

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

負相關在管制圖上之應用

Negative Correlation Application in Control Chart.

研究生：賴文祥

指導教授：彭南夫 教授

中華民國九十三年六月

負相關在管制圖上之應用

Negative Correlation Application in Control Chart.

研究生：賴文祥

Student : Wen-Hsiang Lai

指導教授：彭南夫 博士

Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

國立交通大學



A Thesis

Submitted to Institute Statistics

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Statistics

June 2004

Hsin-chu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年六月

誌謝

在研究所的兩年時間裡，除了要感謝系上每位老師在課業上細心的教導外，也非常感謝我的指導教授 彭南夫老師和在研究理論上鼎力相助的 洪慧念老師，教導我如何從生活週遭上的問題(通訊問題)中，挖掘其中奧妙，並如何應用在其他領域上。也感激老師們不厭其煩的指導，使我的論文能夠順利完成。也感謝在研究所的同學欣好、超毅、巧慧、政輝、志浩、淑珍、怡均...等，在生活上與課業上的愉快相處。也非常感謝蘇董與忠庭同學，在籃球場上與撞球桌上的指導，使我在研究之餘能保有強健的體魄與愉快的心靈。

此外還要感謝我的家人給我的支持與鼓勵，讓我能毫無顧慮的求學。最後將此論文獻給我的家人與朋友，和有緣相聚的統計所同學及學弟妹。



賴文祥 謹誌于

國立交通大學統計研究所

中華民國九十三年六月

負相關在管制圖上之應用

學生：賴文祥

指導教授：彭南夫

國立交通大學統計學研究所 碩士班



摘 要

當抽樣所得的資料經由特殊方法排序後，產生負相關，利用此負相關製成非傳統上 \bar{X} 管制圖。在同一個型 I 誤差 α 風險下，因為負相關而使得變異數變小，所以型 II 誤差 β 風險亦會變小，則偵測到平均值改變之機率為 $1-\beta$ 會變大。如此能讓品質管制人員更能準確地掌握製程狀態，儘快偵測出可歸屬原因之發生或製程之跳動，以便在更多不合格品製造出之前能發現製程之變異並進行改善工作。

目錄

中文摘要-----	i
目錄-----	ii
第一章 導論-----	1
1-1 研究動機-----	1
1-2 研究方法-----	1
第二章 理論與模擬-----	3
2-1 理論部分(通訊問題)-----	3
2-2 模擬驗證-----	15
第三章 將負相關運用於改善製程管制-----	24
3-1 統計製程管制概論-----	24
3-2 管制圖之簡介-----	24
3-3 非傳統 \bar{X} 管制圖-----	25
3-4 改善製程管制之方法-----	26
第四章 結論-----	29
附錄-----	30
參考文獻：-----	40

第一章、導論

1-1 研究動機

隨著生產技術之進步，消費者對品質意識抬頭及消費者協會、基金會等的成立，品質的好壞將是未來市場上決定勝負的關鍵。因此在競爭激烈之商業環境中，品質是一個企業維持競爭力的要素之一，唯有妥善地運用現代化之品質改善工具，加上管理階層領導之品質改善努力，不斷地將品質提昇，應付未來高品質消費之趨勢，以提昇本身競爭能力，方可在企業競爭中求生存。

所以本論文之研究動機與目的是如何改善品質管制，以減少在製程管制上不必要浪費的人力與資源，並更能有效地監控整個產品製造過程，製造出符合高品質、低成本之產品，以提昇企業本身競爭能力。



1-2 研究方法

統計方法往往是品質管制上的利器，用以控制生產操作，其目的在選用最經濟的製造方法，並製成最適用最暢銷的產品。所以本論文在製程管制中運用了統計技巧，將每單位時間抽得的代表性樣本（如 \bar{X} ），經由特殊的排序方法（於第二章加以詳述），利用其排序後所產生的負相關（於第二章加以詳述），再將固定數個（4,5,6..）排序後單位時間的代表性樣本相加取平均值，製成有別於傳統上的 \bar{X} 管制圖（於第三章加以詳述），並使用此圖更能有效地監控整個產品製造過

程，製造出符合高品質之產品。

簡單的流程如下：

- ◆ 收集每單位時間代表性樣本，如 \bar{X} 。(日後爲了方便將以單一樣本 x_i 表示之)
- ◆ 經由特殊排序方法，排序後產生負相關。(第二章)
- ◆ 利用負相關使變異數變小，製成有別於傳統上的 \bar{X} 管制圖。(第三章)
- ◆ 將 \bar{X} 管制圖用於未來之製程，並更能有效地找出製程中之可歸屬原因。(第三章)

本論文所利用之統計技巧，原本出自於通訊問題（於第二章節詳述之）。

在探討通訊問題時，我們無意間發現了訊號停留時間在任意時間點 t 上具有負相關。換句話說，當我們以時間 t 爲基準，去觀測訊號停留時間是否大於 t 。若我們觀測到訊號停留時間大於 t 時，則下一個我們觀測到的訊號，它的停留時間小於 t 機率會變大。我們將於第二章節探討此負相關，並以數學方式證明之，或以模擬方式來加以驗證。最後更將此在 t 點上的負相關，推論到

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \sim F(x)$ ， d 爲固定常數令 $y_i = x_i + i * d$ 並由小排至大

$y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq y_{(3)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ ，並找出每個對應的 x_j ，即 $y_{(i)} = x_j + j * d$ ，並令

$x_i'' = x_j$ ，當進入 *steady state* 時，則 x_i'' 與 x_{i+1}'' 具有負相關。

在第三章節運用推論結果於管制圖上，利用其負相關使平均數之變異縮小。

第二章、理論與模擬

2-1 理論部分(通訊問題)

隨著電信業演進到數位視訊與網際網路基礎資料網路，業者也必須能在實體、傳輸、協定以及其他階層上執行控制電信傳輸的許多標準依從性測試。爲了保持競爭力，需要高效率的方法來追蹤及修復網路中的問題，使其不致影響到服務。因此，訊號接收成功與否是電信業者最基本的要求。

定義 2.1.1 將訊號分類爲 D 跟 S

當訊號進入訊號接收器後，經過一段固定時間 t 沒人處理時，我們立即將此訊號在時間 t 斷訊。我們將此訊號稱爲 D 。而相反地，如果訊號在時間 t 內有人接收處理，我們將此訊號稱爲 S 。(如圖 2)

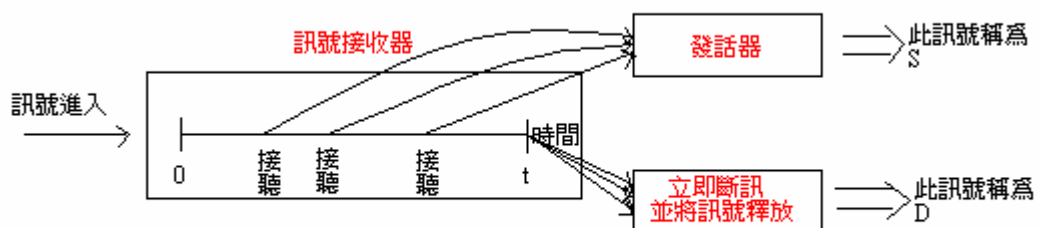


圖2 將訊號判別爲S或D

S：代表訊號停留時間未超過 t 秒，就有人接收處理。

D：代表訊號停留的時間會超過 t 秒並無人接收，我們立即令它在第 t 秒時斷訊。

附：不考慮未接通之前自行掛斷的訊號

性質 2.1 訊號停留時間分為兩種

一.未設限停留時間：

令變數 Y 為訊號在接收器內若未設限(未截斷於 t)的停留時間，且 $\{F_y(y) \mid F_y(0) = 0\}$ 為訊號停留時間累積機率函數 (即 CDF)， $f_y(y)$ 為停留時間機率函數，則其 CDF 如下：

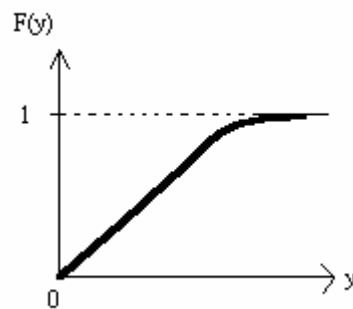


圖2.1 未設限的停留時間CDF

二.設限於 t 的停留時間 (訊號真正停留時間)：

由於我們要探討的訊號為 S 跟 D ，所以根據定義我們必須將訊號停留時間 Y 截斷於 t ，以判別訊號為 S 或 D 。所以令訊號真正停留時間變數 X 為變數 Y 設限於 t (截斷於 t) 的隨機變數。

換言之，變數 X 為訊號於接收器內設限於 t (截斷於 t) 的停留時間。另令 $\{F_x(x) \mid F_x(0) = 0\}$ 為訊號停留時間累積機率函數 (即 CDF)，則 $F_x(x)$ 必定為截斷於 $X = t$ 的混合型累積機率函數。其 CDF 如下：

$$F_x(x) = \begin{cases} \int_0^x f_y(u) du & \text{if } 0 < x < t \\ 1 & \text{if } t \leq x \end{cases}$$

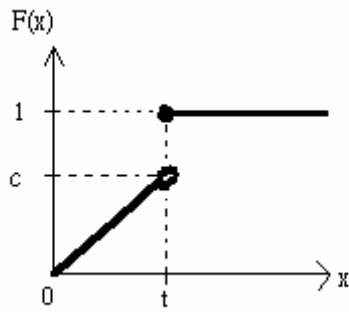


圖2.1.1 截斷於 $x=t$ 的混合型CDF

, 且 $\int_0^t f_y(u)du = c$

X 與 Y 之關係

$$P(D) = P(X = t) = 1 - c = 1 - \int_0^t f_y(u)du = 1 - F_y(t) = \overline{F}_y(t)$$



D 與 S 另一定義

由 X 與 Y 之關係中，我們可以得知：

D：代表若未設限時訊號停留時間 $Y \geq t$ 的訊號。

或代表真正停留時間 $X = t$ 的訊號。

S：代表若未設限時訊號停留時間 $Y < t$ 的訊號。

或代表真正停留時間 $X < t$ 的訊號。



往後我們探討的訊號停留時間，將以未設限停留時間 Y 為主，而 $F_y(y)$ 為其未設限的累積機率函數。而在實際模擬上，將以真正停留時間 X 來進行模擬。

定義 2.1.2 符號

爲了方便起見，我們將此類截斷於 $X = t$ 混合型分配，以本身未設限時分配後面加入 $|^t$ 來表示之。例如： $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ ，則設限於 t 的 X 分配，我們以

$\text{Gamma}(\alpha, \lambda)|^t$ 符號表示之。



假設 2.1 訊號進入方式

我們假設在每單位時間都有一個獨立訊號進入（如圖 2.2）。由圖 2.2 可看出，當我們觀測到此訊號為 D 或 S 的實際時間會比訊號進入時間來的晚。

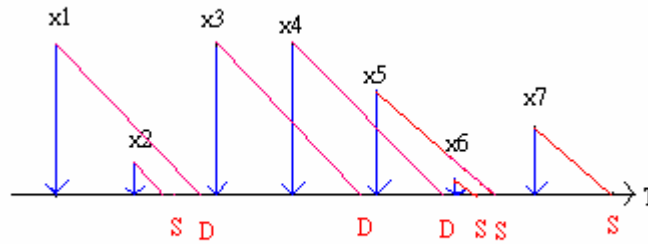


圖2.2 觀測到訊號為D或S的實際時間

定義 2.1.3 D_i

D_i : 代表有一個訊號 D 在時間 $T = i$ 時被斷訊(截斷)並釋放出去。



發現 負相關

若在某時間 $T = g$ 時發生一個訊號 D ，(此時間為觀測到時間，即 D_g)，則下一個訊號的可能是未設限時，停留時間 $Y < t$ 的 S ，或是 $Y \geq t$ 的 D 。而我們發現下一個訊號的是 $Y \geq t$ 的 D 之條件機率，會小於單獨發生 D 之機率。也就是說

$$P(D | D_g) \leq P(D) = \bar{F}_y(t)。$$

換句話說，訊號停留時間在時間 t 點上具有負相關。當前一個訊號停留時間 $Y \geq t$ 時，則下一個訊號停留時間 $Y < t$ 之機率會增加，也就是下一個訊號停留時間 $Y \geq t$ 之機率會減小。

驗證 負相關

爲了方便驗證我們將令 $g = 0$ 。則我們要證明的是 $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F}_y(t)$ 。

驗證 1 $t = 2$

我們先對 $t = 2$ 做驗證，設每單位時間（秒）有一獨立訊號進入，則 D 、 S 分別代表如下：

D ：代表訊號停留的時間 $Y \geq 2$ 秒並無人接收，我們立即令它在第 2 秒時斷訊。

即若未設限時訊號停留時間 $Y \geq 2$ 的訊號。

即真正停留時間 $X = 2$ 的訊號。

S ：代表訊號停留時間 $Y < 2$ 秒，就有人接收處理。

即若未設限時訊號停留時間 $Y < 2$ 的訊號。

即真正停留時間 $X < 2$ 的訊號。

D_i ：代表在時間 $T = i$ 時，有一個訊號 D 釋放出去。

$F_y(\cdot)$ ：爲訊息未設限停留時間的累積機率函數，即 CDF 。

換言之，我們想要證明的是 $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F}_y(2)$ 。

假設時間 $T = 0$ 時發生一個 D （即訊號由 $T = -2$ 時進入，停留時間超過 2 秒 ($Y > 2$) 並在時間 $T = 0$ 時釋放出去）

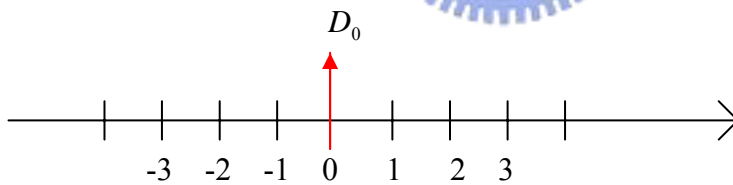


圖 2.3 在時間 0 時發生一個 D ，稱此訊號爲 D_0

如果下一個發生的是 D ，可能發生在 $T=1$ 或 $T=2$ 。而不可能發生在 T 大於 $t = 2$ 的地方。因爲如果 $T \geq 3$ ， $0 \sim T$ 間必定至少有一個 S 存在，則下一個訊號必爲 S 。

因此下一個訊號爲 D ，可能發生在 $T=1$ 或 $T=2$ ，如圖 2.4：

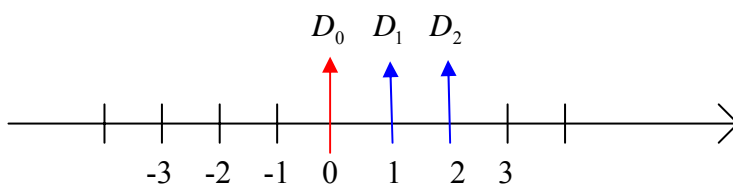


圖 2.4 下一個是 D 的二種可能情形

(a) 如果下一個發生的是 D ，且發生在 $T=1$ 時：

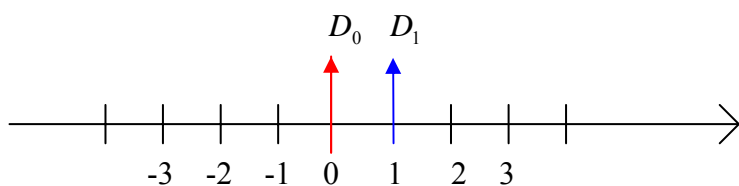


圖 2.4(a) 下一個是 D 且發生在 $T=1$

D_0 訊號一定由 $T=-2$ 時進入。然而因為 D_1 發生在 $T=1$ 時，所以我們要探討 $T=-2$ 到 $T=1$ 中間所有訊號進入狀況。訊號由 $T=-1$ 時進入必定大於 2 秒，即 $P(Y > 2) = \overline{F}_y(2)$ 。訊號由 $T=0$ 時進入必定大於 1 秒，即 $P(Y > 1) = \overline{F}_y(1)$

所以下一個發生的是 D ，且發生在 $T=1$ 的機率為 $\overline{F}_y(2)\overline{F}_y(1)$ △

(b) 如果下一個發生的是 D ，且發生在 $T=2$ 時：

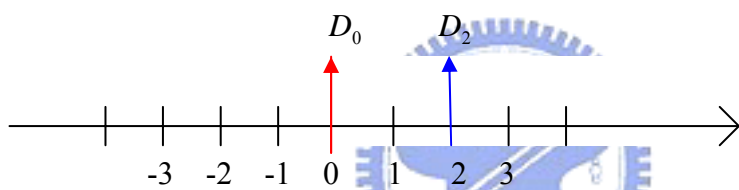


圖 2.4(b) 下一個是 D 且發生在 $T=2$

D_0 訊號一定由 $T=-2$ 時進入。然而因為 D_2 發生在 $T=2$ 時，所以我們要探討 $T=-2$ 到 $T=2$ 中間所有訊號進入狀況。訊號由 $T=-1$ 時進入必定小於 1 秒，即 $P(Y < 1) = F_y(1)$ 。訊號由 $T=0$ 時進入必定大於 2 秒，即 $P(Y > 2) = \overline{F}_y(2)$ 。訊號由 $T=1$ 時進入必定大於 1 秒，即 $P(Y > 1) = \overline{F}_y(1)$ 。

所以下一個發生的是 D ，且發生在 $T=2$ 的機率為 $F_y(1)\overline{F}_y(2)\overline{F}_y(1)$ 。 △

根據(a)、(b)，我們可以求得 \Rightarrow

$$\begin{aligned} \therefore P(D | D_0) &= P(D_1 | D_0) + P(D_2 | D_0) \\ &= \overline{F}_y(2)\overline{F}_y(1) + F_y(1)\overline{F}_y(2)\overline{F}_y(1) \\ &= \overline{F}_y(2)[\overline{F}_y(1) + F_y(1)\overline{F}_y(1)] \quad (\text{式 2.1}) \end{aligned}$$

我們要證明： $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F}_y(2)$

根據(式 2.1)消去 $\overline{F}_y(2)$ ，因此我們要證明的為下式：

$$[\overline{F}_y(1) + F_y(1)\overline{F}_y(1)] \leq 1 \quad (\text{式 2.2})$$

令 $F_y(1) = x$ ， $0 \leq x \leq 1$ ，並將它代入(式 2.2)中：

則我們要證明的變為：在 $0 \leq x \leq 1$ 條件下，

$$f_1(x) = (1-x) + x(1-x) \leq 1$$

$$f_1(x) = (1-x)(1+x) = 1-x^2 \leq 1$$

△

驗證 2 $t = 3$ 時

我們再對 $t = 3$ 做驗證，設每單位時間（秒）有一獨立訊號進入，則 D 、 S 分別代表如下：

D ：代表訊號停留的時間 $Y \geq 3$ 秒並無人接收，我們立即令它在第3秒時斷訊。

即若未設限時訊號停留時間 $Y \geq 3$ 的訊號。

即真正停留時間 $X = 3$ 的訊號。

S ：代表訊號停留時間未超過3秒，就有人接收處理。

即若未設限時訊號停留時間 $Y < 3$ 的訊號。

即真正停留時間 $X < 3$ 的訊號。

D_i ：代表在時間 $T = i$ 時，有一個訊號 D 釋放出去。

$F_y(\cdot)$ ：為訊息未設限停留時間的累積機率函數，即CDF。

換言之，我們想要證明的是 $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F}_y(3)$ 。

假設時間 $T = 0$ 時發生一個 D （即訊號由 $T = -3$ 時進入，停留時間超過3秒（ $Y > 3$ ）

並在時間 $T = 0$ 時釋放出去）

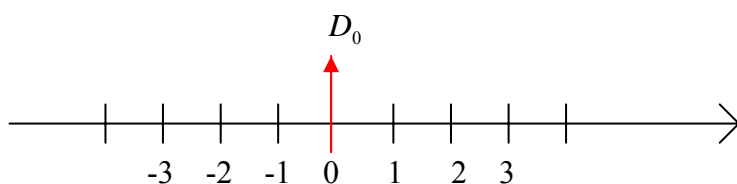


圖 2.3 在時間 0 時發生一個 D ，稱此訊號為 D_0

如果下一個發生的是 D ，可能發生在 $T=1$ 或 $T=2$ 或 $T=3$ 。而不可能發生在 T 大於 $t = 3$ 的地方。因為如果 $T \geq 4$ ， $0 \sim T$ 間必定至少有一個 S 存在，則下一個訊號必為 S 。因此下一個訊號為 D ，可能發生在 $T=1$ 或 $T=2$ 或 $T=3$ ，如圖 2.4.1：

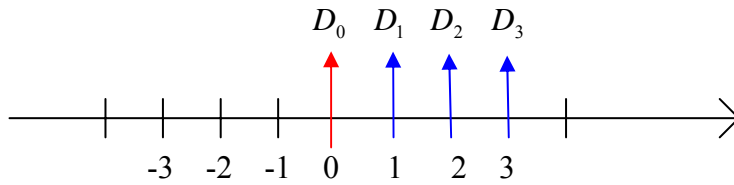


圖 2.4.1 下一個是 D 的三種可能情形

(a) 如果下一個發生的是 D ，且發生在 $T=1$ 時：

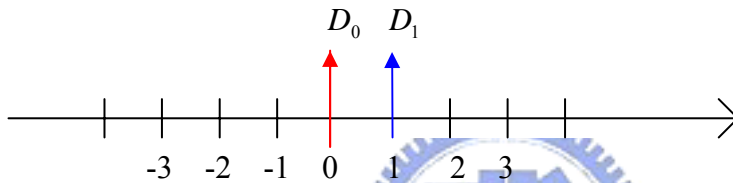


圖 2.4.1(a) 下一個是 D 且發生在 $T=1$

D_0 訊號一定由 $T = -3$ 時進入。然而因為 D_1 發生在 $T = 1$ 時，所以我們要探討 $T = -3$ 到 $T = 1$ 中間所有訊號進入狀況。訊號由 $T = -2$ 時進入必定大於 3 秒，即 $P(Y > 3) = \overline{F}_y(3)$ 。訊號由 $T = -1$ 時進入必定小於 1 秒或大於 2 秒，即 $P(Y < 1) = F_y(1)$ 或 $P(Y > 2) = \overline{F}_y(2)$ 。訊號由 $T = 0$ 時進入必定大於 1 秒，即 $P(Y > 1) = \overline{F}_y(1)$ 。

所以下一個發生的是 D ，且發生在 $T = 1$ 的機率為 $\overline{F}_y(3)[\overline{F}_y(2) + F_y(1)]\overline{F}_y(1)$ 。 △

(b) 如果下一個發生的是 D ，且發生在 $T=2$ 時：

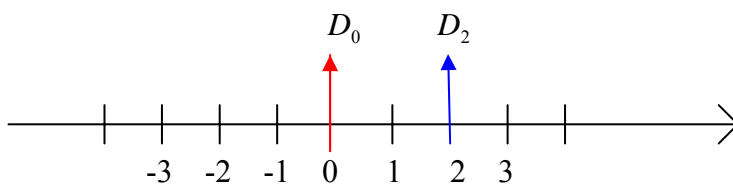


圖 2.4.1(b) 下一個是 D 且發生在 $T=2$

D_0 訊號一定由 $T = -3$ 時進入。然而因為 D_2 發生在 $T = 2$ 時，所以我們要探討 $T = -3$ 到 $T = 2$ 中間所有訊號進入狀況。訊號由 $T = -2$ 時進入必定小於 2 秒，即 $P(Y < 2) = F_y(2)$ 。訊號由 $T = -1$ 時進入必定大於 3 秒，即 $P(Y > 3) = \overline{F_y}(3)$ 。訊號由 $T = 0$ 時進入必定大於 2 秒，即 $P(Y > 2) = \overline{F_y}(2)$ 。訊號由 $T = 1$ 時進入必定大於 1 秒，即 $P(Y > 1) = \overline{F_y}(1)$ 。

所以下一個發生的是 D ，且發生在 $T = 2$ 的機率為 $F_y(2)\overline{F_y}(3)\overline{F_y}(2)\overline{F_y}(1)$ 。 △

(c) 如果下一個發生的是 D ，且發生在 $T = 3$ 時：

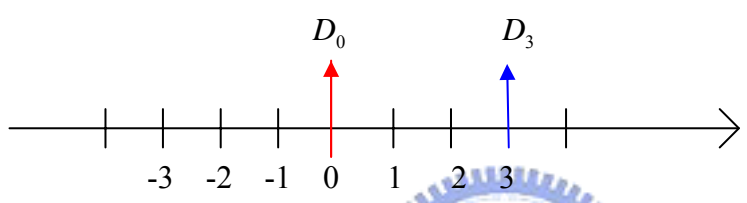


圖 2.4.1(c) 下一個是 D 且發生在 $T = 3$

D_0 訊號一定由 $T = -3$ 時進入。然而因為 D_3 發生在 $T = 3$ 時，所以我們要探討 $T = -3$ 到 $T = 3$ 中間所有訊號進入狀況。訊號由 $T = -2$ 時進入必定小於 2 秒，即 $P(Y < 2) = F_y(2)$ 。訊號由 $T = -1$ 時進入必定小於 1 秒，即 $P(Y < 1) = F_y(1)$ 。訊號由 $T = 0$ 時進入必定大於 3 秒，即 $P(Y > 3) = \overline{F_y}(3)$ 。訊號由 $T = 1$ 時進入必定大於 2 秒，即 $P(Y > 2) = \overline{F_y}(2)$ 。訊號由 $T = 2$ 時進入必定大於 1 秒，即 $P(Y > 1) = \overline{F_y}(1)$ 。

所以下一個發生的是 D ，發生在 $T = 3$ 的機率為 $F_y(2)F_y(1)\overline{F_y}(3)\overline{F_y}(2)\overline{F_y}(1)$ 。 △

根據(a)、(b)、(c)，我們可以求得 \Rightarrow

$$\begin{aligned} \therefore P(D | D_0) &= P(D_1 | D_0) + P(D_2 | D_0) + P(D_3 | D_0) \\ &= \overline{F_y}(3)[\overline{F_y}(2) + F_y(1)]\overline{F_y}(1) + F_y(2)\overline{F_y}(3)\overline{F_y}(2)\overline{F_y}(1) + F_y(2)F_y(1)\overline{F_y}(3)\overline{F_y}(2)\overline{F_y}(1) \\ &= \overline{F_y}(3)[\overline{F_y}(2)\overline{F_y}(1) + \overline{F_y}(1)F_y(1) + \overline{F_y}(2)\overline{F_y}(1)F_y(2) + \overline{F_y}(2)\overline{F_y}(1)F_y(2)F_y(1)] \quad (\text{式 2.1}) \end{aligned}$$

我們要證明： $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F_y}(3)$

根據(式 2.1)消去 $\overline{F}_y(3)$ ，因此我們要證明的為下式：

$$\left[\overline{F}_y(2)\overline{F}_y(1)+\overline{F}_y(1)F_y(1)+\overline{F}_y(2)\overline{F}_y(1)F_y(2)+\overline{F}_y(2)\overline{F}_y(1)F_y(2)F_y(1)\right]\leq 1 \quad (\text{式 2.2})$$

令 $F_y(1)=x$ ， $F_y(2)=y$ ， $0\leq x\leq y\leq 1$ ，並將它代入(式 2.2)中：

則我們要證明的變為：在 $0\leq x\leq y\leq 1$ 條件下，

$$f_2(x, y) = (1-x)[(1-y)+x+y(1-y)+y(1-y)x]\leq 1$$

〈證明〉

首先我們將 $f(x, y)$ 對 x 跟對 y 偏微，得下列聯立方程式：

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow y - 2x - 2xy + 2xy^2 = 0 \quad (\text{式 1})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -2y + x - x^2 + 2x^2y = 0 \quad (\text{式 2})$$

$$\text{由(式 1)中移項可得 } x = \frac{y}{2(1+y-y^2)} \quad (\text{式 3})$$

並將(式 3)代入(式 2)中，可得

$$-2y + \frac{y}{2(1+y-y^2)} - \frac{y^2}{4(1+y-y^2)} + \frac{2y^2}{4(1+y-y^2)^2}y = 0 \quad (\text{式 4})$$

$$\text{將(式 4)通分 } \frac{-8y(1+y-y^2)^2 + 2y(1+y-y^2) - y^2 + 2y^3}{4(1+y-y^2)^2} = 0 \quad (\text{式 5})$$

由(式 5)中，可看出在 $0\leq y\leq 1$ 條件下，其分母 $4(1+y-y^2)^2$ 恆大於零，而分子為

$$-8y(1+y-y^2)^2 + 2y(1+y-y^2) - y^2 + 2y^3$$

$$= -2y(2y^2 - y - 2)\left(2y^2 - 3y - \frac{3}{2}\right)$$

令分子為零，則在 $0\leq x\leq y\leq 1$ 條件下，可得 $y=0, x=0$

$$\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right|_{(x,y)=(0,0)} = -2 - 2y + 2y^2 \Big|_{(x,y)=(0,0)} = -2$$

$$\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)=(0,0)} = 1 - 2x + 4xy \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = -2 + 2x^2 \Big|_{(x,y)=(0,0)} = -2$$

$$(1) \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = -2 < 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{vmatrix} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

根據 Second derivatives test (附錄 C)，所以當 $(x,y)=(0,0)$ 時， $f_2(x,y) = (1-x)[(1-y)+x+y(1-y)+y(1-y)x]$ 有相對極大值 1。◻

驗證 3 $t = k$ ， k 為正整數

我們已經在 $t = 2, 3$ 時，我們也可以很容易地證明出 $P(D | D_g) \leq P(D) = \overline{F}_y(t)$ 。現

在我們想證明 $t = k$ ， k 屬於正整數時， $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F}_y(k)$ 皆成立。

在 $t = 3$ 證明中，我們可以發現 $f_2(x,y) = (1-x)[(1-y)+x+y(1-y)+y(1-y)x]$

$$= (1-x)(1+x-y^2+xy-xy^2)$$

$$= (1-x)(1+x) - (1-x)y(y-x+xy)$$

在條件 $0 \leq x \leq y \leq 1$ 下， $-(1-x)y(y-x+xy) \leq 0$

$$\max_{0 \leq x \leq y \leq 1} (1+x)(1-x) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} (1+x)(1-x) = f_1(x)$$

$$\therefore f_2(x,y) \leq f_1(x) \leq 1$$

我們由電腦模擬，得到特殊結果：

當 t 越大時，我們要驗證得 f 函數會越小。

$$\text{即 } f_t \leq f_{t-1} \leq f_{t-2} \leq \dots \leq f_3 \leq f_2 \leq f_1 \leq 1$$

所以我們先於附錄 A 探討 $t=3$ (已討論過), $4, 5, 6, \dots, k-1, k$ 時 $P(D | D_0)$ 的狀況, 我們

想要根據數學歸納法證明出 $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F}_y(k)$ 也會成立。

由附錄 A 可得知我們要證明的是: 在 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq 1$ 條件下,

$$\begin{aligned}
 f_{k-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}) = & \\
 & [x_{k-2} + (1 - x_{k-1})][x_{k-3} + (1 - x_{k-2})] \dots [x_1 + (1 - x_2)](1 - x_1) \\
 & + x_{k-1}[x_{k-3} + (1 - x_{k-1})][x_{k-4} + (1 - x_{k-2})] \dots [x_1 + (1 - x_3)](1 - x_2)(1 - x_1) \\
 & + x_{k-1}x_{k-2}[x_{k-4} + (1 - x_{k-1})][x_{k-5} + (1 - x_{k-2})] \dots [x_1 + (1 - x_4)](1 - x_3)(1 - x_2)(1 - x_1) + \\
 & x_{k-1}x_{k-2}x_{k-3}[x_{k-5} + (1 - x_{k-1})][x_{k-6} + (1 - x_{k-2})] \dots [x_1 + (1 - x_5)](1 - x_4)(1 - x_3)(1 - x_2)(1 - x_1) \\
 & + \dots + x_{k-1}x_{k-2} \dots x_3[x_1 + (1 - x_{k-1})](1 - x_{k-2})(1 - x_{k-3}) \dots (1 - x_1) \\
 & + x_{k-1}x_{k-2} \dots x_3x_2(1 - x_{k-1})(1 - x_{k-2}) \dots (1 - x_1) \\
 & + x_{k-1}x_{k-2} \dots x_3x_2x_1(1 - x_{k-1})(1 - x_{k-2}) \dots (1 - x_1) \leq 1
 \end{aligned}$$

此部分由於尚未找出 $t = k-1$ 跟 $t = k$ 之間特殊關係, 故尚未證明之。

我們利用模擬方式, 模擬當 $t = 10$ 時, 則欲證函數 f_9 為 9 個變數所組成函數。

我們將 9 度空間上滿足 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_9 \leq 1$ 的平均分佈點, 帶入各個 f_i 函

數中, 得到結果: $f_9 \leq f_8 \leq f_7 \leq \dots \leq f_3 \leq f_2 \leq f_1 \leq 1$

我們由電腦模擬結果, 合理懷疑:

當 t 越大時, 我們要驗證得 f 函數會越小。

即 $f_t \leq f_{t-1} \leq f_{t-2} \leq \dots \leq f_3 \leq f_2 \leq f_1 \leq 1$ 。

2-2 模擬驗證

假設 1 :

在 2-1 節中，我們已經驗證了在訊號停留時間設限於正整數 t 的累積機率函數 $\{F_x(x) | F_x(0) = 0\}$ 中，在某時間訊號停留時間為 $X = t$ 的訊號（即 D ），下一個訊號為 D 之機率，會小於單獨發生訊號為 D 之機率，即 $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F_y}(t)$ 。所以我們大膽猜測不僅對正整數 t 成立，對於正數 t ， $P(D | D_0) \leq P(D) = \overline{F_y}(t)$ 也都會成立。由於此證明相當複雜，並需要有足夠的機率基礎與邏輯。所以對此我們不加以證明，而利用模擬方式加以探討。

模擬 1 :



步驟 1. 首先假設在每單位時間（秒）有一獨立訊號進入，且訊號停留時間未設限時為Gamma(α, λ)分配，（即 $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ ）。且令 $f_y(y)$ 為Gamma(α, λ)的機率密度函數。則訊號真正停留時間為截斷在 $X = t$ 混合型的Gamma(α, λ)分配（即 $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda) |^t$ ），其CDF 為：

$$F_x(x) = \begin{cases} \int_0^x f_y(u) du & \text{if } 0 < x < t \\ 1 & \text{if } t < x \end{cases}, \text{ 且 } \int_0^t f_y(u) du = c$$

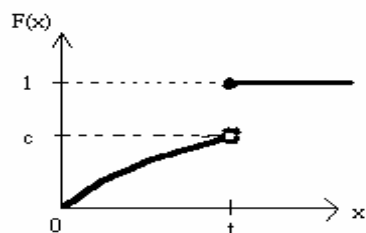


圖2.5 截斷於 $x = t$ 混合型CDF

換言之，我們一開始模擬出 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \sim \overset{iid}{\text{Gamma}}(\alpha, \lambda)^t$

並由查表計算出 $P(D) = \overline{F}_y(t)$

或可用模擬方式估算出 $\hat{P}(D) = P(x_i = t) = \frac{\text{number of } D}{n}$

($\because x_i$ is iid \therefore by WLLN)

$$= \frac{\text{number of } x_i = t}{n}$$

步驟 2. 排序找出觀測到的訊號先後次序

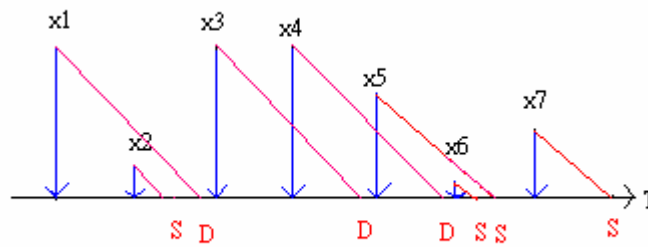


圖2.2 觀測到訊號為D或S的實際時間

由上圖 2.2 可以看出，我們觀測到的訊號先後次序並不是

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7 \rightarrow \dots$$

而是 $x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_6 \rightarrow x_5 \rightarrow x_7 \rightarrow \dots$

令 y_i 為訊號 x_i 真正觀測到並判別為 S 或 D 時之時間，則 $y_i = x_i + i * d$ ，

其中 $d = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$ 。我們將 y_i 由小至大排列：

可得 $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq y_{(3)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ ，並找出每個對應的 x_j ，即 $y_{(i)} = x_j + j$

並令 $x_i'' = x_j$ ，則我們可以得到真正觀測到的訊號順序：

$$x_1'' \rightarrow x_2'' \rightarrow x_3'' \rightarrow \dots \rightarrow x_n''$$

並估算出 $\hat{P}(D | D_g) = P(x_{i+1}'' = t | x_i'' = t)$

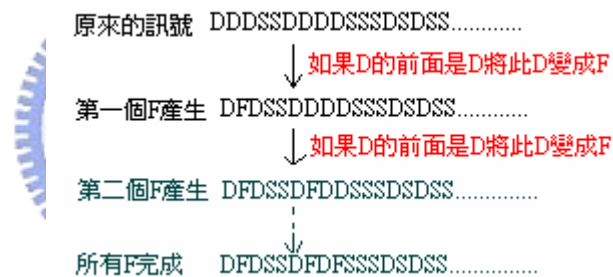
估算方法：若訊號 D 當作前一個 D 條件下的隨機變數 ($x_{i+1}'' = t$)，我們不希望它也可以當作下一個隨機變數的條件 ($x_i'' = t$)。

爲了方便估算出 $\hat{P}(D | D_g)$ ，我們在訊號 S 和 D 中，再加入訊號 F 。

定義：F

F：訊號爲 D 且當作前一個 D 條件下的隨機變數，並且不爲下一個變數之條件。 ▢

其 F 加入方法如下：



由於 x_i 經由上述方法排序後，其變動位置最多往前 m_1 個位置，往後最多 m_2 個位置（於第三章詳述）。所以根據 m -dependent 亦具有弱大數法則性質 $WLLN$ (請參考附錄 D)。因此我們可以估算出

$$\hat{P}(D | D_g) = \frac{n_1}{n_2}$$

，其中 n_2 是訊號爲 D 的個數， n_1 是訊號爲 F 的個數。

模擬結果 1 :

$Gamma(\alpha, \lambda)$	t	$P(D)$	$P(D D_g)$
$Gamma(1.5, 1)$	0.6	0.7527	0.740761
	1.2	0.49438	0.45218
	1.8	0.3085	0.249919
	2.4	0.18868	0.139234
	3	0.11232	0.077720
$Gamma(2.5, 1.5)$	0.6	0.87774	0.875032
	1.2	0.62872	0.578958
	1.8	0.37038	0.318266
	2.4	0.2077	0.155944
	3	0.11066	0.072495
$Gamma(3.7, 2.9)$	0.6	0.86858	0.866108
	1.2	0.48209	0.458227
	1.8	0.19305	0.145221
	2.4	0.06455	0.03395
	3	0.01898	0.00636

由結果可以看出對於任意正數 t ，皆 $P(D | D_g) \leq P(D) = \overline{F}_y(t)$ 。

假設 2 :

在假設 1 中，我們已經模擬出，在設限於正數 t 的累積機率函數 $\{ F_x(x) \mid F_x(0) = 0 \}$ 中， $P(D \mid D_g) \leq P(D) = \overline{F}_y(t)$ 皆成立。但由於證明十分複雜，所以我們在此並不證明之。並且我們更大膽假設不僅在 $\{ F_x(x) \mid F_x(0) = 0 \}$ 中， $P(D \mid D_g) \leq P(D) = \overline{F}_y(t)$ 會成立，在任意 $F_x(x)$ 中， $P(D \mid D_g) \leq P(D) = \overline{F}_y(t)$ 也會成立。也就是說不僅在正的隨機變數 X 時會成立，在具有正負的隨機變數 X 時， $P(D \mid D_g) \leq P(D) = \overline{F}_y(t)$ 亦會成立。所以對此利用模擬方式加以探討。

模擬 2 :

步驟 1. 在 2-1 至假設 1 中，我們都將 $F_x(x)$ 當作訊息設限於 t 的停留時間累積機率函數，且 X 為正的隨機變數。現在我們要模擬的未設限停留時間 Y 為常態分配 $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ ，則 X 不僅有可能為正，並且有可能為負。即訊號不僅會延後才被判讀，亦可能會提前被判讀。

則重新定義 D 跟 S 如下：

D ：代表訊號停留的時間延後超過 t 秒 ($Y \geq t$) 或提早超過 t 秒 ($Y < -t$)，我們在此 t 秒立即截斷。

S ：代表訊號停留時間延後未超過 t 秒 ($0 < Y < t$) 或提早未超過 t 秒 ($0 > Y > -t$)。

$f_y(\cdot)$ ：為常態分配 $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ 的機率密度函數

$F_x()$ ：為訊息設限於 $\pm t$ 的停留時間累積機率函數，即CDF如下：

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < -t \\ \int_{-\infty}^x f_y(u) du & \text{if } -t \leq x < t \\ 1 & \text{if } t < x \end{cases}$$

令 $\int_{-\infty}^{-t} f_y(u) du = c$ ， $\int_t^{\infty} f_y(u) du = d$ 則其 CDF 圖如下：

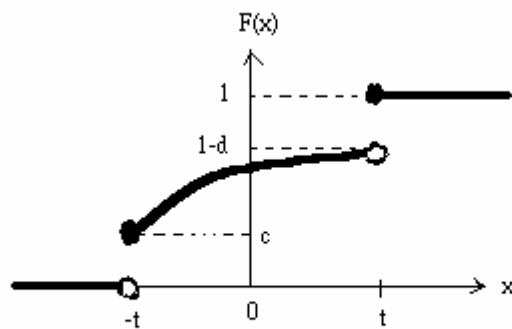


圖2.6 截斷於 $x = \pm t$ 混合型常態分配CDF



模擬出 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2) \Big|_{-t, t}^{iid}$

並由查表計算出 $P(D) = 2\bar{F}_y(t)$

或可用模擬算出 $\hat{P}(D) = P(x_i = \pm t) = \frac{\text{number of } D}{n}$

($\because x_i$ is iid \therefore by WLLN)

$$= \frac{[\text{number of } x_i = t] + [\text{number of } x_i = -t]}{n}$$

步驟 2. 排序找出觀測到的訊號先後次序

訊號進入時狀況可能如下：

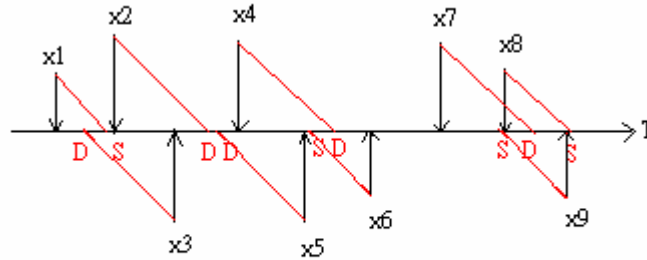


圖2.7 觀測到訊號為S或D時的實際時間

由圖 2.7 可以看出，我們觀測到的訊號先後次序並不是

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7 \rightarrow \dots$$

而是 $x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_4 \rightarrow x_9 \rightarrow \dots$

令 y_i 為訊號 x_i 真正觀測到並判別為 S 或 D 時之時間，則

$$y_i = x_i + i * d \quad , \quad \text{且 } d = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{。}$$

我們將 y_i 由小至大排列：

可得 $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq y_{(3)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ ，並找出每個對應的 x_j ，即 $y_{(i)} = x_j + j$

並令 $x_i'' = x_j$ ，則我們可以得到真正觀測到的訊號順序：

$$x_1'' \rightarrow x_2'' \rightarrow x_3'' \rightarrow \dots \rightarrow x_n''$$

並估算出 $\hat{P}(D | D_g) = P(x_{i+1}'' = t \text{ or } -t | x_i'' = t \text{ or } -t)$ ，方法跟模擬 1 時的

方法一樣。所以在此不加以詳述。

模擬結果 2：

$N(0, 1)$	t	$P(D)$	$P(D D_g)$
	0.6	0.548449	0.532477
	1.2	0.229883	0.203236
	1.8	0.071873	0.053764
	2.4	0.01666	0.010861
	3	0.002805	0.001642

由結果可以看出，在所有 CDF $\{F(x) | x \in \mathbb{R}\}$ 中，對於任意正數 t ，

$P(D | D_g) \leq P(D) = \bar{F}(t)$ 亦會成立。但我們並不加以證明之。

**假設 3**：

由模擬 2 的結果，我們合理懷疑當 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \stackrel{iid}{\sim} Normal(\mu, \sigma^2)$ ，經過上述方法排序(參考附錄 B)後，並找出 $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$ ，當進入 *steady state* 時，則 x_i'' 與 x_{i+1}'' 具有負相關，且 x_i'' 依然為常態分配。

模擬 3：

步驟 1. 模擬出 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100} \stackrel{iid}{\sim} Normal(0, 1)$

步驟 2. 根據特殊方法排序(參考附錄 B)，並找出 $x_1'', x_2'', \dots, x_{100}''$

步驟 3. 令 $Z_i = \frac{x_{5*i+1}'' + x_{5*i+2}'' + x_{5*i+3}'' + x_{5*i+4}'' + x_{5*i+5}''}{5} \quad i=0, 1, 2, \dots, 19$

步驟 4. 重覆 10 萬次步驟 1.2.3，並計算出共有幾個 $|Z_i| > \frac{1.96}{\sqrt{5}} \approx \frac{2}{\sqrt{5}}$

模擬結果 3：

D	Zi 的 i	$ Z_i > \frac{2}{\sqrt{5}}$ 個數	$ Z_i > \frac{3}{\sqrt{5}}$ 個數
1	0	31790	7522
	1	25067	5907
	2	3820	171
	3	3896	182
	4	3676	197
	5	3775	185
	6	3696	153
	7	3734	181
	8	3903	174
	9	3809	178
	10	3682	186
	11	3899	207
	12	3743	164
	13	3807	177
	14	3840	175
	15	3796	186
	16	3790	200
	17	3828	195
	18	3813	180
	19	5224	344

從 $i = 2, 3, \dots, 18$ 中，我們發現 $|Z_i| > \frac{1.96}{\sqrt{5}}$ 的個數，明顯小於 $100000 * 0.05 = 5000$ 個，

可見其變異數明顯變小。所以我們懷疑 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \sim \overset{iid}{Normal}(0, 1)$ 經過上述方法排序(參考附錄B)後，並找出 $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$ ，當進入 *steady state* (由模擬結果可看出 x_{11}'' 後已進入 *steady state*) 後，則 x_i'' 與 x_{i+1}'' 具有負相關，且 x_i'' 本身依舊為常態分配(於附錄E)。並將此性質運用於品質管制上(第三章)，得到不錯地改善效果。

其他變更訊號以單位時間 d 進入的模擬結果，我們將它放置於附錄 F 中。

第三章、將負相關運用於改善製程管制

3-1 統計製程管制概論

統計製程管制 (*statistical process control*，簡稱 *SPC*) 是利用抽樣樣本資料，來監視製程之狀態，在必要時採取調整製程參數之行動，以降低產品品質特性之變異性。統計製程管制為預防性之品質管制手段。所以說，製程管制比事後之檢驗，更能提昇產品品質。

3-2 管制圖之簡介

典型管制圖由三條線組成，其中包含中心線 (*center line*，*CL*)、上管制界限 (*upper control limit*，*UCL*) 及下管制界限 (*lower control limit*，*LCL*)。

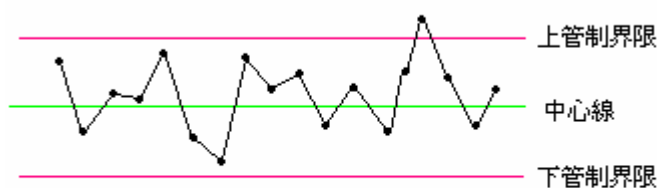


圖3.1 典型管制圖由三條線組成

所謂管制圖即將統計檢定之過程加以圖形化，如此不但可簡化統計檢定工作，且將連續檢定之結果繪於同一圖形內時，易於比較與分析。

例：

我們運用 SPC 對某產品抽樣，得樣本平均數 \bar{X}_n ，已知我們要求產品規格需滿足常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中假設 σ^2 為我們已知，而我們要的目標值 $\mu = \mu_0$ ，所以我們要檢定 $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_1: \mu \neq \mu_0$

sol：

(1)以臨界值檢定法，在型 I 誤差 α 下，臨界值為 $c_1 = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$c_2 = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，若 $\bar{X}_n > c_1$ 或 $\bar{X}_n < c_2$ ，則拒絕 H_0

(2)以 \bar{X} 管制圖（請參考附錄文獻）中，在型 I 誤差 α 下，**CL** 為 μ_0 ，

UCL 為 c_1 ，**LCL** 為 c_2 ，若管制圖中點(即 \bar{X})超出上下管制界限時，則拒絕 H_0 △



換言之，管制圖上每個點好比臨界值檢定法。一般管制圖以型 I 誤差 $\alpha=0.00135$ ，則 \bar{X} 管制圖：**UCL** = $\mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 、**CL** = μ 、**LCL** = $\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

在統計製程管制中，我們不單只對期望值做檢定工作，亦會對變異數做檢定，故有 R 管制圖及 S 管制圖(請參考附錄文獻)，用以監控變異數變動。

3-3 非傳統 \bar{X} 管制圖

一般傳統 \bar{X} 管制圖上的點，代表由同一時間下抽取數個樣本相加後取平均的值。其優點是能隨時監控每個時間點產品是否在製程管制內。

定義 3.1 非傳統 \bar{x} 管制圖

在不同的時間點上各只抽取一個代表性樣本（如 \bar{x} ），然後再將固定數個(5,6,..)

不同時間點上的樣本相加後取平均值，即可製成非傳統上的 \bar{x} 管制圖。 △

非傳統 \bar{x} 管制圖之缺點

由於非傳統 \bar{x} 管制圖上的點，並不是由同一時間抽取出的樣本，所以當非傳統 \bar{x} 管制圖上的點落在管制線外時，我們無法察覺哪個時間點上製程出問題。所以在使用非傳統 \bar{x} 管制圖，當發現有一點在管制線外時，我們只能找出製程在何區段時間出問題。所以非傳統 \bar{x} 管制圖僅適用於抽樣時間較短較頻乏的品質管制。



3-4 改善製程管制之方法：非傳統 \bar{x} 管制圖之優點

由 2-3 我們知道當 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \stackrel{iid}{\sim} Normal(\mu, \sigma^2)$ ，經過上述方法排序(參考附錄 B)，並找出 $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$ ，當進入 *steady state* 時，則 x_i'' 與 x_{i+1}'' 具有負相關。

則 $Cov(x_i'', x_{i+1}'') < 0$ ，並且 $Var(\frac{x_i'' + x_{i+1}''}{2}) = \frac{1}{4} [Var(x_i'') + Var(x_{i+1}'') + 2Cov(x_i'', x_{i+1}'')] < \frac{1}{4} [Var(x_i'') + Var(x_{i+1}'')] = Var(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ ，即 $Var(\frac{x_i'' + x_{i+1}''}{2}) < Var(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ 。

我們將此方法運用於製程管制上，假設某產品 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \stackrel{iid}{\sim} Normal(\mu, \sigma^2)$ ，經過上述方法排序(參考附錄 B)，並找出 $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$ ，當進入 *steady state* 時，則 x_i'' 與 x_{i+1}'' 具有負相關，且 x_i'' 本身依舊為常態分配。則

$$\text{Var}(\overline{X}_i'' = \frac{x_i'' + x_{i+1}'' + x_{i+2}'' + x_{i+3}'' + x_{i+4}''}{5}) < \text{Var}(\overline{X}_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4}}{5}) = \frac{\sigma^2}{5}$$

換言之，若 $\overline{X} \sim \text{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{5})$ 和 $\overline{X}'' \sim \text{Normal}(\mu, \frac{\sigma_1^2}{5})$ ，則 $\sigma_1^2 < \sigma^2$ 。我們將此

結果運用於管制圖上，以 \overline{X}'' 管制圖取代 \overline{X} 管制圖。我們在同一個型 I 誤差 α 風險下，因為 $\sigma_1^2 < \sigma^2$ ，所以型 II 誤差 β 風險會變小。偵測到平均值改變之機率為 $1-\beta$ 會變大。如此能讓品質管制人員更能準確地掌握製程狀態，儘快偵測出可歸屬原因之發生或製程之跳動，以便在更多不合格品製造出之前能發現製程之變異並進行改善工作。

排序之技巧：

如果產品規格 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ ，我們依附錄 B 方法排序時，我們不可能等收集到資料 $n \rightarrow \infty$ 再來排序，因為如此即失去製程管制的義意，立即監控產品規格。所以我們必須運用到統計方法的小技巧。假如 μ 跟 σ^2 已知：

$$\because x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma^2) \therefore P(x_1 < 10\sigma + \mu) \approx 1$$

設 $M = [10\sigma + \mu]$ （此處 $[]$ 為高斯符號），則 $P(x_1 < M) \approx 1$ 。並且已

$$\text{知 } P(x_{2M+1} > -M) \approx 1, \text{ 所以可推得 } \Rightarrow \begin{cases} P(x_1 - M < 0) \approx 1 \\ P(x_{2M+1} + M > 0) \approx 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x_1 - M < x_{2M+1} + M) \approx 1 \Rightarrow P(x_1 < x_{2M+1} + 2M) \approx 1$$

$$\Rightarrow P(x_1 + 1 < x_{2M+1} + 2M + 1) \approx 1 \Rightarrow P(y_1 < y_{2M+1}) \approx 1$$

所以我們可以先收集 $x_1, x_2, \dots, x_{2M+1}$ ，經過附錄 B 方法排序，我們即

可得 x_1'' 。然後從 $x_1, x_2, \dots, x_{2M+1}$ 中去除 x_1'' ，再收集一個資料 x_{2M+2} ，

將此 $2M+1$ 個資料依附錄 B 方法排序，可得 x_2'' 。同理依此方法我們可以有效地求得 $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$ ，並能迅速地算出每個 \overline{X}_i'' 。但我們興趣的是 $\overline{X}_i'' \sim Normal(\mu, \frac{\sigma_1^2}{5})$ ，而 σ_1^2 未知，所以我們必須先抽樣估得 $\hat{\sigma}_1^2$ ，在建立 \overline{X}'' 管制圖。

如果 μ 跟 σ^2 未知，我們就依照品質管制方法事先行收集資料估出 $\hat{\mu}$ 跟 $\hat{\sigma}^2$ ，在依照上述方法求得 \overline{X}'' 管制圖。



第四章、總結

當 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \sim^{i.i.d} F(x)$ ，經過上述方法排序(參考附錄 B)，並找出 $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$ ，當進入 *steady state* 時，則 x_i'' 與 x_{i+1}'' 具有負相關。

本論文利用 x_i'' 與 x_{i+1}'' 具有負相關，排序後的 \bar{X} 固然會比較集中，也就是說經過排序後的 \bar{X} 之變異數會變小，而其期望值會不變。本論文運用此法在品質管制上，控制型 I 誤差風險 α 值不變。而因為變異數的變小，則型 II 誤差風險 β 風險變小。

偵測到平均值改變之機率為 $1-\beta$ 會變大。如此能讓品質管制人員更能準確地掌握製程狀態，儘快偵測出可歸屬原因之發生或製程之跳動，以便在更多不合格品製造出之前能發現製程之變異並進行改善工作。

由於證明上需要相當的機率基礎，本論文中並尚未加以證明之。如能將模擬結果以數學方式證明出。並將其運用在各領域上，如醫學或生物科技上必有一番作為。

附錄 A :

我們探討 $t=3$ (已討論過), $4,5,6,\dots,k$ 時的 $P(D | D_0)$

$$t=3 \quad \bar{F}(3)[F(1)+\bar{F}(2)]\bar{F}(1)+F(2)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)+F(2)F(1)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)$$

$$t=4 \quad \bar{F}(4)[F(2)+\bar{F}(3)][F(1)+\bar{F}(2)]\bar{F}(1)+F(3)\bar{F}(4)[F(1)+\bar{F}(3)]\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(3)F(2)\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)+F(3)F(2)F(1)\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)$$

$$t=5 \quad \bar{F}(5)[F(3)+\bar{F}(4)][F(2)+\bar{F}(3)][F(1)+\bar{F}(2)]\bar{F}(1) \\ +F(4)\bar{F}(5)[F(2)+\bar{F}(4)][F(1)+\bar{F}(3)]\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(4)F(3)\bar{F}(5)[F(1)+\bar{F}(4)]\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(4)F(3)F(2)\bar{F}(5)\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(4)F(3)F(2)F(1)\bar{F}(5)\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)$$

$$t=6 \quad \bar{F}(6)[F(4)+\bar{F}(5)][F(3)+\bar{F}(4)][F(2)+\bar{F}(3)][F(1)+\bar{F}(2)]\bar{F}(1) \\ +F(5)\bar{F}(6)[F(3)+\bar{F}(5)][F(2)+\bar{F}(4)][F(1)+\bar{F}(3)]\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(5)F(4)\bar{F}(6)[F(2)+\bar{F}(5)][F(1)+\bar{F}(4)]\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(5)F(4)F(3)\bar{F}(6)[F(1)+\bar{F}(5)]\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(5)F(4)F(3)F(2)\bar{F}(6)\bar{F}(5)\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(5)F(4)F(3)F(2)F(1)\bar{F}(6)\bar{F}(5)\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)$$

由上面我們可觀測出 $t=k$ 時， $P(D | D_0)=$

$$\bar{F}(k)[F(k-2)+\bar{F}(k-1)][F(k-3)+\bar{F}(k-2)]\dots[F(1)+\bar{F}(2)]\bar{F}(1) \\ +F(k-1)\bar{F}(k)[F(k-3)+\bar{F}(k-1)][F(k-4)+\bar{F}(k-2)]\dots[F(1)+\bar{F}(3)]\bar{F}(2)\bar{F}(1)+ \\ F(k-1)F(k-2)\bar{F}(k)[F(k-4)+\bar{F}(k-1)][F(k-5)+\bar{F}(k-2)]\dots[F(1)+\bar{F}(4)]\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\ +F(k-1)F(k-2)F(k-3)\bar{F}(k)[F(k-5)+\bar{F}(k-1)]\dots[F(1)+\bar{F}(5)]\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)$$

++

$$\begin{aligned}
 & F(k-1)F(k-2)\dots F(3)\bar{F}(k)\left[F(1)+\bar{F}(k-1)\right]\bar{F}(k-2)\bar{F}(k-3)\dots\bar{F}(1) \\
 & + F(k-1)F(k-2)\dots F(2)\bar{F}(k)\bar{F}(k-1)\bar{F}(k-2)\dots\bar{F}(1) \\
 & + F(k-1)F(k-2)\dots F(1)\bar{F}(k)\bar{F}(k-1)\bar{F}(k-2)\dots\bar{F}(1)
 \end{aligned}$$

我們想要證明 $P(D | D_0) \leq P(D) = \bar{F}(k)$ 也會成立，因此我們要證明

$$\begin{aligned}
 & \left[F(k-2)+\bar{F}(k-1)\right]\left[F(k-3)+\bar{F}(k-2)\right]\dots\left[F(1)+\bar{F}(2)\right]\bar{F}(1) \\
 & + F(k-1)\left[F(k-3)+\bar{F}(k-1)\right]\left[F(k-4)+\bar{F}(k-2)\right]\dots\left[F(1)+\bar{F}(3)\right]\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\
 & + F(k-1)F(k-2)\left[F(k-4)+\bar{F}(k-1)\right]\left[F(k-5)+\bar{F}(k-2)\right]\dots\left[F(1)+\bar{F}(4)\right]\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1) \\
 & + F(k-1)F(k-2)F(k-3)\left[F(k-5)+\bar{F}(k-1)\right]\dots\left[F(1)+\bar{F}(5)\right]\bar{F}(4)\bar{F}(3)\bar{F}(2)\bar{F}(1)+\dots+ \\
 & F(k-1)F(k-2)\dots F(3)\left[F(1)+\bar{F}(k-1)\right]\bar{F}(k-2)\bar{F}(k-3)\dots\bar{F}(1) \\
 & + F(k-1)F(k-2)\dots F(2)\bar{F}(k-1)\bar{F}(k-2)\dots\bar{F}(1) \\
 & + F(k-1)F(k-2)\dots F(1)\bar{F}(k-1)\bar{F}(k-2)\dots\bar{F}(1) \leq 1
 \end{aligned}$$

同理我們令 $F(i) = x_i$ for $i=1, \dots, k-1$ 並且 x_i 滿足 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq 1$

因此我們要證明 $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}) =$

$$\begin{aligned}
 & \left[x_{k-2} + (1-x_{k-1})\right]\left[x_{k-3} + (1-x_{k-2})\right]\dots\left[x_1 + (1-x_2)\right](1-x_1) \\
 & + x_{k-1}\left[x_{k-3} + (1-x_{k-1})\right]\left[x_{k-4} + (1-x_{k-2})\right]\dots\left[x_1 + (1-x_3)\right](1-x_2)(1-x_1) \\
 & + x_{k-1}x_{k-2}\left[x_{k-4} + (1-x_{k-1})\right]\left[x_{k-5} + (1-x_{k-2})\right]\dots\left[x_1 + (1-x_4)\right](1-x_3)(1-x_2)(1-x_1) + \\
 & x_{k-1}x_{k-2}x_{k-3}\left[x_{k-5} + (1-x_{k-1})\right]\left[x_{k-6} + (1-x_{k-2})\right]\dots\left[x_1 + (1-x_5)\right](1-x_4)(1-x_3)(1-x_2)(1-x_1) \\
 & + \dots + x_{k-1}x_{k-2}\dots x_3\left[x_1 + (1-x_{k-1})\right](1-x_{k-2})(1-x_{k-3})\dots(1-x_1) \\
 & + x_{k-1}x_{k-2}\dots x_3x_2(1-x_{k-1})(1-x_{k-2})\dots(1-x_1) \\
 & + x_{k-1}x_{k-2}\dots x_3x_2x_1(1-x_{k-1})(1-x_{k-2})\dots(1-x_1) \leq 1 \text{ where } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq 1
 \end{aligned}$$

附錄 B :

排序方法 :

令 $y_i = x_i + i$, where $i = 1, 2, \dots, n$. 我們將 y_i 由小至大排列 :

$\Rightarrow y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq y_{(3)} \leq \dots \leq y_{(n)}$, 並找出每個對應的 x_j , 即 $y_{(i)} = x_j + j$

並令 $x_i'' = x_j$, 則我們可以得到

$\Rightarrow x_1'' \rightarrow x_2'' \rightarrow x_3'' \rightarrow \dots \rightarrow x_n''$

附錄 C :

Second derivatives test

Suppose the second partial derivatives of f are continuous on a disk with center (a, b) , and suppose that $f_x(a, b) = 0$ and $f_y(a, b) = 0$. Let

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- (a) If $D > 0$ and $f_{xx}(a, b) > 0$, then $f(a, b)$ is a local minimum.
- (b) If $D > 0$ and $f_{xx}(a, b) < 0$, then $f(a, b)$ is a local maximum.
- (c) If $D < 0$, then $f(a, b)$ is not a local maximum or minimum.

附錄 D :

A COURSE IN PROBABILITY THEORY , SECOND EDITION ,

Kai Lai Chung

Theorem 7.3.1 Suppose that $\{X_n\}$ is a sequence of m -dependent, uniformly

bounded r.v.'s such that $\frac{\sigma(S_n)}{n^{1/3}} \rightarrow +\infty$

as $n \rightarrow \infty$. then $[S_n - E(S_n)] / \sigma(S_n)$ converges in dist. to Φ .

附錄 E :

模擬 10000 個 x_i^n ，並做 **K-S 常態分配檢定**，與劃出 **Q-Q plot**.

$i = 11$

One sample Kolmogorov-Smirnov Test of Composite Normality

data: V1 in DS41

ks = 0.0063, p-value = 0.5

alternative hypothesis:

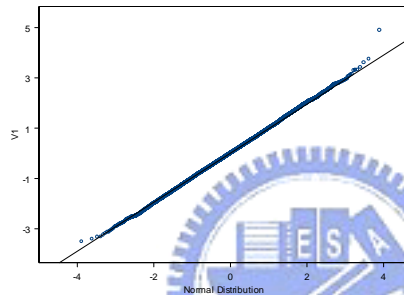
True cdf is not the normal distn. with estimated parameters

sample estimates:

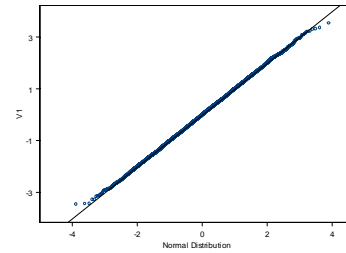
mean of x standard deviation of x

0.0106692

0.9952749

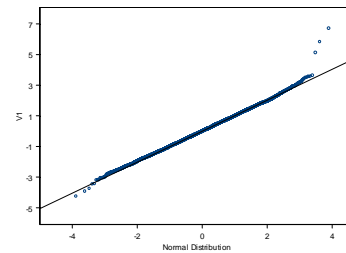


$i = 12$



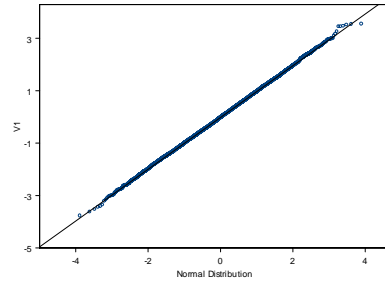
ks = 0.006, p-value = 0.5

$i = 13$



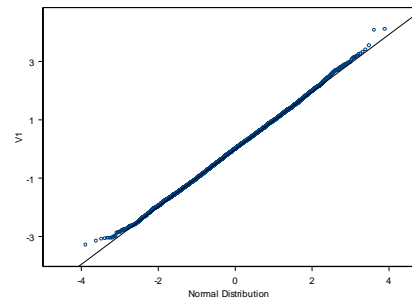
ks = 0.005, p-value = 0.5

$i=20$



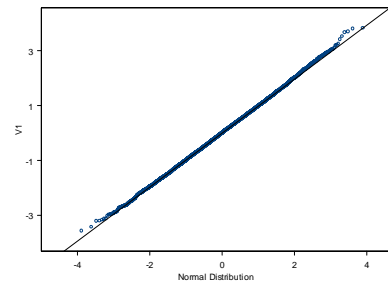
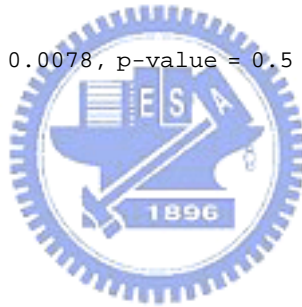
ks = 0.0064, p-value = 0.5

$i=30$



ks = 0.0078, p-value = 0.5

$i=90$



ks = 0.0052, p-value = 0.5

附錄 F :

用 X_{i+i*d} 來排

$$0 \text{ 表示取 } Z_0 = \frac{x_1'' + x_2'' + x_3'' + x_4'' + x_5''}{5}$$

$$1 \text{ 表示取 } Z_1 = \frac{x_6'' + x_7'' + x_8'' + x_9'' + x_{10}''}{5}$$

$$2 \text{ 表示取 } Z_2 = \frac{x_{11}'' + x_{12}'' + x_{13}'' + x_{14}'' + x_{15}''}{5}$$

$$3 \text{ 表示取 } Z_3 = \frac{x''_{16} + x''_{17} + x''_{18} + x''_{19} + x''_{20}}{5}$$

$$4 \text{ 表示取 } Z_4 = \frac{x''_{21} + x''_{22} + x''_{23} + x''_{24} + x''_{25}}{5}$$

$$5 \text{ 表示取 } Z_5 = \frac{x''_{26} + x''_{27} + x''_{28} + x''_{29} + x''_{30}}{5}$$

$$6 \text{ 表示取 } Z_6 = \frac{x''_{31} + x''_{32} + x''_{33} + x''_{34} + x''_{35}}{5}$$

$$7 \text{ 表示取 } Z_7 = \frac{x''_{36} + x''_{37} + x''_{38} + x''_{39} + x''_{40}}{5}$$

$$8 \text{ 表示取 } Z_8 = \frac{x''_{41} + x''_{42} + x''_{43} + x''_{44} + x''_{45}}{5}$$

$$9 \text{ 表示取 } Z_9 = \frac{x''_{46} + x''_{47} + x''_{48} + x''_{49} + x''_{50}}{5}$$

$$10 \text{ 表示取 } Z_{10} = \frac{x''_{51} + x''_{52} + x''_{53} + x''_{54} + x''_{55}}{5}$$

$$11 \text{ 表示取 } Z_{11} = \frac{x''_{56} + x''_{57} + x''_{58} + x''_{59} + x''_{60}}{5}$$

$$12 \text{ 表示取 } Z_{12} = \frac{x''_{61} + x''_{62} + x''_{63} + x''_{64} + x''_{65}}{5}$$

$$13 \text{ 表示取 } Z_{13} = \frac{x''_{66} + x''_{67} + x''_{68} + x''_{69} + x''_{70}}{5}$$

$$14 \text{ 表示取 } Z_{14} = \frac{x''_{71} + x''_{72} + x''_{73} + x''_{74} + x''_{75}}{5}$$

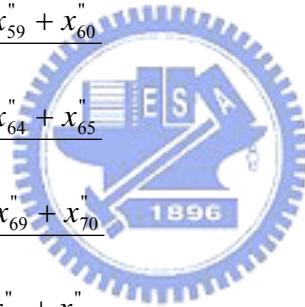
$$15 \text{ 表示取 } Z_{15} = \frac{x''_{76} + x''_{77} + x''_{78} + x''_{79} + x''_{80}}{5}$$

$$16 \text{ 表示取 } Z_{16} = \frac{x''_{81} + x''_{82} + x''_{83} + x''_{84} + x''_{85}}{5}$$

$$17 \text{ 表示取 } Z_{17} = \frac{x''_{86} + x''_{87} + x''_{88} + x''_{89} + x''_{90}}{5}$$

$$18 \text{ 表示取 } Z_{18} = \frac{x''_{91} + x''_{92} + x''_{93} + x''_{94} + x''_{95}}{5}$$

$$19 \text{ 表示取 } Z_{19} = \frac{x''_{96} + x''_{97} + x''_{98} + x''_{99} + x''_{100}}{5}$$



d	Zi 的 i	$ Z_i > \frac{2}{\sqrt{5}}$ 個數	$ Z_i > \frac{3}{\sqrt{5}}$ 個數
0.01	0	100000	99155
	1	99147	56471
	2	85367	10453
	3	48346	814
	4	16089	28
	5	3190	0
	6	398	0
	7	24	0
	8	1	0
	9	0	0
	10	0	0
	11	2	0
	12	45	0
	13	631	0
	14	4644	0
	15	21004	73
	16	56798	1437
	17	90229	15756
	18	99693	69684
	19	100000	99999
0.1	0	70937	24392
	1	12025	873
	2	4291	242
	3	3222	168
	4	3522	159
	5	3809	201
	6	4059	186
	7	3927	226
	8	8992	2222
	9	36031	10532
	10	19803	4751
	11	5922	842
	12	4097	262
	13	3899	218
	14	3731	199
	15	3505	139

	16	3230	153
	17	4227	235
	18	12228	938
	19	70912	24393
0.75	0	8026	1046
	1	56754	15375
	2	3466	135
	3	3532	152
	4	3350	164
	5	3512	160
	6	3342	128
	7	3468	177
	8	3582	151
	9	3426	148
	10	3410	165
	11	3492	168
	12	3381	130
	13	3501	147
	14	3523	152
	15	3390	152
	16	3507	145
	17	3437	160
	18	3438	139
	19	6247	484
1	0	31790	7522
	1	25067	5907
	2	3820	171
	3	3896	182
	4	3676	197
	5	3775	185
	6	3696	153
	7	3734	181
	8	3903	174
	9	3809	178
	10	3682	186
	11	3899	207
	12	3743	164
	13	3807	177

	14	3840	175
	15	3796	186
	16	3790	200
	17	3828	195
	18	3813	180
	19	5224	344
3	0	57663	17744
	1	4550	265
	2	4589	280
	3	4560	263
	4	4524	291
	5	4516	251
	6	4456	262
	7	4506	281
	8	4561	277
	9	4569	285
	10	4562	272
	11	4556	254
	12	4576	245
	13	4570	233
	14	4551	274
	15	4641	270
	16	4499	273
	17	4578	258
	18	4603	290
	19	4596	257
5	0	58677	18457
	1	4564	264
	2	4560	274
	3	4575	262
	4	4516	284
	5	4519	250
	6	4519	251
	7	4488	300
	8	4564	276
	9	4555	293
	10	4607	283
	11	4551	250

	12	4579	242
	13	4569	258
	14	4547	278
	15	4674	268
	16	4523	272
	17	4622	266
	18	4631	282
	19	4609	254
10	0	58693	18467
	1	4560	265
	2	4559	272
	3	4570	260
	4	4517	284
	5	4522	249
	6	4518	250
	7	4487	303
	8	4559	273
	9	4563	296
	10	4598	282
	11	4546	251
	12	4583	243
	13	4563	257
	14	4540	278
	15	4678	268
	16	4529	272
	17	4620	269
	18	4622	280
	19	4606	255

參考文獻：

- 1、鄭春生(民國八十五年)，品質管理，台北，三民書局
- 2、Alwan,L.C.,and D. Radson,"Time-series investigation of subsample mean chart,"IIE Transactions,24,66-80(1992)
- 3、Kai Lai Chung, "A COURSE IN PROBABILITY THEORY , SECOND EDITION",second edition.

