

國立交通大學

電子物理研究所

碩士論文

雷射系統中同調波的模態形成

**Pattern formation of coherent waves in laser systems**

研究 生：江建勳

指 導 教 授：陳永富 教授

中 華 民 國 九 十 三 年 六 月

# 雷射系統中同調波的模態形成

## Pattern formation of coherent waves in laser systems

研究生：江建勳

Student : Chien-Hsung Jiang

指導教授：陳永富

Advisor : Yu-Fung Chen

國立交通大學

電子物理研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Electrophysics

College of Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master of Science

In

Electrophysics

June 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年六月

# 雷射系統中同調波的模態形成

學生：江建勳

指導教授：陳永富 教授

國立交通大學電子物理研究所碩士班

摘要

隨著半導體製程技術的進步，大面積的面射型雷射(VCSEL)已成為一良好的工具來研究彈子球的問題，在這裡假設彈子球的能量不會減少，且和邊界的碰撞皆為彈性碰撞。在古典的世界裡，彈子球因邊界的不同可以概分為兩類，其一為規則的系統，其典型代表是方形彈子球，另一個則是混沌的系統，典型的代表則是操場彈子球；彈子球在這兩種不同邊界中的古典表現是大不相同的，而面射型雷射則提供了一個工具來讓我們去瞭解微觀的世界，而本篇論文主要就是利用我們所知的理論來探討所觀察到的實驗現象。

# **Pattern formation of coherent waves in laser systems**

Student : Chien-Hsung Jiang

Advisor : Yu Fung Chen

Institute of Electrophysics  
National Chiao Tung University



The big area VCSEL has been a good tool to study billiards problems with the progress of semiconductor technology. Assume that the energy of billiards will not loss and billiards collide boundary is elasticity. In classical world, billiards can divide into two kinds because of boundary. First is regular system and square billiards is typical. The other is chaotic system and stadium billiards is typical. The classical behaviors of billiards in these two different boundaries are quite different and VCSEL provide us a tool to understand microscopic world. In the thesis, we use the theory that we know to study the phenomenon observed in experiments.

## 誌謝

在這裡要感謝陳永富老師和黃凱風老師這兩年來的指導，讓我有機會去研究這樣一個有趣的物理領域，探索其未知的世界。實驗室的兩年，我想我永難忘懷的是兩位老師對科學研究的熱誠，對科學研究的執著是我這兩年間學到最多的。



## 目錄

中文摘要	.....	i
英文摘要	.....	ii
誌謝	.....	iii
目錄	.....	iv
圖表目錄	.....	vi
第一章 簡介	.....	1
1.1 研究動機	.....	1
1.2 論文組織	.....	1
第二章 古典彈子球的週期性軌道與渾沌	.....	2
2.1 導論	.....	2
2.2 週期性軌道(PO)的穩定性	.....	2
2.3 古典方形彈子球	.....	4
2.4 古典圓形彈子球	.....	6
2.5 古典操場彈子球	.....	7
附錄	.....	9
第三章 同調波與雷射橫模	.....	13
3.1 導論	.....	13
3.2 SU(2)同調波	.....	13
3.3 微型共振腔(VCSEL)	.....	16

3.4	PO 和本徵態的糾纏.....	21
3.5	方形彈子球中的多個週期性軌道(PO).....	22
第四章	量子彈子球(Quantum Billiards).....	26
4.1	導論.....	26
4.2	量子彈子球的數值分析.....	26
4.3	圓弧角的方形量子彈子球.....	28
4.4	操場量子彈子球.....	30
第五章	光束追跡的干涉模擬.....	35
5.1	導論.....	35
5.2	方形彈子球的干涉模擬.....	35
5.3	圓形彈子球的干涉模擬.....	38
5.4	操場彈子球的干涉模擬.....	40
5.5	操場彈子球中的多個週期性軌道.....	42
第六章	結論與未來展望.....	44

## 圖表目錄

圖 2-1 彈子球在方形邊界中對撞的 PO.....	4
圖 2-2 (a)彈子球在經過 10 次碰撞後的軌跡(b)彈子球經過 1000 次碰撞後，所描繪出的 phase space.....	4
圖 2-3 彈子球在 (1,1) 的 PO 中，由 0 出發經過 1.2.3 回到 4 也就是原點 0.....	5
圖 2-4 (a) 彈子球經過 A 點和 B 點的碰撞，圓心、A、B 構成一等腰三角形，因此 $\varphi = \beta$ ，又入射角等於反射角 $\varphi = \beta = \gamma$ ，以此類推，反射角將持續不變， $\alpha$ 亦保持著相同的值，因此可輕易證得每一次和邊界的碰撞距離都是相等的。(b) 彈子球在和(a)相同起始條件下，經過 2766 次碰撞後，描繪出的軌跡，軌跡的描繪形狀如同一甜甜圈。(c) 其所對應的 phase space.....	6
圖 2-5 (a) 彈子球在操場裡的追跡和對撞的 PO (b) $\eta = 0.001R$ ，1000 次碰撞 (c) $\eta = 0.01R$ ，1000 次碰撞 (d) $\eta = 0.1R$ ，1000 次碰撞 (e) $\eta = R$ ，1000 次碰撞 (f) $\eta = 2R$ ，1000 次碰撞.....	8
圖 2-6 方形彈子球中的古典週期性軌道軌跡 (a) x:y 的速度分量(1:1) (b) (1:2) (c) (2:3) (d) (6:5) (e) (4:5) (f) (e)圖所對應的 phase space.....	9
圖 2-7 圓形彈子球中的古典週期性軌道軌跡及所對應的 phase space.....	9
圖 2-8 彈子球在邊界裡的碰撞關係.....	10
圖 2-9 彈子球在邊界裡的碰撞關係.....	10
圖 3-1 (a)(b)(c)是 $\phi$ 和 $\psi_{N,M}^{p,q}(x,y;\phi)$ 的關係，當固定 $p=1,q=1,N=60,M=9$ 由圖可明顯看出， $\phi$ 決定了 PO 的起點；而 (d)(e)(f) 則探討了 M 和 $\psi_{N,M}^{p,q}(x,y;\phi)$ 當 M	

愈大，其波函數會越侷限，M=N-2J+1 代表著選取的本徵態的個數.....14

圖 3-2 (a)(b)(c)是當固定 p=1,q=1,  $\phi=0.5\pi$ , M=7,N 和  $\psi_{N,M}^{p,q}(x,y;\phi)$  的關係；而 (d)(e)(f)

則探討 p,q 和  $\psi_{N,M}^{p,q}(x,y;\phi)$  的關係，p,q 的數值決定了(p,q)的 PO.....15

圖 3-3 (a) 在方形彈子球中的本徵態 K-space，每一個灰點代表不同本徵態，而黑色的實線代表  $m^2 + n^2 = 26^2 + 26^2$ ，大的黑點則是圖 3-1(d)(e)(f)所選取的本徵態 (b) 利用程式產生一亂數相位，將本徵態疊加後所產生的波函數，其相位分別為  $0.05\pi, 0.55\pi, 0.18\pi, 0.06\pi, 1.42\pi, 0.61\pi, 1.09\pi$  .....15

圖 3-4 (a)  $30\mu m \times 30\mu m$  的方形 VCSEL 在溫度為 220K 的近場實驗結果-PO(1,1)(b)  $40\mu m \times 40\mu m$  的方形 VCSEL 在溫度為 276K 的近場實驗結果-PO(1,2) (c)

  $40\mu m \times 40\mu m$  的方形 VCSEL 在溫度為 276K 的近場實驗結果-PO(1,2)...17

圖 3-5 (a)黑點代表 PO(1,1)在斜率為 -1 和圓環的交點所選取的本徵態 (b) 和斜率 -2 的直線相交的 3 黑點為 SU(2) PO(1,2)所選取的本徵態，其他兩黑點則為交點附近所選取到的其他本徵態.....18

圖 3-6 (a) 疊加方形彈子球本徵態  $\varphi_{27,16}$ 、 $\varphi_{28,14}$ 、 $\varphi_{29,12}$  配合相位差  $\pi/2$ ，  
 $\psi(x, y; \pi/2) = \cos(0 \cdot \pi/2)\varphi_{27,16} + \cos(1 \cdot \pi/2)\varphi_{28,14} + \cos(2 \cdot \pi/2)\varphi_{29,12}$ ，所產生的圖案

(b)  $\psi(x, y; \pi/2) = \cos(0 \cdot \pi/2)\varphi_{27,16} + \cos(1 \cdot \pi/2)\varphi_{28,14} + \cos(2 \cdot \pi/2)\varphi_{29,12}$   
 $-0.36 \cdot \varphi_{28,15} + 0.33 \cdot \varphi_{29,13}$

(c) 疊加方形彈子球本徵態  $\varphi_{10,40}$ 、 $\varphi_{13,39}$ 、 $\varphi_{16,38}$  配合相位差  $\pi/2$ ，  
 $\psi(x, y; \pi/2) = \cos(0 \cdot \pi/2)\varphi_{10,40} + \cos(1 \cdot \pi/2)\varphi_{13,39} + \cos(2 \cdot \pi/2)\varphi_{16,38}$ ，所產生

## 的圖案

- |  |    |
|--|----|
| 圖 3-7 (a) 相關於圖 3-4(a)的近場條紋所得到的實驗遠場條紋 (b) 經由圖 3-2(c)座標空間的波函數所算出的向量空間波函數 (c) (b)圖的三維分佈情形.....  | 20 |
| 圖 3-8 (a) VCSEL 實驗的遠場分佈 (b) 經由(c)作傅氏轉換後理論計算出的遠場分佈 (c) 結合 $PO(1,1)$ 和 $PO(1,2)$ 的近場分佈情形 (d) (b)圖的三維分佈情形                             | 21 |
| .....  | 21 |
| 圖 3-9 (a) VCSEL 在 276K 實驗的近場量測結果 (b) $PO(1,1)$ 和本徵態 $\varphi_{10,39}$ 疊加後理論計算的結果 (c) $PO(1,1)$ 和本徵態 $\varphi_{10,39}$ 強度疊加後理論計算的結果 | 22 |
|  |    |
| .....  | 22 |
| 圖 3-10 (a) VCSEL 兩個 $PO(1,1)$ 實驗量測結果 (b) VCSE 三個 $PO(1,1)$ 實驗量測結果(c) VCSE 四個 $PO(1,1)$ 實驗量測結果.....                                 | 22 |
| .....  | 22 |
| 圖 3-11 (a) VCSEL 實驗的近場量測結果 (b) 由 L1 和 L2 分別形成兩個(1,1)互相干涉後的強度分佈 (c) 選取相同的 SU(2)相關本徵態理論計算結果.....                                     | 23 |
| .....  | 23 |
| 圖 3-12 (a) 選取相同的 SU(2)相關本徵態分別配上四個不同相位理論計算結果(b) 在 r 方向選取四個(1,1)互相干涉後的強度分佈.....  | 24 |
| .....  | 24 |
| 圖 3-13 考慮彈子球平台底部為一類似小山丘的底部經由 SU(2)疊加後所得到的結果.....   | 24 |
| .....  | 24 |
| 圖 3-14 $PO(3,1)$ 所選取的本徵態.....  | 25 |
| .....  | 25 |
| 圖 3-15 兩個 $PO(1,1)$ 所選取的本徵態.....   | 25 |
| .....  | 25 |

圖 4-1 一般的二維彈子球(I)用一適當矩形來圍住所需的邊界(II)，在區域(I)內的位能為零，而在區域(II)的位能 $V_0$ 為一有限值而在區域(III)的位能為無限大.....27

圖 4-2 圓弧角的方形所計算出的波函數，其和方形彈子球的週期性軌道是一致的.....29

圖 4-3 (a) 圖 4-2(a)中 PO(1,1)相關的動量空間分佈情形 (b) 圖 4-2(b)中 PO(1,2)相關的動量空間分佈情形.....29

圖 4-4 圓弧角的方形面射型雷射實驗結果.....30

圖 4-5 操場形彈子球計算出的結果.....30

圖 4-6 將本徵態作疊加後所得到的波函數  
(a)  $\cos(440 \cdot 0.1\pi)\phi_{440} + \cos(441 \cdot 0.1\pi)\phi_{441} + \cos(442 \cdot 0.1\pi)\phi_{442}$   
(b)  $\cos(440 \cdot 0.3\pi)\phi_{440} + \cos(441 \cdot 0.3\pi)\phi_{441} + \cos(442 \cdot 0.3\pi)\phi_{442}$ .....31

圖 4-7 在左圓的上半部作微擾操場形彈子球計算出的結果 (a) 量子數 n=1000 (b) 量子數 n=67 (c) 量子數 n=1194 (d) 量子數 n=1199.....31

圖 4-8 (a) (b) 在操場形邊界面射型雷射實驗所觀察到的近場渾沌現象 (c) (d) 和操場中 PO 相關的近場實驗圖.....32

圖 4-9 設計一位能使得彈子球平台底部由平的變成突出的.....33

圖 4-10 底部位能改變後所計算出的結果 (a) 量子數 n = 452 (b) 量子數 n = 1613  
.....33

圖 4-11 底部位能改變後所計算出的結果 (a) 量子數 n = 868 (b) 量子數 n = 898  
.....34

圖 5-1	將波的性質加入古典彈子球的追跡.....	35
圖 5-2	結合波性與粒子性在方形 $\text{PO}(1,1)$ 的模擬 (a) 低階的模擬結果 (b) 高階的模擬結果.....	36
圖 5-3	(a) $\text{PO}(1,2)$ 軌跡的模擬結果 (b) $\text{PO}(3,1)$ 軌跡的模擬結果.....	36
圖 5-4	方形邊界中 $\text{PO}(1,1)$ 軌跡模擬的結果 (a) 使半波長的 4 倍為全長 L (b) 使半波長的 12 倍為全長 L (c) 方形無限位能井中的波函數解 $ \phi(x, y) ^2 =  \sin(x) \sin(y) ^2$ (d) 波函數解 $ \phi(x, y) ^2 =  \sin(3x) \sin(3y) ^2$ .....	37
圖 5-5	圓形面射型雷射的近場實驗結果.....	38
圖 5-6	(a) 彈子球在圓邊界中的古典週期性軌道軌跡 (b) 加入波的性質後所得到的強度分佈 (c) 加入波的性質所得到的分佈情形.....	38
圖 5-7	(a) 圓形彈子球的一 PO 軌跡 (b) 半波長的 110 倍為 PO 長度 L (c) 半波長的 112 倍為 PO 長度 L (d) 半波長的 114 倍為 PO 長度 L.....	39
圖 5-8	(a) 半波長的 10 倍為 PO 長度 L (b) 半波長的 22 倍為 PO 長度 L (c) 半波長的 36 倍為 PO 長度 L (d) 圓邊界的無限位能井波函數解 $(0,0)$ (e) 圓邊界的無限位能井波函數解 $(0,2)$ (f) 圓邊界的無限位能井波函數解 $(1,1)$ .....	40
圖 5-9	(a) 操場形面射型雷射近場圖案實驗結果 (b) 利用程式模擬彈子球在操場邊界的模擬結果.....	40
圖 5-10	(a) 典型操場形面射型雷射近場實驗圖 (b) 在操場裡設計兩種不同的折射率，在較小的操場裡折射率小，兩者之間的折射率較大 (c) 沒有任何侷限的古典追跡 (d) 內外折射率不同的古典追跡 (e) (c)圖相關的波干涉圖案 (f) (d)圖相關的波干涉圖案.....	41

圖 5-11 (a) 操場形面射型雷射的近場實驗結果 (b) 程式的干涉模擬結果.....42

圖 5-12 (a) 操場彈子球中沿著邊界行走的 PO (b) (a)的軌跡干涉後的結果(c) 操場

彈子球中八字形的 PO (d) (c)的軌跡干涉後的結果 (e) 結合(a)和 (c)的古典

PO 軌跡 (f) 將(b)和(d)的干涉圖案作結合.....43



# 第一章 簡介

## 1.1 研究動機

我們一般最為熟知的雷射共振腔是兩面鏡子的共振腔，其橫模的解是我們在量子力學中所熟悉的二維簡諧振盪的解析解，在直角座標系中是 Hermite-Gaussian (HG) 而在圓柱座標系中則是 Laguerre-Gaussian (LG)[1]，在這樣的雷射系統中我們觀察到了簡諧振盪的古典軌跡 Lissajous Figure[2]；根據 Bohr 的相對應原理當量子數足夠大時其所對應的波函數會和古典有關係，但不幸的是不管是再高階的 HG 或者是 LG 都無法和我們實驗所觀察到的古典軌跡有所關係，在這裡我們引進 SU(2)這套數學方法，它成功的鏈結起古典和量子力學間的關係，單一的本徵態並不會和古典產生關連，但是當使用 SU(2)的方法選取幾個本徵態配上係數作疊加後，波函數的分佈就和古典軌跡產生了很高的關連性；而在微型共振腔 VCSEL 裡更多有趣的不同橫模，在面射型雷射裡波函數經過近軸近似後其形式和二維無限位能井是一樣的，在二維的情形我們將之稱為量子彈子球，而經由半導體的技術我們可以輕易的修改其邊界，使其是規則的方形邊界、圓形邊界或者是古典行為渾沌的操場邊界，正因其不同邊界的變化古典的表現就大大的不同，我們依此來作古典和量子之間很有趣的研究。

## 1.2 論文組織

在第二章裡所先探討的是古典裡彈子球在不同邊界的表現，第三章則主要探討在規則系統方形彈子球裡的波函數分佈情形，而後是探討不規則系統的表現倒角和操場，在第五章裡則引進一有趣的假設利用程式結合粒子和波動的性質來作探討。

## 第二章 彈子球在不同邊界中的規則與渾沌

### 2.1 導論

當彈子球被侷限在不同的邊界裡，彈子球的行為隨著不同的邊界會有很大的不同表現，假設彈子球所做的碰撞是為彈性碰撞沒有任何能量的損失，本章用程式來模擬其在不同邊界中的古典追跡，和在 phase space 中的不同表現[3]。

### 2.2 週期軌道(PO)的穩定性

在彈子球的討論中，很重要的一部份是探討其中的 PO。當我們將彈子球的起始條件  $s_0$ 、 $p_0$  作一些微擾後，彈子球可能在經過數次碰撞後愈來愈遠離其 PO 軌道，或者是穩定的在其 PO 軌道附近。假設有某一 PO 軌道在經過 N 次碰撞後回到起始點，當我們對起始條件作一些微擾  $s_0$ 、 $p_0$ ，經過 N 次碰撞回到起始條件附近後，其偏差值為  $s_N$ 、 $p_N$ ，兩者的關係可用一矩陣來作連結。


$$\begin{pmatrix} \delta s_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} = m_N \begin{pmatrix} \delta s_0 \\ \delta p_0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

其中  $m_N$  為一  $2 \times 2$  的矩陣，其推導方式可參考本章最後的附錄。

PO 的穩定與否是依據  $m_N$  的特徵值來決定。我們用 trace 來表示  $m_N$  的特徵值。

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \{ Tr(m_N) \pm [Tr(m_N)^2 - 4]^{1/2} \} \quad (2.2)$$

彈子球經過 N 次碰撞後，偏差值  $\delta s_N$ 、 $\delta p_N$  可藉由  $\lambda_{\pm}$  乘上特徵向量的線性組合來做表示。

$$\begin{pmatrix} \delta s_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} = A \lambda_+ \begin{pmatrix} \delta s_+ \\ \delta p_+ \end{pmatrix} + B \lambda_- \begin{pmatrix} \delta s_- \\ \delta p_- \end{pmatrix}$$

因此在經過 j 次的 PO 之後

$$\begin{pmatrix} \delta s_{Nj} \\ \delta p_{Nj} \end{pmatrix} = A\lambda_+^j \begin{pmatrix} \delta s_+ \\ \delta p_+ \end{pmatrix} + B\lambda_-^j \begin{pmatrix} \delta s_- \\ \delta p_- \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

隨著特徵值的不同有下列三種可能性。

$$(1) \quad |Tr(m_N)| < 2 \quad (\text{stable}) \quad (2.4)$$

由(2.2)式  $\lambda_{\pm}$  為一共軛複數

$$\lambda_{\pm}^j = \exp(\pm ij\beta) \quad (2.5)$$

其中  $\beta$  為穩定角。在這個狀況下當 j 增加時偏差值會在零附近震盪，所以這個 PO 是穩定的。



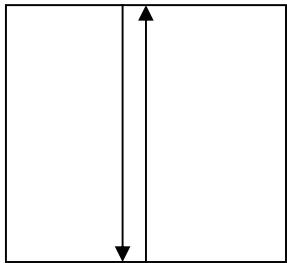
$$(2) \quad |Tr(m_N)| > 2 \quad (\text{unstable}) \quad (2.6)$$

由(2.2)式可知  $\lambda_{\pm}$  為實數，且互為倒數。其中  $\lambda_+$  保證偏差值會快速的放大，所以在這個情況下 PO 是不穩定的。

$$(3) \quad |Tr(m_N)| = 2 \quad (\text{neutral}) \quad (2.7)$$

在這個特別狀況下特徵值為 1 或是 -1，其偏差值會呈線性放大。

下面將先舉一個簡單的例子，圖 2- 是方形中的對撞 PO，曲率半徑 R 為無限大， $\alpha_0 = \alpha_1 = \pi/2$ 、 $p_0 = p_1 = 0$ 、 $N=2$ 。由附錄可推出  $m_2$ ，其  $Tr = 2$ ，因此在此狀況下為 neutral。



$$m_2 = m_{21}m_{10} = \begin{pmatrix} -1 & -\rho \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\rho \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tr(m_N) = 2 \quad (2.8)$$

圖 2-1 彈子球在方形邊界中對撞的 PO

### 2.3 古典方形彈子球(square billiards)

我們首先要探討的是矩形彈子球，一般情形下，當給了彈子球任一起始條件(位置、方向)，彈子球在矩形的對應邊，位置會隨著時間不斷的改變，但入射角與反射角在其對應邊，始終會保持著相同的值。圖 2-1 即是在矩形中的一般情形，左右的對應邊不管碰撞多少次， $p$  一直維持在  $\cos(\alpha)$  和  $\cos(\pi/2 + \alpha)$ ，同樣的上下的對應邊  $\cos(\beta)$  和  $\cos(\pi/2 + \beta)$ ，因此在 phase space 上即會是數條一維的圖案(邊界起點為左邊界中點)。

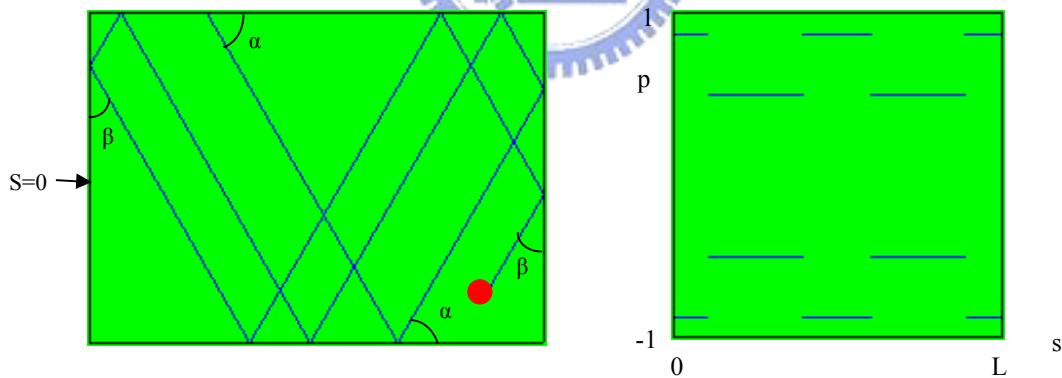


圖 2-2 (a) 彈子球在經過 10 次碰撞後的軌跡。圖 2-2(b) 彈子球經過 1000 次碰撞後，所描繪出的 phase space。

彈子球的追跡中，週期性軌道(PO)扮演一個相當重要的角色，在微觀系統的量子力學世界中，系統似乎也特別偏愛這些古典的 PO，同時這些 PO 也是我們鏈結古典和量子力學的重要橋樑，因此我們將花很大的篇幅來研究 PO。在矩形中，因實

驗的關係，我們將焦點放在矩形中的特例方形中。

在方形的 PO 中，當彈子球起始條件在 x 方向和 y 方向的速度分量互質時，x 方向的分量代表著和 x 方向邊界的碰撞次數，而 y 方向的分量代表著和 y 方向邊界的碰撞次數，隨著起始位置的不同，則會有相應不同軌跡的週期性軌道，形成相同碰撞次數的 PO。因此，將其定義為 (1,1) (2,1) (5,6)……的 PO，其中第一個分量代表 x 方向的碰撞次數，第二個分量代表 y 方向的碰撞次數，phase space 上依據碰撞的次數，有相對應的零維度的點。在方形中，每個位置的曲率半徑皆為無限大， $m_N$  可以相單簡單的方式表示，以 (1,1) 為例其  $N=4$

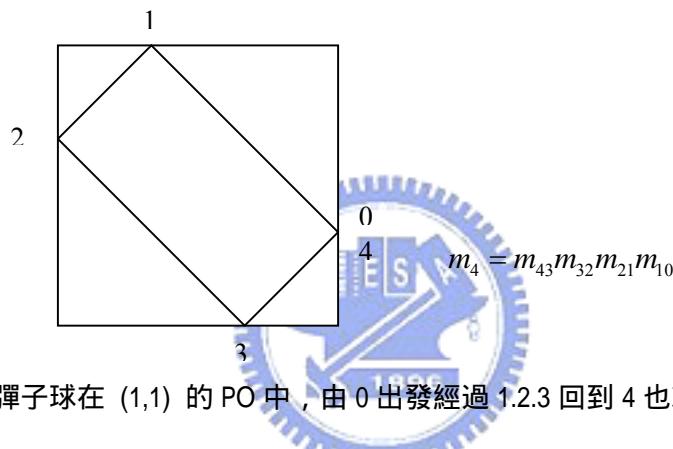


圖 2-3 彈子球在 (1,1) 的 PO 中，由 0 出發經過 1.2.3 回到 4 也就是原點 0

$$m_4 = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_0} & -\frac{\rho_{43}}{\sin \alpha_3 \sin \alpha_0} \\ 0 & -\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} & -\frac{\rho_{32}}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3} \\ 0 & -\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} & -\frac{\rho_{21}}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} \\ 0 & -\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} & -\frac{\rho_{01}}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_0} \\ 0 & -\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

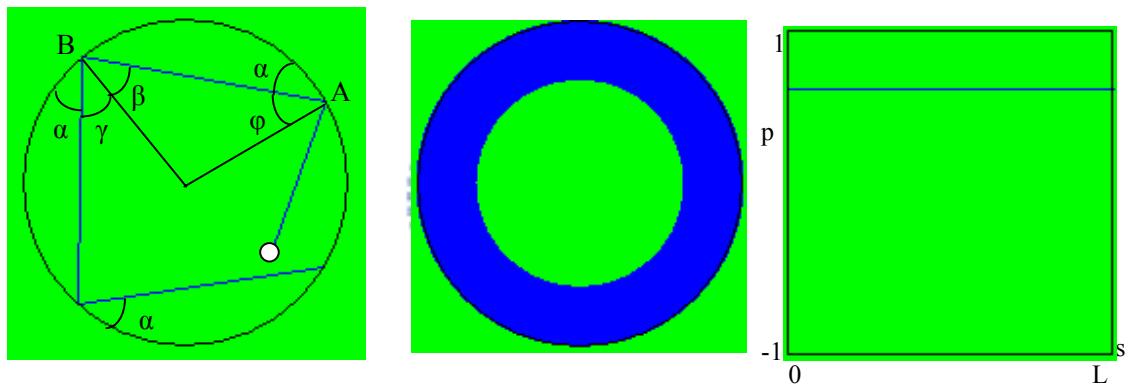
由(2.9)式，矩陣操作後， $m_4(1,1)$ 、 $m_4(2,2)$ 兩個元素的值皆為

$$m_4(1,1) = m_4(2,2) = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_0} = 1 \quad (2.10)$$

故其  $\text{Tr} = 2$  是為 neutral stable。在方形中所有的 PO 其  $m_N$  經過矩陣操作後， $m_N(1,1)、m_N(2,2)$  之值為 1， $\text{Tr} = 2$ 。因此，所有矩形的 PO 皆為 neutral stable。

## 2.4 古典圓形彈子球

在圓形彈子球中，由簡單的幾何證明即可知（圖 2-3(a)），當隨意給彈子球一起始條件，彈子球在經過連續的碰撞後，反射角會一直維持不變，也就是說  $p=\text{constant}$ ，phase space 上即會是平行  $s$  的直線，且每一次和邊界的碰撞距離都是相等的。特別的是，其軌跡在經過多次碰撞後，並不會如在矩形邊界中，佈滿整個區域，彈子球隨著不同的起始條件會有不同半徑的同心圓為禁止區域，彈子球在禁止區域內的出現機率為零。



■ 2-4 (a) 彈子球經過 A 點和 B 點的碰撞，圓心、A、B 構成一等腰三角形，因此  $\gamma = \alpha$ ，又入射角等於反射角  $\beta = \alpha$ ，以此類推，反射角將持續不變， $\gamma$  亦保持著相同的值，因此可輕易證得每一次和邊界的碰撞距離都是相等的。(b) 彈子球在和(a)相同起始條件下，經過 2766 次碰撞後，描繪出的軌跡，軌跡的描繪形狀如同一甜甜圈。(c) 其所對應的 phase space。

當  $\gamma = K/N$   $K, N$  為互質整數時，彈子球會形成一 PO，彈子球會和邊界有 N 次的碰撞。這些 PO 很重要的特點在於，當 PO 對圓心旋轉一角度後又是一相同的 PO，形成一連續的相同 PO。同樣的，圓的 PO 和其一般行為一樣，反射角不會改變，每一次的碰撞距離相同，將這兩個條件代入偏差的矩陣，會發現到每一個矩

陣皆是相同的，如 (2.12)。

$$m_{N,N-1} = m_{N-1,N-2} = \cdots = m_{2,1} = m_{1,0} \quad (2.11)$$

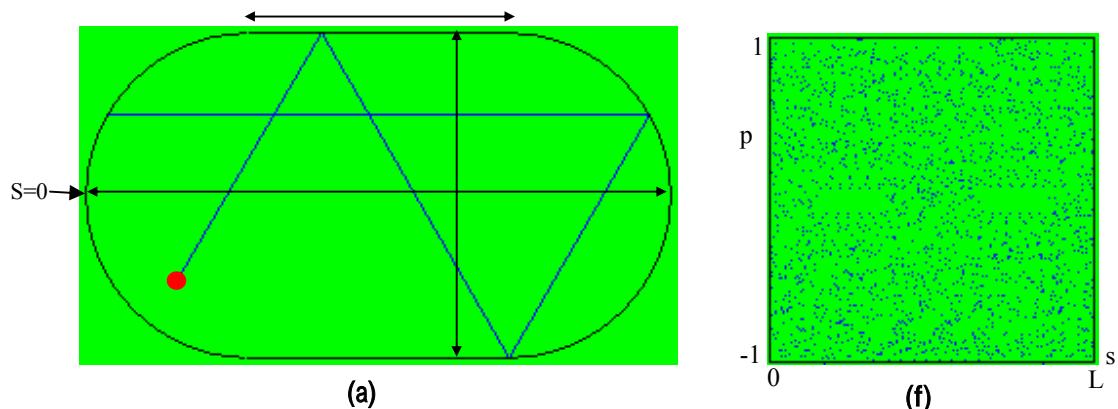
$$m = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\rho}{R \sin \alpha} & -\frac{\rho}{\sin^2 \alpha} \\ -\frac{\rho}{R^2} + \frac{2 \sin \alpha}{R} & -1 + \frac{\rho}{R \sin \alpha} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + \frac{2R \sin \alpha}{R \sin \alpha} & -\frac{R \sin \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ -\frac{R \sin \alpha}{R^2} + \frac{2 \sin \alpha}{R} & -1 + \frac{R \sin \alpha}{R \sin \alpha} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

因此，不管  $N$  為多少，可以直接由 (2.12) 式的  $\text{Tr}$  來判斷圓邊界的穩定度。經過簡單的幾何計算可以得到 (2.13) 式，其  $\text{Tr} = 2$  故其穩定度為 neutral stable。和方的邊界相同，其 PO 的穩定度皆為 neutral stable，這兩種系統稱作 integrable system。

## 2.4 古典操場彈子球

操場是由圓變形而來，其基本圖形是由兩個半圓和兩條直線所構成，而彈子球的行為會隨著直線的長度 愈長會有著和圓截然不同的表現，當 足夠長時彈子球的行為在 phase space 的典型表現會如圖 2-5(f) 是一般所熟知的渾沌現象。



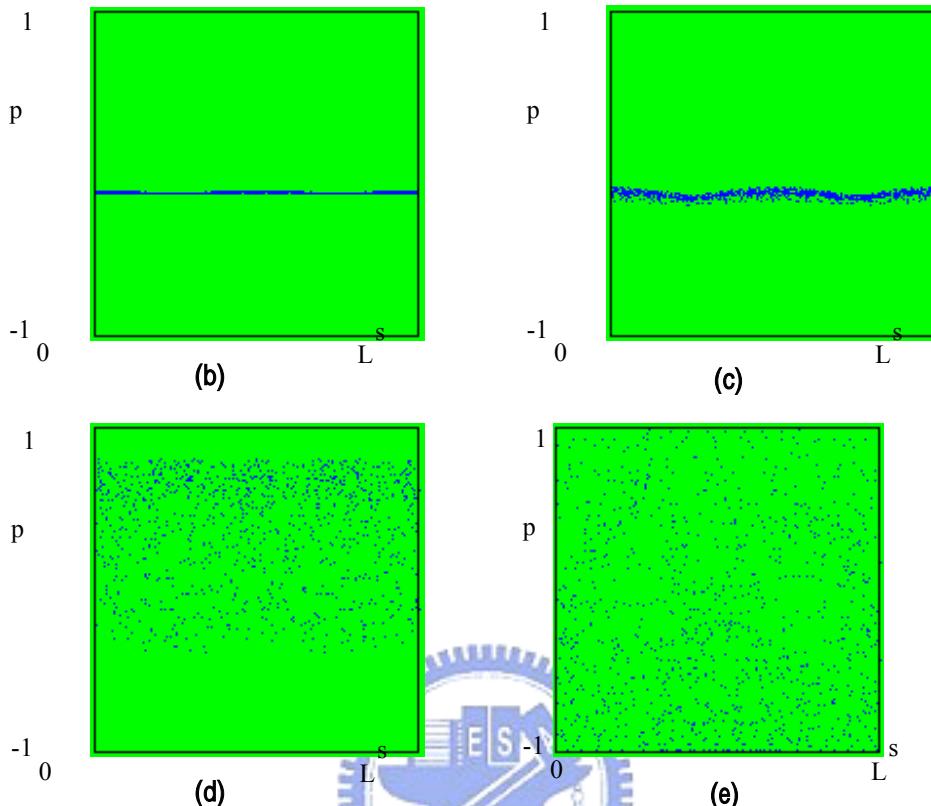


圖 2-5 (a) 彈子球在操場裡的追跡和對撞的 PO (b) =  $0.001R$ , 1000 次碰撞 (c) =  $0.01R$ , 1000 次碰撞 (d) =  $0.1R$ , 1000 次碰撞 (e) =  $R$ , 1000 次碰撞 (f) =  $2R$ , 1000 次碰撞

圖 2-5(b)(c)(d)(e)所描繪的是隨  $s$  變化時的 phase space, 彈子球的起始條件均和圖 2-5(a)相同, 明顯的可看出, 很小時其行為類似圓中的表現  $p=\text{constant}$ , 但隨著變大時, 彈子球就更難去預測其行為, 其在 phase space 的描繪會佈滿整個空間。一般操場所描繪出的 phase space 有一個很重要的特色如圖 2-5(f), 在 phase space 會有兩個洞是彈子球所到達不了的, 這兩個洞代表的是彈子球上下對撞的情形, 當上下對撞時在 phase space 裡彈子球僅會出現在這兩個洞裡, 其他地方彈子球不會有任何出現機率; 相反的, 彈子球僅會出現在其他區域, 而不會這兩個洞裡。在操場裡的 PO 中, 除了上下對撞的 PO 外, 其他的 PO 皆是不穩定的。以左右對撞的 PO 為例, 由附錄所推導其  $|Tr(m_2)| > 2$ , 故其為 unstable。

在本章探討了矩形彈子球、圓形彈子球和操場形彈子球，在矩形和圓形彈子球所表

現的行為是規則的，在操場的彈子球表現出的行為是渾沌不規則的，瞭解了古典的行為後可以使我們在研究量子彈子球時能更清楚的瞭解，古典世界和量子世界的關連性。

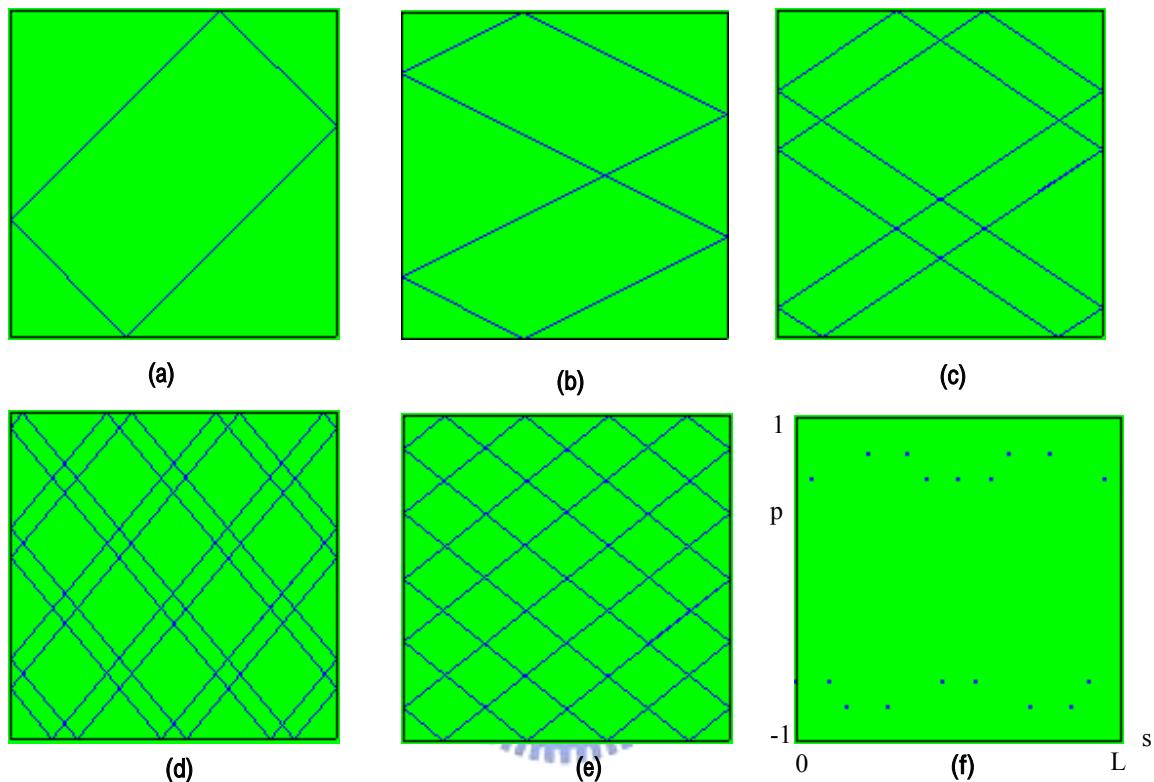


圖 2-6 方形彈子球中的古典週期性軌道軌跡 (a)  $x:y$  的速度分量(1:1) (b) (1:2) (c) (2:3) (d) (6:5) (e) (4:5) (f) (e)圖所對應的 phase space

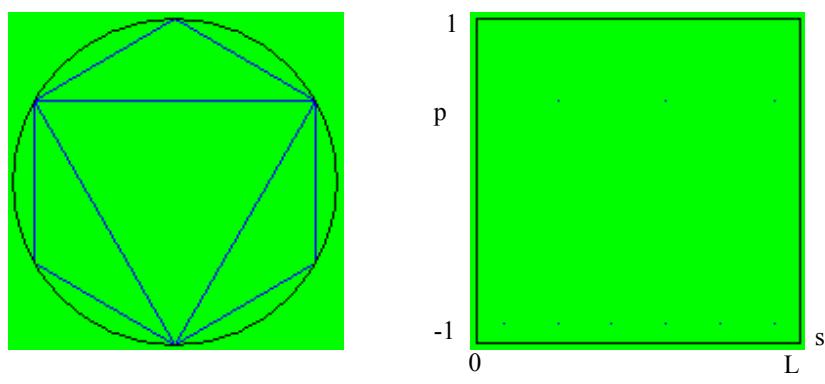


圖 2-7 圓形彈子球中的古典週期性軌道軌跡及所對應的 phase space

### 附錄：PO 穩定度演算法

當彈子球在邊界  $B$  裡運動，彈子球由  $s_0$  出發經過  $s_1$  到達  $s_2$ ，碰撞到邊界時，以位置

$s$  和反射角 ( $p = \cos(\alpha)$ ) 來記錄其行為，如圖 2-8  $\Psi$  代表不同位置時水平線和切線的夾角，在各個位置的曲率半徑  $R(\Psi)$ ， $_{01}$  表示  $s_0$  到  $s_1$  的距離。

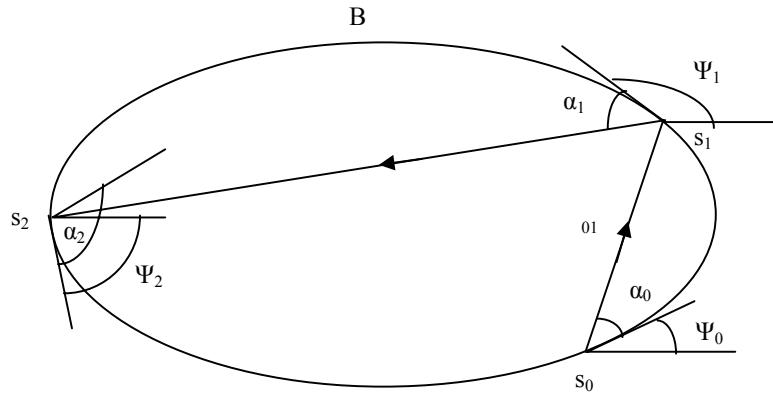


圖 2-8

當起始條件  $s_0$ 、 $p_0$  作微擾  $s_0 + ds_0$ 、 $p_0 + dp_0$ ，到達下一點  $s_1$ 、 $p_1$  後就會有誤差  $s_1 - s_0$ 、 $p_1 - p_0$ ，此附錄的主要目的，即在找出連結  $s_0$ 、 $p_0$  和  $s_1$ 、 $p_1$  的轉換矩陣。為了證明的方便，將之以兩個圖來表示，圖 2-9 (a) 和 (b) 來表示之。

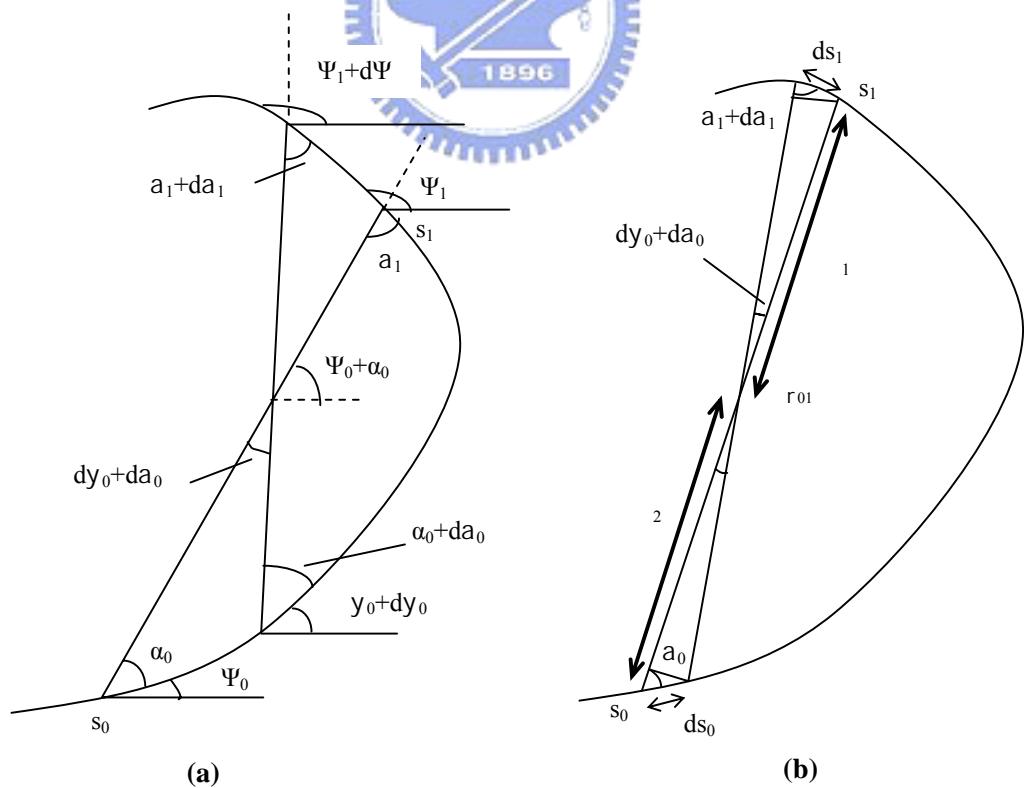


圖 2-9

由圖 2-9 (a)可知  $\psi_0 + \alpha_0 = \psi_1 - \alpha_1$

$$\psi_0 + \delta\psi_0 + \alpha_0 + \delta\alpha_0 = \psi_1 + \delta\psi_1 - \alpha_1 - \delta\alpha_1$$

故可知  $\delta\psi_0 + \delta\alpha_0 = \delta\psi_1 - \delta\alpha_1$  (A1)

由圖 2-9 (b)可知

$$x_1 \times (\delta\psi_0 + \delta\alpha_0) + x_2 \times (\delta\psi_0 + \delta\alpha_0) = \delta s_0 \sin \alpha_0 + \delta s_1 \sin \alpha_1$$

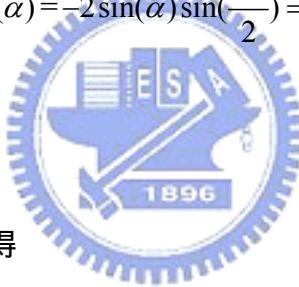
$$\therefore \rho_{01} \times (\delta\psi_0 + \delta\alpha_0) = \delta s_0 \sin \alpha_0 + \delta s_1 \sin \alpha_1 \quad (A2)$$

又  $\delta\psi_0 = \frac{\delta s_0}{R(\psi_0)}$        $\delta\psi_1 = \frac{\delta s_1}{R(\psi_1)}$

且  $\delta\alpha = (\alpha + d\alpha) - (\alpha) \quad p = \cos \alpha$

$$\therefore \delta p = \cos(\alpha + d\alpha) - \cos(\alpha) = -2 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\delta\alpha}{2}\right) = -\sin \alpha \cdot (\delta\alpha)$$

$$\therefore \delta\alpha = \frac{\delta p}{-\sin \alpha}$$



分別將上式結果帶入(1).(2)可得

$$\frac{\delta p_0}{-\sin \alpha_0} + \frac{\delta s_0}{R(\psi_0)} = \frac{\delta s_1}{R(\psi_1)} - \frac{\delta p_1}{-\sin \alpha_1} \quad (A3)$$

$$\rho_{01} \times \left( \frac{\delta s_0}{R(\psi_0)} + \frac{\delta p_0}{-\sin \alpha_0} \right) = \delta s_0 \sin \alpha_0 + \delta s_1 \sin \alpha_1 \quad (A4)$$

由(A3)(A4)式,我們可得到一誤差值預測的矩陣  $m_{10}$

$$m_{10} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} + \frac{\rho_{01}}{\sin \alpha_1 R(\psi_0)} & -\frac{\rho_{01}}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_0} \\ -\frac{\rho_{01}}{R(\psi_0)R(\psi_1)} + \frac{\sin \alpha_1}{R(\psi_0)} + \frac{\sin \alpha_0}{R(\psi_1)} & -\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0} + \frac{\rho_{01}}{\sin \alpha_0 R(\psi_1)} \end{pmatrix} \quad (A5)$$

彈子球在 N 次碰撞後回到原出發點

$$m_N = m_{0,n-1} m_{N-1,N-2} \dots m_{3,2} m_{2,1} m_{1,0}$$

$$\begin{pmatrix} \delta s_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} = m_N \begin{pmatrix} \delta s_0 \\ \delta p_0 \end{pmatrix}$$

軌道的穩定性是和  $m_N$  的特徵值有關(eigen value)

$$Ax = \lambda x \quad \therefore (A - \lambda I)x = 0 \quad \therefore \det|A - \lambda I| = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$



由(A5)知  $m_{10}$  的行列式為 1，故  $m_N$  的行列式亦為 1

$$\lambda = \frac{1}{2} \{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}\} = \frac{1}{2} \{Tr(m_N) \pm \sqrt{(Tr(m_N))^2 - 4}\}$$

且  $\lambda_+ \lambda_- = 1$

### 第三章 同調波與雷射橫模

#### 3.1 導論

方形彈子球是彈子球中最簡單的其中一種，其週期性軌道如前章所提及，其中最簡單的為  $(1,1)$ 、 $(2,1)$ 、 $(3,1)$ 。根據 Bohr 的相對應原理，當量子數趨近於無大時，可以和古典相對應。但在二維的方形無限位能井中，當量子數很大時，其波函數卻不會和古典有所對應。在本章利用  $SU(2)$ ，將能量相近的幾個本徵態 配上相位相疊加後，發現和古典的 PO 有著很好的對應。在實驗中，由於 Schrödinger 和 Helmholtz 方程式的相似，所以面射型雷射(VCSEL)的橫模可視為波函數的解。方形腔中的橫模一般都可以發現集中在古典的 PO 軌道，這個結果使我們確信週期性軌道的波函數比本徵態更能夠解釋介觀物理系統裡的現象。

#### 3.2 $SU(2)$ 同調波

Pollet [4]等人提出了二維量子簡諧振盪相關的本徵態，經過  $SU(2)$ 所得的波函數是特別的簡單而且侷限在和古典相對應的橢圓軌跡，數學上， $SU(2)$ 可確保經由疊加幾個本徵態  $\varphi_{K,N-K}(x, y)$  其中  $N$  為一整數而  $K = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ ；可得到  $\psi_{N,M}(x, y; \phi)$  在空間上  $\Delta x \Delta y$  有最小的不確定性，其中  $x$ 、 $y$  為卡氏座標系中的兩變數。在二維的方形彈子球也就是大家一般熟悉的無限位能井中，其本徵態為

$$\varphi_{K,N-K}(x, y) = \frac{2}{a} \sin[(K+1)\frac{\pi x}{a}] \sin[(N-K+1)\frac{\pi y}{a}] \quad K = 0, 1, \dots, N \quad (3.1)$$

在二維卡氏座標系統下，經由  $SU(2)$ 所得到的波函數為[5]

$$\begin{aligned} \psi_{N,M}^{p,q}(x, y; \phi) &= \frac{(2/a)}{\left[ \sum_{K=J}^{N-J} \binom{N}{K} \right]^{1/2}} \sum_{K=J}^{N-J} \binom{N}{K}^{1/2} \cos(K\phi) \\ &\times \sin[p(K+1)\frac{\pi x}{a}] \sin[q(N-K+1)\frac{\pi y}{a}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

圖 3-1、3-2 分別描述不同參數  $\phi$ 、M、N、p、q 對波函數  $\psi_{N,M}^{p,q}(x, y; \phi)$  [8] 的影響

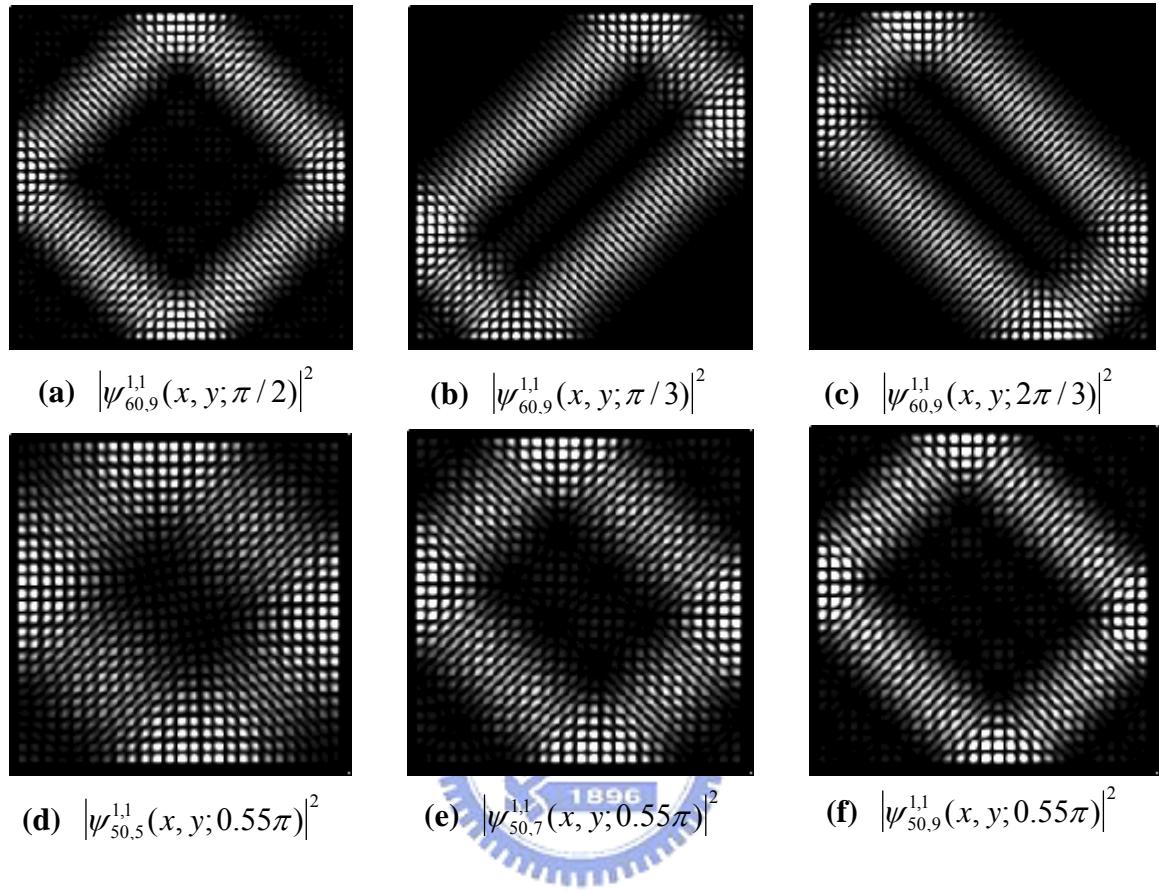
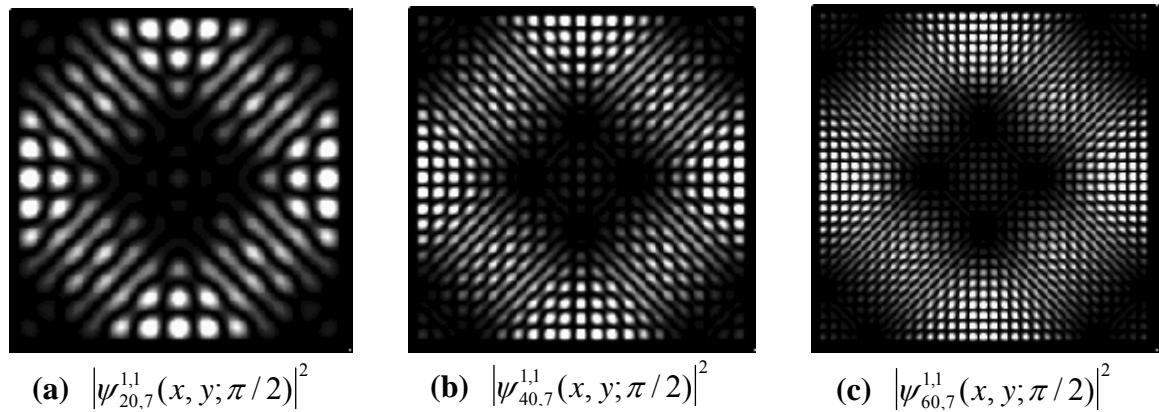


圖 3-1 (a)(b)(c) 是  $\phi$  和  $\psi_{N,M}^{p,q}(x, y; \phi)$  的關係，當固定  $p=1, q=1, N=60, M=9$  由圖可明顯看出， $\phi$  決定了 PO 的起點；而 (d)(e)(f) 則探討了 M 和  $\psi_{N,M}^{p,q}(x, y; \phi)$  當 M 愈大，其波函數會越侷限， $M=N-2J+1$  代表著選取的本徵態的個數。



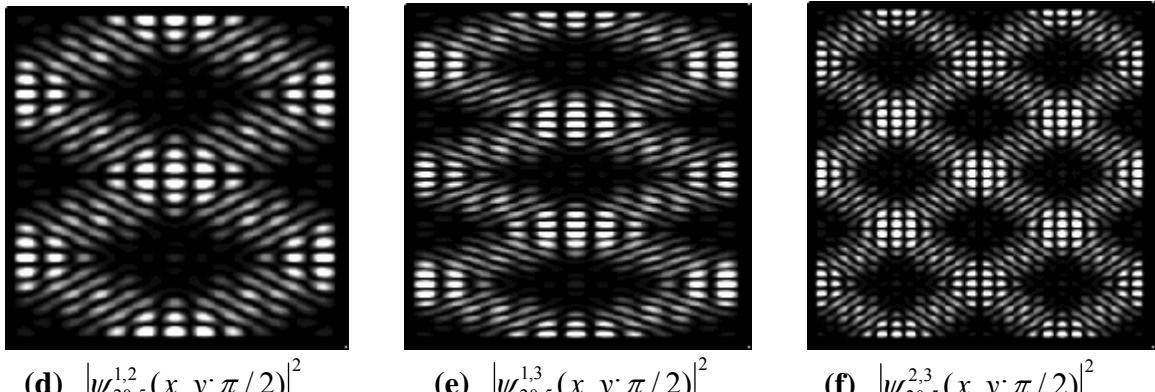


圖 3-2 (a)(b)(c)是當固定  $p=1, q=1, \phi=0.5\pi, M=7, N$  和  $\psi_{N,M}^{p,q}(x,y;\phi)$  的關係；而 (d)(e)(f) 則探討  $p, q$  和  $\psi_{N,M}^{p,q}(x,y;\phi)$  的關係， $p, q$  的數值決定了  $(p, q)$  的 PO。

在(3.2)式中很有趣的是  $\phi$  這一項，當每一個本徵態有了一個相位差  $\phi$  時，相疊加後新的波函數，就會有古典的 PO 可以相對應，其情形就好像馬或者是蜈蚣在行走時，他們的每一隻腳必然要配合著很好的相位差，才能夠順利的往前行走，一旦其中一隻腳的相位配合不好產生錯亂，其他的每一隻腳就沒辦法很順利的接下去；同樣的，每一個本徵態的相位若是配合不好，就不會有一最侷限的波函數產生(如圖 3-3(b))。

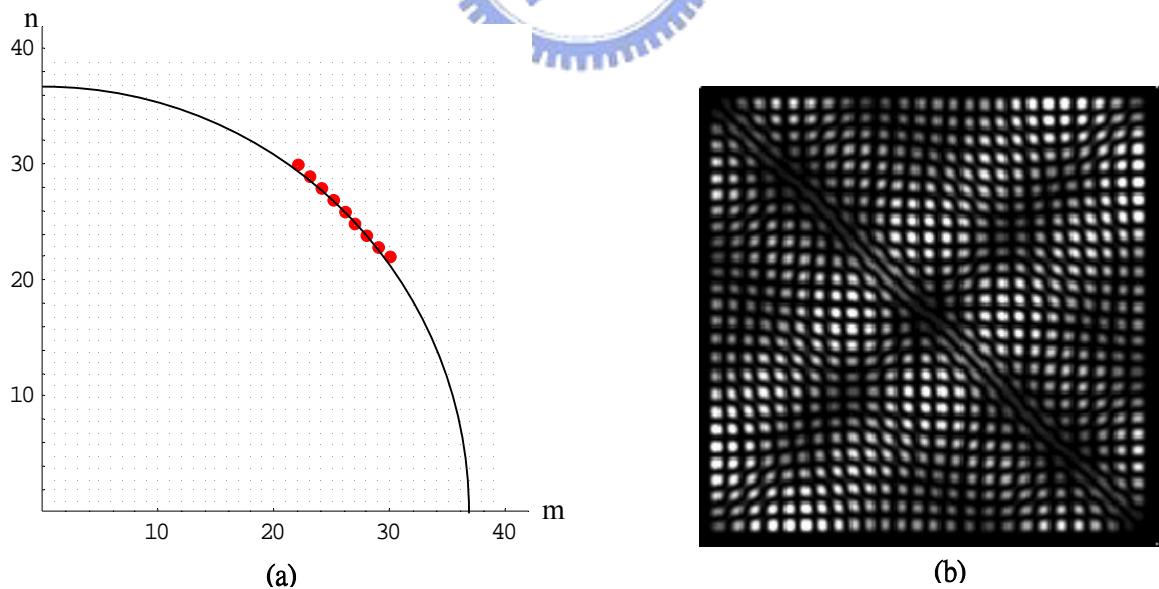


圖 3-3 (a) 在方形彈子球中的本徵態 K-space，每一個灰點代表不同本徵態，而黑色的實線代表  $m^2 + n^2 = 26^2 + 26^2$ ，大的黑點則是圖 3-1(d)(e)(f) 所選取的本徵態 (b) 利用程式產生一亂數相位，將本徵態疊加後所產生的波函數，其相位分別為  $0.05\pi, 0.55\pi, 0.18\pi, 0.06\pi, 1.42\pi, 0.61\pi, 1.09\pi$

圖 3-1 (d)(e)(f)是固定  $N=50$ ， $\phi = 0.55\pi$ ，分別取 5-9 個本徵態所描繪出的圖，當所選取的本徵態越多時，波函數就會侷限在更小的區域；而每一個本徵態  
 $\varphi_{m,n}(x, y) = 2/a \sin[m(\pi x/a)] \sin[n(\pi y/a)]$  所對應的特徵能量如下

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 (m^2 + n^2) \quad (3.3)$$

本徵態相對應的能量可以用兩個正整數  $m$ 、 $n$  來表示，圖 3-3(a)即是 3-1(d)(e)(f)中所選取的本徵態，這些本徵態並不是簡併，但卻是很接近簡併的，

### 3.3 微型共振腔(VCSEL)

在討論面射型雷射的橫模前，我們先簡化其結構來加以討論，考慮一大方形孔徑和很窄的增益介質的三維共振腔結構，DBR 的結構幾乎僅允許單一波長，而氧化出的方形孔徑定義出了彈子球的橫向邊界。波向量可以分解成  $k_z$  和  $k_t$  兩個分量，其中  $k_z$  垂直方向出光的分量，而  $k_t$  則是橫向波向量的分量，而由於垂直方向的超短腔結構，因此  $k_z$  是波向量中的主要分量，而在橫向的二維邊界為  $40 \times 40 \mu\text{m}^2$  因此

$k_z \gg k_t$ 。在橫向氧化出的二維邊界中，由於氧化的邊界和半導體有很大的折射率差異且因為波向量的  $k_z$  分量遠大於橫向的  $k_t$  分量，因此光子在邊界上會有全反射的行為，所以可將其視為在邊界位能無限高的堅固牆裡。此外，在 VCSEL 中的鏡子是 DBRs，可以被假設為沒有曲率的平面鏡，光子可以被考慮為一粒子被侷限在邊界位能為無限高且方形裡位能為零的二維無限位能井中，而在垂直的出光方向則經由 DBR 耦合到外面，因此將電場的分佈簡單的以  $E(x, y, z) = \psi(x, y) \exp(-jk_z z)$  來表示，在分離出波函數的  $z$  方向後，Helmholta equation 可以寫為一二維的形式

$(\nabla_t^2 + k_t^2)\psi(x, y) = 0$  [7] 同時在邊界由於全反射  $\psi(x, y) = 0$ ，使得光子好像撞倒一堅固的牆，面射型雷射因此提供一良好工具來研究量子彈子球的問題，而邊界可以利用半導體技術使其形成任何形狀，來作不同邊界行為的研究。

由 VCSEL 所得到的實驗和經過 SU(2)疊加後的 PO(1,1)有著很好的對應，但在

(1,2)就有相當明顯的差異，其主要差異在 PO 的交會點所產生的干涉條紋，理論計算的結果會和 x 方向平行(圖 3-2(d))，但實驗的干涉條紋是和 y 方向平行(圖 3-4 (b))。

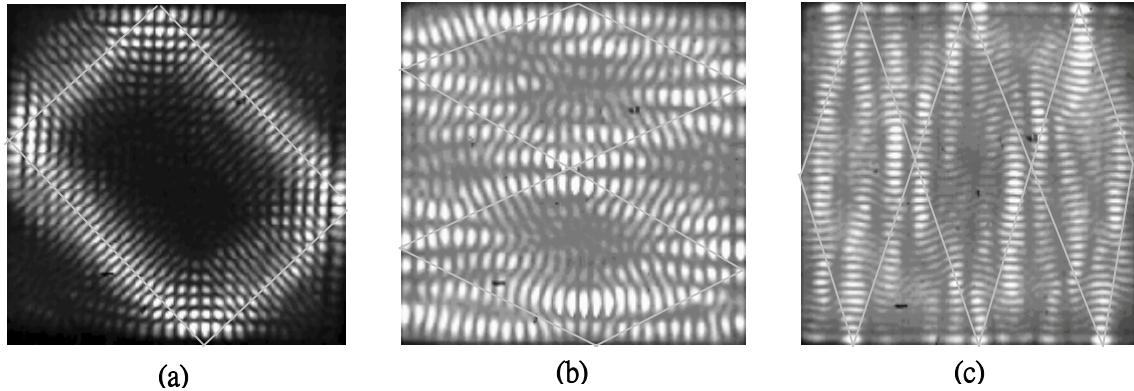


圖 3-4 (a)  $30\mu m \times 30\mu m$  的方形 VCSEL 在溫度為 220K 的近場實驗結果-PO(1,1)  
 (b)  $40\mu m \times 40\mu m$  的方形 VCSEL 在溫度為 276K 的近場實驗結果-PO(1,2) (c)  
 $40\mu m \times 40\mu m$  的方形 VCSEL 在溫度為 276K 的近場實驗結果-PO(1,2)

要解釋這一矛盾的原因，我們可先由 VCSEL 探討起，當將電流灌入 VCSEL 且經過降溫後，由於 VCSEL 在出光方向的超短腔結構，因此只允許在縱模只有單一波長，而 VCSEL 不可避免的還是會有一個頻寬，因此在橫模方向就會允許不只一單一頻率被鎖住(locking)，對應到 K-space 圖 3-3(a)就不再是四分之一的圓線，而是一個四分之一的圓環，降低溫度不僅可以減少熱透鏡效應的影響，同時由於半導體的能階亦會隨著溫度降低而變大，所以 K-space 上的圓環半徑也會隨之變大，因此在相同的元件上，就可以看到更高階的不同行為。當在做 SU(2)本徵態的疊加時，PO(1,1)所選取的本徵態，事實上就是斜率為-1 的線上的本徵態，但實驗中所能擷取到的本徵態是為一圓環，因此 PO(1,1)所選取的本徵態要同時在圓環和斜率為-1 的線上(如圖 3-5(a))，其恰巧和直接用 SU(2)所選取的本徵態是一樣的，故和實驗有著極佳的對應；而在 PO 為(1,2)所選取的本徵態是斜率為-2 直線上的本徵態，其和圓環的交點如圖 3-5(b)所示，其和直接使用 SU(2)所選取的本徵態是不同的，故造成實驗和理論計算的落差。

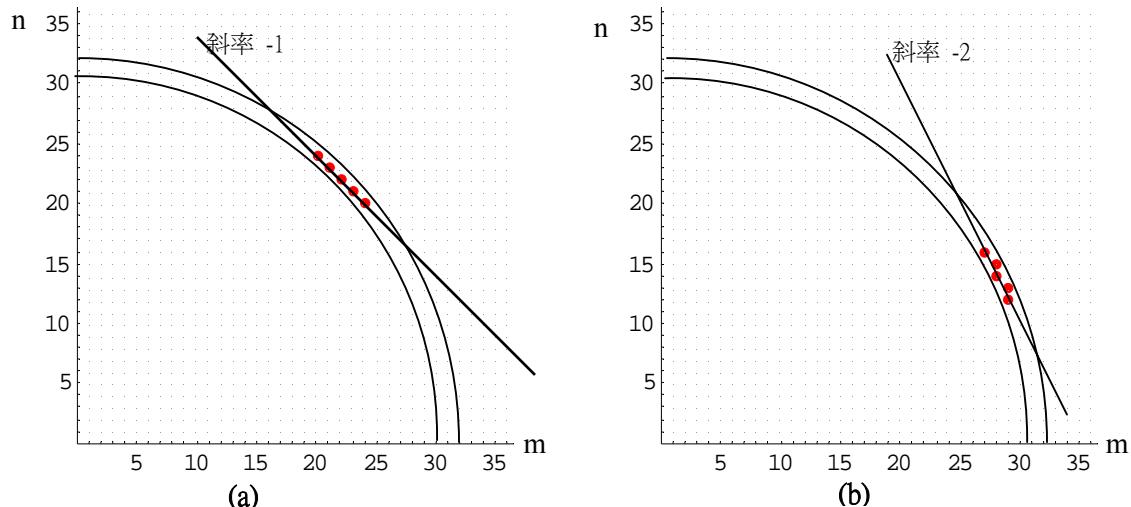
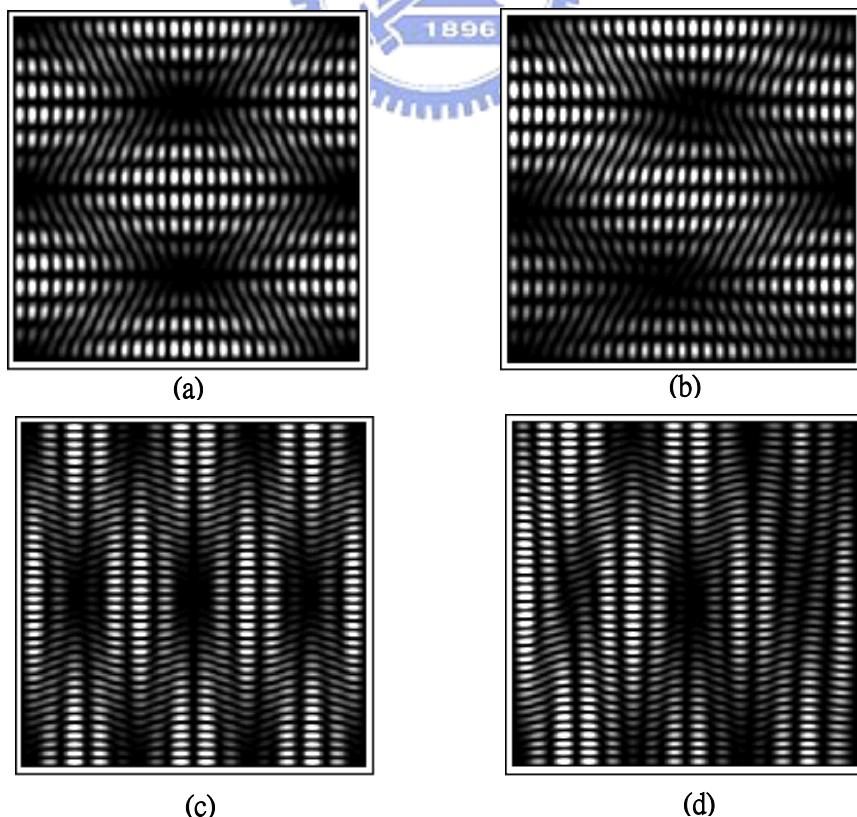


圖 3-5 (a) 黑點代表  $PO(1,1)$  在斜率爲 -1 和圓環的交點所選取的本徵態 (b) 和斜率 -2 的直線相交的 3 黑點爲  $SU(2)$   $PO(1,2)$  所選取的本徵態，其他兩黑點則爲交點附近所選取到的其他本徵態

另外，值得注意的是在圓環的大小相同時，斜率比-1 大或小時所選取到的本徵態，不會僅有  $SU(2)$  所選取的本徵態，圖 3-5(b)不在線上的兩點即代表非  $SU(2)$  所選取的本徵態，當摻雜這兩項疊加後，PO 軌道就會有如實驗般不對稱的情形。



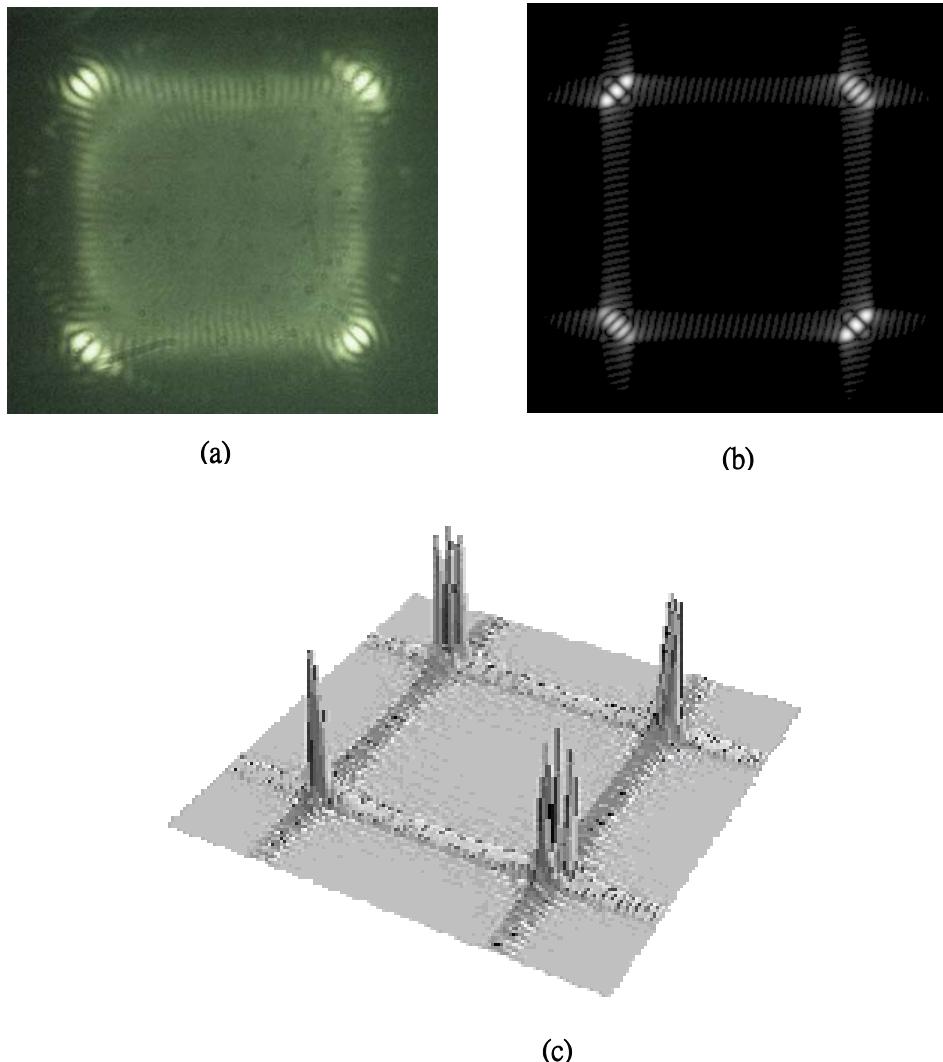
- (a) 疊加方形彈子球本徵態  $\varphi_{27,16}$ 、 $\varphi_{28,14}$ 、 $\varphi_{29,12}$  配合相位差  $\pi/2$ ，  
 $\psi(x, y; \pi/2) = \cos(0 \cdot \pi/2)\varphi_{27,16} + \cos(1 \cdot \pi/2)\varphi_{28,14} + \cos(2 \cdot \pi/2)\varphi_{29,12}$ ，所產生的圖案
- (b)  $\psi(x, y; \pi/2) = \cos(0 \cdot \pi/2)\varphi_{27,16} + \cos(1 \cdot \pi/2)\varphi_{28,14} + \cos(2 \cdot \pi/2)\varphi_{29,12}$   
 $- 0.36 \cdot \varphi_{28,15} + 0.33 \cdot \varphi_{29,13}$
- (c) 疊加方形彈子球本徵態  $\varphi_{10,40}$ 、 $\varphi_{13,39}$ 、 $\varphi_{16,38}$  配合相位差  $\pi/2$ ，  
 $\psi(x, y; \pi/2) = \cos(0 \cdot \pi/2)\varphi_{10,40} + \cos(1 \cdot \pi/2)\varphi_{13,39} + \cos(2 \cdot \pi/2)\varphi_{16,38}$ ，所產生的圖案
- (d)  $\psi(x, y; \pi/2) = \cos(0 \cdot \pi/2)\varphi_{10,40} + \cos(1 \cdot \pi/2)\varphi_{13,39} + \cos(2 \cdot \pi/2)\varphi_{16,38}$   
 $+ 0.53 \times \varphi_{12,39} + 0.38 \times \varphi_{14,39} - 0.4 \times \varphi_{15,38}$

圖 3-6(a)是選取 SU(2)所選取的本徵態，配上  $\pi/2$  的相位後所計算出的波函數；而 3-6(b)是再額外加上非 SU(2)所選取的本徵態，由圖可明顯看出和實驗一樣 PO(1,2)的對稱性，已經被破壞掉。而在 PO(3,1)時，是圓環和斜率為  $-1/3$  線交會處的本徵態，如圖 3-14，由圖也可以看出其有更多非 SU(2)所選取的本徵態，也因此，其在空間的不確定範圍愈大，且愈不對稱。當 PO 為(1,1)時，斜率-1 的線和圓環的交點是在圓環角度為 45 度附近，當直線和圓環相交的角度離 45 度愈遠時，非 SU(2)所選取的本徵態會愈來愈多，此外，SU(2)所能選取到的本徵態亦會較少，當交點的角度距離 45 度愈遠時愈不容易形成 PO。



光學的遠場強度分佈，即是近場經過傅利葉轉換後可獲得，而在量子力學中座標空間經由傅利葉轉換後可以得到動量空間；最近 Bäcker 和 Schubert[6]也透過傅利葉轉換，來獲得本徵函數的遠場分佈情形，以其對彈子球有更佳的瞭解，而透過 VCSEL 的遠場量測，可以輕易的就得到彈子球在動量空間的分佈情形。圖 3-7(a)是相關圖 3-4(a)的鑽石形狀波函數實驗中所得到的遠場圖案，可以明顯看出遠場的強度分佈在  $45^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $225^\circ$ 、 $315^\circ$  的地方有較強的分佈，這和近場中彈子球動量方向的四個方向是一致的；圖 3-7(b)是經由理論圖 3-2(c)中的鑽石形波函數所計算出的遠場波函數分佈情形，實驗和理論的相符使我們確信，我們的理論模型是有效的。

遠場的強度分佈同時也提供了近場的解析工具，當近場的波函數是由多個 PO 所組成時，由於同時多個不同的 PO 互相干涉的結果，在近場裡無法分辨，但在遠場卻可以清晰的將其解析出來。圖 3-8(a)是 VCSEL 的遠場分佈情形，清楚的可以看出在  $45^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $225^\circ$ 、 $315^\circ$  和  $26^\circ$ 、 $154^\circ$ 、 $206^\circ$ 、 $334^\circ$  附近有較強的分佈，其所對應的



**圖 3-7 (a)** 相關於圖 3-4(a)的近場條紋所得到的實驗遠場條紋 **(b)** 經由圖 3-2(c)座標空間的波函數所算出的向量空間波函數 **(c)** (b)圖的三維分佈情形

是  $\text{PO}(1,1)$  和  $\text{PO}(1,2)$  的遠場分佈，圖 3-8(c) 是  $\text{PO}(1,1)$  和  $\text{PO}(1,2)$  互相干涉後的強度分佈情形，在近場的波函數完全無法給我們任何的資訊，但當將之作傅氏轉換後(圖 3-8(b))，很清楚的可以解析出其是由  $\text{PO}(1,1)$  和  $\text{PO}(1,2)$  所組成的圖案。

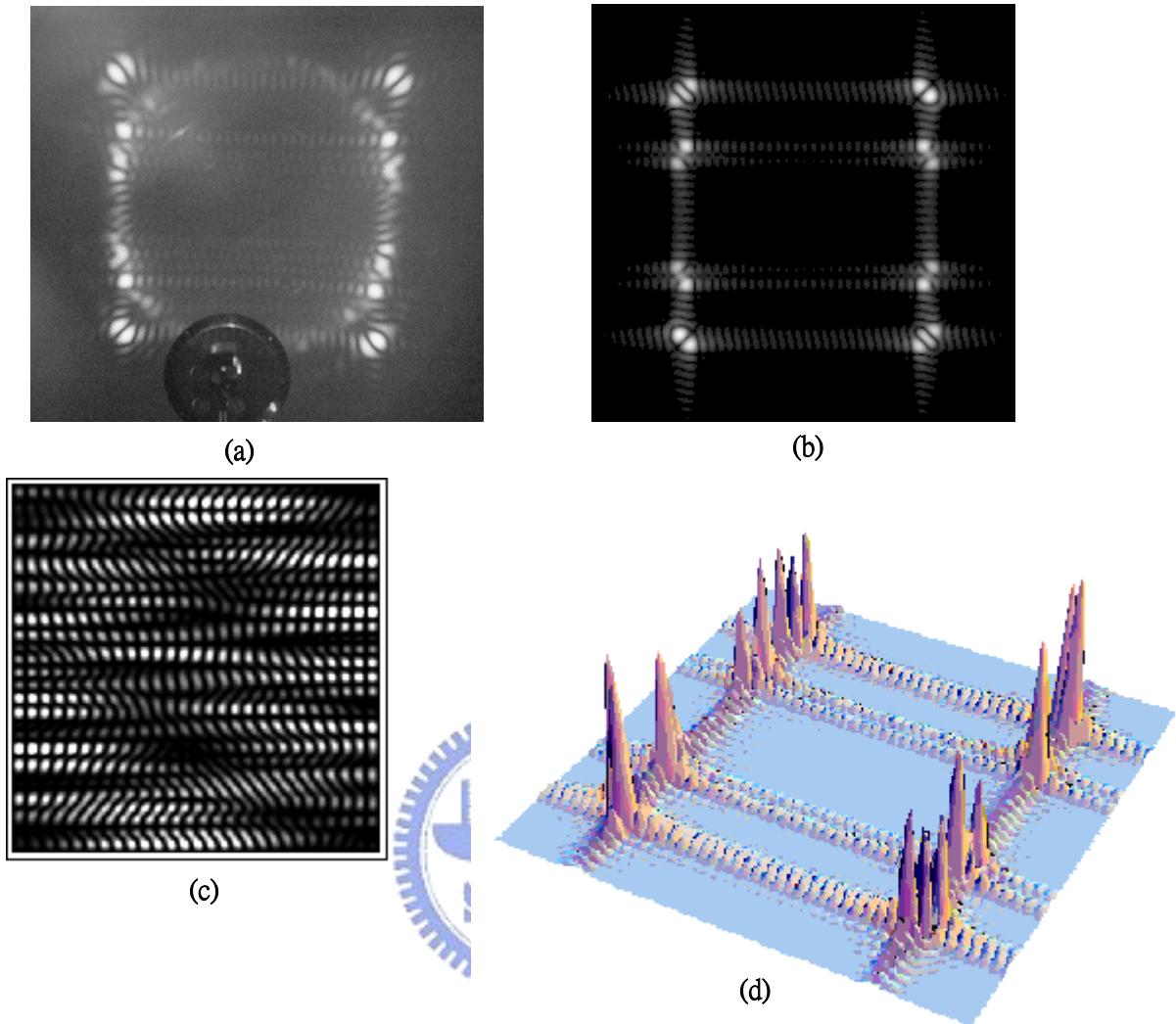


圖 3-8 (a) VCSEL 實驗的遠場分佈 (b) 經由(c)作傅氏轉換後理論計算出的遠場分佈  
 (c) 結合  $\text{PO}(1,1)$ 和  $\text{PO}(1,2)$ 的近場分佈情形 (d) (b)圖的三維分佈情形

### 3.4 PO 和本徵態的糾纏

由於光學的遠場分佈即是量子力學中的動量空間分佈情形，因此可藉由實驗的遠場分佈，得知 K-space 上所選取的本徵態；圖 3-7(a)的遠場分佈可以清楚的告訴我們，系統所選取的本徵態會如圖 3-5(a) 中所示在圓環  $45^\circ$ 附近；但當圓環上有一個本徵態的能量和  $45^\circ$ 所選取的本徵態能量很接近時，系統就會有機會在其他角度的地方同時選取這個本徵態，得到的圖案就會介於本徵態和和古典週期性軌道的圖案。圖 3-9 即是 VCSEL 實驗結果和理論計算的結果，本徵態和 PO 交會的地方有很特殊

的干涉節點產生，將能量以  $m,n$  來作表示，在  $45^\circ$  時的能量為  $28^2 + 29^2 = 1625$ ，而在大角度本徵態  $(10,39)$  能量為  $10^2 + 39^2 = 1621$ ，由於能量差異很小本徵態  $\phi_{10,39}$  同時亦被系統所選取。

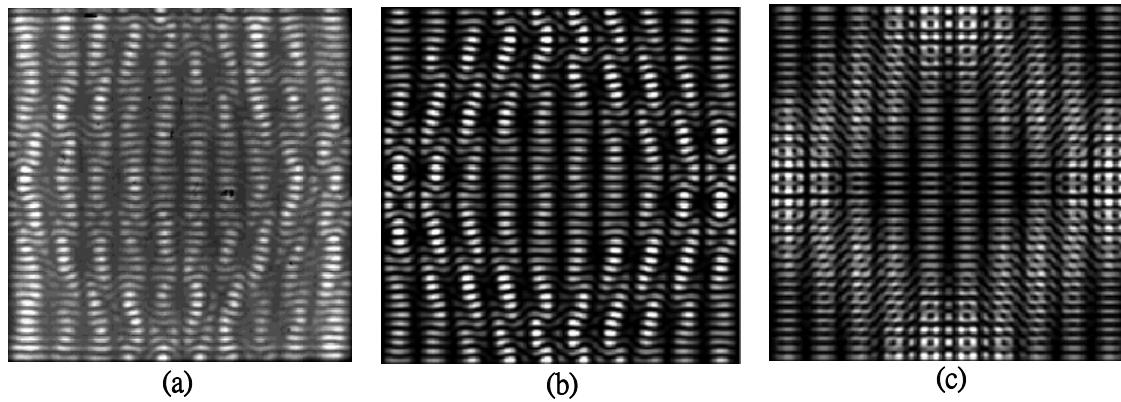


圖 3-9 (a) VCSEL 在 276K 實驗的近場量測結果 (b) PO(1,1)和本徵態  $\phi_{10,39}$  疊加後理論計算的結果 (c) PO(1,1)和本徵態  $\phi_{10,39}$  強度疊加後理論計算的結果

在這裡我們特別也將本徵態和 PO 的強度作疊加，如 圖 3-9(c)，強度相加代表著 PO 和本徵態彼此間相互獨立，並沒有同時為系統所選取。

### 3.5 方形彈子球中的多個週期性軌道(PO)

在方形的面射型雷射裝置中，近場的實驗圖案中常常可以觀察到不只一個的週期性軌道，如圖 3-10(a)即是方形面射型雷射同時選取了兩個  $(1,1)$  的週期性軌道，實驗中觀察到的現象甚至可以有多達四個  $(1,1)$  的週期性軌道。

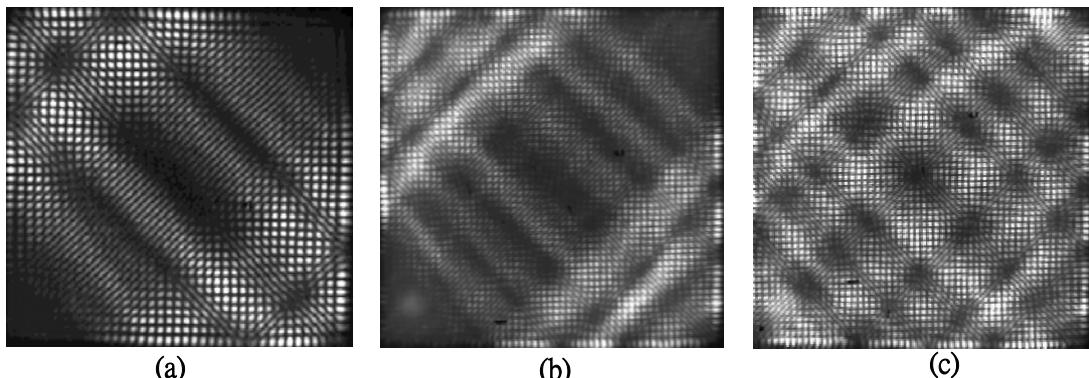


圖 3-10 (a) VCSEL 兩個 PO(1,1) 實驗量測結果 (b) VCSE 三個 PO(1,1) 實驗量測結果 (c) VCSE 四個 PO(1,1) 實驗量測結果

推測形成多個  $\text{PO}(1,1)$  可能的原因有兩種，其一為使用相同的  $SU(2)$  相關的本徵態使其每一個  $\text{PO}(1,1)$  有不同的相位，自然使的每一個  $\text{PO}(1,1)$  的起點不同，調控每一個  $\text{PO}(1,1)$  的相位即可以調控每一個週期性軌道的相對位置；另一種方法則是雷射系統在選取本徵態時有機會選取到不只一個的  $SU(2)$  相關本徵態，如圖 3-15 即是雷射系統同時選取到兩個  $SU(2)$  相關本徵態，我們將在下面的探討分析兩種方法，討論其不同之處。

當圓環半徑選取適當時，圓環在  $45^\circ$  附近有機會選取到兩個斜率-1 的本徵態如圖 3-15，因此實驗會有機會出現兩個  $(1,1)$ ，圖 3-11(a)即是實驗中兩個  $(1,1)$  的情形，值得注意的是實驗圖中左上方和右下方波函數分佈的不對稱情形，當選取分別選取 L1 和 L2 上的本徵態形成  $\text{PO}$  產生干涉後，的確也產生了這種不對稱的情形。

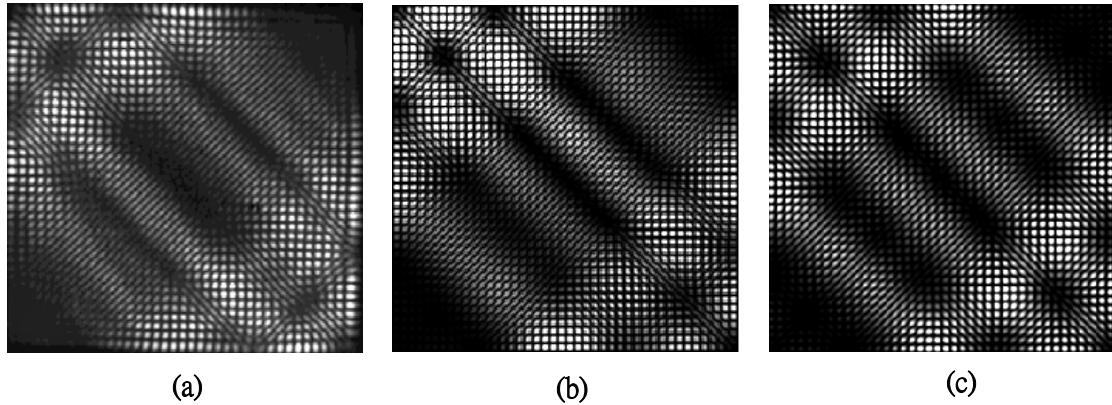


圖 3-11 (a) VCSEL 實驗的近場量測結果 (b) 由 L1 和 L2 分別形成兩個  $(1,1)$  互相干涉後的強度分佈 (c) 選取相同的  $SU(2)$  相關本徵態理論計算結果

圖 3-11(b)和(c)的最大不同之在於，利用相同的  $SU(2)$  相關本徵態所計算出來的結果，於空間上並不會有分佈不對稱的情形，僅有當雷射在  $r$  方向如圖圖 3-15 選取到兩組  $SU(2)$  相關本徵態，疊加後才會在空間上有如實驗強度分佈不對稱的情形，因此在兩個  $\text{PO}(1,1)$  分佈不對稱的情形下，我們可以確信其形成的原因為雷射系統在  $r$  方向也選取了另一組的  $SU(2)$  相關本徵態。將這些想法同樣的放到四個  $\text{PO}(1,1)$  的模擬，一樣的，相同的  $SU(2)$  相關本徵態配上四種不同的相位有著很好的對稱性；而在  $r$  方向選取四個  $SU(2)$  相關本徵態，由於  $\text{PO}(1,1)$  數目變多，每一個  $\text{PO}(1,1)$  必須相對的要選取更多的  $SU(2)$  相關

本徵態，才能在有限的空間可鑑別，而因為選取的本徵態變多在空間的不對稱會不若在兩個  $\text{PO}(1,1)$  般，由於選取的本徵態少造成空間上有顯著的不對稱性，觀察圖 3-12(b)， $\text{PO}$  的軌跡僅有小部分的扭曲。

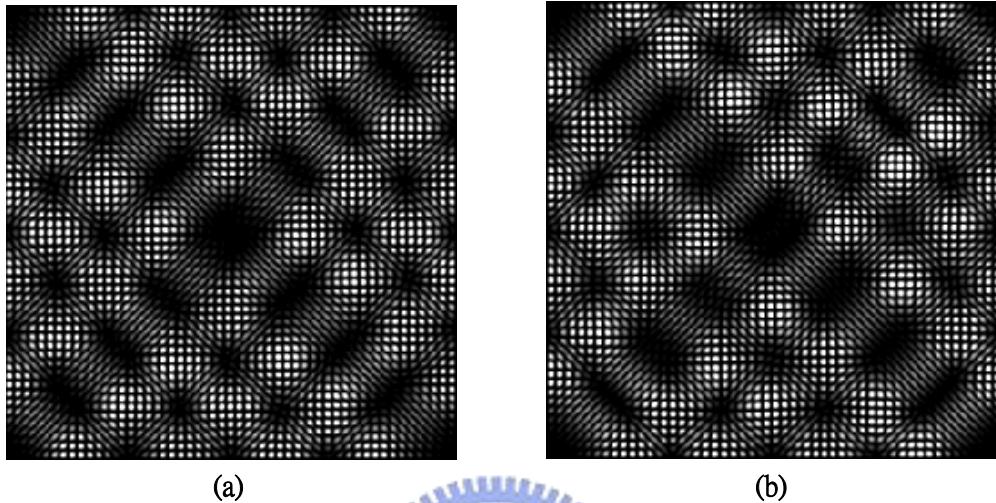


圖 3-12 (a) 選取相同的  $\text{SU}(2)$  相關本徵態分別配上四個不同相位理論計算結果(b)在  $r$  方向選取四個  $(1,1)$  互相干涉後的強度分佈

多個  $\text{PO}(1,1)$  的原因除了我們前面所探討的兩個因素外，在這裡我們另外作了一個很有趣的探討；由於面射型雷射裡載子濃度的不平均，造成方形彈子球台底部的不平坦，在第四章我們將會有更詳盡的探討，在這裡我們假設底部的高度分佈像一小山丘，靠近邊界的地方是較低的地方，將計算出來的本徵態利用  $\text{SU}(2)$  選取疊加後，得到了如圖 3-13 的圖案，讓多個  $\text{PO}(1,1)$  同時形成的原因又多了一樣，也就是彈子球平台底部的不平坦。

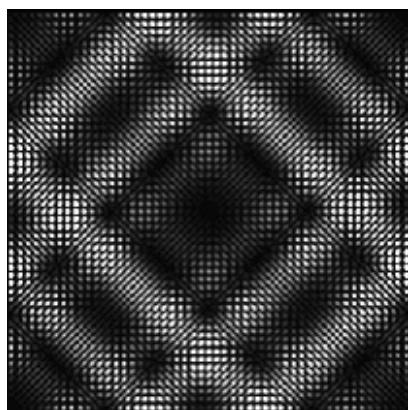


圖 3-13 考慮彈子球平台底部為一類似小山丘的底部經由  $\text{SU}(2)$  疊加後所得到的結果

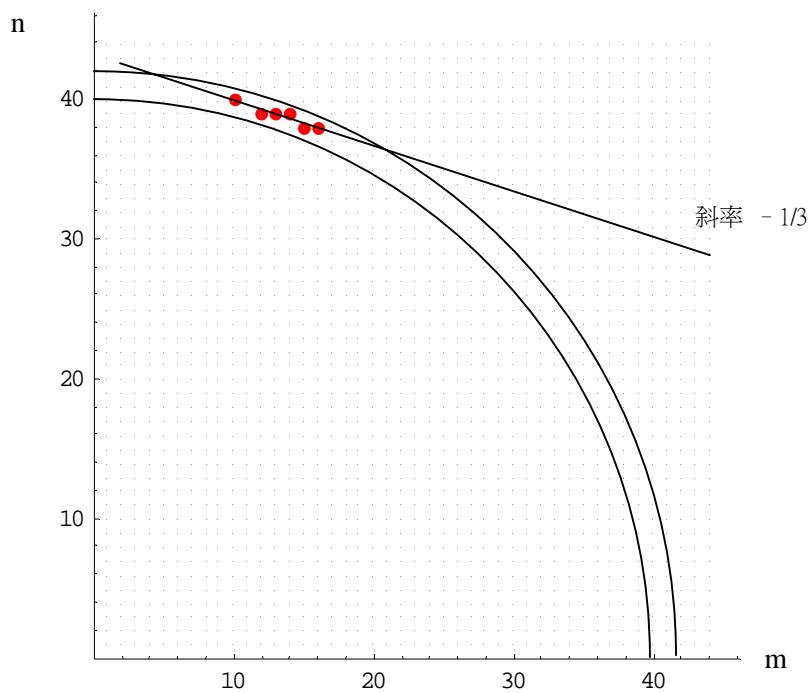


圖 3-14 PO(3,1)所選取的本徵態

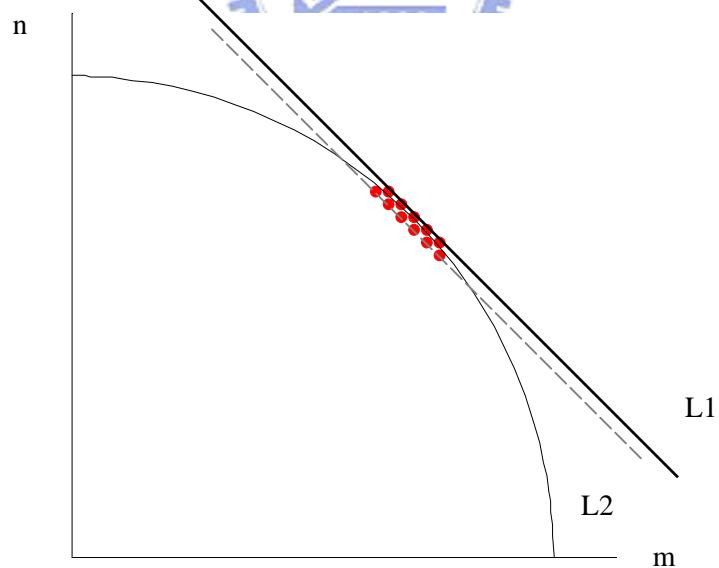


圖 3-15 兩個 PO(1,1)所選取的本徵態

## 第四章 量子彈子球(Quantum Billiards)

### 4.1 導論

在規則的系統中，我們使用  $SU(2)$  替古典和量子力學做了一個很好的鏈結；在本章介紹的是非規則的系統如操場彈子球(Stadium Billiards)和倒角系統，我們引進了一很有效的數值方法(Expansion Method)來解出非規則系統的本徵態，在本徵態中的波函數分佈叫人驚訝的是疤痕(scar)的出現，波函數會侷限在少部分的區域，在這些二維系統中波函數的疤痕(scar)往往是和古典的週期性軌道是有關係的[9][10]。

### 4.2 量子彈子球的數值分析

在這裡將先介紹解出波函數的數值方法[11]，考慮一粒子在二維無限位能井中，

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r \in \Omega \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-1)$$



相關的穩定態可經由和時間無關的 Schrödinger equation 的本徵態解出

$$\hat{H}\psi_n(r) = [-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(r)]\psi_n(r) = E_n\psi_n(r) \quad (4-2)$$

由於位能在  $\Omega$  以外的區域位能為無限大，因此波函數  $\psi_n(r)$  必須符合 Dirichlet 邊界條件。EM 基本上是藉由位能的近似

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r \in I = \Omega \\ V_0 & \text{if } r \in II \\ \infty & \text{if } r \in III \end{cases} \quad (4-3)$$

其中  $V_0$  是適當選擇的常數，I、II、III如圖 4-1 所示。

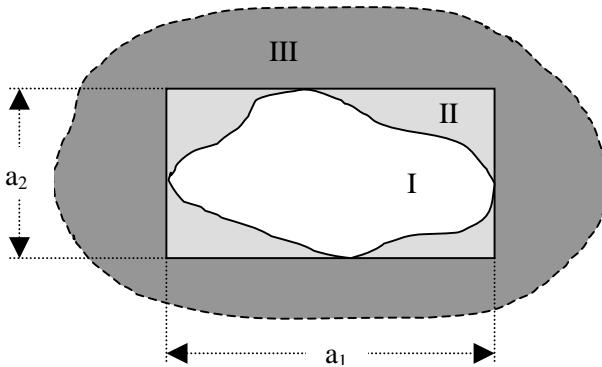


圖 4-1 一般的二維彈子球(I)用一適當矩形來圍住所需的邊界(II)，在區域(I)內的位能為零，而在區域(II)的位能  $V_0$  為一有限值而在區域(III)的位能為無限大。

用一適當的矩形邊長  $a_1$ 、 $a_2$  無限位能井圍住我們所要計算的區域，將區域 II 的位能由無限大改為一足夠大但卻是有限的值  $V_0$ 。邊界條件經過這樣的修改後有兩個重點值得注意，一是波函數  $\psi_n(r)$  在區域 II 的出現機率不會完全是零，但當  $E_n \ll V_0$  時可以使的在區域 II 的出現機率非常低。第二是波函數  $\psi_n(r)$  可以表為

$$\psi(r) = \sum_m c_m \phi_m(r) \quad (4-4)$$

其中  $c_m$  是可以被決定的展開係數； $\phi_m(r)$  則是在矩形無限位能井中相關的本徵態

$$\phi_m(r) \equiv \phi_{m_1, m_2}(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2}{a_1}} \sin\left(\frac{\pi}{a_1} m_1 x_1\right) \sqrt{\frac{2}{a_2}} \sin\left(\frac{\pi}{a_2} m_2 x_2\right) \quad (4-5)$$

函數  $\phi_m(r)$  形成一完整且正交的基底， $m = (m_1, m_2)$  皆為正整數，正交的條件可以以下式表示

$$\int dr \phi_n(r) \phi_m(r) = \delta_{nm} \quad (4-6)$$

Hamiltonian 的矩陣元素可以定義為

$$H_{nm} = \int d^2r \phi_n(r) \hat{H} \phi_m(r) \quad (4-7)$$

結合 Hamiltonian、(4-3)式和(4-5)式可以計算出矩陣的每一個元素

$$H_{nm} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{m_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{m_2}{a_2} \right)^2 \right] \delta_{nm} + V_0 v_{nm} \quad (4-8)$$

在這裡我們使用這個符號  $m = (m_1, m_2)$

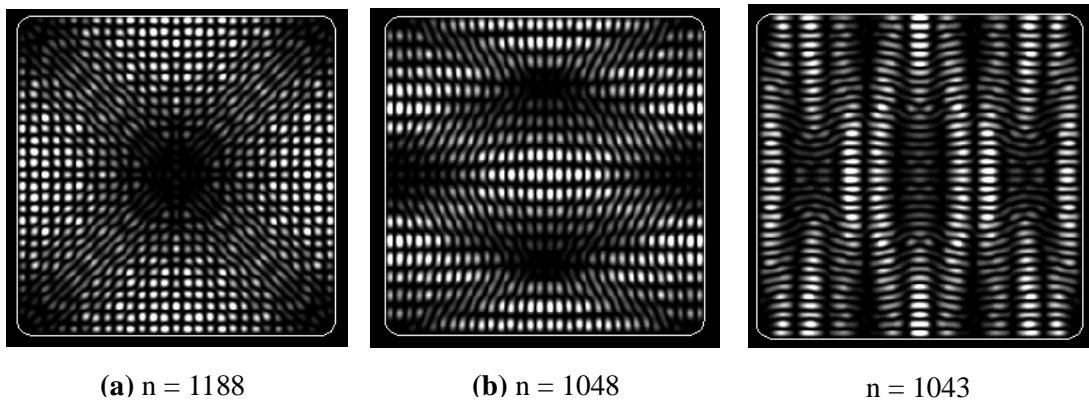
$$v_{nm} = \int_{\text{II}} d^2r \phi_n(r) \phi_m(r) \quad (4-9)$$

這個矩陣的特徵值就是能量而特徵向量即是波函數相關的展開係數



### 4.3 圓弧角的方形量子彈子球

首先觀察的是波函數在圓弧角的方形量子彈子球的分佈情形，在圓弧角的方形量子彈子球的邊界裡最為顯著的週期性軌道就是在方形彈子球所觀察到的 PO，這裡秀出幾種倒角最常見的週期性軌道軌跡，包跨  $\text{PO}(1,1)$ 、 $\text{PO}(1,2)$ 、 $\text{PO}(3,1)$  對撞及兩個  $(1,1)$ 。



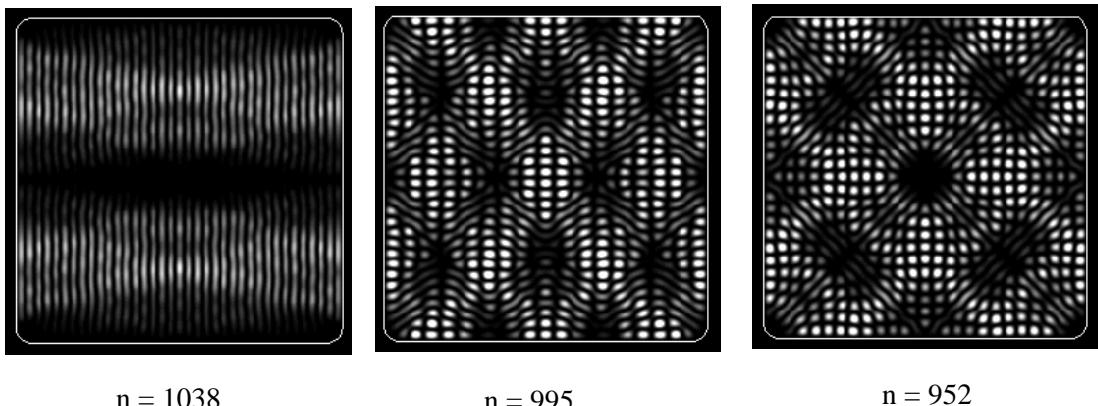


圖 4-2 圓弧角的方形所計算出的波函數，其和方形彈子球的週期性軌道是一致的

在完美的方形彈子球裡，不管量子數多大都無法見到古典的週期性軌道軌跡，但經過修飾後形成倒角可以看到在方形彈子球的 PO 軌跡，這種情形在完美方形彈子球的本徵態不管再高階都是不會見到的；而波函數的遠場分佈和使用  $SU(2)$  所計算出的遠場分佈，有很高的相似度。

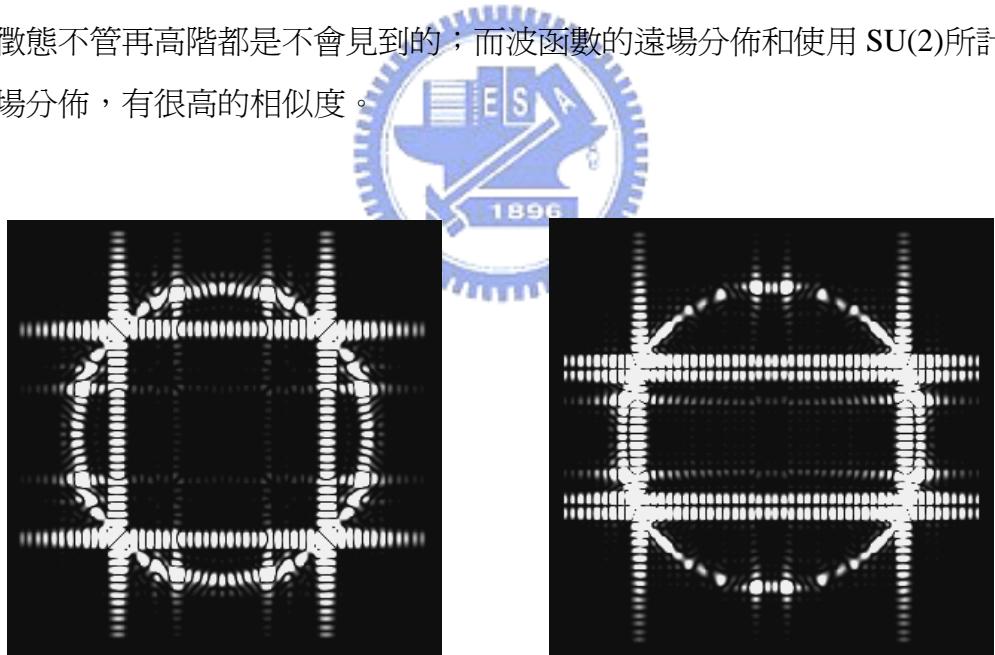


圖 4-3 (a) 圖 4-2(a)中  $PO(1,1)$  相關的動量空間分佈情形 (b) 圖 4-2(b)中  $PO(1,2)$  相關的動量空間分佈情形

這讓我們可以更確信利用  $SU(2)$  所選取的本徵態，所描繪出的 PO 軌跡是很可靠的。在面射型雷射的圓弧角的方形裝置，也觀察到了和理論相當一致的結果。

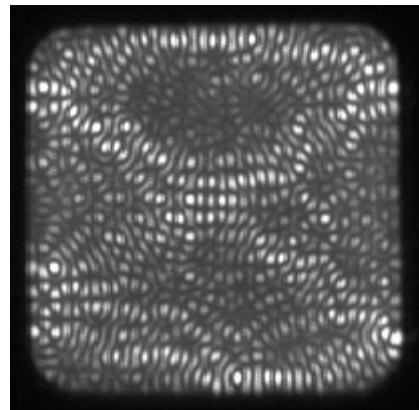


圖 4-4 圓弧角的方形面射型雷射實驗結果

#### 4.4 操場量子彈子球

在操場邊界的彈子球裡，計算出的波函數分佈同樣的也觀察到了 PO 的軌跡，而些 PO 會隨著量子數增加而不斷的重現。

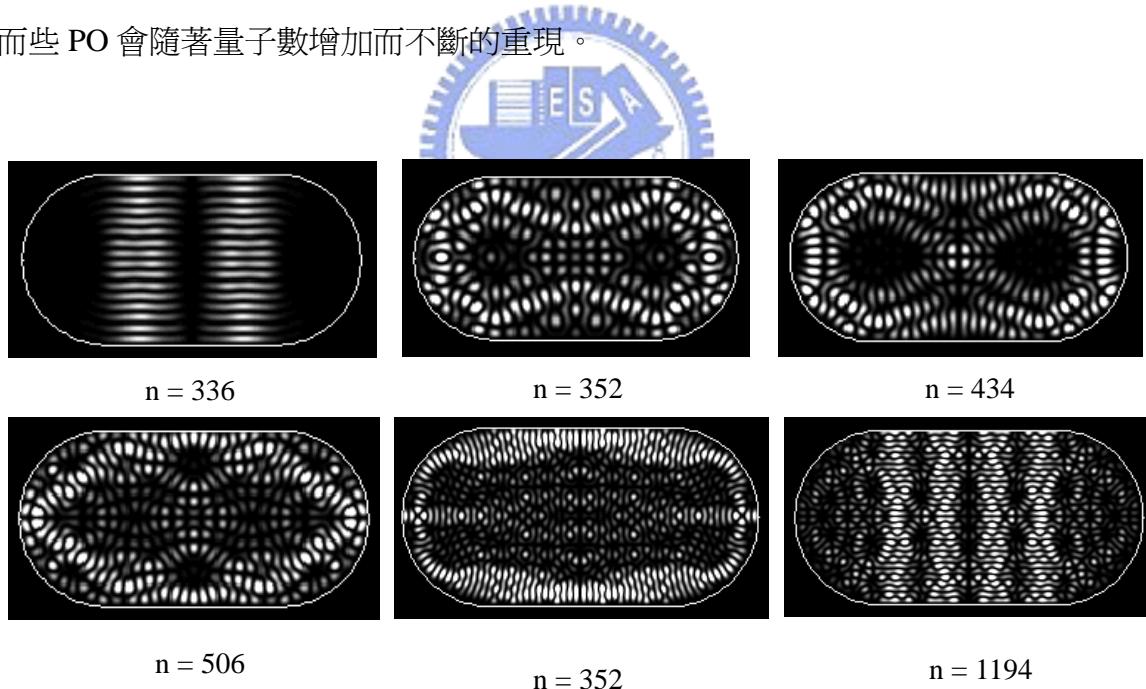
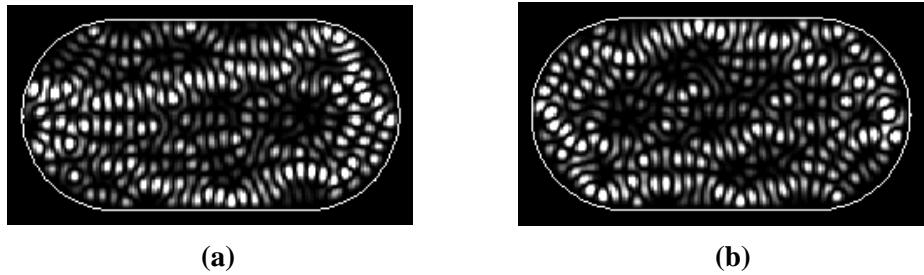


圖 4-5 操場形彈子球計算出的結果

由於邊界的對稱性，所計算出的波函數都有很高的對稱性；但在古典裡操場彈子球是典型的渾沌系統，在這裡我們採取了兩個假設來模擬古典的渾沌現象，第一我們

採用了 SU(2)中將能量相近的本徵態作疊加以期達到渾沌的現象，當僅有兩個本徵態來作疊加時還會有一定的對稱性存在，因此在這裡我們作三個本徵態的疊加，將量子數分別為 440、441、442 的本徵態作疊加



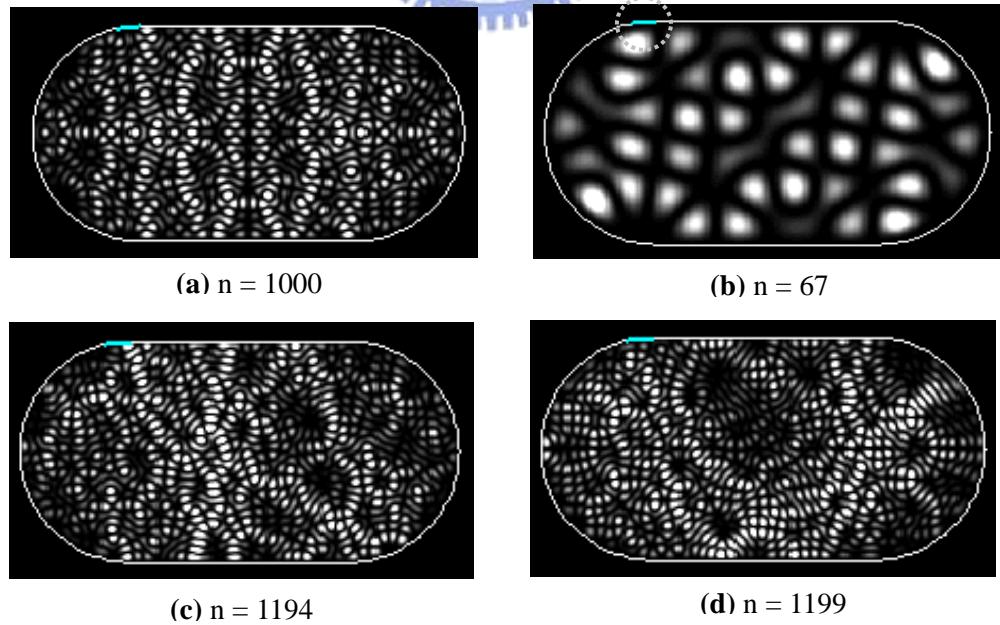
(a)

(b)

圖 4-6 將本徵態作疊加後所得到的波函數

- (a)  $\cos(440 \cdot 0.1\pi)\phi_{440} + \cos(441 \cdot 0.1\pi)\phi_{441} + \cos(442 \cdot 0.1\pi)\phi_{442}$
- (b)  $\cos(440 \cdot 0.3\pi)\phi_{440} + \cos(441 \cdot 0.3\pi)\phi_{441} + \cos(442 \cdot 0.3\pi)\phi_{442}$

這樣的想法的確讓我們得到在古典裡的渾沌情形，但也因其是渾沌的情形所以無法判斷出本徵態配上不同的係數會有怎樣的影響。第二則是將操場形的邊界作一點微擾變形，使計算出的本徵態波函數即是渾沌的現象



(a)  $n = 1000$

(b)  $n = 67$

(c)  $n = 1194$

(d)  $n = 1199$

圖 4-7 在左圓的上半部作微擾操場形彈子球計算出的結果 (a) 量子數  $n=1000$  (b) 量子數  $n=67$  (c) 量子數  $n=1194$  (d) 量子數  $n=1199$

當將邊界作了一些微擾後有一些相當有意思的現象，在這裡作的微擾是將操場左半部圓的上半部，如圖 4-7(b)中虛線所圍起的圓處即是微擾的地方，此處的邊界本來應是圓弧，我們將此處改乘一直線連結來作微擾，得到的結果如圖 4-7 漚沌的現象，邊界的微擾的確造成波函數分佈的不對稱，但並不是所有的波函數都會有渾沌的現象，某些量子數的波函數還是呈現高度的對稱性如圖 4-7(a)，尤其是在量子數越小時波長愈長的的波函數越不受邊界所影響，僅有少數呈現不對稱的情形如圖 4-7(b)而當量子數越大波長越短時受邊界的影響相對較大，僅有少部分的波函數仍能維持其對稱性；在半導體製程中想要形成一完美的操場形彈子球幾乎是辦不到的，所以列入邊界對稱性的不完美加入計算是一很合理的假設。

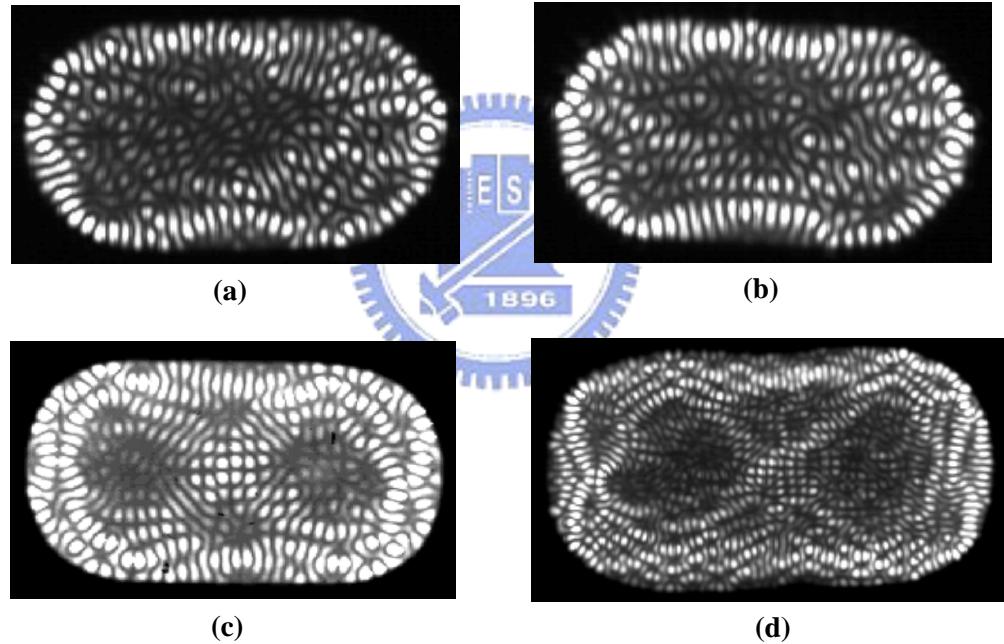


圖 4-8 (a) (b) 在操場形邊界面射型雷射實驗所觀察到的近場渾沌現象 (c) (d) 和操場中 PO 相關的近場實驗圖

圖 4-8 是在實驗中觀察到的近場圖案，其近場的分佈圖案是渾沌的現象，然而正因為其波函數分佈的不規則性大大的增加了模擬的困難度；在實驗的裝置裡另外發現了圖 4-8(c) (d)相當規則的情形，圖案的分佈似乎暗示了其同時存在兩個 PO 模態，一為八字形的 PO 軌跡而另一 PO 模態即是 whispering-gallery mode 兩個模態相疊加，系統同

時選擇這兩個 PO 模態。在圖 4-8 裡可以發現到很明顯的共同特徵在於邊界附近有很大的侷限效果以致於形成 whispering-gallery mode，這是由於在邊界處的載子濃度較高因此折射率較大，因此在底部的位能不再是平的而是在邊界的位能較低，我們將底部的位能形式以下式表示之

$$v(x, y) = -k(x^2 + y^2) \quad (4-10)$$

我們使用一三維的繪圖來瞭解彈子球平台底部的情形，彈子球平台底部會變的像一個小山丘一樣。

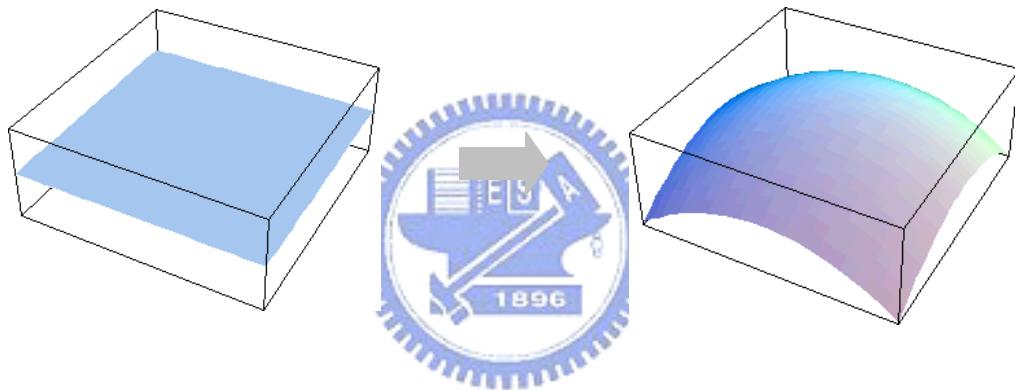


圖 4-9 設計一位能使得彈子球平台底部由平的變成突出的

將這樣假設的彈子球平台底部放入操場形的邊界，再放入 EM 來解出波函數

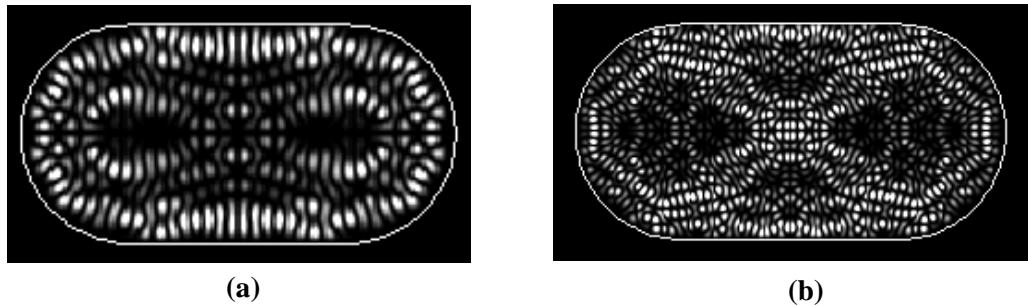


圖 4-10 底部位能改變後所計算出的結果 (a) 量子數  $n = 452$  (b) 量子數  $n = 1613$

在這裡我們展示了一些初步計算的結果，和實驗也得到了一些粗略的對應，由於要找到適當的  $k$  值決定其曲率及找出可供對應的波函數是相當困難的，因此在這裡僅先秀出  $k = -1$  的結果。而在邊界微擾後所做的模擬，圖 4-11 也得到了和實驗相當類似的模擬，其和實驗最大的差別在於邊界的疤痕(scar)較弱。

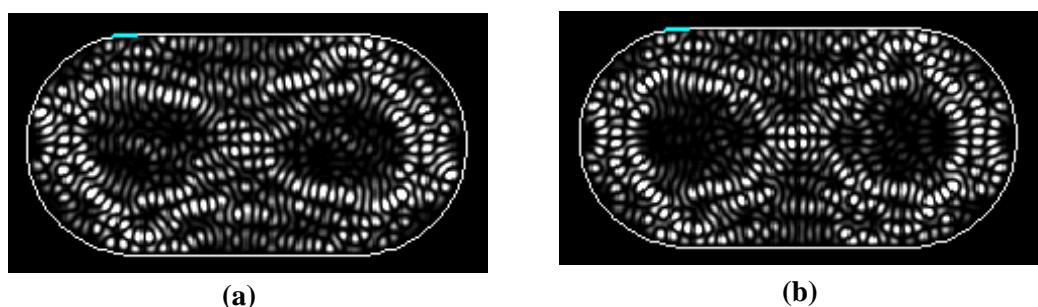


圖 4-11 底部位能改變後所計算出的結果 (a) 量子數  $n = 868$  (b) 量子數  $n = 898$



## 第五章 光束追跡的干涉模擬

### 5.1 導論

在前幾章分別探討了彈子球在古典的情形和波函數的分佈情形，在本章我們利用程式作了一個很有趣的嘗試，利用 VB 這個程式語言我們將波的性質和古典的彈子球粒子性性質結合在一起，藉以探討其中有趣的現象；圖 5-1 當彈子球由方形的左邊界至右邊界時，其行進方向為 X 方向，在古典時其經過的地方出現的機率都是一樣的，在這裡我們假設其出現機率隨著位置而改變，其數學形式為  $\sin(k \cdot r)$  其中  $k$  為波數  $r$  為彈子球所行走的距離，在橫向方向則如一高斯分佈  $\exp(-\alpha d^2)$  其中為  $\alpha$  衰減常數  $d$  則是距離軌跡的距離，在其行進軌跡上有最大的分佈機率，距離行進軌跡越遠機率越小。而另外一個假設則是我們一般所熟悉的，當波碰到固定端反射後其相位會反轉 180 度，因此彈子球一旦撞擊到邊界後其數學表示式為  $\sin(k \cdot r + \pi)$ 。

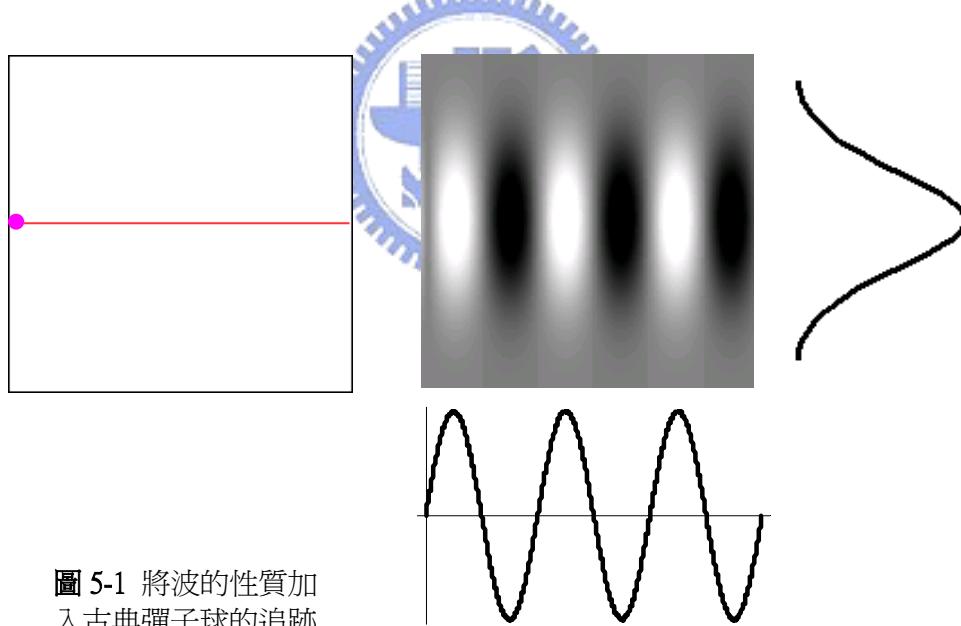


圖 5-1 將波的性質加入古典彈子球的追蹤

將波的性質加入彈子球的古典軌跡後，其彼此干涉後的圖案變化將遠比單純的單一粒子追蹤有趣很多，經由調控  $k$  值大小更可以探討高階和低階不同的變化。

### 5.2 方形彈子球的干涉模擬

我們首先探討在方形彈子球檯中最簡單的情況也就是  $PO(1,1)$ ，圖 5-2 分別是

PO(1,1)低階和高階的模擬情形，其中高階即是以第三章 3-4(a)實驗圖的模擬，令人驚訝的是如此簡單的假設，卻和我們在面射型雷射所看到的實驗圖案是如此一致，尤其是在邊界上因為反射所產生的干涉圖案，不但和實驗一致更滿足邊界條件的限制。但當彈子球不斷的在週期性軌道上運動時，每當重新經過一次 PO 軌跡後，產生的干涉圖案會隨時間改變，要使干涉的圖案不隨時間改變需設計波長使其整數倍為行走一次 PO 的長度 L，因為彈子球和邊界作了 4 次的碰撞相位增加了  $4\pi$ ，當為半波長偶數倍則干涉圖案不會隨時間而改變，而在奇數倍時，彈子球在行走下一次 PO 後會形成完全破壞性干涉。

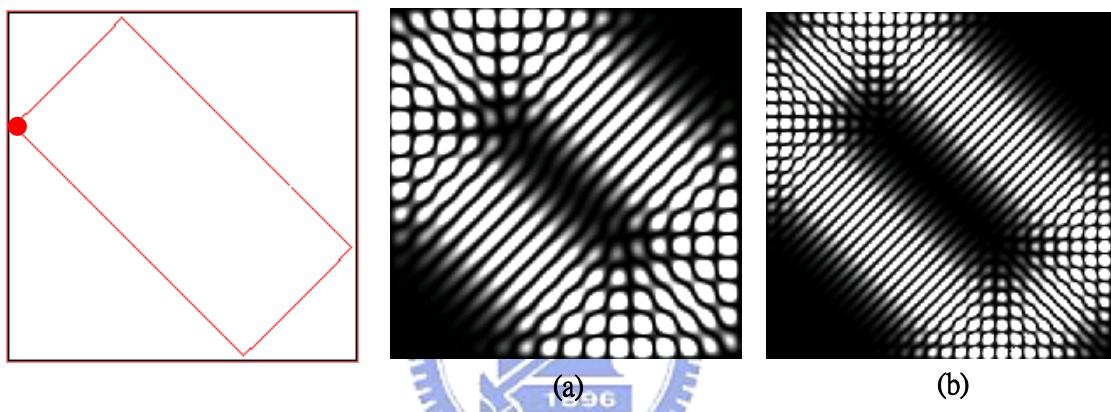


圖 5-2 結合波性與粒子性在方形 PO(1,1)的模擬 (a) 低階的模擬結果 (b) 高階的模擬結果

同樣的想法，我們將這個模擬放進方形彈子球中的 PO(1,2)、PO(3,1)，在這兩種週期性軌道的模擬也獲得相當大的成功，使的這樣的一個假設模擬可信度大大的增高。

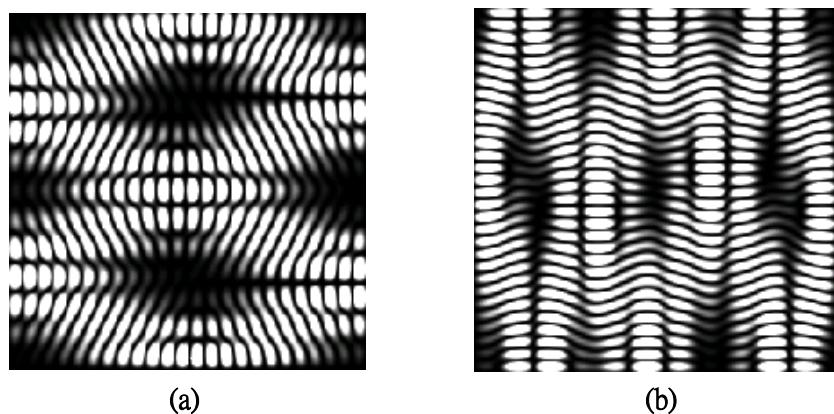


圖 5-3 (a) PO(1,2)軌跡的模擬結果 (b) PO(3,1)軌跡的模擬結果

當我們將  $k$  的值一直增大也就是在高階的情況時，粒子性會較明顯因此隨著  $k$  值增加，適量的增加  $\alpha$  值使其在橫向波的性質也減少，在這個情況下就會非常接近古典的情況，經過的軌跡因為交錯區域趨近於零，彼此幾乎不產生干涉就完全象是彈子球的古典追跡；相反的，當  $k$  值減少時波的性質增強  $\alpha$  值要隨之減小以凸顯波的性質，有趣的是當  $k$  值一直減少時，波的性質一直增強時又會有怎樣有趣的現象發生。

在圖 5-4 裡我們就作了這樣一個嘗試，在最簡單的  $PO(1,1)$  裡模擬出的結果相當有意思的就是在方形無限位能僅中的本徵態，在 5-4(a) 中設計其半波長的 4 倍為全長  $L$  得到了在方形中的基態，而 5-4(b) 設計半波長的 12 倍為全長  $L$ 。在古典的追跡裡加入波動的性質，我們甚至得到了量子力學中薛丁格方程式的解，在 5-4(c)(d) 裡加入了薛丁格方程式的解來作比較。如此高的相似度，讓我們對這樣一個簡單的物理假設，是否可以解釋這個系統的所有現象帶來可能性。

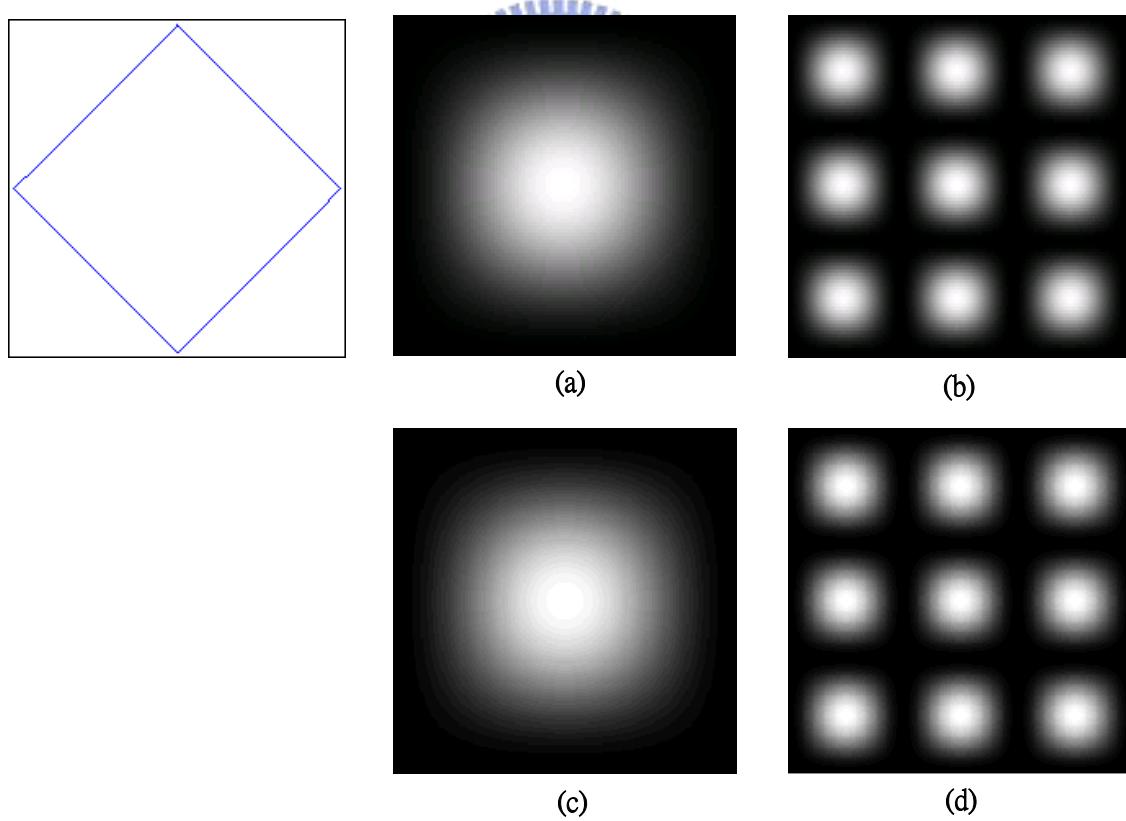


圖 5-4 方形邊界中  $PO(1,1)$  軌跡模擬的結果 (a) 使半波長的 4 倍為全長  $L$  (b) 使半波長的 12 倍為全長  $L$  (c) 方形無限位能井中的波函數解  $|\phi(x, y)|^2 = |\sin(x) \sin(y)|^2$  (d) 波函數解  $|\phi(x, y)|^2 = |\sin(3x) \sin(3y)|^2$

## 5.2 圓形彈子球的干涉模擬

在圓形邊界的面射型雷射裝置中，**whispering-gallery mode** 是系統特別所喜好的，由於在實驗裝置中靠近邊界的區域載子濃度較高，因此折射率較大光子較容易被侷限在靠近邊界的地方，因此系統特別喜歡 **whispering-gallery mode**。

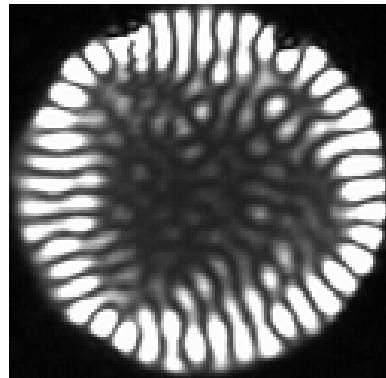


圖 5-5 圓形面射型雷射的近場實驗結果

在圓中設計一 PO 和邊界的夾角為 20 度，形成圖 5-6(a)的週期性軌道，此一古典軌跡幾乎是貼著圓邊界在行走，加入假設後的模擬後所得到的結果就好像規則的花瓣一般整齊排列，在完美對稱的圓裡波節分佈有著高度的對稱性，但在實驗裡由於製程上的困難，要得到一個完美的圓形是很困難的，在圖 5-5 中就可以明顯看出裝置的不對稱性。

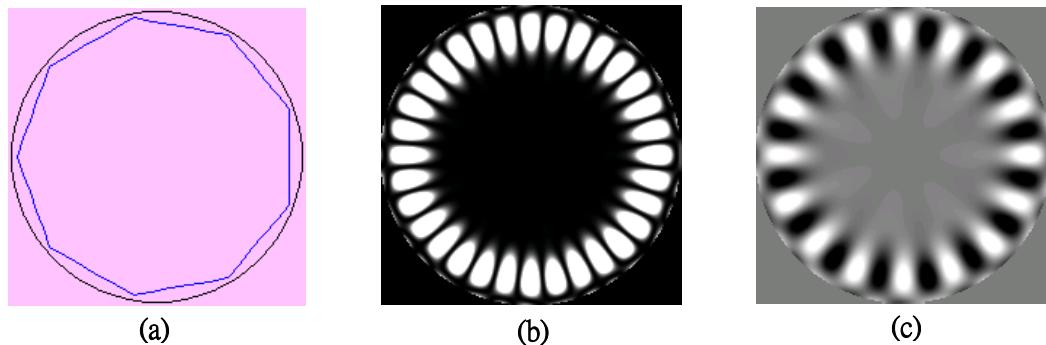


圖 5-6 (a) 彈子球在圓邊界中的古典週期性軌道軌跡 (b) 加入波的性質後所得到的強度分佈 (c) 加入波的性質所得到的分佈情形

由於軌跡的交錯區域太小，軌跡之間的干涉太少，圖 5-6 並不會隨著波長設計不同，而有著顯著的不同。我們設計在圓形彈子球中的另一個週期性軌道，其和圓邊界的夾角為 56 度圖 5-7 為其週期性軌道軌跡，由於軌跡彼此的交會處增加，稍稍改變波長對干涉的圖案影響就會很大。

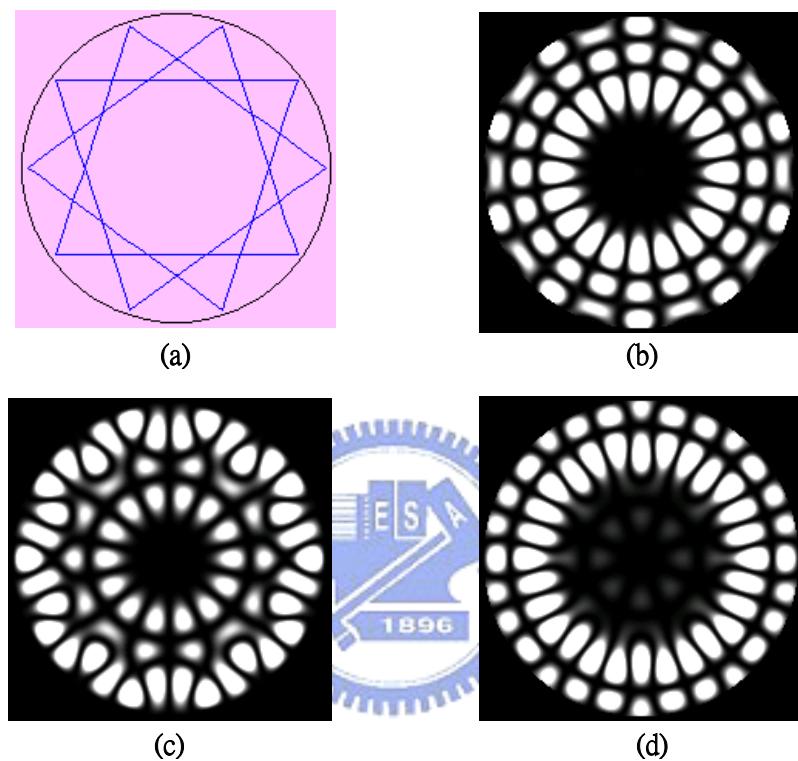


圖 5-7 (a) 圓形彈子球的一 PO 軌跡 (b) 半波長的 110 倍為 PO 長度  $L$  (c) 半波長的 112 倍為 PO 長度  $L$  (d) 半波長的 114 倍為 PO 長度  $L$

如同在方形彈子球般，我們一樣設計非常短的波長來觀察低階所干涉出來的圖案，在方形看到了方形中的本徵態，而在圓形邊界的彈子球所期望看到的就是圓邊界的無限位能井本徵態，使用圖 5-7(a)的週期性軌道軌跡來設計波長，設計波長使的其半波長的整數倍為其 PO 的長度，得到不同階數的本徵態。圖 5-8(a)(b)(c)即是模擬的結果，5-8(a)設計半波長長度的 10 倍為全長  $L$ 、(b) 半波長長度的 22 倍為全長  $L$ 、(c)半波長長度的 36 倍為全長  $L$ ，分別形成了不同階數的本徵態。

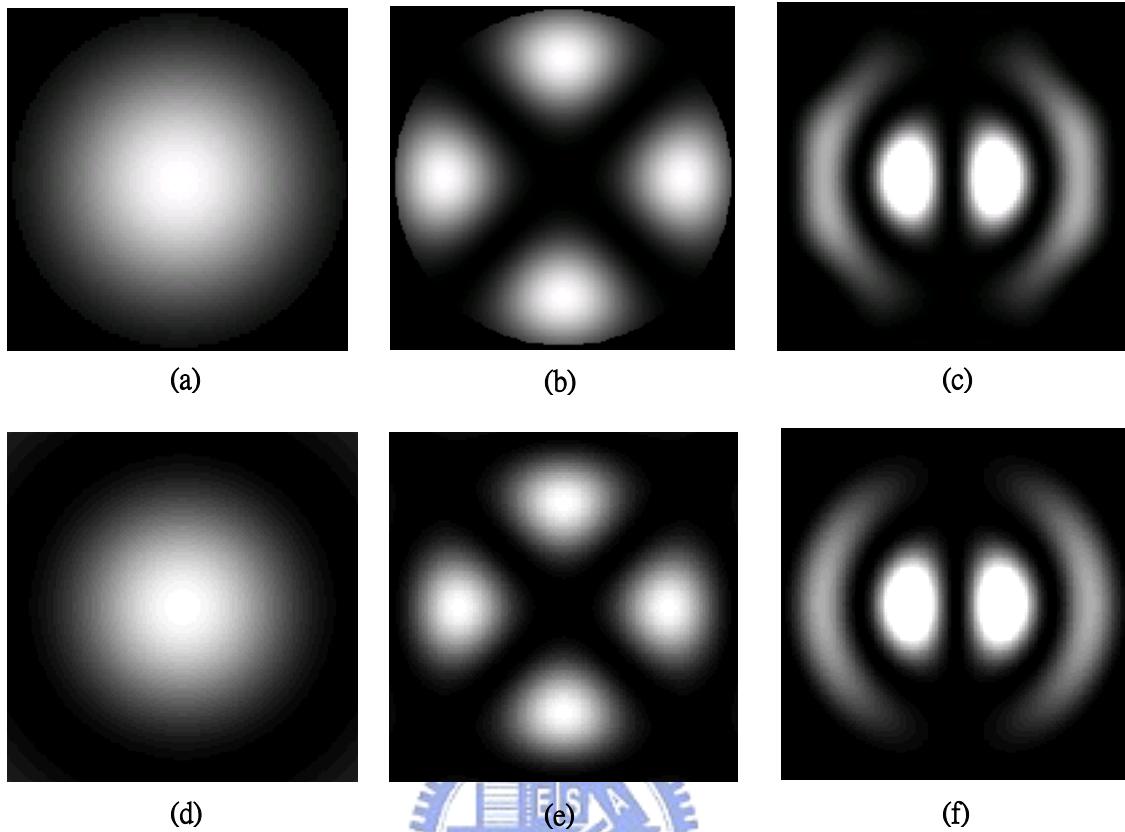


圖 5-8 (a) 半波長的 10 倍為 PO 長度  $L$  (b) 半波長的 22 倍為 PO 長度  $L$  (c) 半波長的 36 倍為 PO 長度  $L$  (d) 圓邊界的無限位能井波函數解(0,0) (e) 圓邊界的無限位能井波函數解(0,2) (f) 圓邊界的無限位能井波函數解(1,1)

### 5.3 操場彈子球的干涉模擬

操場形彈子球古典型行爲也就是大家熟悉的渾沌，彈子球的行爲是非常敏感於起始條件，在面射型雷射的確也觀察到這個情形。

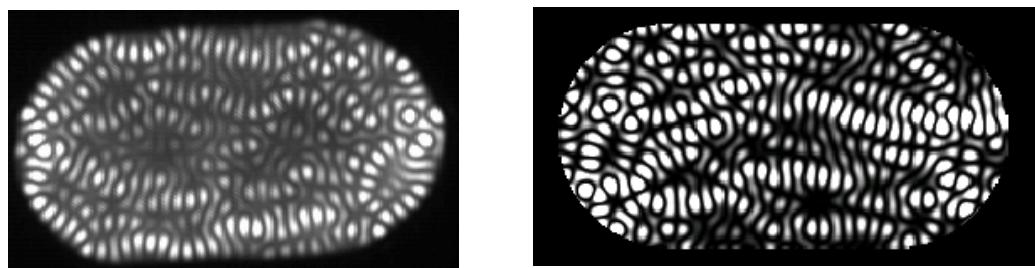


圖 5-9 (a) 操場形面射型雷射近場圖案實驗結果 (b) 利用程式模擬彈子球在操場邊界的模擬結果

利用程式來作模擬後，產生的圖案不像在方形彈子球和圓形彈子球般，能在邊界條件上有很好的符合，邊界上的波節似乎都被硬生生的切斷，但如果考慮在邊界附近的圖案，其在邊界裡的扭曲打轉的圖案是非常相似的，實驗圖案的另一個特色就是彈子球在邊界上有很大的出現機率，因為邊界上的折射率較大光子較容易被侷限在邊界附近；我們在程式上模擬一個情形來達成這樣的假設，圖 5-10(b)假設在操場裡有兩種不同的折射率，在操場裡在另外描繪出一較小的操場，在小操場裡的折射率較小，而在兩者之間的折射率較大，在程式裡定義臨界角為 75 度，因此當彈子球以 0 度的角度出發後，圖 5-10(d)中很明顯看出彈子球大都被侷限在外圍裡就好像有個溝讓它不容易跑出來，圖 5-10(c)是相同的起始條件下沒有任何折射率的變化的模擬情形，明顯可以看出其行為是和有所侷限的不同。

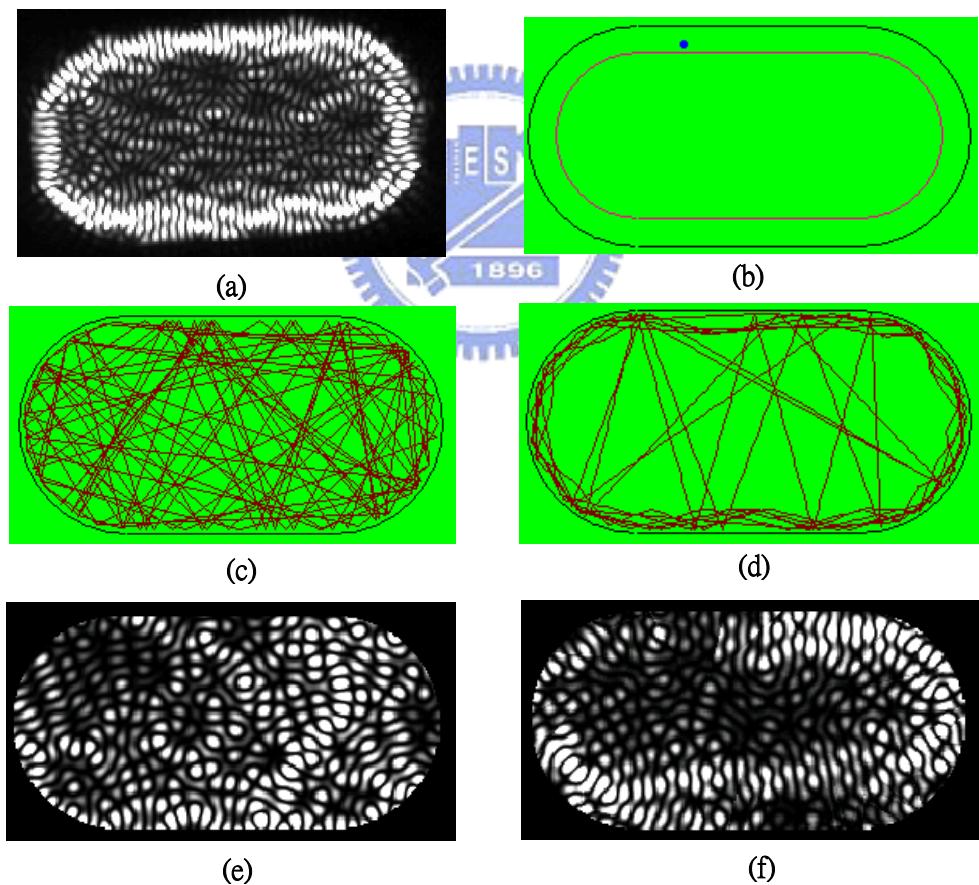


圖 5-10 (a) 典型操場形面射型雷射近場實驗圖 (b) 在操場裡設計兩種不同的折射率，在較小的操場裡折射率小，兩者之間的折射率較大 (c) 沒有任何侷限的古典追跡 (d) 外內折射率不同的古典追跡 (e) (c)圖相關的波干涉圖案 (f) (d)圖相關的波干涉圖案

這樣的一個假設的確造成彈子球有較大的機會被侷限在邊界上的外圍區域，但是其產生的干涉圖案卻不若原本所預期要得到的結果，雖然彈子球大部分的時間都被侷限在邊界附近，但互相干涉的結果卻都不一定會產生建設性干涉，因此在圖 5-10(f)邊界附近並沒有產生一良好建設性干涉。

#### 5.4 操場彈子球中的多個週期性軌道

在第三章中我們探討了方形彈子球中同時存在多個週期性軌道，方形彈子球所觀察到的實驗圖案皆是方形中簡單的  $PO(1,1)$ ，同時會有兩個或甚至有四個  $PO(1,1)$  的存在，觀察在方形彈子球同時存在的多個  $PO$  都是簡單且相同的；但在操場彈子球裡的  $PO$  是相對複雜甚至會有不對稱的情形出現，在本節我們將介紹如何用這個程式的模擬，來佐證出我們所觀察到的近場圖案是由操場裡兩個不同的  $PO$ ，互相干涉所形成的結果。圖 5-11(a)的近場實驗圖案是我們在第四章中嘗試用數值模擬 EM 的模擬對象，圖 5-11(b)是我們結合兩個  $PO$  互相干涉的模擬結果。

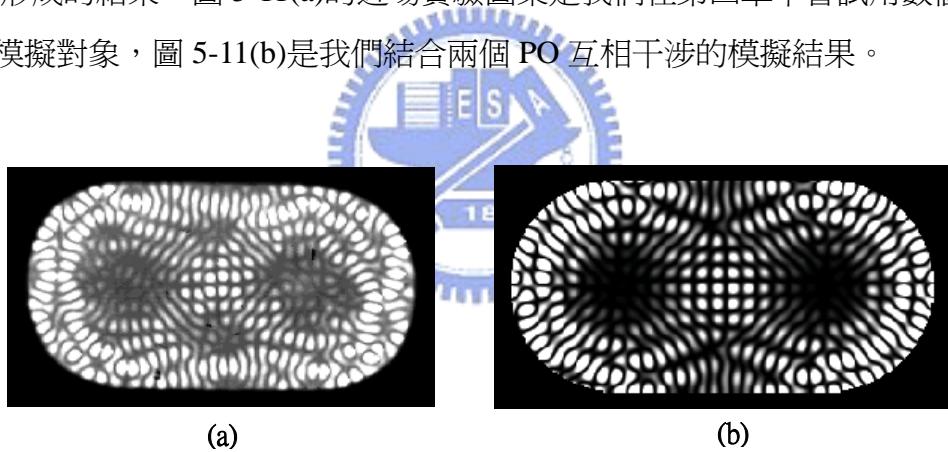


圖 5-11 (a) 操場形面射型雷射的近場實驗結果 (b) 程式的干涉模擬結果

我們所選取的兩個週期性軌道分別為圖 5-12(a)的 **whispering-gallery mode** 及圖 5-12(c)八字形的  $PO$ ，將這兩個週期性軌道干涉的結果互相疊加即形成圖 5-11(b)。

在操場裡的多個  $PO$  的行為由於  $PO$  間彼此的交會處太多干涉圖案相對複雜，其和方形彈子球可以直接觀察出由哪些  $PO$  組成有著很大的不同，我們很難直覺的猜出我們所觀察到的操場彈子球圖案，是由哪些獨立的  $PO$  所組成的，而由這個程式我們可以有效的證明出，實驗所觀察到的圖案是由哪些週期性軌道所組成的。

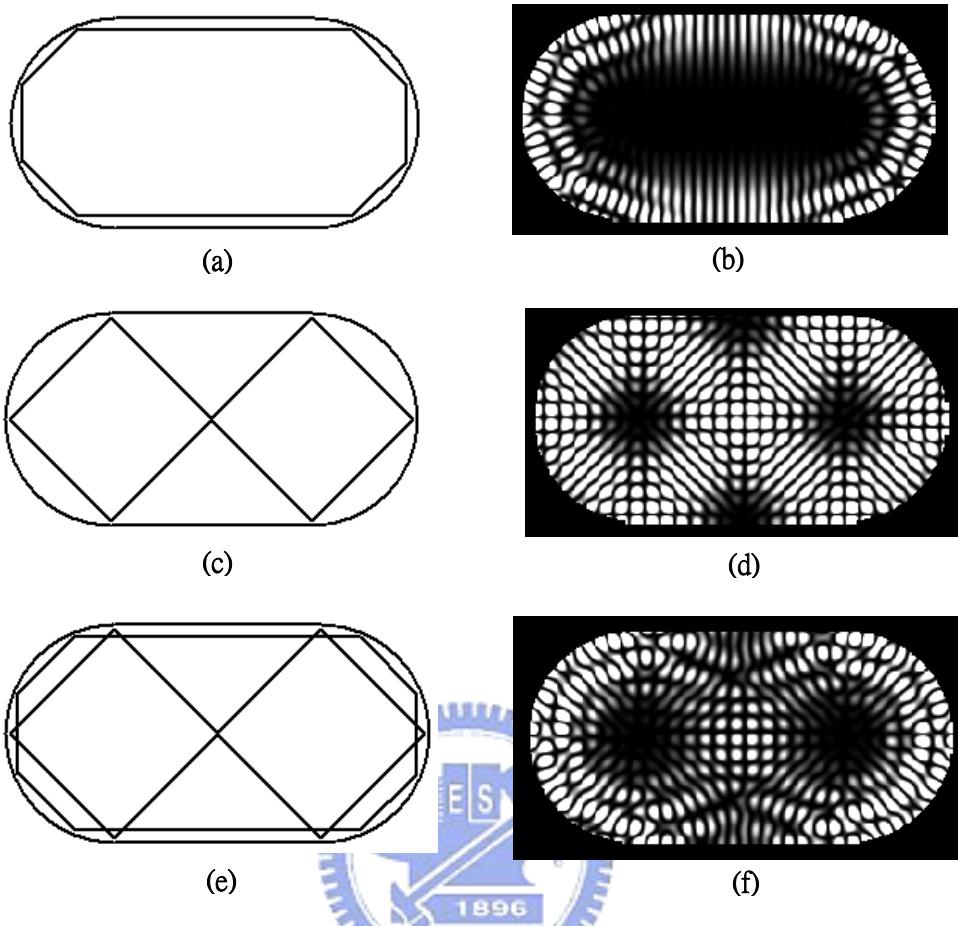


圖 5-12 (a) 操場彈子球中沿著邊界行走的 PO (b) (a)的軌跡干涉後的結果  
 (c) 操場彈子球中八字形的 PO (d) (c)的軌跡干涉後的結果 (e) 結合(a)和  
 (c)的古典 PO 軌跡 (f) 將(b)和(d)的干擾圖案作結合

## 第六章 結論與未來展望

我們成功的運用 SU(2)在規則系統裡(方形彈子球、簡諧振盪)建立起古典和量子間的關係，而在不規則的系統中我們則初步的利用 Expansion Method 作一些探討，我們在邊界或彈子球平台底部作了些手腳，來探討實驗觀察到的一些現象，但一直沒能有完美的解釋。隨著技術的進步我們可以利用許許多的方法，製作奈米尺度的物質，奈米科技最令人玩味的就是小尺度下許多有趣的量子現象，這許多和我們古典大大不同的現象正可以利用來作許多有趣的應用；在我們研究的過程中，也正因為這許多有趣的現象讓研究充滿了挑戰性。



## 參考文獻

- [1] Y. F. Chen, Y.P. Lan, S.C. Wang,Appl. Phys. B **72**, 167 (2001)
- [2] Y. F. Chen, and K. F. Huang, J. Phys. A **36**, 7751 (2003)
- [3] M V Berry, Eur. J. Phys. **2**, 91 (1981)
- [4] J. Pollet, O. Méplan, and C.Gignoux, J. Phys. A **28**, 7282 (1995)
- [5] Y. F. Chen, and K. F. Huang, Phys. Rev. E **66**, 046215 (2002)
- [6] A. Bäcker and R. Schubert, J. Phys. A **32**, 4795 (1999)
- [7] Y. H. Kim, M. Barth, H. J. Stöckman, and J. P. Bird, Phys. Rev. B **65**, 165317 (2002)
- [8] Y. F. Chen, and K. F. Huang, Phys. Rev. L **89**, 224102 (2002)
- [9] Steven Tomsovic, and Eric J.Heller, Phys. Rev. L **70**, 1405 (1992)
- [10] A. Bäcker, R. Schubert and P Stifter, J. Phys. A **30**, 6783 (1997)
- [11] D. L. Kaufman, I. Kosztin, and K. Schulten, Am. J. Phys. **67**, 133 (1999)
- [12] M. C. Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics(Springer-Verlag, New York, 1990)
- [13] W. E. Bies, L. Kaplan, M. R. Haggerty and E. J. Heller, Phys. Rev. E **63**, 066214 (2001)
- [14] A. E. Siegman, Lasers(University Science Books, Mill Valley,CA, 1986), Chap. 16.
- [15] Y. F. Chen, and Y. P. Lan, Phys. Rev. A **64**, 063807 (2001)
- [16] Y. F. Chen, and Y. P. Lan, Phys. Rev. A **65**, 013802 (2002)