

## 參考文獻

1. A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and S. Chu, "Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles," *Opt. Lett.* **11**, 288-290 (1986).
2. S. C. Grover, A. G. Skirtach, R. C. Gauthier, and C. P. Grover, "Automated single-cell sorting system based on optical trapping," *J. Biomed. Opt.* **6**, 14-22 (2001).
3. M. Ozkan, T. Pisanic, J. Scheel, C. Barlow, S. Esener, and S. N. Bhatia, "Electro-optical platform for the manipulation of live cells," *Langmuir* **19**, 1532-1538 (2003).
4. Leonardo Sacconi, Iva M. Tolic -Norrelykke, Chiara Stringari, Renzo Antolini, and Francesco S. Pavone, "Optical micromanipulations inside yeast cells," *Appl. Opt.* **44**, 2001-2007 (2005).
5. G. Hummer and A. Szabo, "Free energy reconstruction from nonequilibrium single-molecule pulling experiments," *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **98**, 3658-3661 (2001).
6. Michael T. Woodside, William M. Behnke-Parks, Kevan Larizadeh, Kevin Travers, Daniel Herschlag, and Steven M. Block, "Nanomechanical measurements of the sequence-dependent folding landscapes of single nucleic acid hairpins," *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **103**, 6190-6195 (2006).
7. Liu, Y., G. J. Sonek, M. W. Berns, and B. J. Tromberg, "Physiological monitoring of optically trapped cells: assessing the effects of confinement by 1064-nm laser tweezers using microfluorometry," *Biophys. J.* **71**, 2158-2167 (1996).
8. Erwin J. G. Peterman, Frederick Gittes, and Christoph F. Schmidt, "Laser-induced heating in optical traps," *Biophys. J.* **84**, 1308-1316 (2003).
9. A. Ashkin, "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime," *Biophys. J.* **61**, 569-582 (1992).
10. Y. Harada and T. Asakura, "Radiation forces on a dielectric sphere in the Rayleigh scattering regime," *Opt. Commun.* **124**, 529-541 (1996).
11. J. P. Barton, D. R. Alexander, and S. A. Schaub, "Theoretical determination of net radiation force and torque for a spherical particle illuminated by a focused laser beam," *J. Appl. Phys.* **66**, 4594-4602 (1989).
12. A. Rohrbach and E. H. K. Stelzer, "Optical trapping of dielectric particles in arbitrary fields," *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 839-153 (2001).
13. E. L. Florin, J. K. H. Hörber, and E. H. K. Stelzer, "High-resolution axial and lateral position sensing using two-photon excitation of fluorophores by a

- continuous-wave Nd:YAG laser,” *Appl. Phys. Lett.* **69** 446-448 (1996).
14. M. J. Lang, C. L. Asbury, J. W. Shaevitz, and S. M. Block, “An automated two-dimensional optical force clamp for single molecule studies,” *Biophys. J.* **83**, 491-501 (2002).
  15. A. Brunsting and P. F. Mullaney, “Differential light scattering from spherical mammalian cells,” *Biophys. J.* **14**, 439-453 (1974).
  16. J. D. Jackson, “Boundary-value problem with dielectric,” in *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999), pp.154-159.
  17. K. O. Greulich, “Light force on very small (Releigh) particles,” in *Micromanipulation by light in biology and medicine: The laser microbeam and optical tweezers*, (Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland), pp.79-80 .
  18. W. H. Wright, G. J. Sonek, and M. W. Berns, “Parametric study of the force on microspheres held by optical tweezers,” *Appl. Opt.* **33**, 1735-1748 (1994).
  19. S. Sato, H. Inaba, “Optical trapping and manipulation of microscopic particles and biological cells by laser beams,” *Opt. Quant. Electron.* **28**, 1-16 (1996).
  20. A. Rohrbach, H. Kress, and E. H. K. Stelzer, “Three-dimensional tracking of small spheres in focused laser beams: influence of the detection angular aperture,” *Opt. Lett.* **28**, 411-413 (2003).
  21. H. C. van de Hulst, “Mie’s formula solution,” in *Light scattering by small particles* (Dover Publications, New York, 1981), pp.119-128.
  22. A. Rohrbach and E. H. K. Stelzer, “Trapping force, force constants, and potential depth for dielectric sphere in the presence of spherical aberrations,” *Appl. Opt.* **41**, 2494-2507 (2002).
  23. F. Gittes and C. Schmidt, “Signal and noise in micromechanical measurements,” *Meth. Cell. Biol.* **55**, 129-156 (1998).
  24. J. D. Jackson, “Reflection and refraction of electromagnetic waves at a plane interface between dielectrics,” in *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999), pp.154-159.
  25. S. Chandrasekhar, “Stochastic problem in physics and astronomy,” *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1-89 (1943).

## 附錄一 捕捉雷射光源偏振與幾何光學光線反射率

在幾何光學模型下，可以將雷射光視為聚焦的光線，和光線在微粒子介面上的反射與折射，便會施予微粒子作用力。代表偏折方向的反射和折射角度，可以藉由司乃爾定律（Snell's law）求出，而代表偏折強度的反射率，則可以從菲涅耳法則（Fresnel formula）得到。

在菲涅耳法則中，對於反射率的計算裡，其數值除了與入射角 $\beta_j$ 和介面入射側及折射側的介質折射率 $n_{j+1}$ 、 $n_j$ 有關之外，同時還必須考慮入射光的偏振方向。根據入射光的偏振方向，電場垂直折射面的分量，稱為垂直波（trans-electric wave），而電場平行折射面的分量，則稱為平行波（trans-magnetic wave）。這兩個分量的反射率並不相同，由菲涅耳法則，可以得到這兩者的反射率 $R_{TE}$ 與 $R_{TM}$ 分別為<sup>[24]</sup>

$$R_{TE} = \left( \frac{n_{j+1} \sin \beta_j - n_j \sin \delta_j}{n_{j+1} \sin \beta_j + n_j \sin \delta_j} \right)^2, \quad (\text{A.1})$$

與

$$R_{TM} = \left( \frac{n_{j+1} \sin \delta_j - n_j \sin \beta_j}{n_{j+1} \sin \delta_j + n_j \sin \beta_j} \right)^2, \quad (\text{A.2})$$

其中， $\delta_j$ 為折射角。而由光的可逆性和和上(A.1)與(A.2)式，我們可以發現，若在相同的介面上，而光線原來的折射側入射的話，我們依然會得到相同的反射率，只是此時 $\beta_j$ 為折射角， $\delta_j$ 為入射角。

因此，當我們在計算雷射鐳夾聚焦光線的反射率時，便需要考慮入射光線在這電場所在兩個分量上的比例。若簡化問題的話，也可以將入射物鏡前，雷射本身的偏振特性假設為是圓偏振（circular polarization）或是無特定偏振（random polarization）的。如此，不論雷射穿過物鏡後的行進方向為何，垂直波的分量 $q_{TE,cir}$ 、 $q_{TE,ran}$ 與平行波的分量 $q_{TM,cir}$ 、 $q_{TM,ran}$ 都是相同的，也就是

$$q_{TE,cir} = q_{TE,ran} = q_{TM,cir} = q_{TM,ran} = 0.5。 \quad (\text{A.3})$$

而平均反射率 $R_{avg,cir}$ 與 $R_{avg,ran}$ 則為

$$R_{tot,cir} = R_{tot,ran} = q_{TE,cir} R_{TE} + q_{TM,cir} R_{TM} = (R_{TE} + R_{TM})/2。 \quad (\text{A.4})$$

但是在實驗的情形裡，我們所使用的雷射通常都是線偏振（linear polarization）的。因此，我們便需要額外考慮雷射偏振分量的問題。

在考慮線偏振的問題時，我們便需要考慮線偏振的光通過物鏡時，球座標下不同空間角度 $(\theta, \varphi)$ 的光線各自的偏振方向為何。而此一關係則可以由偏振函數 $\bar{\mathbf{P}}_i(\theta, \varphi)$ 得到（見附錄二）：

$$\bar{\mathbf{P}}_i(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi / (1 + \sin \theta) \\ -\cos^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi / (1 + \sin \theta) \\ -\cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

另外，由於折射面可由圖 2.1 中的 $\hat{\mathbf{y}}'$ 與 $\hat{\mathbf{z}}'$ 定義，因此，線偏振的垂直波分量的 $q_{TE,lin}$ 則可以由向量計算上得到為

$$q_{TE,lin} = (\bar{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{x}}')^2 = [\bar{\mathbf{P}} \cdot (\hat{\mathbf{y}}' \times \hat{\mathbf{z}}')]^2 \quad (\text{A.6})$$

同理，若我們代入內文所提到的光線的方向向量 $\hat{\mathbf{k}}_i$ 與微粒子中心對應光線的垂直向量 $\bar{\mathbf{d}}$ （圖 2.2），則可以針對通過物鏡後不同角度光線的垂直波分量符合

$$q_{TE,lin} = [\bar{\mathbf{P}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}_i \times \bar{\mathbf{d}} / |\bar{\mathbf{d}}|)]^2 \quad (\text{A.7})$$

同時，平行波分量 $q_{TM,lin}$ 與平均反射率 $R_{avg,lin}$ 則可以表示為

$$q_{TM,lin} = 1 - q_{TE,lin} = 1 - [\bar{\mathbf{P}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}_i \times \bar{\mathbf{d}} / |\bar{\mathbf{d}}|)]^2 \quad (\text{A.8})$$

與

$$\begin{aligned} R_{avg,lin} &= q_{TE,lin} R_{TE} + q_{TM,lin} R_{TM} \\ &= [\bar{\mathbf{P}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}_i \times \bar{\mathbf{d}} / |\bar{\mathbf{d}}|)]^2 R_{TE} + \{1 - [\bar{\mathbf{P}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}_i \times \bar{\mathbf{d}} / |\bar{\mathbf{d}}|)]^2\} R_{TM} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

## 附錄二 光場行進方向偏折與對應之偏振函數及座標轉換矩陣

在近軸光學的環境裡，我們並不需要考慮光場通過透鏡時，會因為行進方向偏折而造成偏振方向改變的情形，因為偏振方向的改變並不明顯。但是，當我們的系統中，出現像是物鏡這樣高數值孔徑的光學元件時，由於行進方向改變的角度會不再符合近軸光學的原則，因而，偏振方向的改變也變得重要。於是，在本文中，考慮之探針雷射的入射與散射光場時，若光場會通過物鏡時，我們便必須特別注意在光場的前進方向受到物鏡偏折時，偏振方向所產生的對應改變。

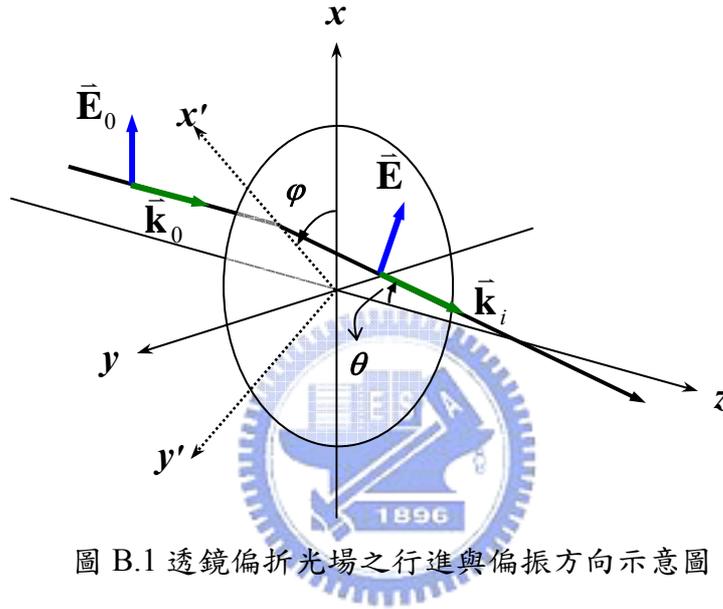


圖 B.1 透鏡偏折光場之行進與偏振方向示意圖

如圖 B.1，我們考慮當一個行進在  $z$  方向（波向量  $\bar{\mathbf{k}}_0 = (0, 0, k)$ ）、電場偏振在  $x$  方向（電場  $\bar{\mathbf{E}}_0 = (E, 0, 0)$ ）上的光場，當其通過一個透鏡，而產生對應偏折，使前進方向，也就是波向量，由原來的  $\bar{\mathbf{k}}_0$  偏折為  $\bar{\mathbf{k}} = (k_x, k_y, k_z)$ 。而偏折時，行進方向與偏振方向的改變，我們可視為是以垂直折射面的方向為轉軸旋轉角度  $\theta$  所產生。其中，所謂的折射面，便是同時包含  $\bar{\mathbf{k}}_0$  與  $\bar{\mathbf{k}}$  的平面。而在尋找折射面時，我們可以將座標以  $z$  軸為轉軸旋轉角度  $\varphi$ ，如此，新座標中的  $x'-z'$  平面便為折射面， $y'$  軸便為透鏡偏折光場時的轉軸。其中，角度  $\theta$  與  $\varphi$  可分別由偏折後的波向量  $\bar{\mathbf{k}}$  的各分量表示為  $\theta = \tan^{-1}[(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} / k_z]$ 、 $\varphi = \tan^{-1}(k_y / k_x)$ 。因此，我們便可以由座標轉換的方式，計算出偏折時的旋轉矩陣為  $\mathbf{R}_r(\bar{\mathbf{k}})$  為

$$\mathbf{R}_r(\bar{\mathbf{k}}) = \mathbf{R}^{-1}(\varphi) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{R}(\varphi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{k_0 n_m} \begin{bmatrix} 1 - k_{ix}^2 / (1 + k_{iz}) & -k_{ix} k_{iy} / (1 + k_{iz}) & k_{ix} \\ -k_{ix} k_{iy} / (1 + k_{iz}) & 1 - k_{iy}^2 / (1 + k_{iz}) & k_{iy} \\ -k_{ix} & -k_{iy} & k_{iz} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

其中， $k_0$  為真空中的波數， $n_m$  為環境介質的折射率。

由(B.1)式，帶入入射透鏡前的光場偏振方向(1, 0, 0)，可以得到內文所提的偏振函數  $\bar{\mathbf{P}}_i$  為

$$\bar{\mathbf{P}}_i(\bar{\mathbf{k}}) = \mathbf{R}_r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{k_0 n_m} \begin{bmatrix} 1 - k_{ix}^2 / (1 + k_{iz}) \\ -k_{ix} k_{iy} / (1 + k_{iz}) \\ -k_{ix} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

另外，由座標旋轉的觀念，若以偏折後的偏振方向為  $x''$  軸、光場行進方向為  $z''$  軸所建立的直角座標系，則其各軸上的  $\hat{\mathbf{e}}_{x''}$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_{y''}$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_{z''}$  單位向量與偏折所造成之旋轉的旋轉矩陣  $\mathbf{R}_r$  的關係如下：

$$\mathbf{R}_r = [\hat{\mathbf{e}}_{x''}, \hat{\mathbf{e}}_{y''}, \hat{\mathbf{e}}_{z''}]. \quad (\text{B.3})$$

同時，內文中所提到，轉換到此直角座標系的轉換矩陣  $\mathbf{R}_i$ ，則可以由其各軸單位向量  $\hat{\mathbf{e}}_{x''}$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_{y''}$  與  $\hat{\mathbf{e}}_{z''}$  得到為

$$\mathbf{R}_i(\bar{\mathbf{k}}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{x''}^T \\ \hat{\mathbf{e}}_{y''}^T \\ \hat{\mathbf{e}}_{z''}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{k_0 n} \begin{bmatrix} 1 - k_x^2 / (1 + k_z) & -k_x k_y / (1 + k_z) & -k_x \\ -k_x k_y / (1 + k_z) & 1 - k_y^2 / (1 + k_z) & -k_y \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

另外，當我們如內文中，考慮背向散射光被再次通過原入射透鏡，也就是物鏡，而被偵測系統接收時，也需考慮光場受到物鏡的偏折。由於光場行進的可逆性，當背向散射光場的波向量  $\bar{\mathbf{k}}_s = -\bar{\mathbf{k}}$  時，在  $\hat{\mathbf{e}}_{x''}$  與  $\hat{\mathbf{e}}_{y''}$  上的電場分量，便會分別被物鏡偏折到實驗室座標的  $\hat{\mathbf{e}}_x$  與  $\hat{\mathbf{e}}_y$  方向上。換言之，當在計算背向散射光被物鏡收集後的偏振方向時，只要其在物鏡偏折前的電場與轉換矩陣  $\mathbf{R}_i(-\bar{\mathbf{k}}_s)$  內積便可以得到。

### 附錄三 米氏散射理論 (Mie Scattering Theory)

米氏散射理論是一個完整解釋與計算具有特定偏振方向的平行光被球形散射粒子所散射時，所產生的散射光場與粒子內光場變化的理論。其中，主要的技巧是將光波的電磁向量場函數轉換成兩個不同的純量場函數，在經由電磁波在介質介面的邊界條件，解出純量場函數。一般來說，我們可以利用米氏散射理論的結果，很輕易的描述出散射光場在遠場，也就是離散射粒子距離遠大於光波波長和粒子半徑處觀察時，光場分佈的情形。以下，便是比較完整的理論內容。

#### C-1 均質微粒子的散射<sup>[21]</sup>

對於每一個電磁波，我們都可以藉由  $u$  和  $v$  兩個球座標  $(r, \theta, \varphi)$  的純量函數去展開表示，其中，電場  $\vec{E} = (E_r, E_\theta, E_\varphi)$  與  $u$ 、 $v$  的關係符合下(C.1)至(C.3)式的關係：

$$E_r = \frac{i}{k} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + ikru, \quad (C.1)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(rv)}{\partial \varphi} + \frac{i}{kr} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r \partial \theta}, \quad (C.2)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial \theta} + \frac{i}{kr \sin \theta} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r \partial \varphi}. \quad (C.3)$$

其中， $k$  為該電磁波在介質中的波數。例如，在折射率為  $n_m$  的環境介質中一個行進在  $z$  方向，偏振方向在  $x$  方向上的電磁波，其在直角座標  $(x, y, z)$  下，可以標示為

$$\vec{E}_i = e^{in_mk_0z} \hat{e}_x, \quad (C.4)$$

其中， $k_0$  為電磁波在真空中的波數、 $\hat{e}_x$  為在  $x$  方向上的單位向量。若依據前(C.1)至(C.3)式，則可以標示為

$$u_i = \cos \varphi \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos \theta) \frac{1}{k_0 r} \psi_l(n_m k_0 r), \quad (C.5)$$

$$v_i = \sin \varphi \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos \theta) \frac{1}{k_0 r} \psi_l(n_m k_0 r). \quad (C.6)$$

其中， $P_l(\cos \theta)$  是一次相關的勒讓德多項式 (associated Legendre polynomial)，而  $\psi_l$  則可由半整數階的貝賽耳函數 (half-integer-order Bessel functions)  $J_{l+1/2}(z)$  定義為

$$\psi_l(z) = (\pi z/2)^{1/2} J_{l+1/2}(z). \quad (C.7)$$

如圖 B.1，若在原點的位置上有一個半徑為  $a$ 、折射率為  $n_p$  的球形散射粒子，則粒子外的散射光場與粒子內的光場可以同樣藉由函數  $u$  與  $v$  的表示方式標示為

$$u_s = -\cos\varphi \sum_{l=1}^{\infty} A_l (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos\theta) \frac{1}{k_0 r} \zeta_l(n_m k_0 r), \quad (\text{C.8})$$

$$v_s = -\sin\varphi \sum_{l=1}^{\infty} B_l (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos\theta) \frac{1}{k_0 r} \zeta_l(n_m k_0 r), \quad (\text{C.9})$$

與

$$u_p = \cos\varphi \sum_{l=1}^{\infty} C_l (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos\theta) \frac{1}{k_0 r} \psi_l(n_p k_0 r), \quad (\text{C.10})$$

$$v_p = \sin\varphi \sum_{l=1}^{\infty} D_l (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos\theta) \frac{1}{k_0 r} \psi_l(n_p k_0 r). \quad (\text{C.11})$$

其中，下標  $s$  和  $p$  分別代表是粒子外的散射光場與粒子內的光場， $A_l$ 、 $B_l$ 、 $C_l$  和  $D_l$  是數列各項的係數，而  $\zeta_l$  則可由半整數階的第二類漢可函數（half-integer-order Hankel function of the second kind） $H_{l+1/2}^{(2)}(z)$  表示為

$$\zeta_l(z) = (\pi z/2)^{1/2} H_{l+1/2}^{(2)}(z). \quad (\text{C.12})$$

習慣上，我們將  $\psi_l$ 、 $\zeta_l$  合稱為里卡提—貝賽耳函數（Ricatti-Bessel functions）。

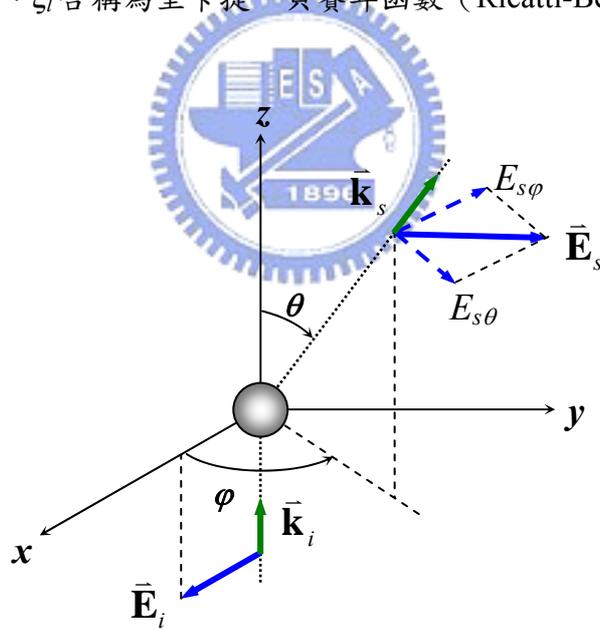


圖 C.1 入射光場與散射光場之方向與偏振方向示意圖

藉由粒子周圍電磁場的邊界條件，我們可以由解出粒子外散射光場的各项係數為

$$A_l = \frac{\psi_l(\rho)\psi_l'(m\rho) - m\psi_l(m\rho)\psi_l'(\rho)}{\zeta_l(\rho)\psi_l'(m\rho) - m\psi_l(m\rho)\zeta_l'(\rho)}, \quad (\text{C.13})$$

$$B_l = \frac{m\psi_l(\rho)\psi_l'(m\rho) - \psi_l(m\rho)\psi_l'(\rho)}{m\zeta_l(\rho)\psi_l'(m\rho) - \psi_l(m\rho)\zeta_l'(\rho)}, \quad (\text{C.14})$$

其中， $\rho = n_m k_0 a$ 、 $m = n_p / n_m$ 。

同時，由於漢可函數的特性，當在遠場的環境下（ $r \gg 1$ ），散射光場的角度分佈  $u_s$ 、 $v_s$  可以表示為

$$u_s = -\frac{i}{k_0 r} e^{-in_m k_0 r} \cos \varphi \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos \theta), \quad (C.15)$$

$$v_s = -\frac{i}{k_0 r} e^{-in_m k_0 r} \sin \varphi \sum_{l=1}^{\infty} B_l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos \theta). \quad (C.16)$$

或者，我們可以由(C.1)至(C.3)式求出散射光場  $\bar{\mathbf{E}}_s$  在球座標下的分量為

$$E_{sr} = 0, \quad (C.17)$$

$$E_{s\theta} = -\frac{i}{n_m k_0 r} e^{-in_m k_0 r} \cos \varphi S_2(\theta), \quad (C.18)$$

$$E_{s\varphi} = \frac{i}{n_m k_0 r} e^{-in_m k_0 r} \sin \varphi S_1(\theta), \quad (C.19)$$

其中，可以得到平行與垂直散射面方向上分量的強度分佈函數  $S_1$  與  $S_2$  符合：

$$S_1(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} [A_l \pi_l(\cos \theta) + B_l \tau_l(\cos \theta)], \quad (C.20)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} [A_l \pi_l(\cos \theta) - B_l \tau_l(\cos \theta)], \quad (C.21)$$

且

$$\pi_l(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} P_l(\cos \theta), \quad (C.22)$$

$$\tau_l(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_l(\cos \theta). \quad (C.23)$$

另外，在實際的計算中，對於  $S_1$  與  $S_2$ ，我們並不可能計算無限多項的級數，所以一般來說，如果要得到一個比較正確的數據，則所需要考慮的項數至少要大於  $\rho = n_m k_0 a$ 。也就是說，比較大的微粒子，是需要比較大的總計算項數的。而這也是一般我們將  $\rho$  稱為尺寸參數（size factor）的原因。

## C-2 徑向對稱之多層微粒子的散射

不過，對於內文所提到徑向對稱的多層微粒子來說，我們一樣可以將米氏散射理論延展為適用於這樣的微粒子上。不過我們需要重新定義函數  $u$  和  $v$ 。我們假設函數  $u$  與  $v$  在第  $j$  層（ $a_{j-1} < r < a_j$ ）時的形式  $u_j$  和  $v_j$  為

$$u_j = \cos \varphi \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos \theta) \frac{1}{k_0 r} [C_{l,j} \psi_l(n_j k_0 r) - A_{l,j} \zeta_l(n_j k_0 r)], \quad (C.24)$$

$$v_j = \sin \varphi \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos \theta) \frac{1}{k_0 r} [D_{l,j} \psi_l(n_m k_0 r) - B_{l,j} \zeta_l(n_j k_0 r)]. \quad (C.25)$$

其中， $A_{lj}$ 、 $B_{lj}$ 、 $C_{lj}$ 與 $D_{lj}$ 則是各項係數。

另外，由電磁學的邊界條件，在每一個介面上，必須同時符合 $mu \cdot (1/m)[\partial(r u) / \partial r]$ 、 $v$ 與 $\partial(r v) / \partial r$ 四者皆是連續的。因此，由第 $j$ 介面的邊界條件，係數 $A_{lj}$ 、 $B_{lj}$ 、 $C_{lj}$ 、 $D_{lj}$ 與 $A_{l,j+1}$ 、 $B_{l,j+1}$ 、 $C_{l,j+1}$ 、 $D_{l,j+1}$ ，則會滿足以下的關係：

$$C_{l,j+1}\psi_l(\rho_j) - A_{l,j+1}\zeta_l(\rho_j) = C_{l,j}m_j\psi_l(m_j\rho_j) - A_{l,j}m_j\zeta_l(m_j\rho_j), \quad (C.26)$$

$$C_{l,j+1}\psi'_l(\rho_j) - A_{l,j+1}\zeta'_l(\rho_j) = C_{l,j}\psi'_l(m_j\rho_j) - A_{l,j}\zeta'_l(m_j\rho_j), \quad (C.27)$$

$$D_{l,j+1}\psi_l(\rho_j) - B_{l,j+1}\zeta_l(\rho_j) = D_{l,j}\psi_l(m_j\rho_j) - B_{l,j}\zeta_l(m_j\rho_j), \quad (C.28)$$

$$D_{l,j+1}\psi'_l(\rho_j) - B_{l,j+1}\zeta'_l(\rho_j) = D_{l,j}m_j\psi'_l(m_j\rho_j) - B_{l,j}m_j\zeta'_l(m_j\rho_j). \quad (C.29)$$

其中， $\rho_j = n_j k_0 a_j$ 、 $m_j = n_j / n_{j+1}$ 。經過適當的整理，我們可以以矩陣的方式描述上面的關係：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{l,j+1} \\ A_{l,j+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\psi'_l(m_j\rho_j)\zeta_l(\rho_j) - m_j\psi_l(m_j\rho_j)\zeta'_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} & \frac{m_j\zeta_l(m_j\rho_j)\zeta'_l(\rho_j) - \zeta'_l(m_j\rho_j)\zeta_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} \\ \frac{\psi'_l(m_j\rho_j)\psi_l(\rho_j) - m_j\psi_l(m_j\rho_j)\psi'_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} & \frac{m_j\zeta_l(m_j\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(m_j\rho_j)\psi_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{l,j} \\ A_{l,j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}^{(l,j)} & L_{12}^{(l,j)} \\ L_{21}^{(l,j)} & L_{22}^{(l,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{l,j} \\ A_{l,j} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (C.30)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{l,j+1} \\ B_{l,j+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{m_j\psi'_l(m_j\rho_j)\zeta_l(\rho_j) - \psi_l(m_j\rho_j)\zeta'_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} & \frac{\zeta_l(m_j\rho_j)\zeta'_l(\rho_j) - m_j\zeta'_l(m_j\rho_j)\zeta_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} \\ \frac{m_j\psi'_l(m_j\rho_j)\psi_l(\rho_j) - \psi_l(m_j\rho_j)\psi'_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} & \frac{\zeta_l(m_j\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(m_j\rho_j)\psi_l(\rho_j)}{\zeta_l(\rho_j)\psi'_l(\rho_j) - \zeta'_l(\rho_j)\psi_l(\rho_j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{l,j} \\ B_{l,j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{11}^{(l,j)} & M_{12}^{(l,j)} \\ M_{21}^{(l,j)} & M_{22}^{(l,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{l,j} \\ B_{l,j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (C.31)$$

由(C.30)與(C.31)式，最內與最外層係數的關係則可以得到為

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{l,N+1} \\ A_{l,N+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{11}^{(l,j)} & L_{12}^{(l,N)} \\ L_{21}^{(l,j)} & L_{22}^{(l,N)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} L_{11}^{(l,2)} & L_{12}^{(l,2)} \\ L_{21}^{(l,2)} & L_{22}^{(l,2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{11}^{(l,1)} & L_{12}^{(l,1)} \\ L_{21}^{(l,1)} & L_{22}^{(l,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{l,1} \\ A_{l,1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}^{(l)} & L_{12}^{(l)} \\ L_{21}^{(l)} & L_{22}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{l,1} \\ A_{l,1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (C.32)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{l,N+1} \\ B_{l,N+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{11}^{(l,N)} & M_{12}^{(l,N)} \\ M_{21}^{(l,N)} & M_{22}^{(l,N)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} M_{11}^{(l,2)} & M_{12}^{(l,2)} \\ M_{21}^{(l,2)} & M_{22}^{(l,2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11}^{(l,1)} & M_{12}^{(l,1)} \\ M_{21}^{(l,1)} & M_{22}^{(l,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{l,1} \\ B_{l,1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{11}^{(l)} & M_{12}^{(l)} \\ M_{21}^{(l)} & M_{22}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{l,1} \\ B_{l,1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (C.33)$$

對應前文中， $r$ 趨近於無限大時，散射光應該是收斂的。而同樣的，當 $r$ 趨近於零時，光場也必須是收斂的。於是， $C_{l,N+1} = D_{l,N+1} = 1$ ，而 $A_{l,1} = B_{l,1} = 0$ 。將此條件，代入(C.32)與(C.33)式，散射光場的係數 $A_{l,N+1}$ 與 $B_{l,N+1}$ 則可以解出為

$$A_{l,N+1} = L_{21}^{(l)} / L_{11}^{(l)} , \quad (\text{C.34})$$

$$B_{l,N+1} = M_{21}^{(l)} / M_{11}^{(l)} . \quad (\text{C.35})$$

於是我們只要(C.34)與(C.35)式中的 $A_{l,N+1}$ 與 $B_{l,N+1}$ 分別取代(C.34)與(C.35)式中的係數 $A_l$ 與 $B_l$ ，我們便可以得到適合多層微粒子受平行波散射時，遠場下散射光場平行與垂直散射面方向上分量的強度分佈函數 $S_1$ 與 $S_2$ 了。



#### 附錄四 功率頻譜密度分析法與雷射鐳夾之光彈性係數

一般而言，雷射鐳夾所捕捉的微粒子半徑大約在數十微米至數十奈米之間。這樣尺寸的微粒子，在樣品溶液中，受到溶液分子的碰撞時，由於尺寸很小，所以便會有較大的機率發生碰撞力在各方向不均勻的現象。當不均勻的碰撞發生時，微粒子便會受淨力而朝特定方向運動，直到發生下一次不均勻的碰撞，而改變運動方向。這種微粒子受到溶液分子碰撞，而在溶液中不停改變方向運動的現象，稱為布朗運動（Brownian motion）。因此，當我們利用雷射鐳夾捕捉微粒子時，雖然會受到微粒子會受到捕捉力而限制在雷射鐳夾所建立的光學陷阱之中，但卻因為布朗運動的存在，使微粒子並非穩定地停止在雷射鐳夾的捕捉中心，而會在捕捉中心的附近晃動。其中，微粒子晃動的範圍與頻率，則會受到雷射鐳夾光彈性係數的大小而有所不同。功率頻譜密度（power spectral density, PSD）分析法便是一種利用微粒子在雷射鐳夾捕捉下，以其布朗運動的晃動頻率，反推雷射鐳夾光彈性係數的分析方式。

對於微粒子的晃動頻率與雷射鐳夾的光彈性係數之間的關係，我們可以從定性與定量的角度去思考。在定性上，當微粒子在雷射鐳夾中進行布朗運動時，在微粒子受到溶液分子碰撞而偏離捕捉中心，微粒子便會受到雷射鐳夾的捕捉力拉回捕捉中心。於是，我們可以想像，微粒子便在捕捉中心的附近晃動。假設微粒子受到相同的碰撞時，如果雷射鐳夾的光彈性係數越大，則這種拉回捕捉中心的現象也就越劇烈。也就是說，當光彈性係數越大時，微粒子不僅運動範圍不僅會較為受限，同時，其移動速率也會較快，這也表示，微粒子的晃動頻率亦較大。因此，我們便可以藉由觀察微粒子晃動頻率的頻寬，以推測雷射鐳夾的光彈性係數。至於晃動頻率與光彈性係數之間定性的關係，則可以由微粒子在雷射鐳夾捕捉下的運動方程式解析得到。

一個被雷射鐳夾捕捉質量為  $m$  的微粒子，總共會受到三種力，除了前面所提到的雷射鐳夾的捕捉力  $\bar{\mathbf{F}}_{opt}$  與溶液分子的碰撞力  $\bar{\mathbf{F}}_{col}$  外，便是與溶液間產生相對移動時的水流黏滯力  $\bar{\mathbf{F}}_w$ 。另外，在此系統中，座標各軸的運動是獨立的，於是，我們便可以寫下一維微粒子的隨時間  $t$  運動方程式，或稱為朗茲凡方程式（Langevin equation）：

$$mb_i''(t) = F_{opt,i}(t) + F_{w,i}(t) + F_{col,i}(t) = -k_i b_i(t) - \gamma b_i'(t) + F_{col,i}(t) \quad (D.1)$$

其中， $i$  可為  $x$ 、 $y$  與  $z$ ，而  $\bar{\mathbf{b}}$ 、 $\bar{\mathbf{b}}'$  與  $\bar{\mathbf{b}}''$  則分別是微粒子相對捕捉中心的位移、移動速度與加速度。另外， $k_i$  代表了各方向的光彈性係數， $\gamma$  則為了與阻尼係數，可由  $\gamma = 6\pi a\eta$  求得。其中， $\eta_w$  為溶液的黏滯係數，及  $a$  為微粒子半徑。由於微粒子在溶液中的運動，是一種阻尼很大的運動，因此，微粒子的加速時間非常短，

$m\bar{\mathbf{b}}''$  也會較  $\bar{\mathbf{F}}_{opt}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}_w$  與  $\bar{\mathbf{F}}_{col}$  小許多。於是我們便可以將微粒子視為幾乎處於淨力平衡的狀態，而將(D.1)式簡化為：

$$F_{col,i}(t) = k_i b_i(t) + \gamma b_i'(t) \quad (D.2)$$

接下來，我們便對(D.2)式的左右兩側進行功率頻譜密度的分析。所謂的功率頻譜密度分析，便是對所分析的函數進行富氏轉換後，其絕對值平方對時間的平均。其意義是指，對於不同的頻率  $f$  下，單位頻率下所具備的功率（廣義來說，這裡的功率指的是函數的絕對值平方對時間平均）。藉由這樣的分析，我們可以得到一維的溶液分子碰撞力的功率頻譜密度  $PSD_{Fi,col}$  與微粒子位移的功率頻譜密度  $PSD_{bi}$  間的關係。

$$PSD_{Fi,col}(f) = (k_i^2 + 4\pi^2 \gamma^2 f^2) PSD_{bi}(f) \quad (D.3)$$

而藉由晃動散逸定理 (fluctuation-dissipation theorem) 與愛因斯坦關係式 (Einstein relation)，我們可以得到，溶液分子碰撞力的功率頻譜密度為一定值， $PSD_{Fi,col} = 4\gamma k_B T$ 。<sup>[25]</sup> 其中， $k_B$  波茲曼常數 (Boltzmann constant)， $T$  則為環境溫度。於是，我們可以得到，微粒子在受雷射鐳夾捕捉的情況下，其位移的功率頻譜密度可表示為

$$PSD_{bi}(f) = \frac{k_B T}{\pi^2 \gamma [(k_i / 2\pi\gamma)^2 + f^2]} = \frac{k_B T}{\pi^2 \gamma [f_{c,i}^2 + f^2]} \quad (D.4)$$

為一個勞侖茲函數 (Lorentzian function)，其中，截止頻率  $f_{c,i}$  恰與一維雷射鐳夾的光彈性係數  $k_i$  成正比。這與我們前面定性討論時的結論是符合的。因此，當我們需要分析雷射鐳夾的光彈性係數時，便可以藉由記錄一段時間的微粒子運動，並將之藉由功率頻譜密度分析與勞侖茲函數進行函數擬合，便可以求出實驗環境下微粒子三維運動的截止頻率 ( $f_{c,x}$ ,  $f_{c,y}$ ,  $f_{c,z}$ ) 與雷射鐳夾的光彈性係數 ( $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ )。

另外，使用功率頻譜密度分析法求取雷射鐳夾的光彈性係數，還有一個特點。由內文中，我們可以知道，單一粒子追蹤時，若微粒子的位移在可追蹤範圍之內，座標方向上，規一化的位移訊號  $S_i$  可以表示成  $S_i = V_i b_i$ ，其中， $V_i$  是該位移方向的偵測靈敏度。因此，我們也可以推得位移訊號  $S_i$  的功率頻譜密度為

$$PSD_{si}(f) = V_i^2 PSD_{bi}(f) \quad (D.5)$$

其函數的截止頻率  $f_{c,i}$  仍然是不變的。甚至，我們在也可以將未規一化的四象限光偵測器所量得的電壓訊號直接進行功率頻譜密度分析，如圖 D.1，也會得到相同的截止頻率  $f_{c,i}$ ，而求出光彈性係數  $k_i$ 。而這個分析也就可以省去了位移對位移訊號之間關係校正的步驟，直接量測出雷射鐳夾的光彈性係數。

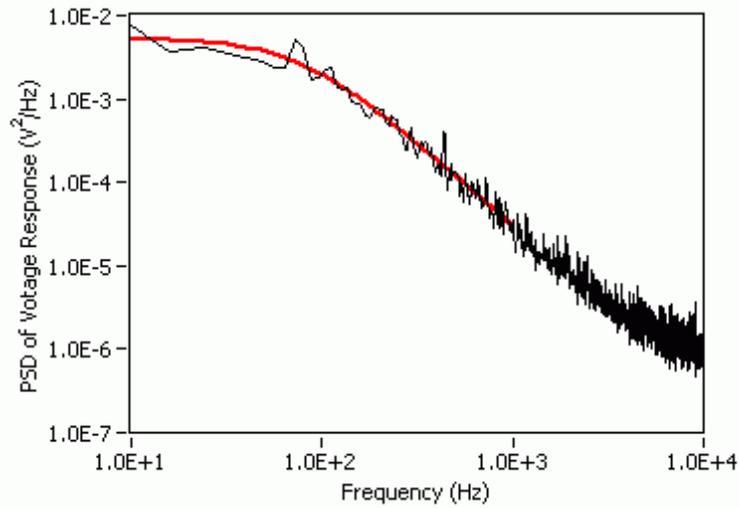


圖 D.1 位移訊號功率頻譜密度分析圖

不過，當我們直接利用電壓訊號或是規一化的位移訊號進行分析時，需要特別注意的便是，微粒子的運動範圍必須仍在可追蹤範圍之內，否則其訊號便不會與位移成正比，其功率頻譜密度截止頻率也就不會與分析微粒子位移時的結果相同，也就無法得到正確的光彈性係數。而這也是內文中，當我們將探測光束沒有離焦量測時，所計算的光彈性係數的訊號會出現錯誤的原因。