

# 國立交通大學

物理研究所

碩士論文

Brane 宇宙學在 Bianchi I, Bianchi III 以及  
Kantowski-Sachs 模型下的時空研究

Brane Cosmology on Bianchi I, Bianchi III  
and Kantowski-Sachs Spaces

研究生：鍾旻峰 (Ming-Fun Chun)

指導教授：高文芳 教授 (Prof. Win-Fun Kao)

中華民國九十三年七月

Brane 宇宙學在 Bianchi I, Bianchi III 以及 Kantowski-Sachs 模  
型下的時空研究

Brane Cosmology on Bianchi I, Bianchi III and Kantowski-Sachs  
Spaces

研 究 生：鍾旻峰

Student : Ming-Fun Chun

指導教授：高文芳

Advisor : Win-Fun Kao

國立交通大學

物理研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Physics

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master

in

Physics

July 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

# 國立交通大學

## 博碩士論文著作權授權書

本授權書所授權之論文為本人在國立交通大學(學院)物理研究所 理論 組，92 學年度第 2 學期取得碩士學位之論文。

論文名稱：Brane 宇宙學在 Bianchi I, Bianchi III 以及 Kantowski-Sachs 模型下  
的時空研究

指導教授：高文芳

同意  不同意 (國科會科學技術資料中心重製上網)

本人具有著作財產權之上列論文全文(含摘要)資料，授予行政院國家科學委員會科學技術資料中心(或改制後之機構)，得不限地域、時間與次數以微縮、光碟或數位化等各種方式重製後散布發行或上載網路。

本論文為本人向經濟部智慧財產局申請專利(未申請者本條款請不予理會)的附件之一，申請文號為：\_\_\_\_\_，註明文號者請將全文資料延後半年再公開。

同意

本人具有著作財產權之上列論文全文(含摘要)，授予國立交通大學與台灣聯合大學系統圖書館，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，與回饋社會及學術研究之目的，國立交通大學圖書館及台灣聯合大學系統圖書館得不限地域、時間與次數，以微縮、光碟或其他各種數位化方式將上列論文重製，並得將數位化之上列論文及論文電子檔以上載網路方式，於著作權法合理使用範圍內，讀者得進行線上檢索、閱覽、下載或列印。

論文全文上載網路公開之範圍及時間：

本校及台灣聯合大學系統區域網路	<input checked="" type="checkbox"/> 中華民國 94 年 7 月 20 日公開
校外網際網路	<input checked="" type="checkbox"/> 中華民國 94 年 7 月 20 日公開

上述授權內容均無須訂立讓與及授權契約書。依本授權之發行權為非專屬性發行權利。依本授權所為之收錄、重製、發行及學術研發利用均為無償。上述同意與不同意之欄位若未勾選，本人同意視同授權。

研究生：鍾旻峰

學號：

9127508

親筆正楷：\_\_\_\_\_ (務必填寫)

中華民國 93 年 7 月 20 日

# 國家圖書館

## 博碩士論文電子檔案上網授權書

本授權書所授權之論文為本人在國立交通大學(學院)物理研究所 理論 組，92 學年度第 二 學期取得碩士學位之論文。

論文名稱：Brane 宇宙學在 Bianchi I, Bianchi III 以及 Kantowski-Sachs 模型下的時空研究

指導教授：高文芳

### ■ 同意

本人具有著作財產權之上列論文全文(含摘要)，以非專屬、無償授權國家圖書館，不限地域、時間與次數，以微縮、光碟或其他各種數位化方式將上列論文重製，並得將數位化之上列論文及論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

上述授權內容均無須訂立讓與及授權契約書。依本授權之發行權為非專屬性發行權利。

依本授權所為之收錄、重製、發行及學術研發利用均為無償。上述同意與不同意之欄位

若未勾選，本人同意視同授權。

研究生：鍾旻峰

學號：9127508

親筆正楷：\_\_\_\_\_ (務必填寫)

中華民國 93 年 7 月 20 日

## 致謝

首先感謝父母生我，養我，教育我；再來感謝我的女朋友淳茹，我會來念這裡，以及能夠有信心完成這篇論文都在有她的鼓勵下而完成；在研究剛開始的黑暗時代裡，有我的新 朋友 Osamu Seto 不厭其煩的教導我與帶領我如何做研究的方向；在完成論文的重要的過程中，有 陳正彬一起討論與研究真的是大大的幫了我很多，沒有他的一起研究我想論文也不會這麼快完成了，能夠有一段這麼長的時間與人一起研究討論這還是第一次，感覺真的很好，不僅跟正彬一起學到了討論問題 與解決問題的方法，也學到了互相扶持的重要性，真的是很棒的經驗；許書豪學長在工作之餘花了許多時間與我們討論與指導，真的很感謝；高文芳老師則是有著畫龍點 睛之妙的在我們該有問題時在旁加以指導；林貴林老師則不止在物理上，當 我有個人問題時老師也都能跟老師討論與分享心中的問題。在這裡兩年下來，覺得最可貴的 就是交了不少愛好物理的朋友：與黃祺筌的認識不僅在物理上，在哲學思考上，在心裡探討上 真是不可多得的討論對象；蔡明燃與容震軒則一起討論了不少物理，讓我對物理的了解又更紮實了，此外他們 更是在我們處理電腦問題時不可多得的導師，以一個程式新手來說，他們真的是教了我們許多；在蔡岳霖與室友王文偉聊了許多的人生經驗談，讓我在這第一次住外的孤獨個體來說，讓我的住宿 生活充實了許多；與李建邦討論功課中讓我知道做學問要紮實的重要性。還有很多很多班上的同學 雖然很多人平常都在實驗室，不過感情依舊，想起我們大家到大雪山的畢業旅行真的是十分令人回憶 的快樂時光阿。當然還要感謝每週五下午一起打球的所有老師，同學，學弟妹，學長姐們，從國中就想打棒球或壘球了終於可以在念到物理所的時候一享打球的快樂。再次的謝謝大家，今後在我人生的 放映室裡，一定會時常播放這段美好的回憶...

## 摘要

在這篇論文中, 我們從 Bianchi I, Bianchi III 和 Kantowski-Sachs 模型開始出發; 一個均勻 (Homogeneity) 且非各向同性 (anisotropy) 的宇宙學模型; 進而求得愛因斯坦方程式的解, 然後討論由這愛因斯坦方程式的解所傳達給我們的關於宇宙演化的訊息。除此之外, 我們在這篇論文中做了兩點重要的假設: 一是我們視的宇宙整個的能量與動量的分佈為一個理想的流體 (perfect fluid) 的模型, 另一個是假設我們所活在世界是一個較以前所認知的四維時空再多出一個維度的五維的時空, 而這五維時空 (brane spaces) 的理論性質是在最近的二十年的研究中一直被探討著的。在分析完這三個模型對愛因斯坦方程式的解後, 我們可以知道在這三個模型都會在晚期演化成均勻 (Homogeneity) 且各向同性 (Isotropy) 的性質, 而且在晚期宇宙的演化中, 宇宙常數 (cosmology constant) 成為主導著宇宙演化的重要參數; 在早期宇宙的演化中, 則是我們所考慮的五維時空中的五維參數 (brane constant) 成為主導著宇宙演化的重要參數; 另外, 我們也得到在我們考慮重力常數也會有成為主導著宇宙演化的重要參數的時候, 也是在早期的宇宙時, 略晚於五維參數主導的時間之後。

# Contents

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
1.1	FRW的宇宙學模型 . . . . .	6
<b>2</b>	<b>五維時空宇宙學</b>	<b>10</b>
2.1	模型 . . . . .	13
2.2	Brane宇宙學的 Bianchi type I,Bianchi type III 與 Kantowski-Sachs 的時空幾何 . . . . .	15
<b>3</b>	<b>分析與討論</b>	<b>19</b>
3.1	體積尺度因子的演化 . . . . .	21
3.1.1	近似解之求得 . . . . .	21
3.1.2	近似解與數值解之比較 . . . . .	24
3.2	非各向同性參數的演化 . . . . .	31
<b>4</b>	<b>結論</b>	<b>34</b>
<b>5</b>	<b>附錄</b>	<b>36</b>
5.1	Vacuum Einstein equation . . . . .	36
5.2	Einstein equation with energy momentum tensor . . . . .	47

# Chapter 1

## 序論

宇宙學 (Cosmology) 的起源其實很早就已經開始發展了, 許多的古老的民族都會有自己對宇宙的理解與看法, 可是由於觀測上的不足, 也只落於哲學, 玄學與神學的範疇。一直到了最近兩個世紀以 來, 由於科學的發展與觀測技術的進步, 使宇宙學終於成爲一個可量策, 可數據化的一門科學, 而且許多的理 論也可被證實。

在1920年, 愛因斯坦提出了廣義相對論, 開啓了宇宙學的研究的理論基礎。1929年, 哈伯透過望遠鏡的星系光譜紅位移的觀測, 發現了宇宙中其他的星系正處於日漸遠離地球的狀態, 因此證實了宇宙膨脹說。此動態的宇宙比靜態的宇宙更吸引人們的好奇, 許多人因此投入了研究宇宙演化的 探討與研究, 我們也是其一。

在1965年, Penias 與 Wilson 發現了宇宙微波背景輻射 (Cosmology Microwave Background), 這微小的輻射源換算成溫度約爲2.7度 K, 且均勻的分佈於宇宙之間。這項發現證實了大爆炸理論的正確, 更開啓了我們研究宇宙的年齡, 演化等的重要資料來源。由 CMB 的觀測我們可知現在的宇宙間物質與能量的 分佈是均勻且各向同性的。由這兩個基本的宇宙的性質, 使我們有 Friedmann-Roberson-Worker 的宇宙學模型。這模型是考慮宇宙自始至末都是均勻且各向同性的狀態, 但隨著觀測精確度的進步, 我們知道宇宙間 CMB 的分 佈其實具有些維的差異性存在, 即  $\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}$ , 這告訴我們宇宙的起使狀態可能 與現在不同, 因此我們考慮用一個均勻但卻非各向同性的宇宙學模型(Bianchi 模型, Kantowski-Sachs 模型), 來進行研究宇宙的演化。

說到五維時空的宇宙學的起源, 早在1919年, 俄羅斯的年輕數學家 Kaluza 他理解到重力可以用四維空 間的時空連續體的曲率來予以詮釋, 那麼電磁作用力一樣也可以用五維空間的時空連續體的曲率來表明。表達在五維時空架構中的廣義相對論方程



式賦予重力一如往常的描述，與其同時出現的另一組方程式在數學上則相當於馬克士威的電磁學方程組。我們稱五維時空為 3-brane，即是四維時空被壓縮成一個五維的一個面內，而那第五維則在那五維時空（我們稱為 bulk）內。然而，為了不違反重力的實驗結果，這第五維應該要極為微小的（小到 Planck scale 的尺度）和幾乎觀測不到的。而在後來，瑞典物理學家 Klein 則是把量子物理學的觀點合併於 Kaluza 的五維空間的理論中，他重新寫了薛丁格方程式，以五個變數代替原來的四個，從而證明該方程式的解釋可以被詮釋為粒子-波再重力場與電磁場二者影響下之運動的描述。不過此方法後來不是被認為行不通。

但是在 1980 年代期間，由於統一理論的 Kaluza-Klein 觀點重新被提出來，一些物理學家認為強力與弱力終於是可以被概括起來的。於是一直到現在，所有新出來的 paper 中，有一半的份量都是再談論 brane。而這近期的研究又以 Randall-Sundrum [1] [2] 的相關方面的 paper 最為重要，他們所做的研究察解到 Brane Cosmology 與標準的四維的 cosmology 在晚期宇宙是相同的。而且也察解到，如果動量張量是理想流體的形式，那只有些特別的 Homogeneous 宇宙是被允許的。所以在這裡我們追隨 Randall-Sundrum [1] 的研究，而且考慮這 brane 的宇宙是在當我們的 bulk space 在五維的 Anti-deSitter space。然後我討論的模型是一個均勻 (Homogeneity)，非各向同性 (Anisotropy) 的宇宙學模型；Bianchi type I, Bianchi type III 和 Kantowski-Sachs 模型。

在皆下來的 1.1 節中，我們將簡短的說明一下一般我們說到的宇宙學，一個均勻且各向同性的 F-R-W 的宇宙學，以及此模型的基本性質；然後在第二章中，我們將回顧五維時空宇宙學的基本理論架構與背景，讓我們對五維時空的架構有個清楚的理解；最後在 2.1 節中我們則要大概地說明我們所使用的 BI, BIII 與 KS 模型。在 2.2 節中，我們會對如何得到愛因斯坦方程的解的步驟做一簡略的推導與說明，詳細的推導將放置附錄。在第三章中我們將對我們解得的愛因斯坦方程所要做的分析與探討這這裡加以討論。最後在第四章給予結論。

## 1.1 FRW的宇宙學模型

愛因斯坦的狹義相對論的提出，說明了時間與空間是不可分割的且互相影響的，這打破了從前舊時代基本的對時間與空間的認識。更在1920年，愛因斯坦提出了繼狹義相對論後提出了廣義相對論，可謂是對重力探討的一個新紀元，而且也成為我們研究宇宙學的很有用的理論工具。我們的愛因斯坦方程式 (Einstein Equation) 可從作用量原理 (Action Principle) 求得，而包含了重力的作用量的廣義形式可以表示為：

$$S = - \int d^4x \sqrt{g} \left( \frac{R}{16\pi G} + L_{matter} \right) \quad (1.1)$$

這裡  $R$  所表示的是黎曼曲率張量 (Riemann curvature tensor),  $G$  則是重力常數 (Gravitational constant), 而  $L_{matter}$  是物質場的 Lagrangian. 在我們對  $g_{\mu\nu}$  做變分後，我們即可求得愛因斯坦方程式：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

在這裡  $T_{\mu\nu}$  是能量動量張量 (Energy Momentum Tensor),  $g_{\mu\nu}$  是 Metric Tensor, 這 Metric Tensor 就好像一把用來度量宇宙的一把尺，度量著宇宙的大小，而 Ricci scalar ( $R$ ) 和 Ricci 張量  $R_{\mu\nu}$  則告訴我們空間彎曲的程度。所以這愛因斯坦方程式的等號的右邊是物質與能量，而這物質與能量如何影響我們空間的彎曲則在等號的左邊表現出來。

根據我們在大尺度下 ( $\geq 100 Mpc$ ) 觀測宇宙背景輻射 (Cosmic Microwave Background (CMB)) 的結果，我們知道我們現在的宇宙是均勻 (Homogeneity) 且各向同性 (Isotropy) 的，這均勻性告訴我們，我們所觀測到的物理量的性質與其所在的位置無關；而各向同性告訴我們，所觀測的物理量在各方向上其性質接相同。我們通常稱這兩個基本性質為宇宙學原理。從愛因斯坦的廣義相對論中，嚴格的證明了符合宇宙學原理的空間具有最高的對稱性，而在數學上，具有最高對稱性的三維空間為曲率等於常數的三維球面。此三維球面可以作為四維的平直空間的超球面處理。Friedmann-Roberson-Worker (F-R-W) 的宇宙學模型就是以上述原則所求出，進

而可 由此模型對我們宇宙的演化得到一個好的描述。這 F-R-W 模型的線元為：

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2\right) \quad (1.3)$$

在上式中  $R(t)$  為尺度因子 (Scale Factor)，這尺度因子是隨著時間在演化的，尺度因子的演化也說明了宇宙空間的演化。  $k$  為空間的曲率常數，這裡  $k = 1, 0, -1$ ，當  $k = 0$  時，我們的空間是一個平直空間；當  $k = 1$  時，可把我們所在的空間看做是一個球的表面；當  $k = -1$  時，可把我們所在的空間看做是一個馬鞍曲面。  $r, \theta, \phi$  為球座標， $t$  為時間。此外，這線元  $ds^2$  滿足相對論中的基本性質，即在座標轉換中 (Lorentz Transformation) 其值保持不變。這告訴我們，在我們做研究或觀測時，我們可以選取一個最適合的座標來做探討，而結果是不變的。再者 Metric Tensor  $g_{\mu\nu}$  在線元的定義下只有在 trace 上有值：

$$g_{\mu\nu} = g_{ii} = \left(-1, \frac{R^2(t)}{1 - kr^2}, R^2(t)r^2, R^2(t)r^2 \sin^2\right) \quad (1.4)$$

由於 F-R-W 模型的高度對稱性我們可以簡單的求得 Christofol symbol ( $\Gamma_{jk}^i$ ) 的非零分量：

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{\dot{R}}{R} g_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{R}}{R} \delta_j^i \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.4 式即為 Christofol symbol 的定義。這 Christofol symbol 具有非零值的出現，告訴我們空間是彎曲的性質。這 Ricci tensor 的定義為  $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu}$ ，而  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  是所謂的黎曼曲率，這黎曼曲率定義著我們空間彎曲的程度。然後我們即可求得空間的曲率的二階張量 Ricci Tensor 的非零分量：

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{R}}{R}$$

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{2k}{R^2}\right) \quad (1.6)$$

以及零階張量 Ricci Scalar:

$$R = -6\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) \quad (1.7)$$

而這描述尺度因子  $R(t)$  演化的力學方程式可以從解愛因斯坦方程式得到:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

在這裡  $T_{\mu\nu}$  我們取的是理想流體的形式, 其分量為  $T_0^0 = -\rho$ ,  $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p$ .  $\rho$  為宇宙間能量密度,  $p$  為壓力。在解方程式時所得到的 00 分量的方程式, 一般來說我們稱做 Fridmann Equation:



$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (1.9)$$

然後, 我們可以進一步的將 Fridmann Equation 改寫為:

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi G}} - 1 \equiv \Omega - 1 \quad (1.10)$$

這裡  $\Omega$  是能量密度對 critical density  $\rho_c$  的比值。

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

上式中,  $H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$  是所謂的哈伯常數 (Hubble constant). 根據近期的觀測 宇宙背景輻射的資料中我們知道  $\Omega \rightarrow 1$ , 這也意味著  $k \rightarrow 0$ . 這說明了我們的宇宙是如此的平滑, 在大尺度下我們的宇宙空間近乎平直的空間。

此外，在觀測中我們又知道，此愛因斯坦方程式必須重新把當初愛因斯坦爲了使方程式達到靜止 宇宙的條件而加入的宇宙常數（但後來發現宇宙其實是動態的而又丟去）加回愛因斯坦方程中才可進一步解釋觀測 得結果。所以愛因斯坦方程可重寫爲：


$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

上式中， $\Lambda$ 即爲宇宙常數。在一些簡單的計算後 ( $k=0$ ) 我們可得知：

$$R(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \quad (1.12)$$

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (1.13)$$

這說明了我們現在的宇宙是以指數的形式 $e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$ 成長，而宇宙學常數 $\Lambda$  成了影響宇宙演化的重要參數。 $H$ 是哈伯常數，這常數的定義爲：

$$v = H * r \quad (1.14)$$


$v$ 爲遠方的星球遠離我們的速度， $r$ 爲遠方的星球與我們的距離。這哈伯定律告訴我們，越遠的星球遠離我們 的速度越快。所以由 Eq1.13可以知道宇宙常數影響著遠方的星球遠離我們的速度。而這個宇宙常數 $\Lambda$ 是什麼呢？到現在還沒有真正的確定下來，在本篇論文中我們也不加探討。

## Chapter 2

### 五維時空宇宙學

我們知道五維時空的想法早在1919年就有人提出,但在早期並不受重視,直到1980年代其間,由於統一理論的 Kaluza-Klein 觀點重新被提出來,一些物理學家認為強力與弱力終於是可以被概括起來的。於是一直到現在,所有新出來的 paper 中,有一半的份量都是再談論 brane。而這近期的研究又以 Randall-Sundrum的相關方面的 paper [1] [2]為主要,他們所做的研究察解到 brane cosmology 與標準的四維的cosmology 在晚期宇宙是相同的。而且也察解到,如果能量動量張量 是理想流體的形式,那只有有一些特別的 Homogeneous 宇宙是被允許的。

在 Randall-Sundrum 的模型中,我們身活着的四維時空是五維時空中的一個面,而多出來的地五維度是垂直於 四維時空的空間座標軸。五維的空間一般我們稱為 bulk, 而其面稱為 3-brane。而這有效的重力方程在 brane 上的形式為:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -g_{\mu\nu}\Lambda + k_4^2 T_{\mu\nu} + k_5^4 S_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

這裡 $G_{\mu\nu}$ 指的是 Einstein 張量,代表著愛因斯坦方程式中幾何的部分。 $T_{\mu\nu}$ 為能量動量張量, $g_{\mu\nu}$ 是 brane(4D) 上的度規張量。上式中的參數 $\Lambda, k_4^2, k_5^4$ 分別代表著宇宙學常數,四維 時空的複和的重力常數 ( $k_4^2 = 8\pi G$ ), 五維時空中複和的重力常數。 $E_{\mu\nu}$ 則為在五維中的量。而這 四維時空中的宇宙常數,複和重力常數與五維時空中 bulk 的宇宙常數 $\Lambda_5$ ,bulk 中的複和重力常數 $k_5$ , 及真空中的能量 $\lambda$ , $\lambda$ 有一關係式:

$$\Lambda = k_5^2 \left( \frac{\Lambda_5}{2} + \frac{k_5^2 \lambda^2}{12} \right) \quad k_4^2 = \frac{k_5^4 \lambda}{6} \quad (2.2)$$



$S_{\mu\nu}$ 是能量動量張量 $T_{\mu\nu}$ 的二次複和的貢獻, $E_{\mu\nu}$ 為 bulk 上的效應,

$$E_{\mu\nu} = C_{iajb}n^an^b \quad (2.3)$$

這裡 $C_{iajb}n^an^b$ 稱為 bulk 中的五維 Weyl tensor。此外, 在 Eq2.1中複和的能量動量張量 $S_{\mu\nu}$ (並非五維中的能量動量張量) 可以由 $T_{\mu\nu}$ 複和的表示為:

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{12}TT_{\mu\nu} - \frac{1}{4}T_{\mu}^{\alpha}T_{\alpha\nu} + \frac{1}{24}g_{\mu\nu}(3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2) \quad (2.4)$$

在這裡, $T_{\mu\nu}$ 我們所研究的是一個具有相當對稱性且不複雜的形式, 所以選取的是理想流體的形式, 理想流體的能量動量張量的非零分量為:

$$T_0^0 = -\rho \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p \quad (2.5)$$

這能量動量張量取為理想流體的形式告訴我們, 在我們可視為質點的物理量之間彼此沒有交互作用 (如熱傳... 等)。此外, $T = T_{\mu}^{\mu}$ 是這能量動量張量的 trace。即 $T = T_{\mu}^{\mu} = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$ 。這裡宇宙流體的能量密度 $\rho$ 和壓力  $p$  在宇宙學上符合此關係式:

$$p = (\gamma - 1)\rho \quad (2.6)$$

這裡 $\gamma$ 為一個常數且其範圍為  $1 \leq \gamma \leq 2$  .

根據方程 Eq2.1式, 我們可以發現到, 當 $E_{\mu\nu} = 0$ 且 $k_5 \rightarrow 0$ 時, 我們將回到一般的非 brane 中的愛因斯坦方程式, 可見這考慮五維時空的宇宙學模型較四維的時空的宇宙學模型更為廣義。在我們的這篇論文中, 將不考慮 $E_{\mu\nu}$ 的 bulk 上的效應, 即令 $E_{\mu\nu} = 0$ 來做為我們探討五維時空宇宙的一個基本假設。

此外, 我們也了解到在 brane 上也符合能量守恆定律, 而在廣義相對論中能量守恆定律可表示為:

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.7)$$

這裡 $\nabla$ 為共變微分 (Covariant Differentiation), 他是四維時空中的微分, 作用在二階張量的能量動量 張量之形式為:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{;\mu} = T^{\mu\nu}_{,\mu} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + T^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} \quad (2.8)$$

在之後我們會發現, 在解了愛因斯坦方程式與此能量守恆方程式的解做連立方程後, 我們即可求得我們所想研究的 宇宙的演化, 即尺度因子的演化方程式。





## 2.1 模型

在實驗上, 隨著觀測精確度的進步, 我們知道宇宙間 CMB 的分佈其實具有些微的差異性存在, 即  $\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}$ , 這告訴我們宇宙的起使狀態可能與現在不同; 在理論上, 根據 paper [5]的工作我們知道如要考慮使用理想流體模型的能量動量張量, 一個非均勻(Inhomogeneity) 的宇宙學模型是不可接受的, 故我們選擇了一個均勻 (Homogeneity) 的宇宙學模型, 這模型的建構在 [6]中給予了詳細的論證。在我們這篇論文中我們選擇了其中三個模型Bianchi type I, Bianchi type III 和 Kantowski-Sachs 的模型因為這三個模型其實有很相似的數學形式, 所以可以放在一起探討。於是我們有一個包含了三個模型的線元形式:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -d(t)^2 dt^2 + a_1(t)^2 dr^2 + a_2(t)^2 (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\varphi^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

在上式中,  $d(t), a(t), b(t)$  為隨著時間演化的尺度因子,  $r, \theta, \varphi$  為球座標。隨著  $f(\theta)$  的不同定義, 我們可以分別得到三個非各向同性的宇宙學模型:

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta & , \text{Bianchi type I} \\ \sin \theta & , \text{Kantowski-Sachs} \\ \sinh \theta & , \text{Bianchi type III} \end{cases}$$

為了更為方便且更為清楚的了解宇宙的演化, 我們在這裡引入一些變數:

$$V \equiv a(t)b(t)^2 \quad , \quad \text{volume scale factor} \quad (2.10)$$

$$H_i \equiv \frac{\dot{a}_i}{a_i} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad \text{directional Hubble factors} \quad (2.11)$$

$$H \equiv \frac{1}{3}(H_1 + 2H_2) = \frac{\dot{V}}{3V} \quad , \quad \text{mean Hubble factor} \quad (2.12)$$

$$A \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{(H_i - H)^2}{3H^2} \quad , \quad \text{mean anisotropy parameter} \quad (2.13)$$

Eq2.10 為體積的尺度因子，我們之後的研究主要的部分就是在探討這體積尺度因子的演化。Eq2.13 為 平均的非各向同性的參數，我們可以從這非各向同性參數隨時間的演化來探討此三個模型的發展形式。



## 2.2 Brane宇宙學的 Bianchi type I, Bianchi type III 與 Kantowski-Sachs 的時空幾何

現在我們及將要探討這三個均勻且非各向同性的宇宙學模型 Bianchi type I, Bianchi type III 與 Kantowski-Sachs(之後我們簡寫為 BI, BII, KS) 在五維下的時空結構。我們先從前一節中可以知道我們所選取的模型的線元 $ds^2$ 的形式, 知道了線元後我就知道了這模型的度規張量

$$g_{\mu\nu} = (-1, a_1(t)^2, a_2(t)^2, a_2(t)^2 f(\theta)^2) \quad (2.14)$$

由這度量宇宙的一把尺 (Metric Tensor) 出發, 我們下一步要求得 Christoffel symbol( $\Gamma_{jk}^i$ ) 這告訴我們宇宙是彎曲的的張量, 然後再求得表現空間彎曲的程度的黎曼曲率 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , 再由黎曼曲率得到 Ricci張量 $R_{\mu\nu}$ 與 Ricci 曲率常數 $R$ 後, 我們最後再把這些帶回我們五維時空的愛因斯坦方程式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -g_{\mu\nu}\Lambda + k_4^2 T_{\mu\nu} + k_5^4 S_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

在上式中, 等號右邊為物質與能量的部分,  $\Lambda$ 為宇宙學常數, 能量動量張量 $T_{\mu\nu}$ 如先前所定義的 我們假設為理想流體的形式,  $S_{\mu\nu}$ 則為能量動量張量的複和量, 在這些物理量確定之後, 我們便可以開始 做張量計算, 由於過程複雜繁複, 所以我們會將其詳細的過程放在附錄裡, 而在論文的正文中僅列出重要結果。所以在經過一番計算後, 我們可以得到五維時空下愛因斯坦方程式的三個分別為00,11,22分量的解:

$$\left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1}\right)\left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) + \frac{k}{a_2^2} = \Lambda + k_4^2\rho + \frac{1}{12}k_5^4\rho^2 \quad (2.16)$$

$$2\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)^2 + \frac{k}{a_2^2} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho^2(1 - 2\gamma) \quad (2.17)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1}\right)\left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho^2(1 - 2\gamma) \quad (2.18)$$

在上式中  $k = 0, 1, -1$  時分別代表著 BI, KS 與 BIII 模型,  $\rho$  為隨時間演化的能量密度, 而  $\gamma$  為範圍在  $1 \leq \gamma \leq 2$  的參數。我們從這三個方程式中可知道我們所得到的是尺度因子的演化與能量密度間的關係 但是因為能量密度隨著時間改變使得我們無法清楚的了解宇宙的演化, 所以我們還需要考慮在相對論中的能量 守恆定律:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.19)$$

根據這共變微分  $\nabla$  作用在能量動量二階張量, 經過一番的計算後我們可以得到隨著時間變化的能量密度與 尺度因子有著一定的關係式:

$$\dot{\rho} + \rho\gamma\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + 2\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) = 0 \quad (2.20)$$

所以我們知道這流體的能量密度的隨著時間的演化定律為 ( $V = a_1 a_2^2$ ):

$$\rho = \rho_0 V^{-\gamma}, \quad \rho_0 = constant > 0 \quad (2.21)$$

由這能量密度的求得, 我們可以了解到我們所得到的愛因坦方程式的解就只剩下尺度因子是隨著時間在改變的, 所以我們便可以探討尺度因子的演化了。在這裡我們為了想較簡單的求得體積尺度因子的解, 我們可將方程式 2.16, 2.17, 2.18 改寫成:

$$\frac{d}{dt}(VH_1) = \Lambda V + \frac{1}{2}k_4^2\rho_0 V^{1-\gamma}(2-\gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 V(1-2\gamma)(1-\gamma) \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt}(VH_2) = \Lambda V + \frac{1}{2}k_4^2\rho_0 V^{1-\gamma}(2-\gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 V(1-2\gamma)(1-\gamma) - ka_1 \quad (2.23)$$

$$3\dot{H} + H_1^2 + 2H_2^2 = \Lambda V + \frac{1}{2}k_4^2\rho_0 V^{-\gamma}(2-3\gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 V(-2\gamma)(1-3\gamma) \quad (2.24)$$

在以上的方程式中, 新變數的定義為:

$$H_1 = \frac{\dot{a}_1}{a_1}, \quad H_2 = \frac{\dot{a}_2}{a_2}, \quad V = \frac{1}{3}(H_1 + 2H_2) = \frac{\dot{V}}{3V}$$

皆下來，我們再加上物質能量密度的演化定律 Eq2.21，在經過一番的代數運算後我們將可以求得體積尺度因子的二次微分的方程式：

$$\ddot{V} = 3\Lambda V + \frac{3}{2}k_4^2\rho_0 V^{1-\gamma}(2-\gamma) + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{1-2\gamma}(1-\gamma) + 2ka_1 \quad (2.25)$$

我們知道，當  $k=0, k=-1, k=1$  我們分別可以得到 Bianchi type I, a Bianchi type III, and a Kantowski-Sachs 的解。然後在根據部分積分的計算後，我們可以得到體積尺度因子的一次微分的方程式：

$$\dot{V}^2 = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 4k \int a_1 dV + c \quad (2.26)$$

上式中,  $c$  為積分常數。這一次微分的方程式將為我們之後討論的主要方程，我們可以明顯的看得出來這個方程式是非線性的，而且在經過許多努力嘗試的計算下，我們還是無法求得其解析解，因此，在之後的分析與討論中我們將嘗試求其近似解。此外，我們可以有一個較為廣義的解：

$$t - t_0 = \int L(V)^{-\frac{1}{2}} dV \quad (2.27)$$

這裡  $t$  為時間,  $t_0$  為起始時間,  $V$  為體積因子。而函數  $L(V)$  的定義為：

$$L(V) = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 4k \int a_1 dV + c \quad (2.28)$$

由這廣義的形式，我們可以直接的求得非各向同性參數  $A$  與尺度因子  $a_i$  的廣義解：

$$A = 3K^2 L(V)^{-1} \quad (2.29)$$

$$a_i = a_0 V^{\frac{1}{3}} e^{K_i \int \frac{dv}{vL(V)^{\frac{1}{2}}}} \quad (2.30)$$

在上式中, 參數 $K^2, K_i$ 我們可以根據方程 Eq2.22,Eq2.23得到:

$$H_i = H + \frac{K_i}{V} \quad (2.31)$$

$$K_1 = \frac{2 \int ka_i dt}{3} \quad K_2 = \frac{-1 \int ka_i dt}{3} \quad (2.32)$$

$$K^2 = \sum_{i=1}^3 K_i^2 \quad (2.33)$$

由方程式 Eq2.21,Eq2.28,Eq2.32帶入 Eq2.22,Eq2.23我們可以得到 K 與積分常數 c 之間有著一定的關係式:

$$K^2 = \frac{2c}{3} \quad (2.34)$$



# Chapter 3

## 分析與討論

在完成上章的三個模型的推導後，我們的重點是要研究宇宙的演化，所以我們在第一節終將探討宇宙的尺度因子在隨著時間演化下，將會發展成何種形式？與其中的物理量有何關係？但因為我們無法直接求得此體積尺度因子方程式的直接解，故我們將探討在何種合理的時間區間內，可以求得體積尺度因子的近似解。而這個近似解的形式是否正確，我們將針對特定的起使條件使用電腦軟體 Mathematica 與 Matlab 來求得其數值解，然後再與我們的近似解作個比較即可知道我們的近似解釋否正確以及可行的時間區間範圍。我們要研究的體積尺度因子的方程式為：

$$\dot{V}^2 = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} - 4k \int a_1 dV \quad (3.1)$$

我們可以在以上的體積尺度因子的方程式中，在合理的條件下得到近似解 $V$ ，然後我們便要把此解帶入下一方程式中在相同的條件下得到尺度因子 $a_1$

$$\frac{d}{dt}(VH_1) = \Lambda V + \frac{1}{2} k_4^2 \rho_0 V^{1-\gamma}(2-\gamma) + \frac{1}{12} k_5^4 \rho_0^2 V^{1-2\gamma}(1-\gamma) \quad (3.2)$$

在這裡我們的一項重點就是求得尺度因子 $a_1$ ，然後我們就可以知道 $4k \int a_1 dV$ 的演化，經由 $4k \int a_1 dV$ 項的數值解後我們便可以知道此三個模型之差異性。此外，尺度因

子 $a_2$ 則可由先前尺度體積因子的定義而求得:

$$b(t) = \sqrt{\frac{v(t)}{a(t)}} \quad (3.3)$$

我們在作數值分析時所取的起使條件在這裡先指出, 我們假設 $a(t_0) = a_0$ ,  $b(t_0) = b_0$ ,  $\dot{b}(t_0) = \dot{b}_0$ ,  $v(t_0) = v_0$  此  $t_0$  為起始時間, 爲了要求得一個演化上的時間區間 我們對參數將給予一假設的值: $\gamma = \frac{3}{2}, 3\Lambda = p = 1$ ,  $3k_4^2\rho_0 = m = 1$ ,  $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = n = 1$ 對於起始條件我們給定: $t_0 = 0, a_0 = 0.1, b_0 = 0.1, \dot{b}_0 = 1$ . 因爲我們就現在的觀測來說, 我們還不清楚我們宇宙的起使條件爲何, 故在這裡的起始質都只是個數學上的假設。而我們就將從此假設出發去探討宇宙的演化。在第二節中, 我們將針對非各向同性的參數 (物理參數) 來探討這三個模型的這個非各向同性的性質的演化。而這非各向同性的參數爲:

$$A \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{(H_i - H)^2}{3H^2} \quad (3.4)$$

這裡探討此非各向同性的參數也是使用點腦模擬的方式來看此物理性質的演化情形。此外, 我們將針對  $\gamma = 1, \gamma = \frac{3}{2}, \gamma = 2$ , 來作三個模型的分析。



### 3.1 體積尺度因子的演化

我們令  $\gamma = \frac{3}{2}$ ，且使體尺度因子的起始值為 0.001 來當作數值分析的初始值，而其他的參數設定如先前所定義，我們探討可做近似解的項要大於其他各項的和 10, 100, 1000 甚至到 10000 倍來做為我們的條件，此外我們也將對  $3k_4^2\rho_0$  做些修改，使其增大 100 倍以及 1000 倍來做為我們分析的條件。以下在 3.1.1 節中我們要先探討我們想得到的體積尺度因子理論上的近似解為何種數學形式，在 3.1.2 中我們將把理論的結果與數值解的結果作一個擬和來探討其物理意義。

#### 3.1.1 近似解之求得

首先我們將先列可能的近似解的幾個情況：

1. 如果  $3\Lambda V^2$  為主，這意思表示著  $3\Lambda V^2 \gg 3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 4k \int a_1 dV$ ，則我們的近似解方程為：

$$\dot{V}^2 \simeq 3\Lambda V^2 \quad (3.5)$$

然後經過簡單的計算後，我們可以得到體積尺度因子的方程式為：

$$v(t) = c_1 e^{\sqrt{3\Lambda}t} \quad (3.6)$$

我們也可以得到尺度因子  $a_1(t)$  與  $a_2(t)$

$$a_2(t) = c_2 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \quad a_1(t) = \frac{c_1}{c_2} e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \quad (3.7)$$

上式方程中  $c_1$  與  $c_2$  是積分常數： $c_1 = v_0 e^{-\sqrt{3\Lambda}t_0}$ ， $c_2 = b_0 e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t_0} e^{-\sqrt{3\Lambda}t_0}$  然後當我們比較

$$f(t) \equiv \left| \frac{3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 4k \int a_1 dV}{3\Lambda V^2} \right| \ll 1 \quad (3.8)$$

後, 我們即可以知道其可近似區間為何。在模擬下我們知道尺度因子可取為此近似解的情況是在某一段時間點後一直到現在的時間。

2. 如果  $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$  項為主, 這意思表示著  $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma} \gg 3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma} + 4k \int a_1 dV$  則我們的近似方程為:

$$\dot{V}^2 \simeq \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma} = nV^{2-2\gamma} \quad (3.9)$$

在經過簡單的計算後, 我們一樣可以得到體積尺度因子的解:

$$v(t) = (\sqrt{n}\gamma(t-t'))^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3.10)$$

然後我們可以得到尺度因子  $a_1(t), a_2(t)$  的解為:

$$a_2(t) = c_4(t-t')^{\frac{1}{3\gamma}}, \quad a_1(t) = \frac{1}{c_4^2}(\gamma\sqrt{n})^{\frac{1}{\gamma}}(t-t')^{\frac{1}{3\gamma}} \quad (3.11)$$

上式方程中  $t' = t_0 - \frac{v_0^\gamma}{\gamma\sqrt{n}}$ ,  $c_4 = b_0(\frac{v_0^\gamma}{\gamma\sqrt{n}})^{\frac{1}{3\gamma}}$ , 當  $\gamma = \frac{3}{2}$  時我們有尺度因子的一個特別情況下的解:

$$v(t) = (\frac{3}{2}\sqrt{n}(t-t'))^{\frac{2}{3}}$$

$$b(t) = c_4(t-t')^{\frac{2}{9}}, \quad a(t) = \frac{1}{c_4^2}(\frac{3}{2}\sqrt{n})^{\frac{2}{3}}(t-t')^{\frac{2}{9}}$$

在我們進一步的比較

$$f(t) \equiv \left| \frac{3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma} + 4k \int a_1 dV}{\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}} \right| \ll 1 \quad (3.12)$$

後我們即可已知道其可近似的時間點為何。在我們模擬的下, 我們知道體積尺度因子可取為此種近似解的時間點是在 時間趨近於零的時候。

3. 如果 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 項為主, 則近似解方程為:

$$\dot{V}^2 \simeq 3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma} = mV^{2-\gamma} \quad (3.13)$$

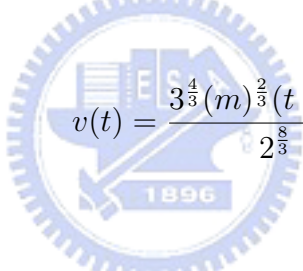
我們將可得到體積尺度因子的近似解的形式為:

$$v(t) = \left(\frac{\gamma\sqrt{m}}{2}(t-t')\right)^{\frac{2}{\gamma}}$$

也可求得尺度因子 $a_1(t), a_2(t)$ 為:

$$b(t) = c_3(t-t')^{\frac{2}{3\gamma}}, \quad a(t) = \frac{1}{c_3^2} \left(\frac{\gamma\sqrt{m}}{2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} (t-t')^{\frac{2}{3\gamma}} \quad (3.14)$$

這裡的各參數為: $t' = t_0 - \frac{2}{\gamma\sqrt{m}}v_0^{\frac{\gamma}{2}}$ ,  $c_3 = b_0\left(\frac{2}{\gamma\sqrt{m}}v_0^{\frac{\gamma}{2}}\right)^{-\frac{2}{3\gamma}}$  當 $\gamma = \frac{3}{2}$ 時, 我們可已得到



$$v(t) = \frac{3^{\frac{4}{3}}(m)^{\frac{2}{3}}(t-t')^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$b(t) = c_4(t-t')^{\frac{4}{9}}, \quad a(t) = \frac{3^{\frac{10}{3}}(m)^{\frac{2}{3}}(t-t')^{\frac{4}{9}}}{2^{\frac{8}{3}}c_3^2}$$

在我們進一步討論

$$f(t) \equiv \left| \frac{3\Lambda V^2 + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma} + 4k \int a_1 dV}{3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}} \right| \ll 1 \quad (3.15)$$

後我們即可已知道其可取的時間點為何。在我們模擬的下, 我們知道體積尺度因子可取為此種近似解的時間點是在 時間點很早的區間內, 且介於前兩個近似解的時間區間之間。

### 3.1.2 近似解與數值解之比較

我們探討三個宇宙模型, 它們分別是 Kantowski-Sachs moddle, Bianchi Type I 與 Bianchi Type III 宇宙模型. 接著我們將一一討論他們在  $3\Lambda V^2, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$  以及 當  $k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$  這一項很重要時, 它們所得到 的體積尺度因子的近似解, 並與數值分析所做出來的解進行討論, 根據誤差 小於百分之 30 為可接受的範圍來做為我們分析討論的依據標準. 接著我們便 以不同的項為主時來進行討論.

我們令  $\gamma = 3/2$ , 且使尺度因子的初始值為 0.001 來當作數值分析的初 始值, 而我們 的參數設定為  $\Lambda = 1/3, k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ . 。這裡我們原本有探討 加大參數  $k_4^2\rho_0$  來找到可擬和的區間 我們發現在  $k_4^2\rho_0 > 1000/3$  時有好的擬和情況, 而在這裡我們就只針對  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  來做圖。再次說明我們所探討的體積尺度因子 關係式為:

$$\dot{V}(t)^2 = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0V(t)^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V(t)^{2-2\gamma} + 4k \int a_1 dV \quad (3.16)$$

接著我們將數值分析得到的曲線與近似解做比較, 根據我們對體積尺度因子的一次 微分方程式中當各項為主時的探討, 我們畫出誤差在 10% 以內的 三項各自為主的區間與 數值解的擬和圖形, 我們在這裡誤差 Error 的定義為  $Error = \left(\frac{Numerical - approximation}{Numerical}\right) * 100\%$ , 以下我們分別針對不同的模型來作擬和的分析:

(1)KS: 圖 3.1 為 KS 模型的數值解曲線我們可以看見此體積尺度因子的成長速度 十分的迅速在時間為十內就 到達了十的五次方的大小; 圖 3.2 為含有宇宙常數項  $\Lambda$  項 為主的數值解與模擬的解的擬和, 我們可以發現在 時間為六左右開始做的擬和與數值 模擬的曲線近似的相當的好; 圖 3.3 為 brane 項為主時的近似和圖形, 我們從圖形中 可以看得出來當時間越來越接近原點時數值模擬的體積度因子與我們的近似解越來越 相同, 可以見得在時間點 越接近原點時 brane 項的作用越是重要; 以及圖 3.4 重力常 數項為主的時候近似解與數值解的擬和圖形。

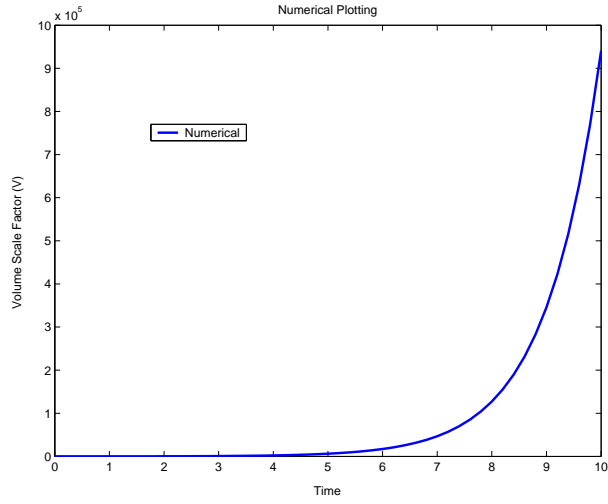


Figure 3.1: KS體積尺度因子的隨時間演化的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

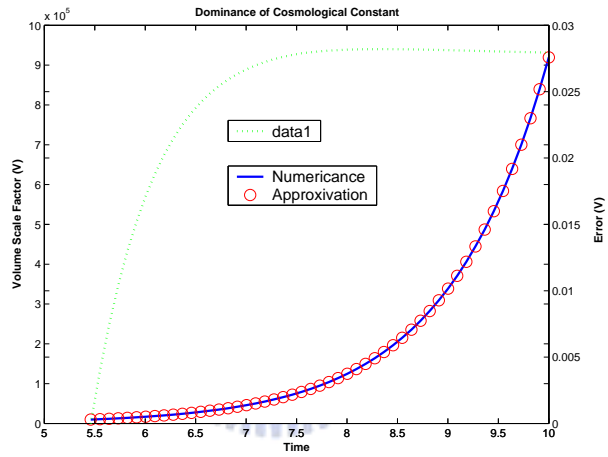


Figure 3.2: KS模型在 $3\Lambda V^2$ 為主時近似解與體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

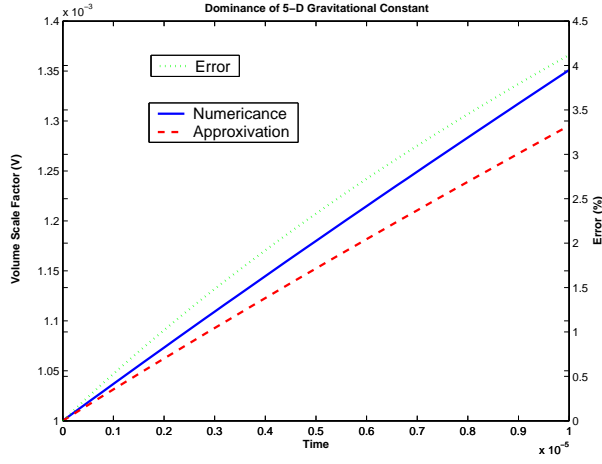


Figure 3.3:  $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 爲主時近似解在可取時間約內與 KS 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

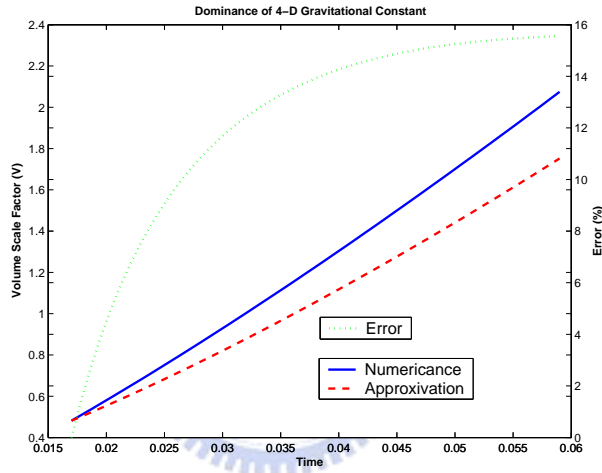


Figure 3.4:  $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 爲主時近似解在可取時間約內與 KS 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

(2)BI: 圖 3.5 為 BI 模型的體積尺度因子的數值解曲線; 圖 3.6 為宇宙常數項 $\Lambda$ 為主的數值解與近似解的擬和, 從這個圖我們可以知道當此項為主時的時間區間是在約時間為四後一直到後未來的時間 $\Lambda$ 項為主的近似解都會 十分的符合模擬的曲線; 圖 3.7 為 brane 項為主時的擬和圖形, 我們一樣可以看見 brane 項在時間點越接近原點時越 符合; 圖 3.8 為重力常數項為主的時候近似解與數值解的擬和圖形, 我們知道當重力常數的複和參數越大時我們可 以得到更好的近似情況以及更大的擬和區間。

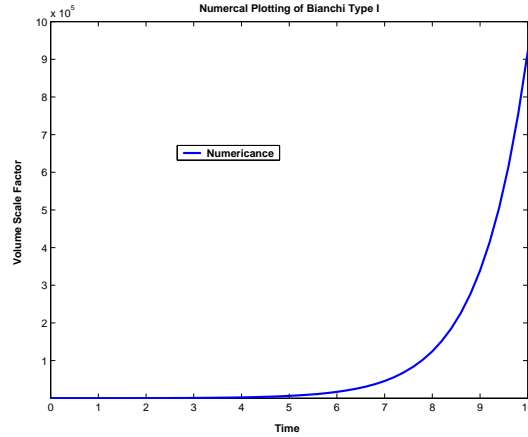


Figure 3.5: BI體積尺度因子的隨時間演化的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

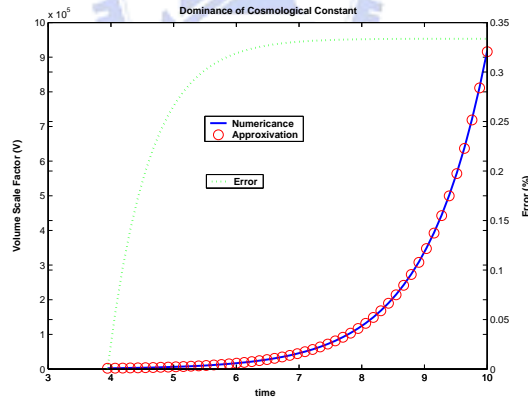


Figure 3.6:  $3\Lambda V^2$ 為主時近似解在可取時間約內與 BI 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

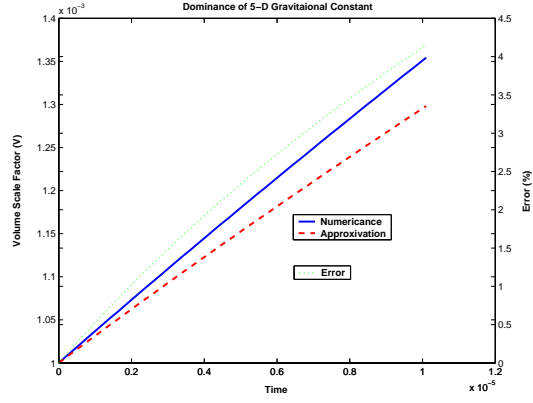


Figure 3.7:  $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 為主時近似解在可取時間約內與 BI 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

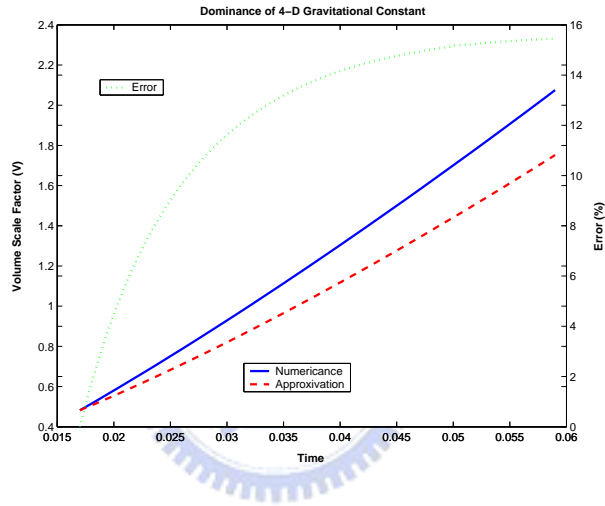


Figure 3.8:  $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 為主時近似解在可取時間約內與 BI 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$



(3)BIII: 圖 3.9 為模型的數值解曲線; 圖 3.10 為宇宙常數項 $\Lambda$ 為主的數值解與模擬的解的擬和; 圖 3.11 為 brane 項為主時的擬和圖形以及圖 3.12 為重力常數項為主的時候近似解與數值解的擬和圖形。

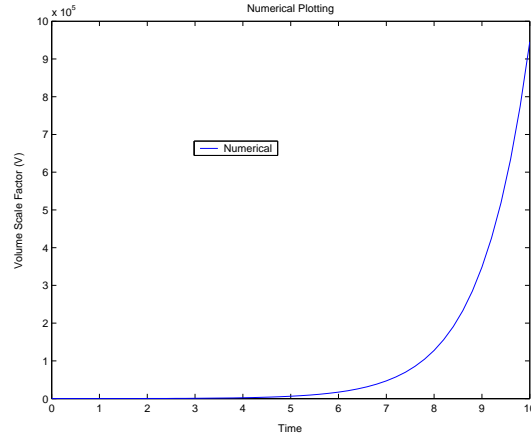


Figure 3.9: BIII體積尺度因子的隨時間演化的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

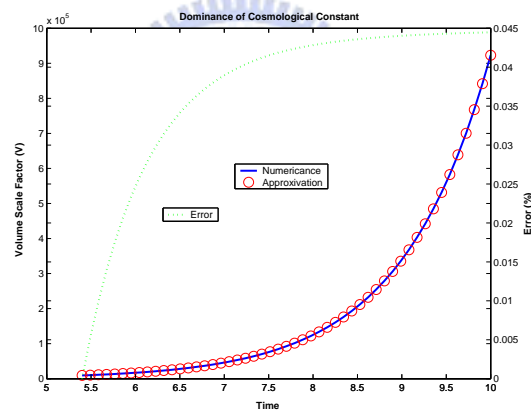


Figure 3.10:  $3\Lambda V^2$ 為主時近似解在可取時間約內與 BIII 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

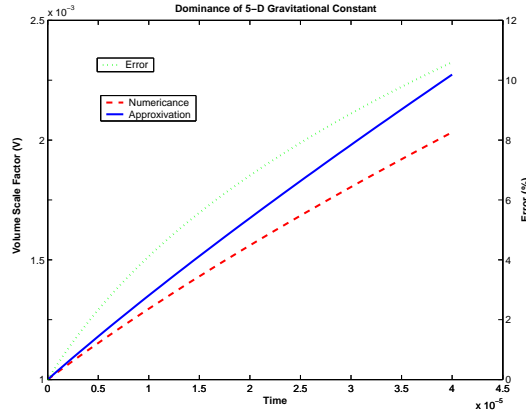


Figure 3.11:  $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 為主時近似解在可取時間約內與 BIII 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

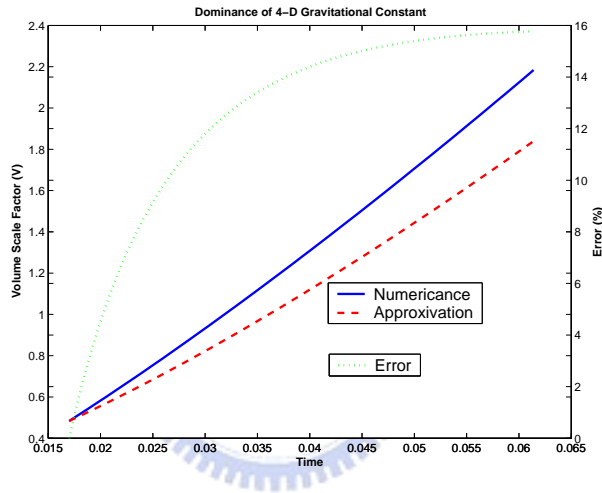


Figure 3.12:  $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 為主時近似解在可取時間約內與 BIII 體積尺度因子擬和的曲線圖: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2\rho_0 = 1000/3$  以及  $\frac{1}{12}k_5^4\rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$

我們發現，在取足夠大的可去比值時 我們的近似解都可以跟數值的解達到很好的近似，這一點是令人高興的，表示我們這樣的取法是可行的。總括來說我們可以發現這三個模型 KS, BI, BIII 在 $3k_4^2\rho_0$ 在做適當的調整後，都具有各自的不同時間區間的體積尺度因子的近似解，而這三個模型的主要不同項

$4k \int a_1 dV$  的作用則是使這三個模型在晚期求近似解的時間點差異為 KS 較晚於 BI 較晚於 BIII。而在早期 BIII 較早於 BI 較早於 KS。從這項在體幾尺度因子的一次微分方程中也可以看出 $4k \int a_1 dV$ 的作用不會起太大的作用，不會有為主的時候。

## 3.2 非各向同性參數的演化

非各項同性因子的定義為：

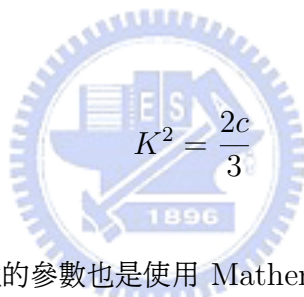
$$A \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{(H_i - H)^2}{3H^2}$$

從第二章的計算中我們可以知道非各向同性參數在我們所選取的模型下的廣義形式為：

$$A = 3K^2 L(V)^{-1}$$

而其中  $K^2$  與  $L(V)$  為

$$L(V) = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 4k \int a_1 dV + c$$



這裡探討此非各向同性的參數也是使用 Mathematica 中的數值電腦模擬的方法來看此物理性質的演化情形。此外，我們將針對  $\gamma = 1, \gamma = \frac{3}{2}, \gamma = 2$ ，來作三個模型的分析。我們這裡參數的選取是： $\Lambda = 1/3, k_4^2 \rho_0 = 1/3, \frac{1}{12} k_5^4 \rho_0^2 = 1/3, \gamma = 3/2, c = 1$ 。在經由電腦直接的數值分析後，我們可以得到三個模型的非各向同性參數的演化曲線圖，如圖 3.13 的 KS 演化曲線；圖 3.14 的 BI 演化曲線；圖 3.15 的 BIII 演化曲線所示。

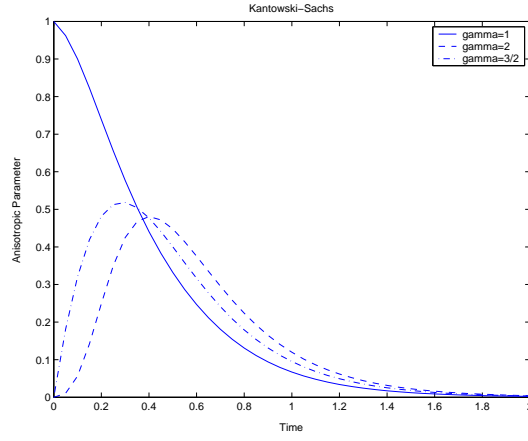


Figure 3.13: Kantowski-Sachs模型的非個向同性因子的演化: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2 \rho_0 = 1/3$ ,  $\frac{1}{12} k_5^4 \rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$ ,  $c = 1$

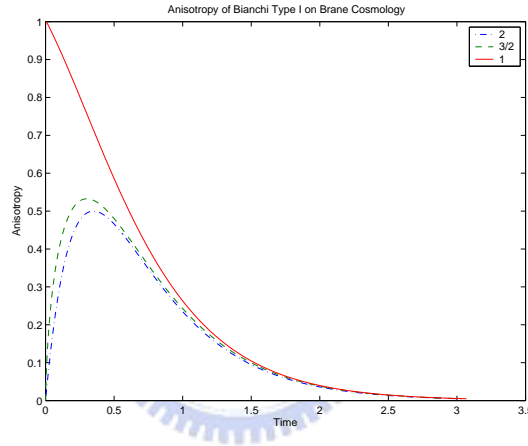


Figure 3.14: Bianchi type I 模型的非個向同性因子的演化: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2 \rho_0 = 1/3$ ,  $\frac{1}{12} k_5^4 \rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$ ,  $c = 1$

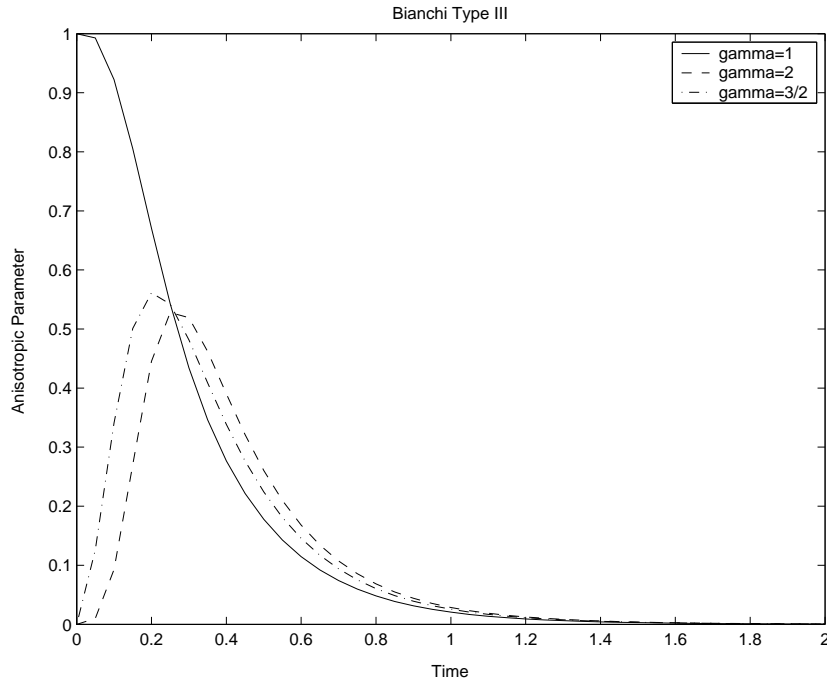


Figure 3.15: Bianchi type III 模型的非個向同性因子的演化: $\Lambda = 1/3$ ,  $k_4^2 \rho_0 = 1/3$ ,  $\frac{1}{12} k_5^4 \rho_0^2 = 1/3$ ,  $\gamma = 3/2$ ,  $c = 1$

根據以上的這些圖表們可以發現到:

(1) 共同性質為: 在 $\gamma = \frac{3}{2}, \gamma = 2$ 的情況下, 宇宙演化初期是各向同性的, 然後開始轉為 非各向同性, 然後很快的再回到各項同性的情況後就一直保持各向同性。而在 $\gamma = 1$ 的情況下, 宇宙演化的 初期卻是非各向同性的宇宙, 然後很快的回到各向同性後就一直保持各向同性。

(2) 差異性質為: 因為 BI 模型的是 $k = 0$ 的結果, 所以 BIII 與 KS 就比 BI 多出了 $4k \int a_1 dV$ 的影響, 而這個影響 由此三個圖中可以看出, 多出了的 $4k \int a_1 dV$ 使得 BIII 與 KS 較早達到各向同性的情況, 且三個模型比較起來 是 BIII 會比較早達到各向同性, 然後是 KS, 最晚則是 BI。

# Chapter 4

## 結論

在這裡我們做了許多的討論，相信一定看的眼花撩亂了，因此在這裡完整的說明一遍。

1. 我們發現這三個模型 KS, BI, BIII 在  $3k_4^2\rho_0$  在做適當的調整後，都具有各自的不同時間區間的體積尺度因子的近似解。在晚期時，我們得到體積尺度因子的演化方式是

V = V\_0 e^{\sqrt{3}\Lambda t}

從方程式中可以見得宇宙參數  $\Lambda$  在晚期宇宙的演化佔了重要的影響。在早期實，我們得到的體積尺度因子的演化方程為：

$$v(t) = (\sqrt{n}\gamma(t - t'))^{\frac{1}{\gamma}}$$

上式中  $n = \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2$  在這個時期，則是 brane 上的複和重力常數對演化有著主要的影響。而在這兩個時期之間，我們可以找到在  $3k_4^2\rho_0$  在做適當的調整後，體積尺度因子的演化方程：

$$v(t) = \left(\frac{\gamma\sqrt{m}}{2}(t - t')\right)^{\frac{2}{\gamma}}$$

上式中  $m = 3k_4^2\rho_0$ ，在這段時期則是重力常數扮演著重要的角色。

2. 而這三個模型的主要不同項 $4k \int a_1 dV$ 的作用則是使這三個模型在晚期 求近似解的時間點差異為 KS 較晚於 BI 較晚於 BIII。而在早期 BIII 較早於 BI 較早於 KS。從這項在我們的數值模擬 中也可以看出 $4k \int a_1 dV$ 的作用不會起太大的作用, 不會有為主的時候但就如前面所說的, 會對演化的時間 造成些微的影響。
3. 從我們對非各向同性參數的演化的研究可以知道這三個模型:
- (1) 共同性質為: 在 $\gamma = \frac{3}{2}, \gamma = 2$ 的情況下, 宇宙演化初期是各向同性的, 然後開始轉為 非各向同性, 然後很快的再回到各項同性的情況後就一直保持各向同性。而在 $\gamma = 1$ 的情況下, 宇宙演化的 初期卻是非各向同性的宇宙, 然後很快的回到各向同性後就一直保持各向同性。這讓我們了解到雖然我們取的是 非各向同性的模型, 可是在 brane 的影響下, 在早期還是會呈現各向同性的狀況。
  - (2) 差異性質為: 因為 BI 模型的是 $k = 0$ 的結果, 所以 BIII 與 KS 就比 BI 多出了 $4k \int a_1 dV$ 的影響, 而這個影響 由此三個圖中可以看出, 多出了的 $4k \int a_1 dV$ 使得 BIII 與 KS 較早達到各向同性的情況, 且三個模型比較起來 是 BIII 會比較早達到各向同性, 然後是 KS, 最晚則是 BI。
4. 由各向同性的研究我們可以知道, 在最後我們的模型都會回到各向同性的情況, 就是與我們現在觀測到的宇宙現在 的狀況相同, 所以我們所研究的模型是可行的。

# Chapter 5

## 附錄

### 5.1 Vacuum Einstein equation

- 由模型中給定的線元:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -d(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 + b(t)^2 (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\varphi^2) \end{aligned} \quad (5.1)$$

- 度規張量:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -d(t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b(t)^2 f(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

- 度規張量之各分量:

$$g_{11} = -d(t)^2, \quad g_{22} = a(t)^2, \quad g_{33} = b(t)^2, \quad g_{44} = b(t)^2 f(\theta)^2$$

- 另外:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-d(t)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b(t)^2 f(\theta)^2} \end{pmatrix}$$



度規張量之各分量:

$$g^{11} = \frac{1}{-d(t)^2}, g^{22} = \frac{1}{a(t)^2}, g^{33} = \frac{1}{b(t)^2}, g^{44} = \frac{1}{b(t)^2 f(\theta)^2}$$

• 各模型的定義:

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta & , \text{ Bianchi type I} \\ \sin \theta & , \text{ Kantowski-Sachs} \\ \sinh \theta & , \text{ Bianchi type III} \end{cases}$$

計算的步驟:

1. 求得 Christoffel symbol 的非零解:  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$

2. 求得 Ricci tensor  $R_{\mu\nu}$

Curvature tensor 的定義為:  $R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = -\partial_{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^m\Gamma_{\beta m}^{\alpha} - (\nu \leftrightarrow \beta)$

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\alpha}^{\alpha}$$

3. 進而求得 Ricci scalar :

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

4. 最後就可以求得 Einstein equation :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

注意:(當  $T_{\mu\nu} = 0$ 時)

我們使用 Dirac 的符號定義. 在平直空間中

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ps: 我們在這裡定義  $i, j, k, \dots = 1, 2, 3, \dots$

and  $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3, \dots$

## 1. 步驟 I

Christofol symbol 的定義為:

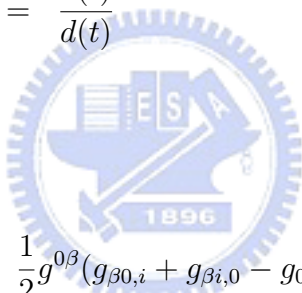
$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\nu,\mu} + g_{\beta\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\beta})\end{aligned}$$

我們嘗試去求得 Christofol symbol 的各分量：

(a)

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\beta}(g_{\beta 0,0} + g_{\beta 0,0} - g_{00,\beta}) = \frac{1}{2}g^{0\beta}(g_{\beta 0,0}) \\ &= \frac{1}{2}g^{0\beta}g_{00,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{-d^2(t)} \frac{d(-d^2(t))}{dt} \\ &= \frac{\dot{d}(t)}{d(t)}\end{aligned}$$

(b)


$$\begin{aligned}\Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\beta}(g_{\beta 0,i} + g_{\beta i,0} - g_{0i,\beta}) = \frac{1}{2}g^{0\beta}(g_{\beta 0,i} + g_{\beta i,0}) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i} + \frac{1}{2}g^{0k}g_{ki,0} \\ &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}g^{i\beta}(g_{\beta 0,0} + g_{\beta 0,0} - g_{00,\beta}) = \frac{1}{2}g^{i\beta}(2g_{\beta 0,0} - g_{00,\beta}) \\ &= g^{i0}g_{00,0} - \frac{1}{2}g^{i0}g_{00,0} \\ &= 0\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\beta}(g_{\beta i,j} + g_{\beta j,i} - g_{ij,\beta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(g_{0i,j} + g_{0j,i}) - \frac{1}{2}g^{00}g_{ij,0} \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}g_{ij,0} \\
\Rightarrow \Gamma_{rr}^0 &= \frac{a\dot{a}}{d^2} \\
\Rightarrow \Gamma_{\theta\theta}^0 &= \frac{b\dot{b}}{d^2} \\
\Rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^0 &= \frac{b\dot{b}f^2(\theta)}{d^2}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}g^{i\beta}(g_{\beta 0,j} + g_{\beta j,0} - g_{0j,\beta}) = \frac{1}{2}g^{i\beta}(g_{\beta 0,j} + g_{\beta j,0}) \\
&= \frac{1}{2}g^{i0}g_{00,j} + \frac{1}{2}g^{i\beta}g_{\beta j,0} \\
&= \frac{1}{2}g^{ik}g_{kj,0} \\
\Rightarrow \Gamma_{0r}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,0} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 * 2aa' = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Rightarrow \Gamma_{0\theta}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,0} = \frac{\dot{b}}{b} \\
\Rightarrow \Gamma_{0\phi}^\phi &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,0} = \frac{1}{2}\frac{1}{b^2f^2(\theta)} * 2b\dot{b}f^2(\theta) = \frac{\dot{b}}{b}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{i\beta}(g_{\beta j,k} + g_{\beta k,j} - g_{jk,\beta}) = \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \\
\Rightarrow \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Gamma_{r\theta}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,\theta} + g_{r\theta,r} - g_{r\theta,r}) = 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{r\phi}^r &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{r\theta,\theta} + g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r}) = 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^r &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\theta\phi}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{r\theta,\phi} + g_{r\phi,\theta} - g_{\phi\theta,r}) = 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\theta r}^\theta &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\theta\phi}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta l}(g_{l\theta,\phi} + g_{l\phi,\theta} - g_{\phi\theta,l}) = 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{rr}^\theta &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{r\phi}^\theta &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta l}(g_{l\phi,\phi} + g_{l\phi,\phi} - g_{\phi\phi,l}) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\phi\phi,\theta} = -ff,\theta \\
\Rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^\phi &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\phi r}^\phi &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \frac{1}{2}g^{\phi l}(g_{l\phi,\theta} + g_{l\theta,\phi} - g_{\phi\theta,l}) = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,\theta} = \frac{f,\theta}{f} \\
\Rightarrow \Gamma_{rr}^\phi &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{r\theta}^\phi &= 0 \\
\Rightarrow \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= 0
\end{aligned}$$

所以我們求得  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  的非零分量為:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{d}}{d} & \Gamma_{rr}^0 &= \frac{a\dot{a}}{d^2} & \Gamma_{\theta\theta}^0 &= \frac{b\dot{b}}{d^2} \\
\Gamma_{\phi\phi}^0 &= \frac{b\dot{b}f^2}{d^2} & \Gamma_{0r}^r &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{0\theta}^\theta &= \frac{\dot{b}}{b} \\
\Gamma_{0\phi}^\phi &= \frac{\dot{b}}{b} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \frac{f,\theta}{f} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -ff,\theta
\end{aligned}$$

## 2. 步驟 II

Curvature tensor 的定義為:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\beta,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^m \Gamma_{\mu m}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^m \Gamma_{\nu m}^{\alpha}$$

我們開始去計算 Ricci tensor 的各分量:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\alpha}^{\alpha}$$

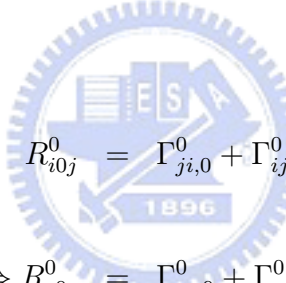
(a)

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{0\alpha 0}^{\alpha} \\ &= R_{000}^0 + R_{0i0}^i \\ &= \{ \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{00}^m \Gamma_{0m}^0 - \Gamma_{00}^m \Gamma_{0m}^0 \} \\ &\quad + \{ \Gamma_{00,i}^i - \Gamma_{0i,0}^i + \Gamma_{00}^m \Gamma_{im}^i - \Gamma_{0i}^m \Gamma_{0m}^i \} \\ &= \Gamma_{00,i}^i - \Gamma_{0i,0}^i + \Gamma_{00}^m \Gamma_{im}^i - \Gamma_{0i}^m \Gamma_{0m}^i \\ &= \Gamma_{00,i}^i - \Gamma_{0i,0}^i + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{i0}^i + \Gamma_{00}^j \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{0i}^0 \Gamma_{00}^i - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i \\ &= -\Gamma_{0i,0}^i + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{i0}^i - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i \\ &= -[\Gamma_{0r,0}^r + \Gamma_{0\theta,0}^{\theta} + \Gamma_{0\phi,0}^{\phi}] + \Gamma_{00}^0 [\Gamma_{r0}^r + \Gamma_{\theta 0}^{\theta} + \Gamma_{\phi 0}^{\phi}] \\ &\quad - [(\Gamma_{0r}^r)^2 + (\Gamma_{0\theta}^{\theta})^2 + (\Gamma_{0\phi}^{\phi})^2] \\ &= -\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_0 + 2\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)_0\right] + \frac{\dot{d}}{d} \left[\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b}\right] - \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2\right] \\ &\quad H_a \equiv \frac{\dot{a}}{a}, H_b \equiv \frac{\dot{b}}{b} \\ R_{00} &= -\left[-\frac{\dot{d}}{d} H_a - 2\frac{\dot{d}}{d} H_b + \dot{H}_a + H_a^2 + 2\dot{H}_b + 2H_b^2\right] \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= R_{i\alpha j}^\alpha \\
&= R_{i0j}^0 + R_{ikj}^k \\
&= \{\Gamma_{ji,0}^0 - \Gamma_{0i,j}^0 + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{0m}^0 - \Gamma_{i0}^m \Gamma_{jm}^0\} \\
&\quad + \{\Gamma_{ji,k}^k - \Gamma_{ki,j}^k + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^k\} \\
&= [\Gamma_{ji,0}^0 - \Gamma_{0i,j}^0 + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{0l}^0 - \Gamma_{i0}^0 \Gamma_{j0}^0 - \Gamma_{i0}^l \Gamma_{jl}^0] \\
&= +[\Gamma_{ji,k}^k - \Gamma_{ki,j}^k + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{k0}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k - \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k] \\
&= [\Gamma_{ji,0}^0 + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{i0}^l \Gamma_{jl}^0] \\
&= +[\Gamma_{ji,k}^k - \Gamma_{ki,j}^k + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{k0}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k - \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k] \\
\Rightarrow R_{i0j}^0 &= \Gamma_{ji,0}^0 + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{i0}^l \Gamma_{jl}^0 \\
\Rightarrow R_{ikj}^k &= \Gamma_{ji,k}^k - \Gamma_{ki,j}^k + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{k0}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k - \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k
\end{aligned}$$

i.



$$\begin{aligned}
R_{i0j}^0 &= \Gamma_{ji,0}^0 + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{i0}^l \Gamma_{jl}^0 \\
\Rightarrow R_{r0r}^0 &= \Gamma_{rr,0}^0 + \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{r0}^r \Gamma_{rr}^0 \\
&= \left(\frac{a\dot{a}}{d^2}\right)_{,0} + \left(\frac{a\dot{a}}{d^2}\right)\left(\frac{\dot{d}}{d}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{a\dot{a}}{d^2}\right) \\
&= \left(\frac{a\dot{a}}{d^2}\right)_{,0} + \left(\frac{a\dot{a}\dot{d}}{d^3}\right) - \left(\frac{\dot{a}^2}{d^2}\right) \\
\Rightarrow R_{\theta0\theta}^0 &= \Gamma_{\theta\theta,0}^0 + \Gamma_{\theta\theta}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{\theta0}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^0 \\
&= \left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right)_{,0} + \left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right)\left(\frac{\dot{d}}{d}\right) - \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)\left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right) \\
&= \left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right)_{,0} + \left(\frac{b\dot{b}\dot{d}}{d^3}\right) - \left(\frac{\dot{b}^2}{d^2}\right) \\
\Rightarrow R_{\phi0\phi}^0 &= \Gamma_{\phi\phi,0}^0 + \Gamma_{\phi\phi}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{\phi0}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^0 \\
&= \left(\frac{b\dot{b}f^2}{d^2}\right)_{,0} + \left(\frac{b\dot{b}f^2}{d^2}\right)\left(\frac{\dot{d}}{d}\right) - \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)\left(\frac{b\dot{b}f^2}{d^2}\right) \\
&= f^2[R_{\theta0\theta}^0]
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
R_{ikj}^k &= \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ki,j}^k + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{k0}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k - \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k \\
\Rightarrow R_{rkr}^k &= R_{rrr}^r + R_{r\theta r}^\theta + R_{r\phi r}^\phi \\
&= \Gamma_{rr,r}^r - \Gamma_{rr,r}^r + \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{r0}^r + \Gamma_{rr}^l \Gamma_{rl}^r - \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{r0}^r - \Gamma_{rr}^l \Gamma_{rl}^r \\
&\quad + \Gamma_{rr,\theta}^\theta - \Gamma_{\theta r,r}^\theta + \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{\theta 0}^\theta + \Gamma_{rr}^l \Gamma_{\theta l}^\theta - \Gamma_{r\theta}^0 \Gamma_{\theta 0}^r - \Gamma_{r\theta}^l \Gamma_{\theta l}^r \\
&\quad + \Gamma_{rr,\phi}^\phi - \Gamma_{\phi r,r}^\phi + \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{\phi 0}^\phi + \Gamma_{rr}^l \Gamma_{\phi l}^\phi - \Gamma_{r\phi}^0 \Gamma_{\phi 0}^r - \Gamma_{r\phi}^l \Gamma_{\phi l}^r \\
&= \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{\theta 0}^\theta + \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{\phi 0}^\phi \\
&= \left(\frac{a\dot{a}}{d^2}\right) \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b}\right) \\
&= \left(\frac{2a\dot{a}\dot{b}}{d^2 b}\right) \\
\Rightarrow R_{\theta k\theta}^k &= R_{\theta r\theta}^r + R_{\theta\theta\theta}^\theta + R_{\theta\phi\theta}^\phi \\
&= R_{\theta r\theta}^r + R_{\theta\phi\theta}^\phi \\
&= \Gamma_{\theta\theta,r}^r - \Gamma_{r\theta,\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^0 \Gamma_{r0}^r + \Gamma_{\theta\theta}^l \Gamma_{rl}^r - \Gamma_{\theta r}^0 \Gamma_{\theta 0}^r - \Gamma_{\theta r}^l \Gamma_{\theta l}^r \\
&\quad + \Gamma_{\theta\theta,\phi}^\phi - \Gamma_{\phi\theta,\theta}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^0 \Gamma_{\phi 0}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^l \Gamma_{\phi l}^\phi - \Gamma_{\theta\phi}^0 \Gamma_{\theta 0}^r - \Gamma_{\theta\phi}^l \Gamma_{\theta l}^r \\
&= \Gamma_{\theta\theta}^0 \Gamma_{r0}^r - \Gamma_{\phi\theta,\theta}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^0 \Gamma_{\phi 0}^\phi - \Gamma_{\theta\phi}^l \Gamma_{\theta l}^r \\
&= \left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - \left(\frac{f,\theta}{f}\right)_{,\theta} + \left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right) \left(\frac{\dot{b}}{b}\right) - \left(\frac{f,\theta}{f}\right)^2 \\
&= \left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{b}}{d}\right)^2 - \frac{f_{,\theta}}{f} \\
\Rightarrow R_{\phi k\phi}^k &= R_{\phi r\phi}^r + R_{\phi\theta\phi}^\theta + R_{\phi\phi\phi}^\phi \\
&= R_{\phi r\phi}^r + R_{\phi\theta\phi}^\theta \\
&= \Gamma_{\phi\phi,r}^r - \Gamma_{r\phi,\phi}^r + \Gamma_{\phi\phi}^0 \Gamma_{r0}^r + \Gamma_{\phi\phi}^l \Gamma_{rl}^r - \Gamma_{\phi r}^0 \Gamma_{\phi 0}^r - \Gamma_{\phi r}^l \Gamma_{\phi l}^r \\
&\quad + \Gamma_{\phi\phi,\theta}^\theta - \Gamma_{\theta\phi,\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^0 \Gamma_{\theta 0}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^l \Gamma_{\theta l}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^0 \Gamma_{\phi 0}^r - \Gamma_{\phi\theta}^l \Gamma_{\theta l}^r \\
&= \Gamma_{\phi\phi}^0 \Gamma_{r0}^r + \Gamma_{\phi\phi,\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^0 \Gamma_{\theta 0}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^l \Gamma_{\theta l}^r \\
&= \left(f^2 \frac{b\dot{b}}{d^2}\right) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - (ff,\theta)_{,\theta} + \left(f^2 \frac{b\dot{b}}{d^2}\right) \left(\frac{\dot{b}}{b}\right) - \left(\frac{f,\theta}{f}\right) (-ff,\theta) \\
&= f^2 \left[ \left(\frac{b\dot{b}}{d^2}\right) \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right) - \frac{f_{,\theta}}{f} \right]
\end{aligned}$$

得到 $R_{ij}$  的分量爲: :

$$\begin{aligned}R_{rr} &= R_{r0r}^0 + R_{rkr}^k \\ &= \left(\frac{a}{d}\right)^2 \left[-\frac{\dot{d}}{d} H_a + \dot{H}_a + 2H_a H_b + H_a^2\right] \\ R_{\theta\theta} &= R_{\theta0\theta}^0 + R_{r\theta r}^k \\ &= \left(\frac{b}{d}\right)^2 \left[-\frac{\dot{d}}{d} H_b + \dot{H}_b + H_a H_b + 2H_b^2\right] - \frac{f_{,;\theta}}{f} \\ R_{\phi\phi} &= R_{\phi0\phi}^0 + R_{r\phi r}^k \\ &= \left(\frac{bf}{d}\right)^2 \left[-\frac{\dot{d}}{d} H_b + \dot{H}_b + H_a H_b + 2H_b^2\right] - ff_{,;\theta}\end{aligned}$$





3. 步驟 III 求得曲率常數:

$$\begin{aligned}
 R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
 &= g^{00} R_{00} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \\
 &= -2 \frac{1}{d^2} \left\{ \frac{d}{d} (H_a + 2H_b) - \dot{H}_a - 2\dot{H}_b - 2H_a H_b - H_a^2 - 3H_b^2 \right\} + \frac{2k}{b^2}
 \end{aligned}$$

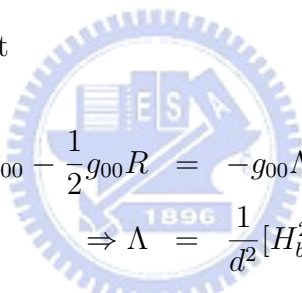
hence  $k = -\frac{f_{,t}}{f}$

4. 步驟 IV , The vacuum Einstein equation :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -g_{\mu\nu} \Lambda$$

愛因斯坦方程式的各分量 (component):

(a) 00 component



$$\begin{aligned}
 R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= -g_{00} \Lambda \\
 \Rightarrow \Lambda &= \frac{1}{d^2} [H_b^2 + 2H_a H_b] + \frac{k}{d^2 b^2}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

(b) rr component

$$\begin{aligned}
 R_{rr} - \frac{1}{2} g_{rr} R &= -g_{rr} \Lambda \\
 \Rightarrow \Lambda &= \frac{1}{d^2} \left[ -\frac{d}{d} (2H_b) + 2\dot{H}_b + 3H_b^2 \right] + \frac{k}{b^2}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

(c)  $\theta\theta$  component

$$R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} g_{\theta\theta} R = -g_{\theta\theta} \Lambda$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{1}{d^2} \left[ -\frac{d}{d} (H_a + H_b) + \dot{H}_a + \dot{H}_b + H_a H_b + H_a^2 + H_b^2 \right] \quad (5.4)$$

(d)  $\phi\phi$  component

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} - \frac{1}{2} g_{\phi\phi} R &= -g_{\phi\phi} \Lambda \\ \Rightarrow \Lambda &= \frac{1}{d^2} \left[ -\frac{d}{d} (H_a + H_b) + \dot{H}_a + \dot{H}_b + H_a H_b + H_a^2 + H_b^2 \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

當  $d = 1$ , 我們可以得到:

$$\Lambda = \begin{cases} H_b^2 + 2H_a H_b + \frac{k}{b^2} & , \text{00 component} \\ 2\dot{H}_b + 3H_b^2 + \frac{k}{b^2} & , \text{rr component} \\ \dot{H}_a + \dot{H}_b + H_a H_b + H_a^2 + H_b^2 & , \text{\theta\theta or \phi\phi component} \end{cases} \quad (5.6)$$

這裡 00 component 就是所謂的 Friedmann equation .

## 5.2 Einstein equation with energy momentum tensor

Energy momentum tensor 的分量為:

$$T_0^0 = -\rho, T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p \quad p \equiv (\gamma - 1)\rho$$

T 的定義為:

$$T = T_\nu^\mu = -\rho p^3$$

我們加上能量動量張量後的愛因斯坦方程式變成::

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -g_{\mu\nu}\Lambda + k_4^2 T_{\mu\nu} \quad (5.7)$$

$k_4^2 = 8\pi G$  是 4 維的重力常數的複和項。

1. The solution of Einstein equation : 因爲  $T_{\mu\nu} = T_{\nu}^{\mu}g_{\mu\nu}$  , 所以:

(a)

$$T_{00} = T_0^0 g_{00} = (-\rho)(-d^2)$$

根據 A.2 的 00 分量以及新的 Einstein equation B.1。我們可以求得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2}[H_b^2 + 2H_a H_b] + \frac{k}{d^2 b^2} &= \Lambda + k_4^2 \rho \\ \text{as } d = 1 \Rightarrow H_b^2 + 2H_a H_b + \frac{k}{b^2} &= \Lambda + k_4^2 \rho \end{aligned} \quad (5.8)$$

(b)

$$T_{rr} = T_r^r g_{rr} = p a^2 = \rho(\gamma - 1)a^2$$

根據 A.3 的 rr 分量以及新的 Einstein equation B.1。我們可以求得:

$$2\dot{H}_b + 3H_b^2 + \frac{k}{b^2} = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \quad (5.9)$$

(c)

$$T_{\theta\theta} = T_{\theta}^{\theta} g_{\theta\theta} = p b^2 = \rho(\gamma - 1)b^2$$

根據 A.2 的  $\theta\theta$  分量以及新的 Einstein equation B.1。我們可以求得:

$$\dot{H}_a + \dot{H}_b + H_a H_b + H_a^2 + H_b^2 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \quad (5.10)$$

(d)

$$T_\phi = T_\phi^\phi g_{\phi\phi} = pb^2 f^2 = \rho(\gamma - 1)b^2 f^2$$

根據上一節的 $\varphi\varphi$ 分量以及新的 Einstein equation 。我們可以求得：

$$\dot{H}_a + \dot{H}_b + H_a H_b + H_a^2 + H_b^2 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \quad (5.11)$$

整理後我們可得三個獨立的方程式：

$$\left[ \begin{array}{l} H_b^2 + 2H_a H_b + \frac{k}{b^2} = \Lambda + k_4^2 \rho \\ 2\dot{H}_b + 3H_b^2 + \frac{k}{b^2} = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \\ \dot{H}_a + \dot{H}_b + H_a H_b + H_a^2 + H_b^2 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \end{array} \right]$$



然後改寫方程式為:

$$\left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1}\right)\left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) + \frac{k}{a_2^2} = \Lambda + k_4^2\rho \quad (5.12)$$

$$2\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)^2 + \frac{k}{a_2^2} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) \quad (5.13)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1}\right)\left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) \quad (5.14)$$

參數定義:

$$H_a = \frac{\dot{a}_1}{a_1}, H_b = \frac{\dot{a}_2}{a_2}$$



## 2. Energy conservation Law

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

我們知道:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{;\mu} = T^{\mu\nu}_{,\mu} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} + T^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}$$

在這裡:

$$T^{\mu\nu} = T_{\nu}^{\mu} g^{\mu\nu} \Rightarrow T^{00} = \rho, T^{rr} = \frac{p}{a_1^2}, T^{\theta\theta} = \frac{p}{a_2^2}, T^{\phi\phi} = \frac{p}{a_2^2 f^2}$$

所以:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = \nabla_0 T^{0\nu} + \nabla_r T^{r\nu} + \nabla_{\theta} T^{\theta\nu} + \nabla_{\phi} T^{\phi\nu} = (a) + (b) + (c) + (d)$$

(a)

$$\begin{aligned} \nabla_0 T^{0\nu} &= T_{,0}^{00} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha 0}^0 + T^{0\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\nu} \\ &= \dot{\rho} + (T^{i\nu}\Gamma_{i0}^0 + T^{0\nu}\Gamma_{00}^0) + (T^{00}\Gamma_{00}^{\nu} + T^{0i}\Gamma_{i0}^{\nu}) \\ &= \dot{\rho} \end{aligned}$$

(b)

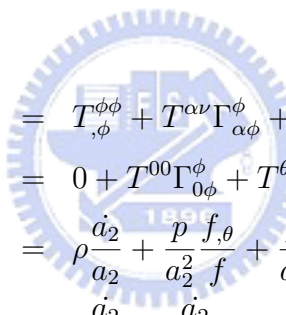
$$\begin{aligned} \nabla_r T^{r\nu} &= T_{,r}^{rr} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha r}^r + T^{r\alpha}\Gamma_{\alpha r}^{\nu} \\ &= 0 + (T^{00}\Gamma_{0r}^r + T^{0i}\Gamma_{ir}^r) + (T^{r0}\Gamma_{0r}^{\nu} + T^{ri}\Gamma_{ir}^{\nu}) \\ &= T^{00}\Gamma_{0r}^r + T^{ri}\Gamma_{ir}^{\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T^{00}\Gamma_{0r}^r + T^{rr}\Gamma_{rr}^0 \\
&= \rho \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{p}{a_1^2} a_1 \dot{a}_1 \\
&= \rho\gamma \frac{\dot{a}_1}{a_1}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta T^{\theta\nu} &= T_{,\theta}^{\theta\theta} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha\theta}^\theta + T^{\theta\alpha}\Gamma_{\alpha\theta}^\nu \\
&= 0 + T^{00}\Gamma_{0\theta}^\theta + T^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\theta}^0 \\
&= \rho \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{p}{a_2^2} a_2 \dot{a}_2 \\
&= \rho\gamma \frac{\dot{a}_2}{a_2}
\end{aligned}$$

(d)



$$\begin{aligned}
\nabla_\phi T^{\phi\nu} &= T_{,\phi}^{\phi\phi} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha\phi}^\phi + T^{\alpha\alpha}\Gamma_{\alpha\phi}^\nu \\
&= 0 + T^{00}\Gamma_{0\phi}^\phi + T^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\phi}^\phi + T^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\phi}^\theta + T^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\phi}^0 \\
&= \rho \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{p}{a_2^2} \frac{f_{,\theta}}{f} + \frac{p - f f_{,\theta}}{a_2^2 f^2} + \frac{p}{a_2^2} \frac{f^2 a_2 \dot{a}_2}{f} \\
&= \rho \frac{\dot{a}_2}{a_2} + p \frac{\dot{a}_2}{a_2} \\
&= \rho\gamma \frac{\dot{a}_2}{a_2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \nabla_0 T^{0\nu} + \nabla_r T^{r\nu} + \nabla_\theta T^{\theta\nu} + \nabla_\phi T^{\phi\nu} \\
&= (a) + (b) + (c) + (d) \\
&= \dot{\rho} + \rho\gamma \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \rho\gamma \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \rho\gamma \frac{\dot{a}_2}{a_2} \\
&= 0
\end{aligned}$$



⇒

$$\dot{\rho} + \rho\gamma\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + 2\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) = 0 \quad (5.15)$$

這裡想流體的能量密度的隨著時間演化的公式為: ( $V = a_1 a_2^2$ )

$$\rho = \rho_0 V^{-\gamma}, \quad \rho_0 = \text{constant} > 0$$



3. 我們可以改寫 Eq5.12 , Eq5.13 , Eq5.14 , :

$$\frac{d}{dt}(VH_a) = \Lambda V + \frac{1}{2}k_4^2\rho_0V^{1-\gamma}(2-\gamma) \quad (5.16)$$


$$\frac{d}{dt}(VH_b) = \Lambda V + \frac{1}{2}k_4^2\rho_0V^{1-\gamma}(2-\gamma) - ka_1 \quad (5.17)$$

$$3\dot{H} + H_a^2 + 2H_b^2 = \Lambda V + \frac{1}{2}k_4^2\rho_0V^{-\gamma}(2-3\gamma) \quad (5.18)$$

這裡參數定義:

$$H_a = \frac{\dot{a}_1}{a_1}, H_b = \frac{\dot{a}_2}{a_2}, V = \frac{1}{3}(H_a + 2H_b) = \frac{\dot{V}}{3V}$$

根據前兩個方程式 Eq5.16 , Eq5.17 , 這 V 的方程式可以寫成:



$$\ddot{V} = 3\Lambda V + \frac{3}{2}k_4^2\rho_0V^{1-\gamma}(2-\gamma) - 2ka_1 \quad (5.19)$$

and

$$\begin{aligned} H_a &= H + \frac{2}{3V}K \\ H_b &= H - \frac{1}{3V}K \\ K &= \int ka_1 dt \end{aligned}$$

這方程式經過部分積分後:

$$\dot{V}^2 = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma} - 4k \int a_1 dV \quad (5.20)$$

# Bibliography

- [1] L. Randall and R. Sundrum Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3370
- [2] L. Randall and R. Sundrum Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 4690
- [3] C.-M Chen, W.F.Kao hep-th/0201188
- [4] A.N. Makaranko, V.V.Obukhov, K.E. Osetrin gr-qc/0301124
- [5] T. Shiromizu, K. Macda and M. Sasaki Phys. Rev. D. 62 024012
- [6] G.F.R Elliis and M.A.H. MacCallum Commun.math.Phys. 12,108 (1969)
- [7]  $\phi$ . Gr $\phi$ n J. Math. Phys.27(5),May 1986
- [8] Edmond Weber J. Math. Phys.25(11),November 1984
- [9] Gianluca Calcagni hep-ph/0310304 v2 19Nov2003
- [10] Dieter Lorenz H. Phys. A:Math.Gen.15(1982)2997-2999. Printed in Great Britain.
- [11] S. Byland and D Scialom Phys. Reveew D 57,10(1998)
- [12] Charles W. Misner,Kip S. Torne And John Archibald Wheeler,*Gravitation*, W.H Freeman and Company Publishers.
- [13] Edward W. Kolb And Michael S. Turner, *The Early Universe*,Addision-Wesley.(1990)
- [14] L. D. Landau And E. M. Lifshitz ,*The Classecal Theory Of Fields* , Pergamon Press Ltd.

- [15] Ryan and Shepley ,*Homogeneous Relativistic Cosmologies* ,Princeton University Press Published.(1975)
- [16] Bernard F. Schutz ,*A first course in general relativity* , Cambridge University Press Published.(1985)
- [17] Peter Coles And Francesco Lucchin ,*COSMOLOGY "The Origin and Evolution of Cosmic Structure"* ,Hohn Wiley and Sons LTD.
- [18] 許書豪,"關於 *Bianchi type I* , *Bianchi type III* 和 *Kantowski-Sachs* 的宇宙之研究", 交大物理所論文.
- [19] 吳俊輝,"宇宙的奧秘", 科學月刊 2004年2月,37期

