多元性與複雜度極高，而裝飾擺線紐結的特色在於其有由所謂的「複合型式」所形成的「成對紐結」、「群組型紐結」。其中較為人所熟知的尚有「成對紐結」的祖母結及平方結(Granny Knot and Square Knot)，見圖 5-7 [15]。

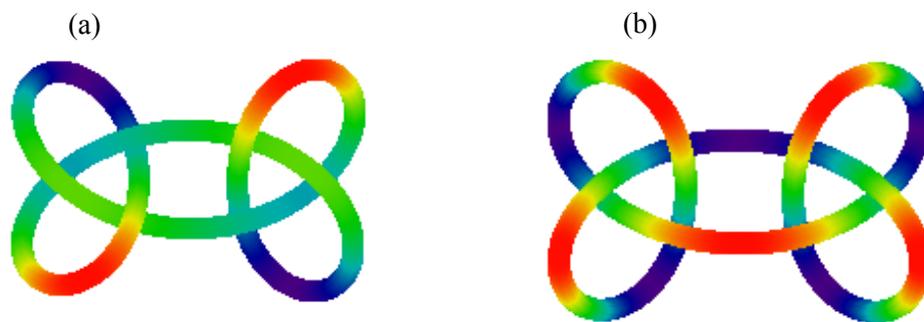


圖 5-7 (a)祖母結 (b)平方結

5.3 裝飾紐結與音符

音樂家為了表示音的高低，發明了樂譜。一般最常見的是由所謂的小豈芽所組成的「五線譜」及由數字所組成的「數字簡譜」，此外還有中國老祖先所用的「減字譜」、「工尺譜」等[16]。其中「五線譜」如圖 5-8 所示：



圖 5-8 五線譜

在圖 5-8 中[17]，其樂譜由(A)至(C)的複雜度逐步增加，這也代表了音樂的豐富性及多樣性的增加。本文無法呈現像圖 5-8 中(B)及(C)般的複雜樂譜，目標是設計出可以表現圖 5-8(A)的簡單音符的樂譜，稱之為「紐結音符」或「紐結樂譜」。

為了要呈現紐結音符的樂譜，必須引用「數字簡譜」的對照。數字簡譜是用數字 1、2、…7 等表示音高的簡單記譜方法。可如下圖所示[18]：

簡譜	1	2	3	4	5	6	7	1
唱名	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
音名	C	D	E	F	G	A	B	C
距離		全音	半音	全音	全音	全音	全音	半音

圖 5-9 數字簡譜與音名

圖 5-9 所示的是大家所熟悉的 do-re-mi-fa-sol-la-ti-do，即所謂的「大音階」(major scale)的音程結構[19]，第一音 do 至第八音 do 構成了八度音程。在這音階中有七個不同的音高(do 至 ti)，包含了五個全音音程及兩個半音音程。半音(half step)是傳統西方音樂裡最小的音程；全音(whole step)的距離是半音的兩倍。如果用鋼琴鍵盤說明，半音就是緊鄰的黑鍵與白鍵的音程。因此在一個八度音程中共有十二個半音。如下圖 5-10 及圖 5-11 所示[18]：

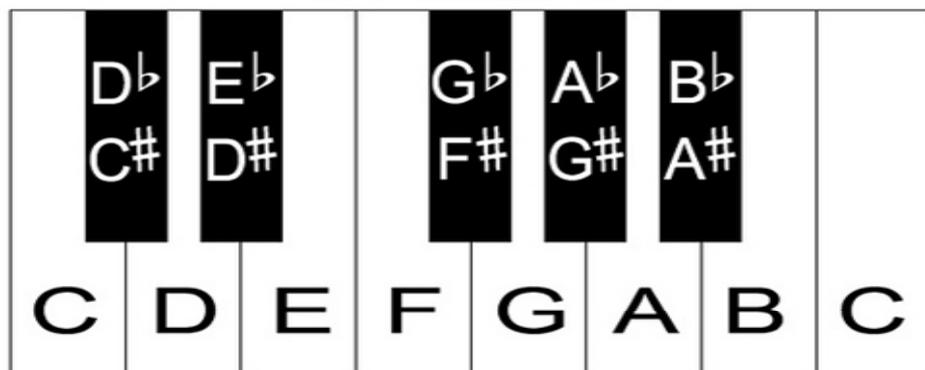


圖 5-10 鋼琴鍵盤與升降半音

在西方音樂中，利用#表示音符升(sharp)，用 b 表示音符降(flat)，每次的升降都是以半音為單位。升降是一種相對的概念，升記號(#)暗示著音符由低往高升，表示情緒向上，變得更加激情、亢奮、high…等；反之，降記號(b)是代表由高往低降，表示情緒往下沉，變得更低落、失望…等[17]。

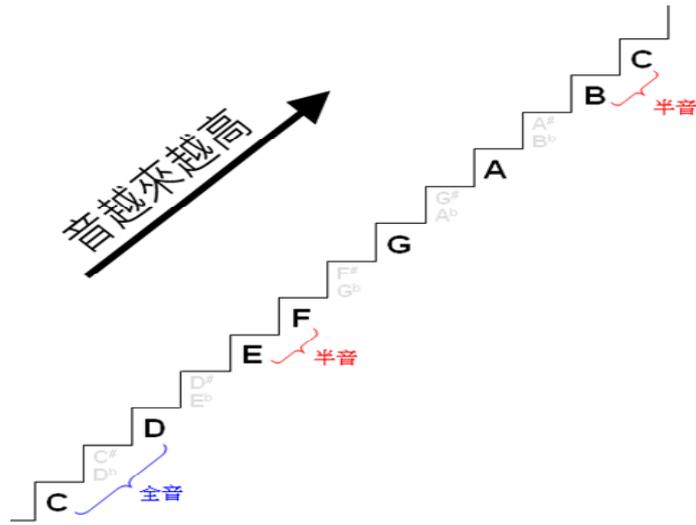


圖 5-11 音階示意圖

從圖 5-9 及圖 5-10 中，我們歸納出共有 17 個不同的原音符(沒有#或 b 的)及升降音符。若也考慮 C 和 F 的降音，及 B 和 E 的升音，即每一個音高都有三種(原始、升、降)音符時，則共有 21 種音符。本文即是以此為出發點，嘗試用紐結對照出 21 種不同的音符。如圖 5-12：

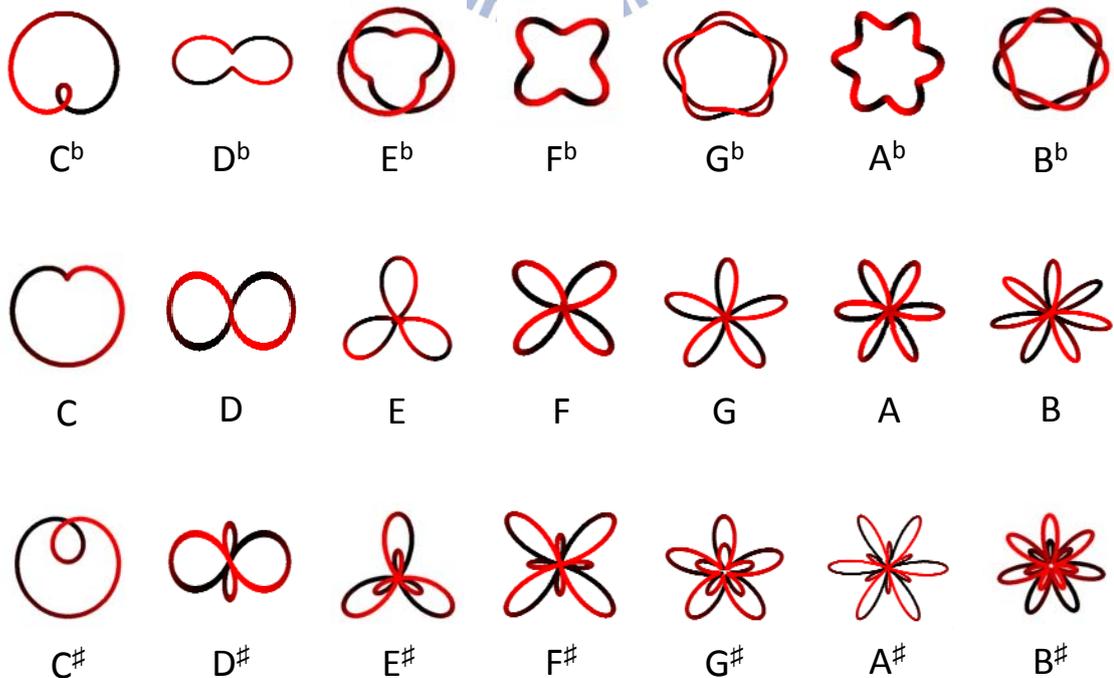


圖 5-12 紐結音符

最後，用莫札特的「小星星」一曲，來表現紐結音符與數字簡譜的對

照：

一 閃 一 閃 亮 晶 晶 ， 滿 天 都 是 小 星 星
1 1 5 5 6 6 5 ， 4 4 3 3 2 2 1


掛 在 天 上 放 光 明 ， 好 像 許 多 小 眼 睛
5 5 4 4 3 3 2 ， 5 5 4 4 3 3 2


一 閃 一 閃 亮 晶 晶 ， 滿 天 都 是 小 星 星
1 1 5 5 6 6 5 ， 4 4 3 3 2 2 1




第六章 結論與未來展望

6.1 結論

在本論文中，透過第二章 2.1 節利薩如曲線(Lissajous curves)的介紹及第四章 4.1 節利薩如紐結(Lissajous knots)的探討，可知在頻率及相位的變因下，兩者在二維相同平面(xy、yz、xz)的曲線投影情況是相同的。但在研究三維的利薩如紐結時，三維紐結的變化及差異情況更顯得複雜。這是因為三維紐結多了所謂「結性」(knottedness)的交叉情況。這使得頻率及相位值必須在符合更嚴密的數學條件關係式時，才可能得到相符性更高的紐結圖像。

將第二章 2.2 節及 2.3 節的內外擺線及內外次擺線兩者的數學式與第四章 4.2.2 節擺線紐結及次擺線紐結的數學式作對照，可以很明確地得知二維的擺線及次擺線曲線可擴充到三維的擺線紐結及次擺線紐結。而經由 4.2.1 節環面紐結(Torus knots)的數學式分析，使我們確信 (p,q) -環面紐結可由 4.2.2 節擺線紐結及次擺線紐結來生成。當然，這也必須在特定的數學條件下才能達成；而且我們利用數學軟體所繪製的紐結圖樣來確認了「環面紐結」和「擺線、次擺線紐結」兩者間的數學關聯性。至此，本文所論述的利薩如紐結、環面紐結或擺線紐結，其數學本質最終都可以歸結到所謂的「傅利葉紐結」。

第三章 3.3 節我們詳細地探討了 $SU(2)$ 如何將利薩如曲線轉換為次擺線的數學原理，再依據「三維利薩如紐結及次擺線紐結是由二維利薩如曲線及次擺線加上第三個(z)方向所得到」這樣的想法，在第四章 4.3 節我們利用數學軟體繪製出對應於「 $SU(2)$ 過渡曲線」的「 $SU(2)$ 紐結」。綜合第二章至第四章所有對二維曲線與三維紐結之間的數學式探討及對照，我們利用數學軟體呈現出具體的紐結圖像。

在第五章中，跳脫了第四章的「標準環面紐結」及「擺線與次擺線紐結」的數學式，進而繪製出「裝飾環面紐結」及「裝飾擺線紐結」。最後，運用本文各式的紐結參數方程式加以探究後，並利用數學軟體繪製出一套可與數字簡譜對應的「紐結音符」。



6.2 未來展望

本文在最後一章呈現了各式各樣的造型特殊的裝飾紐結圖樣，這同時具備了視覺上及數學上的美感。最後一小節，則設計出一簡單的紐結音符。在「數學中的美」(THE BEAUTY OF MATHEMATICS)一書中，提及：「畢達哥拉斯學派認為世界是嚴整的宇宙，整個天體就是和諧與數。正是這個學派，在研究音樂時最早使用了數學，這也是人們最早用數學方法研究美的實踐。音樂、樂譜與數學同樣美[20]。」

本文利用數學計算及數學軟體的使用，具體地探究了紐結的圖像。探究的對象為「利薩如紐結、次擺線紐結、環面紐結、 $SU(2)$ 紐結及裝飾紐結」

等。最後，數學式的層次感，讓我們歸納並分類出裝飾紐結的特殊圖像，也因而引發了「紐結音符」的設計圖像。這或許正是數學的抽象美及抽象力量的本質，也或許可以成為日後我們深入研究數學與紐結的主題及方向。更進一步地，或許可以將紐結圖像的設計廣泛應用在科學或商業，甚或教育活動上。當然，這須要更多的數學內涵及相關數學軟體在質與量兩者上更高度的提升。



附錄一 SU(2) unitary transformation :

量子力學(Quantum mechanics)的哈密頓算符(Hamiltonian) \hat{H} 運動方程

如下(3.20) [9] :

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad v_1 = \tilde{x} + i \cdot \tilde{p}_x, v_2 = \tilde{y} + i \cdot \tilde{p}_y \quad (3.20)$$

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 為常數， ω_0 為自然共振頻率

$$\text{Let } A = -i \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\hat{A} = -i \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega_3}{2} & \frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{2} & \omega_0 - \frac{\Omega_3}{2} \end{bmatrix} = -i \left[\omega_0 \hat{I} + \frac{\Omega_1}{2} \sigma_1 + \frac{\Omega_2}{2} \sigma_2 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right]$$

$$\hat{B} = U_3 \hat{A} U_3^* = \exp(-i\alpha\sigma_3/2) \left[-i \cdot \left(\omega_0 \hat{I} + \frac{\Omega_1}{2} \sigma_1 + \frac{\Omega_2}{2} \sigma_2 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right) \right] \exp(i\alpha\sigma_3/2)$$

$$= -i \left[\exp(-i\alpha\sigma_3/2) \omega_0 \hat{I} \exp(i\alpha\sigma_3/2) + \exp(-i\alpha\sigma_3/2) \cdot \frac{\Omega_1}{2} \sigma_1 \exp(i\alpha\sigma_3/2) \right.$$

$$\left. + \exp(-i\alpha\sigma_3/2) \frac{\Omega_2}{2} \sigma_2 \exp(i\alpha\sigma_3/2) + \exp(-i\alpha\sigma_3/2) \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \exp(i\alpha\sigma_3/2) \right]$$

$$= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \frac{\Omega_1}{2} [(\cos\alpha)\sigma_1 + (\sin\alpha)\sigma_2] + \frac{\Omega_2}{2} [(-\sin\alpha)\sigma_1 + (\cos\alpha)\sigma_2] + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right\}$$

$$= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \left(\frac{\Omega_1}{2} \cos\alpha - \frac{\Omega_2}{2} \sin\alpha \right) \sigma_1 + \left(\frac{\Omega_1}{2} \sin\alpha + \frac{\Omega_2}{2} \cos\alpha \right) \sigma_2 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} \left[\frac{\frac{\Omega_1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2}} \cos \alpha - \frac{\frac{\Omega_2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2}} \sin \alpha \right] \sigma_1 \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} \left[\frac{\frac{\Omega_1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2}} \sin \alpha + \frac{\frac{\Omega_2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2}} \cos \alpha \right] \sigma_2 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right\} \\
&= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \sigma_1 \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) \sigma_2 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right\}
\end{aligned}$$

where $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)$

$$= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} \cos(\theta + \alpha) \sigma_1 + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} \sin(\theta + \alpha) \sigma_2 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right\}$$

(為了消去 σ_2 ，令 $\sin(\theta + \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = -\theta$ ，即 $\alpha = -\tan^{-1} \frac{\Omega_2/2}{\Omega_1/2} = -\tan^{-1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$)

$$= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} \sigma_1 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right\}$$

同理，計算 $\hat{D} = U_2 \hat{B} U_2^*$ 如下，

$$\hat{D} = U_2 \hat{B} U_2^* = \exp(-i\beta\sigma_2/2) \left\{ -i \left[\omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} \sigma_1 + \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \right] \right\} \exp(i\beta\sigma_2/2)$$

$$\begin{aligned}
&= -i \left[\exp(-i\beta\sigma_2/2) \omega_0 \hat{I} \exp(i\beta\sigma_2/2) + \exp(-i\beta\sigma_2/2) \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} \sigma_1 \exp(i\beta\sigma_2/2) \right. \\
&\quad \left. + \exp(-i\beta\sigma_2/2) \frac{\Omega_3}{2} \sigma_3 \exp(i\beta\sigma_2/2) \right] \\
&= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} [(\cos \beta)\sigma_1 - (\sin \beta)\sigma_3] + \frac{\Omega_3}{2} [(\sin \beta)\sigma_1 + (\cos \beta)\sigma_3] \right\} \\
&= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \left[\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} (\cos \beta) + \frac{\Omega_3}{2} (\sin \beta) \right] \sigma_1 + \right. \\
&\quad \left. \left[-\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2} (\sin \beta) + \frac{\Omega_3}{2} (\cos \beta) \right] \sigma_3 \right\} \\
&= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} [\sin \varphi \cos \beta + \cos \varphi \sin \beta] \sigma_1 + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} [\cos \varphi \cos \beta - \sin \varphi \sin \beta] \sigma_3 \right\}
\end{aligned}$$

where $\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}{\Omega_3}$

$$= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} \sin(\varphi + \beta) \sigma_1 + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} \cos(\varphi + \beta) \sigma_3 \right\}$$

(為了消去 σ_1 ，令 $\sin(\varphi + \beta) = 0 \Rightarrow \beta = -\varphi$ ，即

$$\beta = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2}}{\frac{\Omega_3}{2}} = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}{\Omega_3}$$

$$= -i \left\{ \omega_0 \hat{I} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} \cos(\varphi + \beta) \sigma_3 \right\}$$

把 \hat{D} 改寫成矩陣表示式：

$$\hat{D} = -i \begin{bmatrix} \omega_0 + \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} & 0 \\ 0 & \omega_0 - \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Let } \Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}$$

則 \hat{D} 改寫為：

$$\hat{D} = -i \begin{bmatrix} \omega_0 + \frac{\Omega}{2} & 0 \\ 0 & \omega_0 - \frac{\Omega}{2} \end{bmatrix}$$

Let $\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Omega}{2}, \omega_2 = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}$

則 \hat{D} 改寫為：

$$\hat{D} = -i \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix},$$

最後計算 SU(2) 矩陣： $U_3^* U_2^* = \hat{U}$

$$\hat{U} = U_3^* U_2^* = \exp(i\alpha\sigma_3/2) \cdot \exp(i\beta\sigma_2/2)$$

$$= \left(I_2 \cos \frac{\alpha}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left(I_2 \cos \frac{\beta}{2} + i\sigma_2 \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$= I_2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + i\sigma_2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + i\sigma_1 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \\ -\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & -i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \\ i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \\ -\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} \cos \frac{\beta}{2} & e^{i\alpha/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ -e^{-i\alpha/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{-i\alpha/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

令 $\tilde{\alpha} = -\alpha = \tan^{-1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \Rightarrow \alpha = -\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} = -\beta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}{\Omega_3} \Rightarrow \beta = -\tilde{\beta}$

則 \hat{U} 改寫為：

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \exp(-i\tilde{\alpha}/2) \cos(\tilde{\beta}/2) & -\exp(-i\tilde{\alpha}/2) \sin(\tilde{\beta}/2) \\ \exp(i\tilde{\alpha}/2) \sin(\tilde{\beta}/2) & \exp(i\tilde{\alpha}/2) \cos(\tilde{\beta}/2) \end{bmatrix}$$

即是(3.27)式中(如下式)進行基底轉換的 $SU(2)$ 矩陣 $U = \hat{U} = U_3^* U_2^*$ 。

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = U_3^* U_2^* \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

如此可得哈密頓算符(Hamiltonian) \hat{H} 運動方程(3.20)式的解：

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\tilde{\alpha}/2) \cos(\tilde{\beta}/2) & -\exp(-i\tilde{\alpha}/2) \sin(\tilde{\beta}/2) \\ \exp(i\tilde{\alpha}/2) \sin(\tilde{\beta}/2) & \exp(i\tilde{\alpha}/2) \cos(\tilde{\beta}/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

參考文獻

- [1] K. Devlin, 譯洪萬生、洪贊天、蘇意雯、英家銘, “The Language of Mathematic: Making the Invisible Visible,” 商周出版, 台灣 (2011).
- [2] R. Courant, H. Robbin, and I. Stewart, 譯容士毅, “What Is Mathematics,” 左岸文化事業有限公司, 台灣 (2011).
- [3] 谷超豪, “數學辭典,” 建宏出版社, 台灣 (1995).
- [4] 幼獅數學大辭典編輯小組, “幼獅數學大辭典,” 幼獅文化事業公司 (1982).
- [5] B.H. 斯米諾爾夫, 譯孫念增, “高等數學教程第一卷,” 商務印書館, 台灣 (1976).
- [6] 繆龍驥, “實用數學手冊,” 財團法人徐氏基金會, 台灣 (1992).
- [7] 周鴻案, “從利沙球圖形到擺線間的幾何轉換,” 交大理學院碩士在職專班應用科技組碩士論文, 民 98 (2009).
- [8] G. B. Arfken and H. J. Weber, “Mathematical Methods for Physicists,” Elsevier, sixth edition, New York (2005).
- [9] Y. F. Chen, “Geometry of classical periodic orbits and quantum coherent states in coupled oscillators with $SU(2)$ transformations,” Phys. Rev. A **83**, 032124 (2011).
- [10] K. Agle and R. Trapp, “Ropelength and Lissajous Diagrams,” (2009).
- [11] A. Stasiak, V. Katritch, and L. H. Kauffman, “Ideal knots,” World Scientific, Singapore (1998).
- [12] A. Stoimenow, “Tait’s Conjectures and Odd Crossing Number

- Amphicheiral Knots,” Amer. Math. Soc. **45**, 285 (2008).
- [13]M. G. V. Bogle, J. E. Hearst, V. F. R. Jones, and L. Stoilov, “Lissajous knots,” J. Knot Theory and Its Ramifications **3**, 121 (1994).
- [14]L. D. Taylor, “Decorative Knot Patterns ,” VisMath. **13** (2011).
- [15]L. D. Taylor, “Decorative Knotting Using Trigonometric Parametrizations,” VisMath. **11** (2009).
- [16]譚琇文, “中國音樂簡史,”大陸書店,民國 94 年(2005).
- [17]<http://rickmidi.blogspot.com/2010/06/blog-post.html>
- [18]<http://blog.guitar.com.tw/basic-music-theory>
- [19]Roger Kamien, 譯者王美珠等, “音樂認識與欣賞,”美商麥格羅希爾國際股份有限公司台灣分公司,台灣 (2002).
- [20]吳振奎、吳旻, “數學中的美,”哈爾濱工業大學出版社,哈爾濱市, (2011).

