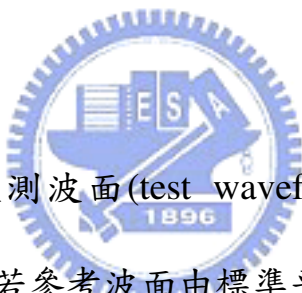


第二章 白光干涉術理論與方法

本章將介紹白光相移干涉術(white-light phase-shifting interferometry, WLPSI)的理論與方法。從白光干涉的基本原理，引入相移技術(phase-shifting technique)來求得相位差，利用相位重建技術(phase unwrapping technique)來恢復相位的連續分布，進而重建三維表面輪廓。

2.1 干涉理論

2.1.1 簡介



干涉儀可以量測被測波面(test wavefront)與參考波面(reference wavefront)間的相位差。若參考波面由標準平面反射產生，而被測波面由帶有高低起伏的待測面反射產生，則被測波面與參考波面間的相位差就是反映此待測物的表面輪廓。關係如下：

$$h(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi} \phi(x, y) \quad (2.1)$$

h 表示被測面相對於參考面的表面高度分布， λ 表示光源波長， ϕ 表示相位差。此式是針對垂直入射光而言。

不同相位差反映出不同光強度，藉由量測光強度分佈，就可知相位差分佈。光強度與相位差之關係可以由數學式子推導表示。

2.1.2 白光干涉理論[9]

對於光源為多色光源(polychromatic light)、Michelson 式干涉儀架構，計算分成兩束光與其光強度之相位差的關係，在成像面上所得強度 $I(z)$ 與兩干涉臂的光程差有關，關係如下：

$$I(\tau) = I_1 + I_2 + 2[I_1 I_2]^{1/2} \gamma'(\tau) \quad (2.2)$$

$\gamma'(\tau)$ 表示 $\gamma(\tau)$ 實數部分， τ 表示兩光程差的時間延遲， $\gamma(\tau)$ 表示光源振動自同調函數(self coherence function) $\Gamma(\tau)$ 的歸一化：

$$\gamma(\tau) = \Gamma(\tau) / \Gamma(0) \quad , \quad \Gamma(\tau) = \langle U(t+\tau)U^*(t) \rangle \quad (2.3)$$

$U(t)$ 表示一個關係到電磁波的實函數。以多色光源為例， $U(t)$ 能被寫成

下面富氏積分的式子：

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\nu) \exp\{i[\Phi(\nu) - 2\pi\nu t]\} d\nu \quad (2.4)$$

把(2.4)式帶入(2.3)式可得：

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |a(\nu)|^2 \exp(-i2\pi\nu\tau) d\nu \quad (2.5)$$

這個式子顯示 $\Gamma(\tau)$ 是功率光譜密度函數(power spectral density function) 的富氏轉換，這就是光學定理中著名的 Wiener-Khintchine 理論。

考慮高斯功率光譜密度(Gaussian power spectral density)分佈的多色光源，功率光譜密度函數和自同調函數如下：

$$|a(\nu)|^2 = G \exp\left[-\left(\frac{\nu - \bar{\nu}}{\Delta\nu}\right)^2\right] \quad (2.6)$$

$$\Gamma(\tau) = G \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \bar{\nu}}{\Delta\nu}\right)^2\right] \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau) d\nu \quad (2.7)$$

G 是一個常數，與平均功率有關， $\bar{\nu}$ 是中心頻率(central frequency)。可以計算富氏轉換得到 $\Gamma(\tau)$ 最後的式子：

$$\Gamma(\tau) = G\pi\Delta\nu \exp\left[-(\pi\tau\Delta\nu)^2\right] \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau) \quad (2.8)$$

其中 $\Gamma(0) = G\pi\Delta\nu$ ，所以歸一化後的 $\gamma(\tau)$ 如下：

$$\gamma(\tau) = \exp\left[-(\pi\tau\Delta\nu)^2\right] \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau) \quad (2.9)$$

最後強度可寫成：

$$I(z) = I_1 + I_2 + 2[I_1 I_2]^{1/2} \exp\left[-(\pi\tau\Delta\nu)^2\right] \cos(2\pi\bar{\nu}\tau) \quad (2.10)$$

當兩束白光照射產生干涉，產生干涉條紋的強度可以改寫成：

$$I(z) = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} g(z) \cos[4\pi\bar{\sigma}z + \phi_0] \quad (2.11)$$

其中 I_1 、 I_2 分別表示參考光和物體光， $\bar{\sigma}$ 表示光源的平均波數， ϕ_0 表示可調制的相位差， $2z$ 表示光程差， $g(z) = \exp[-(2\pi z\Delta\sigma)^2]$ ， $g(z)$ 與光程差有關，為了相位量測的目的，我們可把方程改寫成下列形式：

$$I(z) = I_0(1 + Vg(z) \cos(\phi(z))) \quad (2.12)$$

其中 $I_0 = I_1 + I_2$ 表示背景強度， $V = 2(I_1 I_2)^{1/2} / (I_1 + I_2)$ 表示條紋對比度， $Vg(z)$ 表示條紋對比函數， $\phi(z) = 4\pi\bar{\sigma}z + \phi_0$ 表示相位項。

對於白光干涉儀，我們將分析三種可能性：1. 利用零階干涉條紋鑑定法(垂直掃描干涉儀)；2. 使用輸出端消色差相移法；3. 使用輸入端消色差相移法。其中第一種方法是利用白光同調長度短的特性進行量

測，第二與第三種方法是相同相移法但不同架構來求初始解。

2.1.3 干涉顯微鏡的基本型態

干涉顯微鏡是針對微小被測面積所發展出的干涉儀，以傳統干涉儀為基礎，加入顯微放大功能。干涉顯微鏡可依干涉儀的基本型態分為四種 [3](a)Michelson(b)Mirau(c)Fizeau(d)Linnik，如圖(2.1)。

Fizeau 式干涉顯微鏡在參考面及待測面間有光程差，對於同調性差的白光光源並不適用；Michelson 式干涉顯微鏡需要在顯微物鏡後放入分光鏡和標準面，顯微物鏡必須具有長工作距離和較小的數值孔徑，只能用低倍率的顯微物鏡；Mirau 式干涉顯微鏡需要在顯微物鏡後放入鍍反射膜的標準面平板當參考面和分光鏡，物鏡中心會較昏暗，通常用中倍率的顯微物鏡；Linnik 式干涉顯微鏡具有較大數值孔徑及不需較長工作距離的優點，但需要兩個相同物鏡，可應用在高倍率物鏡。基於目前製程技術提升，使得元件大小及線寬趨於微小化。因此在實驗架構中，採用 Linnik 式干涉顯微鏡，可得到較佳的橫向解析度。

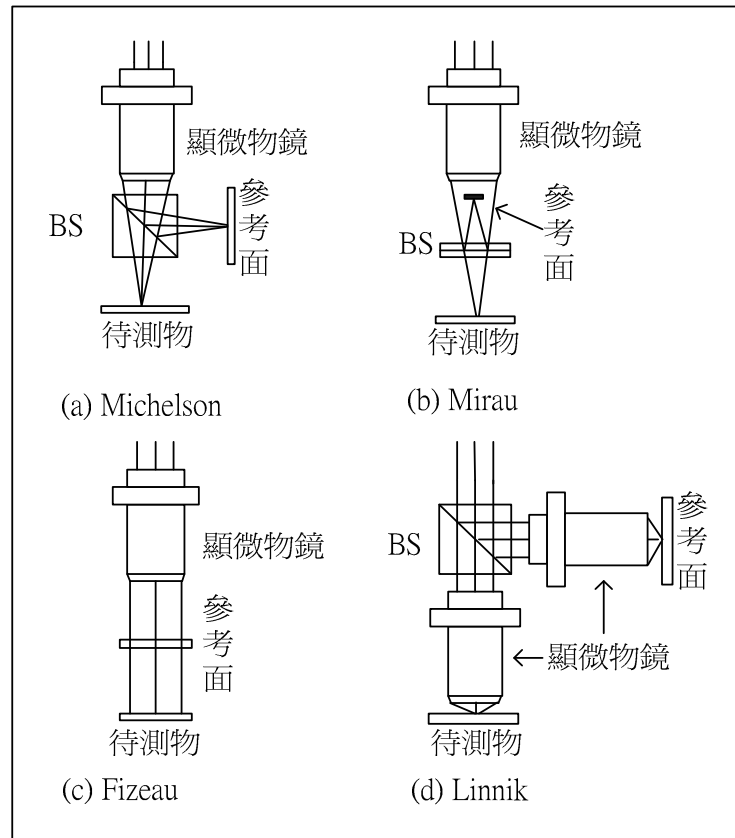


圖 2.1 干涉顯微鏡基本型態

2.2 零階干涉條紋鑑定法[9]

在白光干涉儀中，條紋對比度直接反應出兩個干涉臂的光程差 (optical path difference, OPD)。一個同調長度很短的光源，當利用 PZT 或步進馬達移動其中一臂進行掃描時，零階干涉條紋能藉由最大強度而得到。使用此法可完成高解析輪廓儀 (nm 等級)。目前在商業應用上通常選擇 Mirau 式干涉型態，如圖(2.2)所示[10]。這樣一個實際的架構已經被建立出來了。

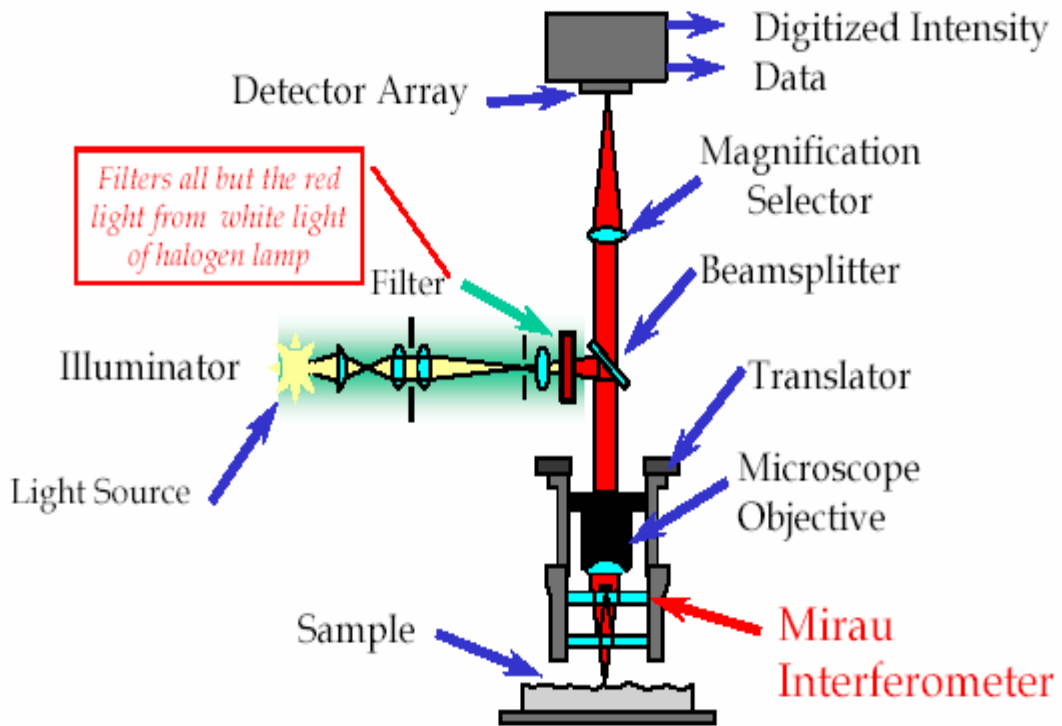


圖 2.2 商業上常用 Mirau 干涉儀架構

由圖(2.3)，可知零階干涉條紋鑑定法就是利用白光同調長度很短的特性，找出峰值強度(零光程差的位置)定下位置，對於此位置用 CCD 作二維空間強度紀錄，再逐步作步進距離掃描，記錄所有強度值，對於三維空間把所有最大強度值重建，便可求得三維輪廓。一般所謂垂直掃描干涉儀(Vertical-Scanning White-Light Interferometry, VSI)就是利用零階干涉條紋鑑定法加上步進掃描來實現。

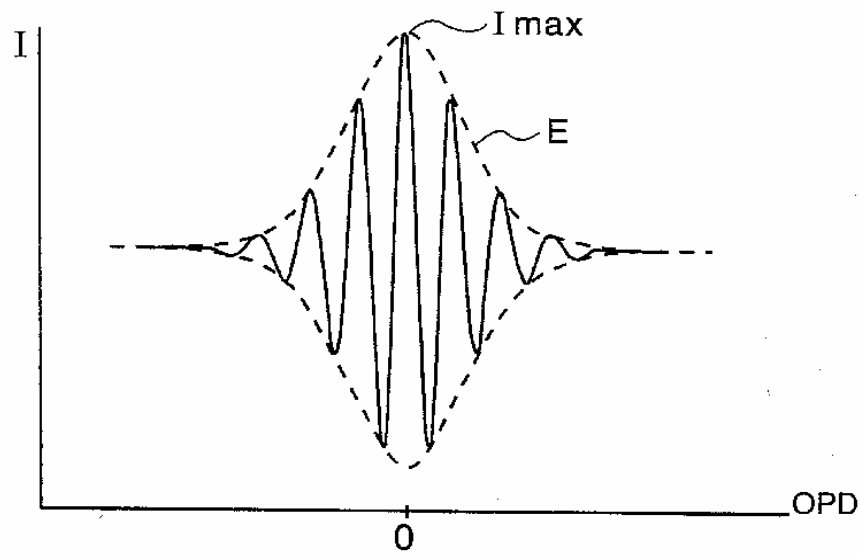


圖 2.3 常見白光光源光程差與強度關係

在論文[9]中提到用此法所量測的結果如圖(2.4)所示，此為化學蝕刻的矽樣品表面輪廓，利用步進 256 次，每步移動 14nm，得到步階高度高度為 3.015 μm 。利用這個方法其優點是沒有傳統相位重建發生誤判的問題，可以量測更深的步階深度，且程式化簡單，因為只要找出每一像素的最大強度即可。缺點是所花費時間與步進間隔有關，步進間隔大，所花時間較少，但精準度差；步進間隔小，所花時間較久，但精準度高。然而這樣量測的縱向解析度沒有相移法縱向解析度好，原因是所偵測到的最大強度可能不是真正的最大強度值位置，此外 CCD 尺度有其極限，峰值強度可能會超過 CCD 本身的限制，造成 CCD 飽和，因此造成些許誤差。

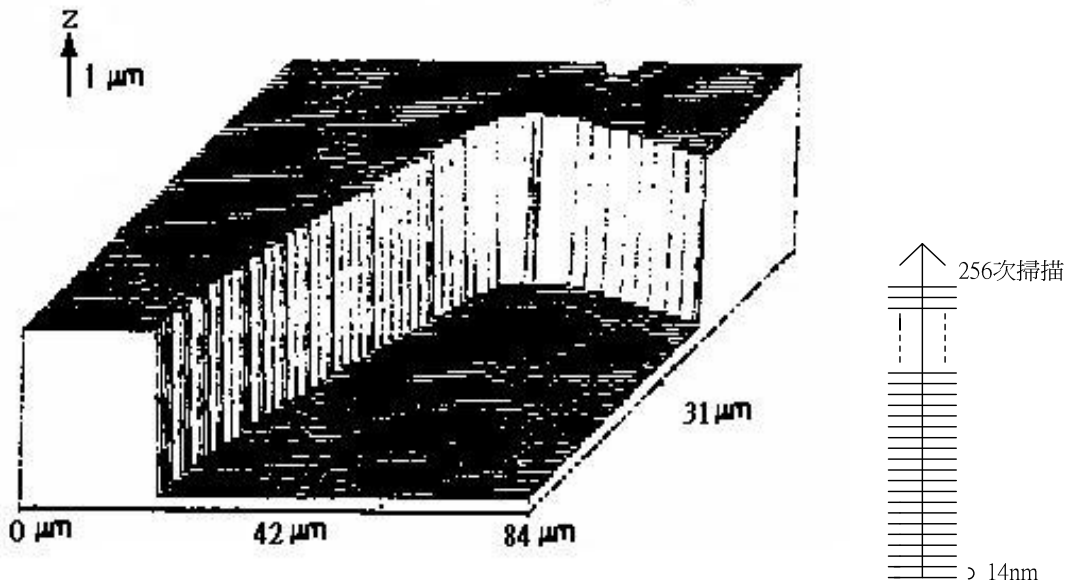


圖 2.4 化學蝕刻的矽樣品表面輪廓圖

2.3 相移干涉術

在光學檢測方面，干涉儀的應用已經是非常成熟的技術，然而在傳統干涉儀中，求出參考光與物體光間相位差分佈的方法為靜態干涉條紋(static interferograms)分析技術。此方法有其缺點，判讀相當費時複雜，尤其是對於不規則的干涉圖形，判讀困難，無法提供複雜物體光的相位差分佈。因此在論文中採用相移干涉術(Phase Shifting Interferometry,PSI)改進傳統的靜態干涉條紋分析技術，以彌補對於複雜微結構表面量測的不足。

相移干涉術是一種干涉條紋分析技術，早在 1966 年就提出相移干涉術的基本概念[4]，近二十年來因光電與計算機技術的發展，使得此技術得以實現。基本原理是經由相移技術，改變兩干涉光束的相對相

位差，通過對干涉圖形中同一點在不同相移量下的光強度變化，求解初始相位差。如圖(2.5)[11]，干涉儀的參考面向前推移。xy 平面干涉圖形隨之產生光強度變化，利用 CCD 記錄連續變化干涉圖形，每一個 CCD 上的像素位置代表被測物體表面的空間取樣，因此求出每一位置的相位差，就知道物體表面的形狀分佈。

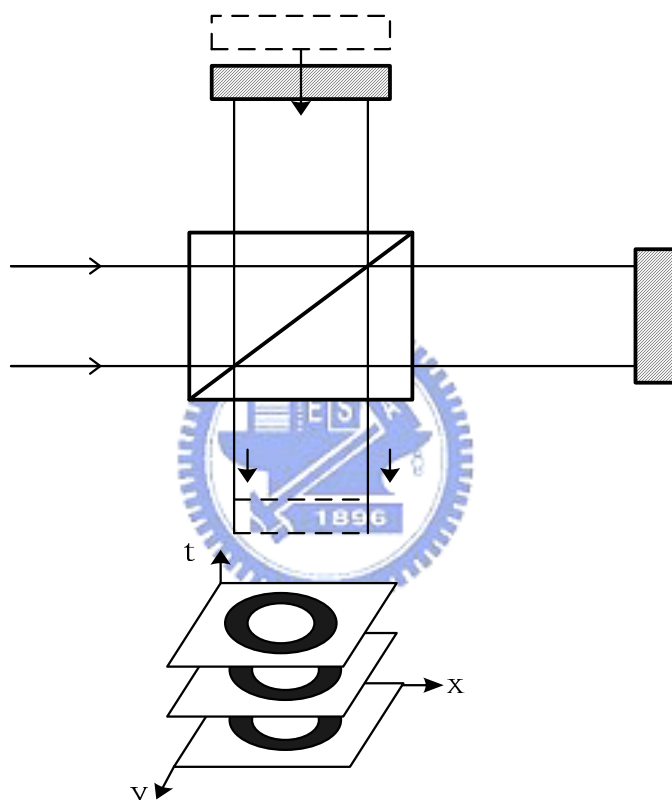


圖 2.5 相移干涉術基本原理示意圖

2.3.1 推動相移的方法[12]

控制經過參考面和待測面兩道光波的相對相移量有多種方法。最直接的方法是利用電壓控制 PZT(piezo-electric transducer)的伸長量來改變參考面或待測面位置，形成相移。傾斜玻璃平板、移動繞射光

柵、半波片(half-wave plate)或波片組都可以造成干涉的光束之間相差的改變，如圖(2.6)所示。此外也可以利用電光晶體和聲光晶體。

依(2.12)式可知，在白光干涉儀中，如果產生相移是利用 PZT 改變 z 的距離，它不僅僅改變 $\phi(z)$ 相位項，也改變 $g(z)$ 的值，代表峰值強度會隨 PZT 移動而改變，所以傳統相移演算法必須利用同調函數的局部線性(coherence function as locally linear)假設來修正，這樣才能適用於白光相移干涉術中。關於此修正法已不在本論文討論範圍，請參考 [8][13]。因此採用旋轉波片，並利用波片組合來產生相移，我們稱之為消色差相移法，利用此法可以避免峰值強度隨光程差改變而飄移的問題。

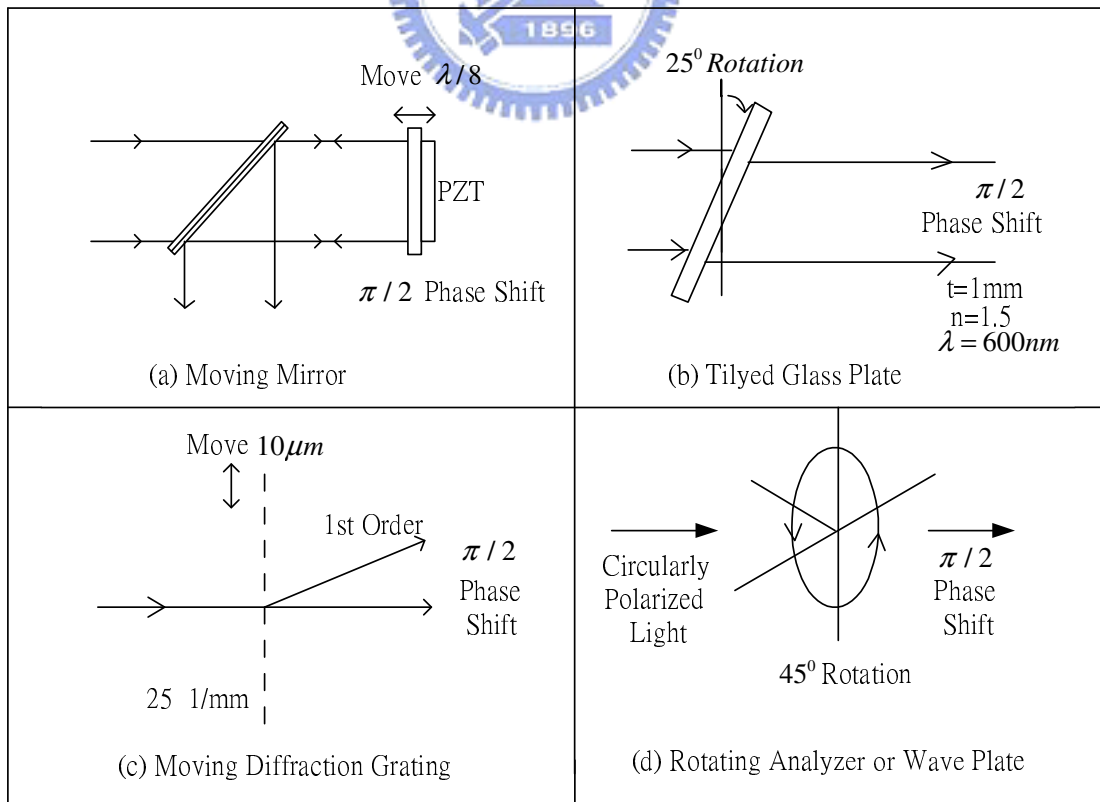



圖 2.6 干涉儀中四種相移的方法

2.4 消色差相移法[14][15][16][17]

利用偏極波片組的旋轉來產生相位改變。在相移過程中，要求對於白光範圍所有波長的光，相移改變量幾乎相等，故稱為消色差相移法(achromatic phase shifting)。對於寬波帶範圍的光源我們選擇消色差相移法，主要是利用偏極波片組合，藉由旋轉波片或線偏極片來產生消色差相移。我們分別把波片組放在系統輸出端(像空間)及輸入端(物空間)來討論，方法說明如下，並將利用 Jones matrix 來計算。

2.4.1 輸出端消色差相移法[15][16]



架構如圖(2.7)所示，經過實驗架構的安排，入射光為兩互相正交的偏極態，一個為水平偏極(方位角 0 度)、一個為垂直偏極(方位角 90 度)。波片組的安排是先通過半波片夾方位角 15 度，再通過四分之一波片夾方位角 75 度，波片的設計是針於平均波長設計($\lambda=550\text{nm}$)，最後通過線偏極片夾 θ 角。

線偏極片是可旋轉的，可得到不同的相移量，理論上水平偏極光經過半波片夾 15 度及四分之一波片夾 75 度形成右旋圓偏極光；垂直偏極光經過半波片夾 15 度及四分之一波片夾 75 度形成左旋圓偏極光，最後經過線偏極片取分量進行干涉。當旋轉線偏極片角度時，會造成相位差改變，形成相移效果，這也是消色差相移技術所在，後面

將利用理論推導來說明。

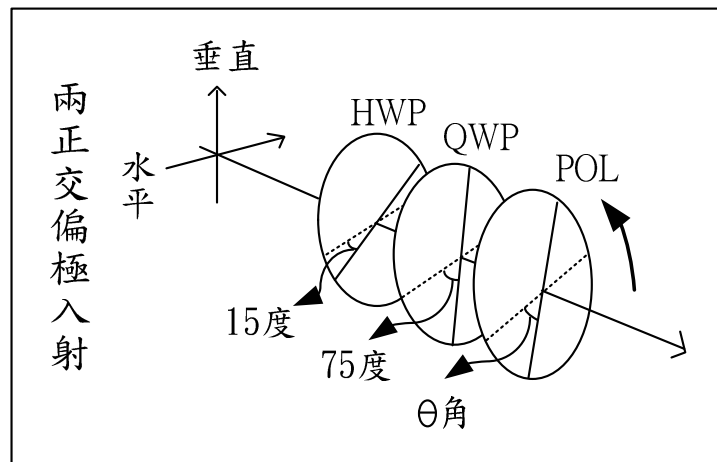


圖 2.7 輸出端消色差波片組架構圖

2.4.2 輸入端消色差相移法[17]

架構如圖(2.8)所示，經過實驗架構的安排，入射消色差波片組前是水平偏極態(方位角 0 度)。波片組的安排是先通過半波片夾 θ 角，再通過四分之一波片夾方位角 45 度，波片的設計同樣是針於平均波長設計($\lambda=550\text{nm}$)。

半波片是可旋轉的，可得到不同的相移量，理論上水平偏極光經過半波片夾 θ 角及四分之一波片夾 45 度形成右旋圓偏極光，再經寬帶偏極分光鏡分光，最後進入 CCD 成像之前，會再通過線偏極片取分量進行干涉(詳細說明及圖形請見第三章)。當旋轉半波片角度時，會造成相位差改變，形成相移效果，這也是消色差相移技術所在，後面將利用理論推導來說明。

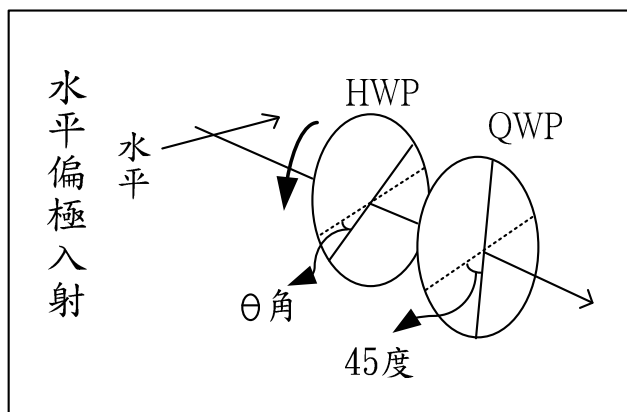


圖 2.8 輸入端消色差波片組架構圖

2.5 波片組 Jones 矩陣計算[18][19]

2.5.1 Jones 向量

一個偏極態通常可以用兩個基本向量來描述，此二維向量稱為 Jones 向量。在卡氏座標(Cartesian coordinate)內，其 X 軸和 Y 軸假設為任意方向，一頻率為 ω 並延著正 z 方向行進的光波，可將其電場分解為 x 方向分量及 y 方向分量，如(2.13)式所示：

$$\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_x e^{-j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \delta_x)} + \vec{j}E_y e^{-j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \delta_y)} \quad (2.13)$$

可進一步將其寫成二維矩陣表示：

$$\vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} E_x e^{-j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \delta_x)} \\ E_y e^{-j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \delta_y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x e^{-j\delta_x} \\ E_y e^{-j\delta_y} \end{bmatrix} e^{-j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z)} \quad (2.14)$$

若相同部份省略，則簡化電場可以表示成：

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x e^{-j\delta_x} \\ E_y e^{-j\delta_y} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

此即為 Jones 向量。表(2.1)列出一些常見偏極態 Jones 向量的表示式。

表 2.1 一些偏極態之 Jones 向量表示式

光偏極態	Jones 向量
x 方向的線偏振光	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
y 方向的線偏振光	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
與 X 軸夾 θ 角的線偏振光	$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$
右旋圓偏極光	$\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$
左旋圓偏極光	$\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$
右旋正橢圓偏極光	$\frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{bmatrix} E_x \\ -jE_y \end{bmatrix}$
左旋正橢圓偏極光	$\frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{bmatrix} E_x \\ jE_y \end{bmatrix}$

※依 “Principles of optics” Max Born&Emil Wolf 定義

2.5.2 Jones 矩陣

在不考慮光學元件與光之間的相互作用，僅考慮其對偏極態所造成的影響，一般可用一 2x2 階的矩陣(Jones matrix)來表示此光學元件的作用。數學表示為下式：

$$\begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

其中 $\begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{bmatrix}$ 表示離開光學元件後之偏極態， $\begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}$ 表示入射此光學元件前之偏極態，矩陣 T 即為 Jones 矩陣，表(2.2)列出常見的光學元件之 Jones 矩陣表示式。

表 2.2 常用光學元件之 Jones 矩陣表示式

光學元件	Jones 矩陣
偏極片：穿透軸為 X 軸	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
偏極片：穿透軸為 Y 軸	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
偏極片：穿透軸與 X 軸夾 θ 角	$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
相位延遲片 (phase retarder): 快軸與 X 軸夾 θ 角， 快慢軸相位延遲 δ 角	$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta + e^{-j\delta} \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta}) \\ \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta}) & \sin^2 \theta + e^{-j\delta} \cos^2 \theta \end{bmatrix}$
1/2 波片 (HWP)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
1/4 波片 (QWP) 快軸與 X 軸重合	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$
1/4 波片 (QWP) 快軸與 Y 軸重合	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$

2.5.3 輸出端消色差波片組 Jones 矩陣計算[15][16]

輸出端消色差波片組是利用經過數個波片與線偏極片來產生相移，從而求得相位，其中相位與振幅可以利用 Jones 矩陣計算，由表(2.1)與表(2.2)可知一些偏極態的 Jones 矩陣。一般水平線偏極電場表示成：

$$\vec{E}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

垂直線偏極電場表示成：

$$\vec{E}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

偏極片旋轉方位角 θ 的 Jones 矩陣， $R(\theta)$ 是單位矩陣，可表示成：

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

相位延遲波片的 Jones 矩陣，可表示成：

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + e^{-j\delta} \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta}) \\ \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta}) & e^{-j\delta} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

所以半波片 ($\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_o}{2}$) 延遲矩陣可表示成：

$$T_\pi = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + e^{-j\delta_1} \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta_1}) \\ \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta_1}) & e^{-j\delta_1} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

同理四分之一波片 ($\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_o}{4}$) 矩陣可表示成：

$$T_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + e^{-j\delta_2} \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta_2}) \\ \cos \theta \sin \theta (1 - e^{-j\delta_2}) & e^{-j\delta_2} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

所以利用上面矩陣計算水平偏極態通過半波片與四分之一波片後的偏

極態。所得結果如下：

$$\begin{aligned}\overline{E}_p' &= \begin{pmatrix} E_{px} \\ E_{py} \end{pmatrix} = e^{j(3\pi/4)} \begin{pmatrix} T_{\theta_2=75^\circ, \delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda_0}{4}} \\ T_{\theta_1=15^\circ, \delta_1=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda_0}{2}} \end{pmatrix} \overline{E}_p \\ &= e^{j(3\pi/4)} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_2 + e^{-j\delta_2} \sin^2 \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_2 (1 - e^{-j\delta_2}) \\ \cos \theta_2 \sin \theta_2 (1 - e^{-j\delta_2}) & e^{-j\delta_2} \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_1 + e^{-j\delta_1} \sin^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 (1 - e^{-j\delta_1}) \\ \cos \theta_1 \sin \theta_1 (1 - e^{-j\delta_1}) & e^{-j\delta_1} \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中對於波長 550nm， $\delta_1 = \pi$ 、 $\delta_2 = \pi/2$ ，最後結果如下：

$$\overline{E}_p' = \begin{pmatrix} 0.3536 + j0.6124 \\ -0.6124 + j0.3536 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

把複數轉換成振幅與相位關係

$$\overline{E}_p' = \begin{pmatrix} 0.7071 \exp(j\pi/3) \\ 0.7071 \exp(j5\pi/6) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

可以看出慢軸領先快軸相位 90 度，振幅相等，是一個右旋圓偏極光。

類推可得，當一垂直線偏極入射，經過相同波片組後的偏極態為左旋

圓偏極：

$$\begin{aligned}\overline{E}_s' &= \begin{pmatrix} E_{sx} \\ E_{sy} \end{pmatrix} = e^{-j(3\pi/4)} \begin{pmatrix} T_{\theta_2=75^\circ, \delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda_0}{4}} \\ T_{\theta_1=15^\circ, \delta_1=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda_0}{2}} \end{pmatrix} \overline{E}_s \\ &= e^{-j(3\pi/4)} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_2 + e^{-j\delta_2} \sin^2 \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_2 (1 - e^{-j\delta_2}) \\ \cos \theta_2 \sin \theta_2 (1 - e^{-j\delta_2}) & e^{-j\delta_2} \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_1 + e^{-j\delta_1} \sin^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 (1 - e^{-j\delta_1}) \\ \cos \theta_1 \sin \theta_1 (1 - e^{-j\delta_1}) & e^{-j\delta_1} \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.3536 + j0.6124 \\ 0.6124 + j0.3536 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7071 \exp(j2\pi/3) \\ 0.7071 \exp(j\pi/6) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

可以看出快軸領先慢軸 90 度，所以是一個左旋圓偏極。

繼續討論水平線偏極在通過四分之一波片後的結果是右旋圓偏極

可改寫成下列表示式：

$$\begin{aligned} \vec{E}_p' &= \begin{pmatrix} E_{px} \\ E_{py} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3536 + j0.6124 \\ -0.6124 + j0.3536 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.250 \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) + 0.750 \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) + j0.866 \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \\ 0.433 \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) - 0.433 \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) + j0.500 \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.26) \end{aligned}$$

同理垂直線偏極在通過四分之一波片後的結果是左旋圓偏極可改寫成

下列表示式：

$$\begin{aligned} \vec{E}_s' &= \begin{pmatrix} E_{sx} \\ E_{sy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3536 + j0.6124 \\ 0.6124 + j0.3536 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.250 \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) - 0.750 \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) + j0.866 \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \\ -0.433 \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) + 0.433 \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) + j0.500 \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.27) \end{aligned}$$

其中 δ_1 是任何波長對半波片的延遲相位， δ_2 是任何波長對四分之一波片的延遲相位，對於中心波長 $\lambda_0 = 550\text{nm}$ ， $\delta_1 = 180^\circ$ 和 $\delta_2 = 90^\circ$ 。一般使用雲母(mica)波片設計，各波長對波片造成的振幅 E_x 、 E_y 和相位差關係，可利用上面方程式計算，結果列於表(2.3)。

表 2.3 各波長輸出振幅與相位差

波長(nm)	振幅 E_x	振幅 E_y	E_x 和 E_y 相位差
450	0.724	0.687	87.7
550	0.707	0.707	90.0
700	0.739	0.675	88.3

振幅大致一樣，相位差對所有波長接近 90 度，顯示了這樣的組合達到

消色差圓偏極結果。將方程式(2.26)令為：

$$\alpha_1 = 0.250 \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right), \quad \alpha_2 = 0.750 \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right), \quad \alpha_3 = 0.866 \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right),$$

$$\alpha_4 = 0.433 \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right), \quad \alpha_5 = 0.433 \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right), \quad \alpha_6 = 0.500 \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)$$

則式(2.26)改寫成：

$$\vec{E}_p' = \begin{pmatrix} E_{px} \\ E_{py} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + j\alpha_3 \\ \alpha_4 - \alpha_5 + j\alpha_6 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

0° 線偏入射通過夾 θ 角線偏極片後的電場分佈為：

$$\vec{E}_{\theta p}' = \begin{pmatrix} E_{px} \\ E_{py} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + j\alpha_3 \\ \alpha_4 - \alpha_5 + j\alpha_6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \theta + (\alpha_4 - \alpha_5) \sin \theta + j(\alpha_3 \cos \theta + \alpha_6 \sin \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

同理， 90° 線偏入射通過夾 θ 角線偏極片後的電場分佈為：

$$\vec{E}_{\theta s}'' = \begin{pmatrix} E_{sx} \\ E_{sy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 + j\alpha_3 \\ -\alpha_4 + \alpha_5 + j\alpha_6 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c} 0 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \theta + (\alpha_5 - \alpha_4) \cos \theta + j(\alpha_6 \cos \theta - \alpha_3 \sin \theta) \end{array} \right) \quad (2.30)$$

分別計算 0° 線偏入射與 90° 線偏入射後的相位，分別以 ϕ_1 和 ϕ_2 表示：

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_3 \cos \theta + \alpha_6 \sin \theta}{(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \theta + (\alpha_4 - \alpha_5) \sin \theta} \right) \quad (2.31)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_6 \cos \theta - \alpha_3 \sin \theta}{(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \theta + (\alpha_5 - \alpha_4) \cos \theta} \right) \quad (2.32)$$

表(2.4)、(2.5)分別為水平線偏入射與垂直線偏入射在不同 θ 角度設定時的相位 ϕ ，其中 ψ 為對應於偏極片轉角所產生的相移，分別列出波長選擇450nm、550nm、700nm和角度 θ 為0、45、60、90、-45、-60、-90度。

表 2.4 各波長對於水平線偏入射，旋轉偏極片角度與相位關係

水平線偏極入射						
θ	$\lambda = 450nm$		$\lambda = 550nm$		$\lambda = 700nm$	
	ϕ	ψ	ϕ	ψ	ϕ	ψ
0	72.2		60.0		43.6	
45	116.9	44.7	105.0	45.0	87.1	43.5
60	132.7	60.5	120.0	60.0	102.8	59.2
90	164.5	92.3	150.0	90.0	135.3	91.7
-45	29.7	-42.5	15.0	-45.0	1.7	-41.9
-60	15.1	-57.1	0.0	-60.0	346.9	-56.7
-90	344.5	-87.7	330.0	-90.0	315.3	-88.3

表 2.5 各波長對於垂直線偏入射，旋轉偏極片角度與相位關係

垂直線偏極入射						
θ	$\lambda = 450nm$		$\lambda = 550nm$		$\lambda = 700nm$	
	ϕ	ψ	ϕ	ψ	ϕ	ψ
0	15.5		30.0		44.7	
45	330.3	-45.2	345.0	-45.0	358.3	-46.4
60	316.0	-59.5	330.0	-60.0	344.0	-60.6
90	287.8	-87.7	300.0	-90.0	316.4	-88.3
-45	63.1	47.6	75.0	45.0	92.9	48.3
-60	78.5	60.5	90.0	60.0	107.9	59.2
-90	107.8	92.5	120.0	90.0	136.4	91.7



相位差 ϕ_0 可以定義如下

$$\phi_0 = \phi_1 - \phi_2 \quad (2.33)$$

可以看出相位差是角度 θ 的函數，隨線偏極片旋轉而改變。同時相移會反映在測試面與參考面光程差所造成的相位差上。表(2.6)列出固定 $\theta=0$ 度求出不同波長對應的相位差 ϕ_0 ，再旋轉 $\theta=45、90、135$ 度觀察其結果。表(2.7)是不同波長下，從偏極片 $\theta=0$ 度再依續旋轉 45 度的相移改變量。

表 2.6 各波長在不同角度 θ 的相位差

波長(nm)	相位差 ϕ_0 (單位: 弧度)			
	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
450	56.7	146.6	236.7	326.6
550	30.0	120.0	210.0	300.0
700	-1.1	88.8	178.9	268.8

表 2.7 各波長在不同角度 θ 的相移改變量

波長(nm)	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
450	89.9	180.0	269.9
550	90.0	180.0	270.0
700	89.9	180.0	269.9

由表(2.7)的結果可以證實這種架構的波片組確實有消色差相移的效果，對於所有波長相移的改變量幾乎相等。同時可以看出旋轉線偏極片 θ 時，可以得到 2θ 的相移量。所以相移技術主要是當旋轉線偏極片 θ 時，水平線偏入射光的相移約 θ 角，垂直線偏入射光的相移約 $-\theta$ 角，因此可得到相位移動約 2θ 的改變。這也說明白光干涉相移術選擇消色差相移時，不改變光程差，不會造成同調函數 $g(z)$ 的改變，旋轉線偏極片，便可達到相移的結果，對光源中不同波長有幾乎相同相移，可達到量測目的。

2.5.4 輸入端消色差波片組 Jones 矩陣計算[17]

輸入端消色差波片組是利用經過一個半波片及一個四分之一波片來產生相移，從而求得相位，其中相位與振幅可以如同輸出端消色差波片組，利用 Jones 矩陣計算。為了計算方便在入射波片組前先利用偏極片將入射光調制成水平線偏極，矩陣表示式如同(2.17)式。因此水平線偏極通過半波片((2.21)式)再通過四分之一波片((2.22)式)可寫成：

$$\begin{aligned}\overline{E}_p' &= \begin{pmatrix} E_{px} \\ E_{py} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\theta_2=45^\circ, \delta_2=\frac{2\pi\lambda_0}{\lambda}\frac{1}{4}} \\ T_{\theta_1=\theta, \delta_1=\frac{2\pi\lambda_0}{\lambda}\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{\theta_1=\theta, \delta_1=\frac{2\pi\lambda_0}{\lambda}\frac{1}{2}} \\ T_{\theta_2=45^\circ, \delta_2=\frac{2\pi\lambda_0}{\lambda}\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \overline{E}_p \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_2 + e^{-j\delta_2} \sin^2 \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_2 (1 - e^{-j\delta_2}) \\ \cos \theta_2 \sin \theta_2 (1 - e^{-j\delta_2}) & e^{-j\delta_2} \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_1 + e^{-j\delta_1} \sin^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 (1 - e^{-j\delta_1}) \\ \cos \theta_1 \sin \theta_1 (1 - e^{-j\delta_1}) & e^{-j\delta_1} \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 δ_1 是任何波長對半波片的延遲相位， δ_2 是任何波長對四分之一波片的延遲相位，對於中心波長 $\lambda_0 = 550\text{nm}$ ， $\delta_1 = \pi$ 和 $\delta_2 = \pi/2$ ，一般使用雲母(mica)波片設計。最後結果如下：

$$\overline{E}_p' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\cos 2\theta + \sin 2\theta) + j(\sin 2\theta - \cos 2\theta) \\ (\cos 2\theta + \sin 2\theta) + j(\cos 2\theta - \sin 2\theta) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

把複數轉換成振幅與相位關係

$$\overline{E}_p' = \begin{pmatrix} 0.7071 \exp j(2\theta - \pi/4) \\ 0.7071 \exp j(\pi/4 - 2\theta) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

可看出振幅相等且出射波片組的偏極態隨半波片旋轉而改變。當 $\theta = 0$ 、22.5、45、67.5、90 度時，將分別為右旋圓偏極、45 度線偏極、左旋圓偏極、-45 度線偏極、右旋圓偏極，以圖形來表示如圖(2.9)。

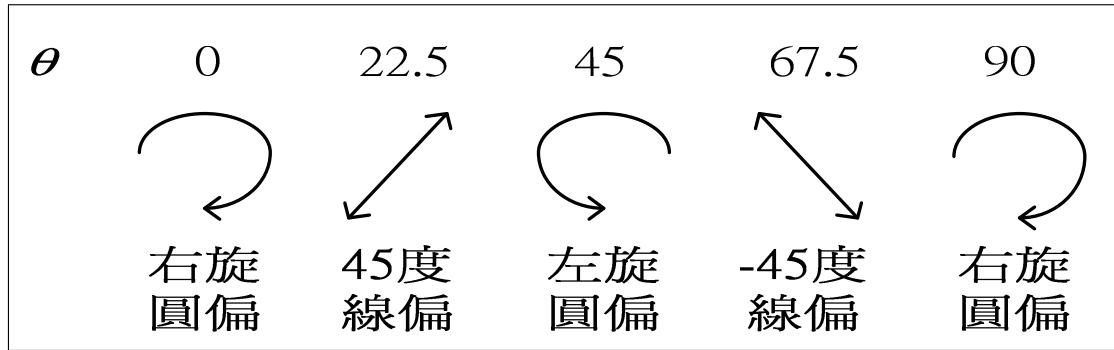


圖 2.9 旋轉半波片 θ 角與通過波片組之偏極關係圖

各波長對波片造成的振幅 E_x 、 E_y 和半波片 θ 角關係，可利用式(2.35)計算，結果列於表(2.8)。

表 2.8 各波長輸出振幅與半波片 θ 角關係

λ	$\theta = 0^\circ$		$\theta = 22.5^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 67.5^\circ$	
	E_x	E_y	E_x	E_y	E_x	E_y	E_x	E_y
450nm	0.57	0.82	0.97	0.55	0.97	0.26	0.83	0.55
550nm	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71
700nm	0.81	0.58	0.56	0.83	0.28	0.96	0.56	0.83

繼續討論水平線偏極通過波片組調制後，再經過偏極分光鏡分成水平與垂直偏極的兩束光，在進入 CCD 成像前，再經過夾 45 度線偏極片形成干涉，其中水平偏極光束可寫成下列表示式：

$$\overline{E}_{pp}' = \begin{pmatrix} 0.7071 \exp j(2\theta - \pi/4) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

水平偏極光束通過夾 45 度線偏極片後的電場分佈為：

$$\begin{aligned} \overline{E}_{\theta pp}' &= \begin{pmatrix} E_{ppx} \\ E_{ppy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7071 \exp j(2\theta - \pi/4) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(2\theta - \pi/4) + j \sin(2\theta - \pi/4) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

同理，垂直偏極光束通過夾 45 度線偏極片後的電場分佈為：

$$\begin{aligned} \overline{E}_{\theta sp}' &= \begin{pmatrix} E_{spx} \\ E_{spsy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7071 \exp j(\pi/4 - 2\theta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\pi/4 - 2\theta) + j \sin(\pi/4 - 2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

分別計算水平偏極光束入射與垂直偏極光束入射後的相位，分別以 ϕ_3 和 ϕ_4 表示：

$$\phi_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(2\theta - \pi/4)}{\cos(2\theta - \pi/4)} \right) \quad (2.39)$$

$$\phi_4 = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\pi/4 - 2\theta)}{\cos(\pi/4 - 2\theta)} \right) \quad (2.40)$$

相位差 ϕ_0' 可以定義如下

$$\phi_0' = \phi_3 - \phi_4 \quad (2.41)$$

可以看出相位差是角度 θ 的函數，隨線偏極片旋轉而改變。同時相移會反映在測試面與參考面光程差所造成的相位差上。表(2.9)列出固定 $\theta=0$ 度求出不同波長對應的相位差 ϕ_0' ，再旋轉 $\theta=22.5、45、67.5$ 度

觀察其結果。表(2.10)是不同波長下，從偏極片 $\theta=0$ 度再依續旋轉 22.5 度的相移改變量。

表 2.9 各波長在不同角度 θ 的相位差

波長(nm)	相位差 ϕ_0' (單位:弧度)			
	$\theta=0^\circ$	$\theta=22.5^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=67.5^\circ$
450	90.0	16.7	-90.0	-196.7
550	90.0	0	-90.0	90.0
700	90.0	15.6	-90.0	-195.6

表 2.10 各波長在不同角度 θ 的相移改變量

波長(nm)	$\theta=22.5^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=67.5^\circ$
450	-73.3	-180.0	-286.7
550	-90.0	-180.0	-270.0
700	-74.4	-180.0	-285.6

由表(2.10)的結果可看出旋轉線偏極片 θ 時，可以得到 4θ 的相移量。所以相移技術主要是當旋轉半波片 θ 時，分光鏡分光後的水平偏極光束相移約 2θ 角，分光鏡分光後的垂直偏極光束相移約 -2θ 角，因此可得到相位移動約 4θ 的改變。同時這種架構的波片組與輸出端架構相比，對於非中心波長相移的偏差較大，顯示其消色差相移能力較差。

2.6 消色差相移演算法

相移干涉術的目的即在求解未知數 $\Delta\phi$ ，進而得到表面高度分布。在本論文中相移是利用旋轉線偏極片 θ 得到 2θ 的相移量或是旋轉半波片 θ 得到 4θ 的相移量。因此從文獻中[20]找出幾種相移用演算法，希望能找出比較適合本套系統的相移演算法。

由(2.12)式，當兩束白光產生干涉，產生干涉圖案的強度可以寫成：

$$I(z, \delta\phi) = I_0(1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi(z) + \delta\phi)) \quad (2.42)$$

其中 $I_0 = I_1 + I_2$ 是背景光， $V = 2(I_1 I_2)^{1/2} / (I_1 + I_2)$ ， $g(z) = \exp[-(2\pi z \Delta\sigma)^2]$ ，又因為消色差相移術，相移時並沒有改變光程差，也就是 z 的位置是個固定數，因此 $Vg(z)$ 可當成一個未知數， $\Delta\phi(z)$ 為相位差項， $\delta\phi$ 是調制相位項，為已知外加項(旋轉 θ 來決定)。所以 $\Delta\phi(z)$ 是可以解的，但必須至少有三個以上的方程式。通常使用的相移演算法有三步演算法、四步演算法、五步演算法等。

(1) 三步演算法(three-step algorithms)

以 CCD 擷取三個強度值 I_1 、 I_2 、 I_3 ，通常選擇兩種角度相移，一種是相移 90 度，演算方程式可表示如下式：

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 \left[1 + Vg(z) \cos\left(\Delta\phi + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ I_2 &= I_0 \left[1 + Vg(z) \cos\left(\Delta\phi + \frac{3\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$I_3 = I_0 \left[1 + Vg(z) \cos\left(\Delta\phi + \frac{5\pi}{4}\right) \right]$$

可得

$$\Delta\phi = \tan^{-1}\left(\frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2}\right) \quad (2.44)$$

另一種是相移 120 度，演算方程式可表示如下式：

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 \left[1 + Vg(z) \cos\left(\Delta\phi - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ I_2 &= I_0 \left[1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi) \right] \\ I_3 &= I_0 \left[1 + Vg(z) \cos\left(\Delta\phi + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

可得

$$\Delta\phi = \tan^{-1}\left[\sqrt{3}\left(\frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}\right)\right] \quad (2.46)$$

由此可推得一反正切函數，代表相位與光強訊號的關係。在 $\delta\phi = \pi/2$ 時，反正切函數對 $\delta\phi$ 的一次微分會有最小值，即對 $\delta\phi$ 值的變異最不敏感，因此選擇每次相移 90 度。三步演算法雖然處理的量少且簡單，但是由於是唯一解所以引入的誤差可能相當敏感，因此通常不被採用。

(2) 四步演算法(four-step algorithms)

以 CCD 擷取四個強度值 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 ，選擇 90 度相移，演算方程式可表示如下式：

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 \left[1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi) \right] \\ I_2 &= I_0 \left[1 + Vg(z) \cos\left(\Delta\phi + \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$I_3 = I_0 [1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi + \pi)] \quad (2.47)$$

$$I_4 = I_0 \left[1 + Vg(z) \cos\left(\Delta\phi + \frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

可得

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left[\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right] \quad (2.48)$$

以此方法求得的相位與三步演算法一樣易受外界雜訊的干擾。

(3) 五步演算法(five-step algorithms)：Hariharan 演算法[21]

以 CCD 擷取五個強度值 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 、 I_5 ，選擇 90 度相移，演

算方程式可表示如下式：

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 [1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi - \pi)] \\ I_2 &= I_0 [1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi - \pi/2)] \\ I_3 &= I_0 [1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi)] \\ I_4 &= I_0 [1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi + \pi/2)] \\ I_5 &= I_0 [1 + Vg(z) \cos(\Delta\phi + \pi)] \end{aligned} \quad (2.49)$$

可得

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \frac{2(I_2 - I_4)}{(2I_3 - I_1 - I_5)} \quad (2.50)$$

如果相移誤差為 ε ，造成實際相移量為 $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ ，假設量測得到的相位是

$\phi'(x, y) = \Delta\phi(x, y) + \delta\phi(x, y)$ ，在 ε 很小的情況下，可導出

$$\tan[\phi'(x, y)] \cong \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \tan[\Delta\phi(x, y)] \quad (2.51)$$

因此造成相位的誤差量為：

$$\delta\phi(x, y) = \phi'(x, y) - \Delta\phi(x, y) \cong \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right) \sin[2\Delta\phi(x, y)] \quad (2.52)$$

如果相移誤差為 2° (即每次相移量為 88° 而非 90°)，計算得到的初始相位誤差為 0.02° ，相同的相移誤差量使用三步相移演算法求得的初始相位誤差為 1° 左右。

在此也以五步相移演算法為例說明相移干涉術能免除 CCD 個別像素光敏度不同和固定雜訊的影響。假設像素光敏度分佈為 $s(x, y)$ ，固定雜訊分佈為 $n(x, y)$ ，則原先的干涉條紋強度分佈變成：

$$I(x, y) \rightarrow s(x, y)I(x, y) + n(x, y) \quad (2.53)$$

代入(2.50)式後可得：

$$\phi'(x, y) = \tan^{-1} \left[\frac{2(sI_2 + n - sI_4 - n)}{2sI_3 + 2n - sI_1 - n - sI_5 - n} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_1 - I_5} \right] = \Delta\phi(x, y) \quad (2.54)$$

即使 $s(x, y)$ 、 $n(x, y)$ 是位置的函數，經由相移演算法可做到點對點雜訊的消除。

所以一般選用五步相移演算法，在線性相移機構中，較不受誤差影響；同時當相移機構有非線性現象時，對相位的誤差影響最小，這也是五步演算法優勢所在。由於相移干涉術相當容易受周遭環境因素影響而產生誤差，如；振動與空氣擾動。其他誤差因素：相移機構的誤差、光偵測器的非線性及對光敏感程度是否相同、偵測訊號的量子

化效應、及螢光幕或其他雜散光訊號影響等等。所以相移技術一般原則是相移步數越多，還原相位就會越準確。

2.7 相位重建技術[20]

相位重建(phase unwrapping)就是假設在取樣密度高於取樣定理規範下，相鄰像素的相位差一定小於 $\frac{\pi}{2}$ ，依此原則調整所有的取樣點，使初始相位還原成待測波面的連續分佈。在(2.50)式由反正切函數求解初始相位時，初始相位被壓縮(wrapped)在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 或 $[0, \pi]$ ，因此必須先擴展初始相位的值域範圍到 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ ，再進行相位重建。

經過值域擴展後，相位仍被壓縮在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 內，需藉由相位重建過程疊加相位才能恢復相位連續分佈。

如果取樣密度足夠高，相鄰取樣點間的相位差一定小於 π ，因此從任意點出發，對相鄰點做判斷並以 2π 為單位調整相鄰點相位使兩者落差小於 π ，循任意路徑重複上述動作，一直到彼此之間的相位差小於 π 。用數學式子可表示成：

$$\phi'_{n+1} = \phi_{n+1} + \text{round}\left[\frac{\phi_n - \phi_{n+1}}{2\pi}\right] \times 2\pi \quad (2.55)$$

在此， n 與 $n+1$ 是依重建路徑順序而給定的編號， $\text{round}[\]$ 則是對裡面數字做四捨五入的算符。依循路徑調整相位，可看成累加相位的動作，原來被侷限在 2π 的相位 ϕ_{raw} 和重建後的相位 ϕ_{final} 之間具有下列關係：

$$\phi_{final} = \phi_{raw} + 2m\pi \quad m \in Z \quad (2.56)$$

所以相位重建也可看成判定相位級數 m 的動作，值得注意的是 m 並不是一個絕對值，它只是相對的級數值，由整體相位分佈決定，所以當整體同加一定值也是可以的。在此，我們關心的僅是點與點之間的落差，並非絕對高度。

2.8 相位重建技術—細胞自動機械法[7][22][23]

選擇使用一種路徑獨立的相位重建法：細胞自動機械法(cellular automata)。細胞自動機械法大致分為兩個步驟：局部迭代(local iteration)以及全域迭代(global iteration)。局部迭代是根據每個點及其相鄰點相位差來做步階判斷。在此，相位差以 π 為一個級數差單位，即 $fix\left[\frac{p(x,y)-p(x-i,y-j)}{\pi}\right]$ ，當落差超過表示需補上一個級數，使最終相位分佈連續。利用(2.57)式來表示：

$$k = \sum_{ij} fix\left[\frac{p(x,y)-p(x-i,y-j)}{\pi}\right] \quad (2.57)$$

$$\begin{cases} i = 0, j = \pm 1 \\ i = \pm 1, j = \pm 1 \text{ or } 0 \end{cases}$$

其中 $fix[]$ 是「無條件捨去」的算符， $x-i$ 、 $y-j$ 是相鄰點座標。

由八項（邊緣處可能只有五個或三個相鄰點）級數差相加決定中心點如何修正：若級數差總和為正，中心點加 2π ；若為負值，則中心點減 2π ；如果級數差有正有負而相加為 0，則中心點加 2π ；如果個別

級數差皆為 0，則中心點不需修正。以數學來表示如下：

$$p(x, y) = p(x, y) - L \quad (2.58)$$

$$L = 2\pi \times \text{sign}(k) \quad (2.59)$$

(2.59)式表示局部迭代每一點修正的量，*sign* 指令是計算正負的算符，若 *k* 為正，*sign(k)* 是 1；若 *k* 是負的，*sign(k)* 等於 -1；*k* 為 0，*sign(k)* 為 0。

因此細胞自動機械法是比較周圍各點與中央的落差來決定如何修正中心點，是一種比較客觀的相位重建方法，如圖(2.10)。但若部分數據點或區域的雜訊干擾過於嚴重，可能造成步階判斷錯誤，因此必須區隔該區域或利用小迴圈推測瑕疵點所在位置。被認定為瑕疵的點或隔離區域在統計步階修正時是無效的，也就是說瑕疵點與中央的相位級數差不列入中心點修正的考量。

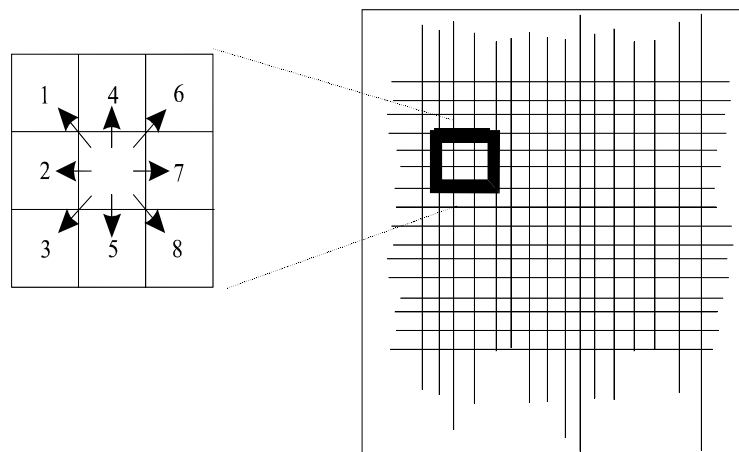


圖 2.10 細胞自動機械法的相位重建方法

依此原則對所有數據點修正，每個點的修正結果先對應位置暫存成另一矩陣，等所有的數據點都修正完再取代原有的數據陣列，以上局部迭代的步驟一直重複計算到兩個交替出現的穩定陣列，便可進行全域迭代。所謂全域迭代就是計算這兩個穩定相位陣列的平均。然後以新的相位數據進行局部迭代，在每次全域迭代後必須對每一個區域做路徑積分檢查有無瑕疵數據，以做為下一輪局部迭代修正相位的參考。每進行一次全域迭代便會少一條條紋，這相當於重建一條條紋。以上的程序一直重複到全域迭代重建出所有的條紋。因為全域迭代的次數與條紋數有關，而雜訊和裂痕會影響局部迭代趨於穩定的速率。若欲重建的相位分佈是複雜且多雜訊的，相對地運算時間也更長，而且局部迭代也可能無法得到穩定態或出現三個以上穩定態的情形，為求效率起見都會孤立瑕疵數據並且分割相位重建區域，最後再將區域獨立運算的結果合併起來。

細胞自動機械法具有幾個優點：

1. 原則簡單，容易程式化：路徑相關的相位重建法其計算結果好壞與解纏路徑關聯性高，如果要得到較準確的結果，需要運用複雜的判斷準則或路徑來重建；而細胞自動機械法的法則較簡單明瞭，僅需判斷中心點與所有相鄰點的落差是否都小於 π 以決定中心點的修正

方向，可得到較客觀的結論。由於原則相對簡單，轉換成程式語言也比較容易。

2. 計算速度較慢但適合平行處理：由於每次相位只修正 $\pm 2\pi$ ，相位不連續處修正是由內部向邊緣一步一步推移出去，因此條紋分佈、條紋多寡和雜訊都會影響計算時間。細胞自動機械法的特質在於局部迭代可同步處理無先後順序，因此，若能分割成數塊區域同步計算，可縮短不連續處從內修正到外的速度。



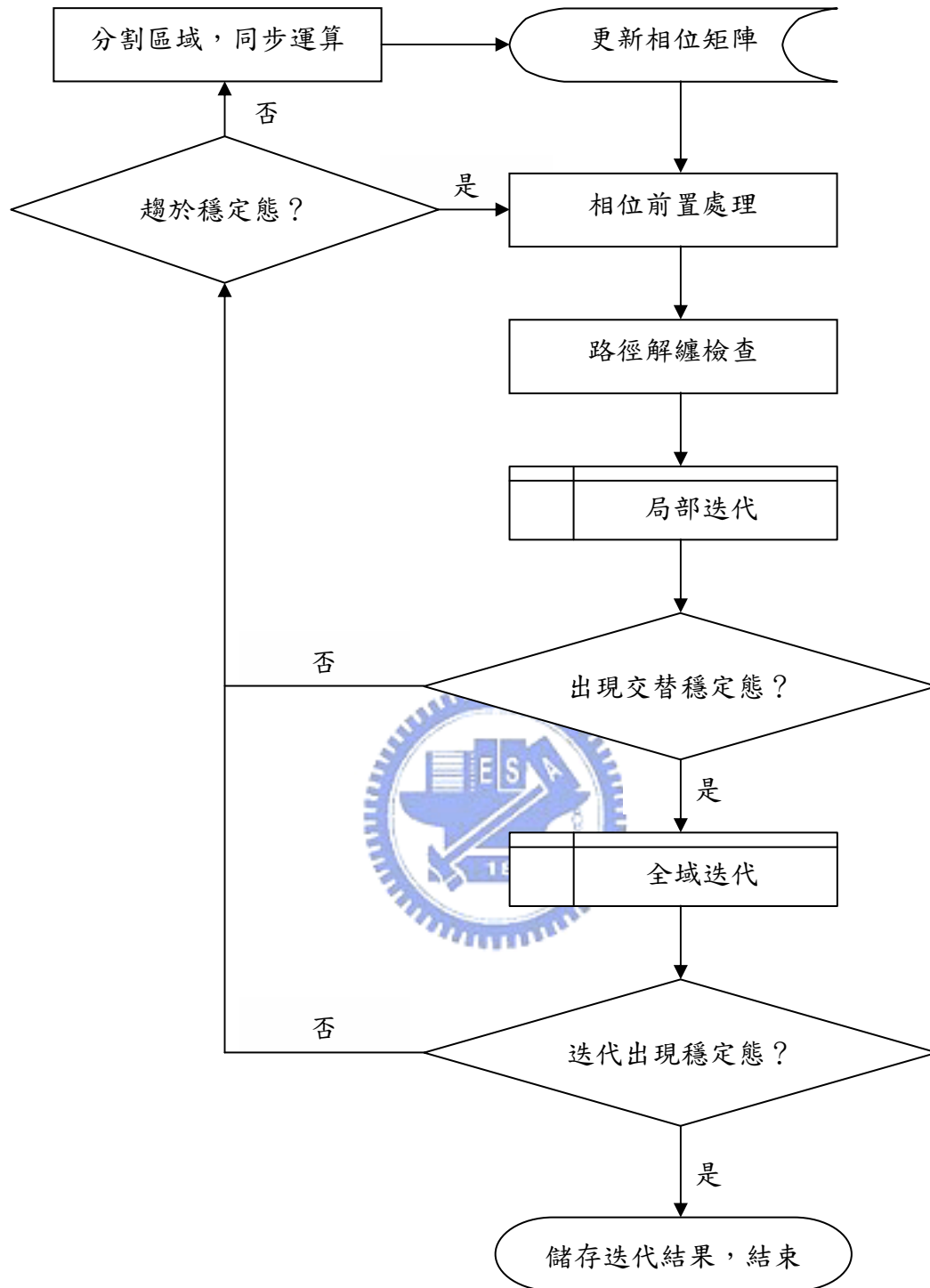


圖 2.11 細胞自動機械法流程圖